СИ 26.03.14

Да се намери чрез интерполация $\sum_{k=0}^{n} k^3$

Реш.

$$S(n) = \sum_{k=0}^{n} k^3 = 0^3 + 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$$

$x_i = i$, $i = 0 - n$, затем вземи S_i и намери крайните разлики на $S(n)$ и ШН

x_i	$\Delta^0 S_i$	$\Delta^1 S_i$	$\Delta^2 S_i$	$\Delta^3 S_i$	$\Delta^4 S_i$	$\Delta^5 S_i$
0	0	1	7	12	6	0
1	1	8	19	18	6	
2	9	27	37	24		
3	36	64	61			
4	100	125				
5	225					
⋮						
n						

$\Delta^0 S_0 = S_0$

$$S(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^k S_0 \text{ — заместваме}$$

$$0 \cdot \binom{n}{0} + 1\binom{n}{1} + 7\binom{n}{2} + 12\binom{n}{3} + 6\binom{n}{4}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^k S_0 \Rightarrow 1\frac{n}{1} + 7\frac{n(n-1)}{2!} + 12\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + 6\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$$

Зад. $f(x) - L_n(f(x)) \le \max \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} |\omega(x)|$

$f(x) = \cos\frac{\pi x}{2}$ $\qquad f'(x) = -\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi x}{2}$

$f''(x) = -\frac{\pi^2}{4}\cos\frac{\pi x}{2}$ $\qquad f'''(x) = \frac{\pi^3}{8}\sin\frac{\pi x}{2}$

$f^{IV}(x) = \frac{\pi^4}{16}\cos\frac{\pi x}{2}$ $\qquad f^{V}(x) = -\frac{\pi^5}{32}\cos\frac{\pi x}{2}$

1

$$|f^{(6)}(x)| = \left|-\frac{\pi^6}{32}\sin\frac{\pi x}{2}\right| \le \frac{\pi^6}{32}$$

$$w(x) = \underbrace{(x-x_0)}_{\le 4}\underbrace{(x-x_1)}_{\le 4}\dots\underbrace{(x-x_6)}_{\le 4}$$

$|w(x)| \le 4^6$ в интервала $-1 \dots 1 \Rightarrow$

$$w(x) = (x-2)(x-1)x(x+1)(x+2) = (x^2-4)(x^2-1)x$$

Зад 4 $\quad f(x) = \cos\frac{\pi x}{2} \qquad x_i \in \{-2,-1,0,1,2\}$

x_i	f_i			
-2	-1			
-1	0	1		
0	1	1	0	
1	0	-1	-2	-2
2	-1	-1	0	2

Last column: 0

$f(x_i) = \Delta^0 f_i \qquad \cos -\frac{\pi 2}{2} = -1$

$$L_n(f, x_0 + th) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k}}_{\in \mathbb{Z}} \underbrace{\Delta^k f_0}_{\in \mathbb{Z}} \Rightarrow \in \mathbb{Z}$$

x_i	Δf_i
i	A_1
$i+1$	A_2
$\vdots$	
$i+n$	A_{n+1}

$A_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 1 \dots n$ – по усл.

Зад 13 $\quad$ 1 ст. $\quad |f(x) - L_n(f,x)| \le \max\limits_{x\in[a,b]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} |w(x)|$

$$f(x) = e^x \Rightarrow f^{(i)}(x) = e^x, \quad i = 1 \dots n+1$$

2

$$\max_{x\in[a,b]} |e^x| = e^b$$

$$\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

$$|\omega(x)| \le (b-a)^{n+1} \Rightarrow |e^x - L_n(e^x, x)| \le \frac{e^b}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

В степенен ред

$$e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Чебишови системи

$\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{n}$ – непрекъснати и ЛНЗ в I.

Казваме че тези системи образуват система Чебишов в интервала I, ако всеки техен (обобщен) полином на тези функции има не повече от n различни нули в I.

(1) Нека $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n$ са различни $\mathbb{R}$ числа. ДСД $\{e^{\alpha_0 x}, e^{\alpha_1 x}, \dots, e^{\alpha_n x}\}$ образуват система на Чебишов в $\mathbb{R}$ $(x \in (-\infty, +\infty))$

Док

Допускаме че $\{e^{\alpha_k x}\}_{k=0}^{n}$ не е ЧС. $\Rightarrow$
$\exists$ $\varphi(x) =$ [illegible]

(б) Нека $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{n}$ е ЧС и $h(t)$ е строго монотонна в интервала I. Тогава $\{h(\varphi_k(x))\}_{k=0}^{n}$ образуват ЧС

Зад. Нека $f(x) \in C^n[a,b]$ и $f^{(n)}(x) \neq 0$ за $\forall x \in [a,b]$. ДСД че ф-ите $\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}, f(x)\}$ образуват ЧС (в $[a,b]$)

Док

Допускаме противното т.е. $\exists\ \varphi(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n f(x)$ който има поне $(n+1)$ различни нули в $[a,b]$

$a_n \neq 0$ защото в противен случай $\varphi(x)$ има

не повече от $(n-1)$ нули в $[a,b]$
от Тh на Рол $\Rightarrow f(x)$ има поне n различни нули в $[a,b] \Rightarrow f^{(n)}(x)$ има поне 1 нула в $[a,b]$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \dots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + a_n f'(x)$$

$f^{(n)}(x) = a_n f^{(n)}(x) \neq 0 \Rightarrow ↯$ - грешно допускане $\Rightarrow$
$\{1, x, x^2 \dots f(x)\}$ образуват ЧС

Д-Я че $\{x^\alpha, x^\beta, x^\gamma\}$ образуват ЧС в $(0,+\infty)$, $\alpha<\beta<\gamma$

Док

Нк $\varphi(x) = a_0 x^\alpha + a_1 x^\beta + a_2 x^\gamma = \underset{\neq 0}{x^\alpha}\underbrace{(a_0 + a_1 x^{\beta-\alpha} + a_2 x^{\gamma-\alpha})}_{\psi(x)}$

Допускане че не образуват ЧС в $(0,+\infty) \Rightarrow$
$\exists\, \varphi(x)$ т.е. има поне 3 нули в $(0,+\infty) \Rightarrow$
Нулите на $\varphi(x)$ ~~образува~~ съвпадат с нулите на $\psi(x) \Rightarrow \psi(x)$ има поне 3 нули $\Rightarrow \psi'(x)$ има поне 2 нули т.е.

$$\psi'(x) = a_1(\beta-\alpha)x^{\beta-\alpha-1} + a_2(\gamma-\alpha)x^{\gamma-\alpha-1} = x^{\beta-\alpha-1}\left(a_1(\beta-\alpha) + a_2(\gamma-\alpha)x^{\gamma-\alpha-1-(\beta-\alpha-1)}\right) =$$

$$\underbrace{x^{\beta-\alpha-1}}_{\neq 0}\left(a_1(\beta-\alpha) + a_2(\gamma-\alpha)x^{\gamma-\beta}\right)$$ нека

$a_1(\beta-\alpha) + a_2(\gamma-\alpha)x^{\gamma-\beta} = \psi_1(x) \Rightarrow$ Нулите на $\psi'(x)$ съвпадат с нулите на $\psi_1(x) \Rightarrow$
$\psi_1(x)$ има поне 2 нули $\Rightarrow ↯$

Интерполиране със сплайни от 1-ва степен
начупена линия

$x_+^n = \begin{cases} x^n, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ - отсечена линия

Вместо отсечени ф-ции ще разгл $|x - x_k|$
$k = 0 \dots n$, x_k - възлите

$S_1(x_1 \dots x_{n-1})$ е с размерност $n+1$?

① Нека $0 = x_0 < x_1 \dots < x_n = 1$
Д СВ че $\{|x - x_k|\}_{k=0}^{n}$ са ЛНЗ в $[0,1]$
Док
Допускаме че $\exists f(x) = c_0|x - x_0| + \dots + c_n|x - x_n| \equiv 0$
в $[0,1]$