ЧМ 14.05.14

Числено диференциране и интегриране

(1) Нека $x_0 = a$, $x_1 = a+h$, $x_2 = a+2h$

Да се намери формула за числено диференциране от вида

$$f'(a) = \alpha f(a) + \beta f(a+h) + \gamma f(a+2h)$$ т.ч.

да е точна за полиноми от възможно най-висока степен

Реш

$$f(x) \approx L_2(f;x) = f[a] + f[a,a+h](x-a) + f[a,a+h,a+2h](x-a)(x-a-h) \Rightarrow$$

$$f'(x) \approx f[a,a+h] + f[a,a+h,a+2h](x-a-h+x-a)$$

$$= \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \frac{f[a+h,a+2h]-f[a,a+h]}{2h}(2x-2a-h)$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \frac{\frac{f(a+2h)-f(a+h)-f(a+h)-f(a)}{h}}{2h}\cdot$$

$$\cdot(2x-2a-h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \frac{f(a+2h)-f(a+h)+f(a)}{2h^2}$$

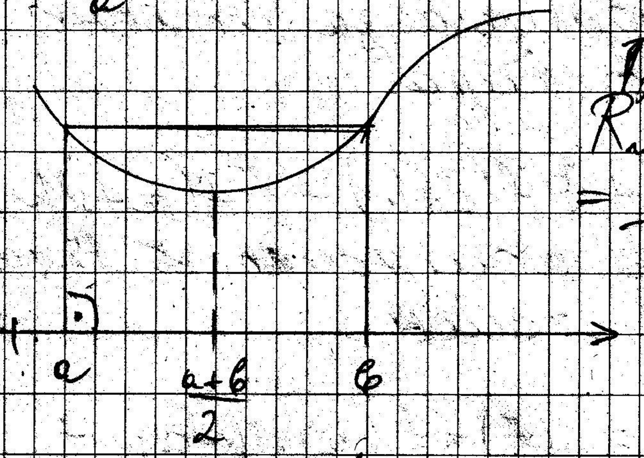
$$\cdot(2x-2a-h) \Rightarrow f'(a) \approx L_2'(f;a) \Rightarrow$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - \frac{1}{2h}\left(f(a+2h)-2f(a+h)+f(a)\right) =$$

$$-\underset{\alpha}{\underset{\shortparallel}{\frac{3}{2h}}}f(a) + \underset{\beta}{\underset{\shortparallel}{\frac{2}{h}}}f(a+h) - \underset{\gamma}{\underset{\shortparallel}{\frac{1}{2h}}}f(a+2h)$$

$\Rightarrow \alpha = -\frac{3}{2h}, \quad \beta = \frac{2}{h}, \quad \gamma = -\frac{1}{2h}$

Зад 1) $I = \int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right)$



Грешката $R_{\text{правоъгълници}} = I - (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi), \ \xi \in (a,b)$

Квадратурна формула на правоъгълниците

2) $\int_a^b f(x)\,dx \approx (f(a)+f(b))\frac{b-a}{2}$

Грешката $R_{\text{трапеците}} = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi), \ \xi \in (a,b)$

Квадратурна формула на трапеците

3) Квадратурна формула на Симпсън

$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$

$R_{\text{Симпсън}} = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{IV}(\xi), \ \xi \in (a,b)$

Съставни квадратурни формули

Разделяме интервала $[a,b]$ на n равни части

Грешка

Съст $R_{пр} = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\xi)$

Съст $R_{тр} = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi)$

Съст $R_C = -\frac{(b-a)^3}{2880n^4} f^{IV}(\xi)$

Зад. Да се определи броя n на подинтервалите на съставната квадратурна формула на правоъгълниците, трапеците и Симпсон т.ч. R да не надминава 10^{-5}, $|R| \le 10^{-5}$, за

а) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ (пр, тр, С) б) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ (тр)

Реш.

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$f'''(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}, \quad f^{IV}(x) = \frac{24}{(1+x)^5}$$

$$|R_{пр}| \le \frac{(b-a)^3}{24n^2} \max_{x\in[0,1]} |f''(x)|$$

$$\max_{x\in[0,1]} |f''(x)| \le 2; \quad \max_{x\in[0,1]} f^{IV}(x) \le 24$$

$$|R_{тр}| \leq \frac{1}{12n^2} \leq 10^{-5} \Rightarrow 12n^2 \geq 10^5 \text{ т.е.}$$

$$n \geq \sqrt{\frac{10^5}{12}} \approx 92 \quad (91,287)$$

$$R_{тр} = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi)$$

$$|R_{тр}| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x\in[0,1]} |f''(x)| =$$

$$\frac{1}{12n^2} 2 = \frac{1}{6n^2} \leq 10^{-5} \Rightarrow 6n^2 \geq 10^5 \text{ т.е.}$$

$$n \geq \sqrt{\frac{10^5}{6}} \approx 130 \quad (129,099)$$

$$R_c = -\frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{IV}(\xi)$$

$$|R_c| \leq \frac{1}{2880n^4} 24 \leq \frac{1}{10^5} \Rightarrow n \geq \sqrt[4]{\frac{10^5}{120}} =$$

$$= \frac{10}{\sqrt[4]{12}} \approx 6 \quad (5,376)$$

б) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x^2)^2}\,2x = -2\,\frac{x}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) = -2\,\frac{(1+x^2)^2 - x\,2(1+x^2)\,2x}{(1+x^2)^4} = -2\,\frac{1+x^2-4x^2}{(1+x^2)^3}$$

$$= 2\,\frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3}$$

$$\max_{x\in[0,1]} f''(x) = \frac{2\cdot 2}{1} = 4$$ (числител $x=1$) (знаменател $x=0$)

груба оценка

$$|R_{тр}| \leq \frac{4}{12n^2} \leq \frac{1}{10^5} \Rightarrow 3n^2 \geq 10^5 \Rightarrow$$

$$n \geq \sqrt{\frac{10^5}{3}} \approx 183 \quad (182{,}574)$$

Квадратурна формула на Гаус

③ Да се намери квадратурна формула на Гаус с 2 възела в $[-1,1]$, $\mu(x) = 1-x^2$

Реш.

$$\int_{-1}^{1} \mu(x) f(x)\,dx \approx A f(x_1) + B f(x_2)$$

x_1, x_2 – корени на полином от 2-ра степен със старши коефициент 1-ца, който е ортогонален на полиномите от Π_0 и Π_1

$p(x) = x^2 + ax + b$ с $\mu(x)$

$$\left| \begin{array}{ll} \int_{-1}^{1} p(x)\mu(x)\, 1\, dx = 0 & (\text{за } \Pi_0) \\ \int_{-1}^{1} p(x)\, x\, \mu(x)\, dx = 0 & (\text{за } \Pi_1) \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} \int_{-1}^{1} (x^2+ax+b)(1-x^2)\, dx = 0 \\ \int_{-1}^{1} (x^2+ax+b)x(1-x^2)\, dx = 0 \end{array} \right.$$

четен $\int_{-1}^{1} x^2 + \cancel{ax} + b - x^4 - \cancel{ax^3} - bx^2\, dx = 0$

четен $\int_{-1}^{1} \cancel{x^3} + ax^2 + \cancel{bx} - \cancel{x^5} - ax^4 - \cancel{bx^3}\, dx = 0$

$$\begin{cases} 2\left(\frac{x^3}{3}+bx-\frac{x^5}{5}-\frac{bx^3}{3}\right)\Big|_0^1=0 \\ 2\left(\frac{ax^3}{3}-\frac{ax^5}{5}\right)\Big|_0^1=0 \end{cases}$$

$$\frac{a}{3}-\frac{a}{5}=0 \Rightarrow a=0$$

$$\frac{1}{3}+b-\frac{1}{5}-\frac{b}{3}=0 \Rightarrow \frac{5+15b-3-5b}{15}=0$$

$$10\cdot b=-2 \Rightarrow b=-\frac{1}{5}$$

$$P(x)=x^2-\frac{1}{5}=0 \quad , \quad x_1,x_2=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\int_{-1}^{1}\mu(x)f(x)dx \approx Af\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)+Bf\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

точна за Π_0 и Π_1 т.е. за $f(x)=1$ и $f(x)=x$

$$\begin{cases} \int_{-1}^{1}(1-x^2)1\,dx=A+B \\ \int_{-1}^{1}(1-x^2)x\,dx=\frac{\sqrt{5}}{5}(-A+B) \end{cases}$$

Нечетен $\quad \displaystyle\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,x\,dx = \frac{\sqrt{5}}{5}(-A+B)=0 \Rightarrow A=B$

четен $\quad \displaystyle\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx = 2\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = A+B = 2A \Rightarrow$

$$\frac{4}{3}=2A \Rightarrow A=B=\frac{2}{3}$$

$$\int_{-1}^{1}\mu(x)f(x)\,dx \approx \frac{2}{3}\left(f\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)+f\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\right)$$

квадратурна формула на Гаус