ЕМ 28.05.14

Решаване на нелинейни уравнения
Метод на свиващите изображения за решаване на нелинейни уравнения

Да се намерят числено корените (нулите) на

$$f(x) = x^3 - 9x + 2 = 0$$

$$(a_0, a_1, a_2, a_3) = (1, 0, -9, 2)$$

$S_f^-(1, 0, -9, 2) = 2$ смени на знаците.
$\Rightarrow$ По Тh на Декарт $\Rightarrow$ $f(x) = 0$ или 2 или няма положителни корени

$$g(x) = -f(-x) = -(-x^3 + 9x + 2) = x^3 - 9x - 2$$

$S_g^- = (1, 0, -9, -2) \Rightarrow 1$ смяна смяна на знаците. $\Rightarrow$ 1 положителен корен $\Rightarrow f$ има 1 отрицателен корен (от $-f(-x)$)

$$L = 1 + \sqrt[k]{\frac{A}{a_0}} \qquad A = \max_{a_i < 0} (a_i)$$

Горна граница на положителните корени
k-индекса на първия отрицателен коефициент в S_f^- $\Rightarrow$

$$L = 1 + \sqrt[2]{\frac{9}{1}} = 4 \; ; \; g_1(x) = x^3 f\left(\frac{1}{x}\right) = x^3\left(\frac{1}{x^3} - \frac{9}{x} + 2\right) =$$

$$1 - 9x^2 + 2x^3 \Rightarrow S_{g_1}(2, -9, 0, 1)$$

$$L_1 = 1 + \sqrt[1]{\frac{9}{2}} = 11/2$$

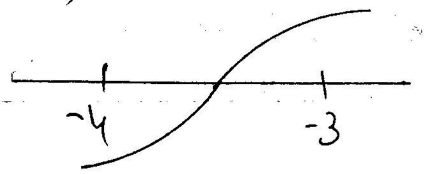
①

$\frac{1}{L_1}$ - долна граница на (+) корени на

$f(x) - \frac{2}{11}$

Положителни корени на $f(x)$ са $(2/11, 4)$

$f(-1) = -1 + 9 + 2 > 0$
$f(-2) = -8 + 18 + 2 > 0$
$f(-3) = 2 > 0$, $f(-4) = -64 + 36 + 2 < 0$



$\Rightarrow \alpha \in [-4, -3]$

α - отрицателен корен на $f(x) = 0$

$\left.\begin{array}{l} f(0) = 2 \\ f(1) = 1 - 9 + 2 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \beta \in [0, 1]$ или по-точно $\beta \in \left(\frac{2}{11}, 1\right)$

$\left.\begin{array}{l} f(2) = 8 - 18 + 2 < 0 \\ f(3) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \gamma \in [2, 3]$

$x_{n+1} = \varphi(x_n)$ $\quad x \in [a, b]$ - свиващо изображение

$\varphi([a, b]) \subset [a, b]$

$|\varphi'(x)| \leq q < 1$, $\forall x \in [a, b]$

Тк за свиващите изображения $\Rightarrow \forall x_0 \in [a, b] \Rightarrow$

$|x_{n+1} - x_n| \leq q^n (b - a)$ при достигане на толеранса сме намерили корена

а) Търсим числено $\alpha \in [-4, -3]$

$x^3 - 9x = -2 \Rightarrow x(x-3)\underbrace{(x+3)} = -2$

$$x+3=-\frac{2}{x(x-3)} \Rightarrow \underbrace{-3-\frac{2}{x(x-3)}}_{\varphi(x)}=x$$

$\varphi(x)=-3-\frac{2}{x(x-3)}$, $\varphi(-4)=-3-\frac{2}{(-4)(-7)}=-3\frac{1}{14}\in[-4,-3]$

$\varphi(-3)=-3-\frac{2}{18}=-3\frac{1}{9}\in[-4,-3] \Rightarrow$

$$\varphi([-4,-3])\subseteq\left[-3\tfrac{1}{9},\ -3\tfrac{1}{14}\right]$$

$$\varphi'(x)=\left(-3-2[x^2-3x]^{-1}\right)'=\frac{(-2)(-1)\overbrace{(2x-3)}^{<0}}{(x^2-3x)^2}<0 \text{ за } x\in[-4,-3]$$

$$|\varphi'(x)|\le\frac{2\,|(2.(-4)-3)|}{18^2}=\frac{11}{162}<\frac{1}{2}<1 \Rightarrow$$

$\varphi(x)$ дефинира свиваще изображение $\Rightarrow$

$x_{n+1}=-3-\frac{2}{x_n(x_n-3)}$, $n=1,2\dots$, $x_0\in[-4,-3]$

дефинира сходящ итерационен процес

$x_{n+1}=-3-\frac{2}{x_n(x_n-3)}$ $\quad \alpha\in[-4,-3]$

$|\varphi'(x)|\le\frac{11}{162}=q$

Wolfram $\rightarrow$

```
Eps = 10^(-15) , x = -3 , n = 0
While [(11/162)^n ≥ Eps , x = -3-2/(x*(x-3)); n++]
```

(3)

б) Търсим $\beta \in [\frac{2}{11}, 1]$

$x^3 - 9x + 2 = 0$, $x^3 - 9x = -2 \Rightarrow x = \frac{-2}{(x+3)(x-3)} = -\frac{2}{x^2-9}$

$\varphi(x) = -\frac{2}{x^2-9}$, $\varphi(1) = \frac{1}{4} \in [0,1]$

$\varphi(\frac{2}{11}) = -\frac{2}{\frac{4}{121} - 9} = \frac{242}{1085} \in (\frac{2}{11}, 1) \Rightarrow$

$\varphi([\frac{2}{11}, 1]) \leq [\frac{2}{11}, 1]$

$\varphi'(x) = [-2(x^2-9)^{-1}]' = \frac{4x}{(x^2-9)^2} > 0$

монотонно растяща

$|\varphi'(x)| \leq \frac{4.1}{[1-9]^2} = \frac{1}{16} < 1 \Rightarrow q = \frac{1}{16}$

Wolfrom

```
Eps = 10^(-16); x = 1/4; n = 0;
While [(1/16)^n ≥ Eps, x = -2/(x^2 - 9); n++];
{n, N[x^n, 16]}
```

в) Търсим числено $\gamma \in [2,3]$

$x^3 - 9x + 2 = 0 \Rightarrow x = 3 - \frac{2}{x^2+3x}$

$\varphi(x) = 3 - \frac{2}{x^2+3x}$, $\varphi(2) = 3 - \frac{2}{4+6} = 2{,}8 \in [2,3]$

$\varphi(3) = 3 - \frac{2}{9+9} = 2\frac{8}{9} \in [2,3]$

(x)

$$\varphi'(x) = \left[3 - 2(x^2+3x)^{-1}\right]' = \frac{2(2x+3)}{(x^2+3x)^2} > 0 \Rightarrow$$

$\varphi(x)$ е монотонно растяща $\Rightarrow$

$$\varphi'(x) \le \varphi(x)'(3) = \frac{2(6+3)}{18^2} = \frac{1}{18} < 1 \Rightarrow q = \frac{1}{18}$$

$$x_{n+1} = 3 - \frac{2}{x_n^2+3x_n} \qquad n = 1, 2, \dots, \quad x_0 = 3$$