ДМ Анчев 02.06.14

Th (Майхил - Нероуд)
Нека L е регулярен език в Σ^*. Тогава $\exists$ краен детерминизиран автомат $M=(K,\Sigma,\delta,s,F)$ т.е. $L(M)=L$ и M има точно толкова състояния колкото са класовете на еквивалентност относно релацията $\approx_L$

Док

$K=\{[w]_L \mid w\in\Sigma^*\}$ - крайно множество

Σ - език, $s=[\varepsilon]$, $F=\{[w]_L \mid w\in L\}$

$\delta([w],a)=[wa]$, $w\in\Sigma^*$, $a\in\Sigma$

коректност на δ:

? $\delta([w],a)=\delta([w_1],a)$, ако $w_1\in[w]$ т.е. $w\approx_L w_1$

$[wa]=[w_1a]$? $\quad wa\approx_L w_1a$

Знаем ~~че~~ по деф

$w\approx_L w_1$ т.е. $\forall z\in\Sigma^*$, $wz\in L \Leftrightarrow w_1z\in L$

? за $\forall z'$, $waz'\in L \Leftrightarrow w_1az'\in L$

Лема

За всяко $x,y\in\Sigma^*$ е изпълнено

$([x],y)\vdash_M^* ([xy],\varepsilon)$

Док

с индукция относно дължината на y

1) $|y|=0 \Rightarrow y=\varepsilon$ т.е. $([x],\varepsilon)\vdash_M^* ([x],\varepsilon)$

2) Допускаме че твърдението е вярно ~~за~~ $\forall y$ $|y|=n$. Ще го докажем за $y: |y|=n+1$

Нека $y=y'a \Rightarrow |y'|=n$ за $a\in\Sigma$; $([x],y')\vdash_M^* ([xy'],\varepsilon)$ ИП

1

$([x], y'a) \vdash_M^* ([xy'], a) \vdash_M^* ([xy'a], \varepsilon) = ([xy], \varepsilon)$

$w \in L(M) \Leftrightarrow ([\varepsilon], w) \vdash_M^* (f, \varepsilon),\ f \in F \Leftrightarrow$
$([w], \varepsilon) = (f, \varepsilon)$ т.е. $w \in L$ т.е. $w \in L(M)$
$\Leftrightarrow w \in L \Rightarrow L = L(M)$

Следствие (Майхил - Нероуд)
Нека L е произволен език в Σ^*. Тогава L е регулярен $\Leftrightarrow$ индексът на релацията $\approx_L$ е краен $\Leftrightarrow$ множеството от класовете на еквивалентност е крайно множество

Док
$\Longrightarrow$ директно от Th (Майхил - Нероуд)
$\Leftarrow$ Разгл.
$L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ - нерегулярен
$[a^0], [a^1] ... [a^n]$? $a^i \not\approx a^j$ при гсл $i \neq j$

Нека $i \neq j$ (за определение $i < j$) $a^i \approx_L a^j \Leftrightarrow$
за $\forall z$: $(a^i z \in L \Leftrightarrow a^j z \in L)$
$z = a^{k-i} b^k \neq a^{k-j} b^k$ ↯
невъзможно е $a^i \approx_L a^j$ при $i \neq j$ $(i < j)$

Минимизация на краен детерминиран автомат

Деф Нека $M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$ е краен детерминиран автомат. $(q\,w) \in A_M \Leftrightarrow (q\,w) \vdash_M^* (f\,\varepsilon),\ f \in F$

$p \equiv q$ (p и q са еквивалентни относно M) $\Leftrightarrow$ за произволно $w \in \Sigma^*$, $(q\,w) \in A_M \Leftrightarrow (p\,w) \in A_M$
($\equiv$ релация на еквивалентност)

$p \equiv q$ и $q \equiv r \Leftrightarrow$ за $\forall \omega \in \Sigma^*$ ~~[illegible]~~

$(p\omega) \in A_M \Leftrightarrow (q\omega) \in A_M \Leftrightarrow (r\omega) \in A_M$

Ако $p \equiv q$ то $E_q, E_p \subseteq$ един и същи клас на еквивалентност относно $\simeq_L$

$p \equiv_n q \Leftrightarrow$ за $\forall z \in \Sigma^* : |z| \leq n$ е изпълнена еквивалентността $(p\,z) \in A_M \Leftrightarrow (q\,z) \in A_M$

Докато $\equiv_{n-1}$ и $\equiv_n$ съвпаднат.

$\equiv_0, \equiv_1 \ldots \equiv_{n-1}$ съвпада с $\equiv_n$ – релацията която търсим

Лема (за едната посока)

Нека $p, q \in K$ и $n \geq 1$. Тогава $p \equiv_n q \Leftrightarrow p \equiv_{n-1} q$ и за $\forall a \in \Sigma$ е изпълнено $\delta(p\,a) \equiv_{n-1} \delta(q\,a)$

Док.

С индукция относно $n \geq 1$. При $n = 1$ – очевидно

Ще го докажем за $n-1$

$\Rightarrow$ Нека $p \equiv_n q$ т.е. за $\forall$ дума $\omega : |\omega| \leq n$ $(p\omega) \in A_M \Leftrightarrow (q\omega) \in A_M$. Нека $\omega = a\omega'$ (Ако $\omega < n \Rightarrow p \equiv_{n-1} q$). Ако $|\omega| = n$ тогава $(pa\omega') \in A_M \Leftrightarrow (qa\omega') \in A_M \Leftrightarrow (\delta(pa), \omega') \in A_M \Leftrightarrow (\delta(qa), \omega') \in A_M$

$$\Rightarrow \delta(pa) \equiv_{n-1} \delta(qa)$$

$p \equiv q \Leftrightarrow p \equiv_n q$ за $\forall n$ от известно място

нататъка $\exists\, \omega \in \Sigma^* : E_q E_p \subseteq [\omega]$, $pq \Rightarrow [\omega]$