СМ упр 11.04.14

$S_1(x_1 \dots x_n)$ – мн-во от сплайн ф-ии от 1-ва степен с възли $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$

$T_1(f,x) \in S_1(x_1 - x_{n-1})$, $T_1(f,x_i) = f(x_i)$ за $i = 0 \div n$

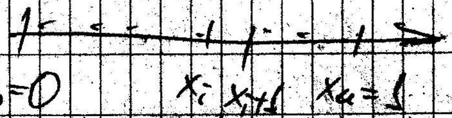
$\{|x - x_k|\}_{k=0}^{n}$ са ЛНЗ и броят им е равен на dim $S_1(x_1 \dots x_{n-1}) \Rightarrow \{|x - x_k|\}_{k=0}^{n}$ – базис в $S_1(x_1 \dots x_{n-1})$

Зад. Нам. $T_1(f,x) \in S_1(x_1 - x_{n-1})$: $T_1(f,x_i) = f(x_i)$ за $i = 0 \dots n$. Търсят се коефициентите $\{c_k\}_{k=0}^{n}$ в представянето $T_1(f,x) = \sum_{k=0}^{n} c_k |x - x_k|$

Реш.

$$T_1(f,x_i) = f(x_i)$$

$$T_1(f,x_i) = \sum_{k=0}^{n} c_k |x_i - x_k|$$



$|x_i - x_k| = x_i - x_k$, $k = 0 \div i-1$

$|x_i - x_k| = x_k - x_i$ за $k = i+1 \div n \Rightarrow$

$$\sum_{k=0}^{i-1} c_k (x_i - x_k) - \sum_{k=i+1}^{n} c_k (x_i - x_k) = f(x_i)$$

$$T_1(f, x_{i+1}) = \sum_{k=0}^{i} c_k (x_i - x_k) - \sum_{k=i+1}^{n} c_k (x_{i+1} - x_k) = f(x_{i+1})$$

$$T_1(f, x_{i+1}) - T_1(f(x_i)) = f(x_{i+1}) - f(x_i)$$

$$\sum_{k=0}^{i-1} c_k (x_{i+1} - \cancel{x_k} - x_i + \cancel{x_k}) + c_i (x_{i+1} - x_i) + c_{i+1}(x_i - x_{i+1}) - \sum_{k=i+2}^{n} c_k (x_{i+1} - \cancel{x_k} - x_i + \cancel{x_k}) =$$

$$f(x_{i+1}) - f(x_i)$$

$$(x_{i+1}-x_i)\sum_{k=0}^{i}{}' c_k - (x_{i+1}-x_i)\sum_{k=i+1}^{n}{}' c_k = f(x_{i+1}) - f(x_i) \Big/ (x_{i+1}-x_i) \Rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{i}{}' c_k - \sum_{k=i+1}^{n}{}' c_k = \frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i} = f[x_i, x_{i+1}],\ i = 0 \div n-1$$

т.е. $\sum_{k=0}^{i}{}' c_k - \sum_{k=i+1}^{n}{}' c_k = f[x_i, x_{i+1}] \Rightarrow$

$$\sum_{k=0}^{i+1}{}' c_k - \sum_{k=i+2}^{n}{}' c_k = f[x_{i+1}, x_{i+2}]$$

$2c_{i+1} = f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]$ т.е.

$$c_{i+1} = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{2} \quad \text{за } i = 0 \div n-2,\ c_1 \div c_{n-1}$$

Сега търсим c_0 и c_n

$$\Pi_1(f, x_0) = f(x_0) = f(0)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Pi_1(f, 0) = \sum_{k=0}^{n}{}' c_k (x_k - 0) = f(0) \\ \Pi_1(f, x_n) = \sum_{k=0}^{n}{}' c_k (1 - x_k) = f(1) \end{array}\right\} + \Rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{n}{}' c_k (\cancel{x_k} + 1 - \cancel{x_k}) = f(0) + f(1) \Rightarrow \sum_{k=0}^{n}{}' c_k = f(0) + f(1)$$

$$\left.\begin{array}{l} c_0 - \sum_{k=1}^{n}{}' c_k = f[x_0, x_1] \\ \sum_{k=0}^{n}{}' c_k = f(0) + f(1) \end{array}\right\} \Rightarrow 2c_0 = f[x_0, x_1] + f(0) + f(1)$$

т.е. $c_0 = \dfrac{f[x_0, x_1] + f(0) + f(1)}{2}$

$$\left|\begin{array}{l} \sum_{k=0}^{n}{}' c_k = f(0) + f(1) \\ \sum_{k=0}^{n-1}{}' c_k - c_n = f[x_{n-1}, x_n] \end{array}\right\} - \Rightarrow$$

$$2c_n = f(0) + f(1) + f[x_{n-1}, x_n]$$

т. е.

$$c_n = \frac{f(0) + f(1) + f[x_{n-1}, x_n]}{2}$$

Зад

(WM) Да се построи $I_1(f,x)$ за $f(x) = \sqrt{x}$

а) $x_k = \frac{k}{n}$ $k = 0 \div n$

б) $x_k = \left(\frac{k}{n}\right)^4$ $k = 0 \div n$, $n = 10$

Реш

```
n = 10;
Do[x[k] = k/n, {k, 0, n}];
f[t_] := Sqrt[t];
c[0] = (f[x[0]] + f[x[n]] + (f[x[1]] - f[x[0]])/(x[1] - x[0]))/2;
c[n] = (f[x[0]] + f[x[n]] - (f[x[n]] - f[x[n-1]])/(x[n] - x[n-1]))/2;

Do[c[i] = ((f[x[i+1]] - f[x[i]])/(x[i+1] - x[i]) -
    - (f[x[i]] - f[x[i-1]])/(x[i] - x[i-1]))/2,
    {i, 1, n-1}];
I1[t_] = Sum[c[k] * Abs[t - x[k]], {k, 0, n}];
  Plot[f[t] - I1[t], {t, 0, 1}]
```

③

ЧМ 11.04

Бисилайнова отсечена ф-я

$$x_+^r = \begin{cases} x^r, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$f[x_0 \dots x_k] = \begin{cases} \dfrac{f[x_1 \dots x_k] - f[x_0 \dots x_{k-1}]}{x_k - x_0}, & x_k \neq x_0 \\ \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, & x_k = x_0 \end{cases}$$

$\|$

Коефициента пред x_k в $L_n(f, x)$

$$f \in \pi_n \Rightarrow f = L_n(f, x)$$

$$f[x_0 \dots x_n] = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{1}{\omega'(x_k)}}_{c_k} f(x_k)$$

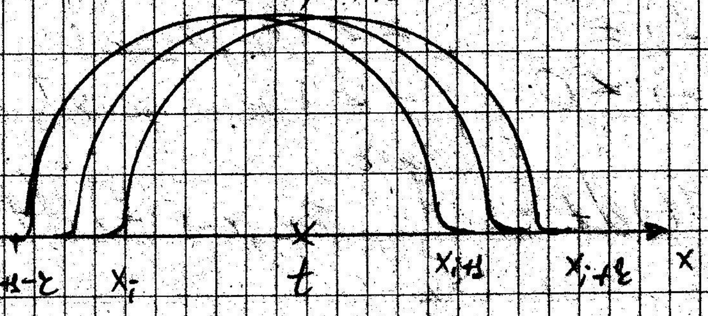
$x_{-k} < x_{-k+1} < \dots < x_k < \dots$ безкр. ред от точки (възли)

def $B_{i,r-1}(t) = (\cdot - t)_+^{r-1}[x_i \dots x_{i+r}]$

$B_{i,r-1}(t) \geq 0, \quad t \in [x_i, \dots, x_{i+r}]$
$B_{i,r-1}(t) = 0, \quad t \notin [x_i, \dots, x_{i+r}]$

Зад. Док. тъждеството $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (x_{k+r} - x_k) B_{k,r-1}(t) = 1$

Док. Нека $t \in [x_i, x_{i+1}]$



Само краен брой бисплайни са различни от 0 в сумата и това са бисплайните $B_{k,r-1}(t)$, $k \to i+1-r \div i$ $\Rightarrow$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (x_{k+r}-x_k) B_{k,r-1}(t) = \sum_{k=i+1-r}^{i} (x_{k+r}-x_k) B_{k,r-1}(t) =$$

$$\sum_{k=i+1-r}^{i} (x_{k+r}-x_k)(\cdot - t)_+^{r-1} [x_k, \dots, x_{k+r}] \Rightarrow$$

$$\sum_{k=i+1-r}^{i} \cancel{(x_{k+r}-x_k)} \frac{(\cdot - t)_+^{r-1} [x_{k+1}, \dots, x_{k+r}] - (\cdot - t)_+^{r-1} [x_k, \dots]}{\cancel{x_{k+r}-x_k}} =$$

$$= \sum_{k=i+1-r}^{i} \left(B_{k+1,r-1}(t) - B_{k,r-1}(t)\right) = \text{последното минус първото}$$

Остават първото и последното т.е.

$$\underbrace{-(\cdot - t)_+^{r-1} [x_{i+1}, \dots, x_{i+r}]}_{=0 \text{ т.к. } t \notin [x_{i+1}, \dots, x_{i+r}]} + \underbrace{(\cdot - t)_+^{r-1} [x_{i+1-r}, \dots, x_i]}_{(x-t)^{r-1}[x_1, \dots, x_r] = 1}$$

защото $f[x_0, \dots, x_n]$ = коеф пред x^n $\Rightarrow$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (x_{k+r}-x_k) B_{k,r-1}(t) = 1 \quad \square$$

Зад Да се докаже тъждеството $\int_{-\infty}^{+\infty} B_{k,r-1}(t)\,dt = \frac{1}{r}$

Док

$$\left.\begin{array}{ll} B_{k,r-1}(t) \ge 0, & t \in [x_k, x_{k+r}] \\ B_{k,r-1}(t) = 0, & t \notin [x_k, x_{k+r}] \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} B_{k,r-1}(t)\,dt = \int_{x_k}^{x_{k+r}} B_{k,r-1}(t)\,dt =$$

$$= \int_{x_k}^{x_{k+r}} (\cdot - t)_+^{r-1} [x_k \ldots x_{k+r}]\, dt =$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+r}} \sum_{i=k}^{k+r} c_i (x_i - t)_+^{r-1}\, dt = \sum_{i=k}^{k+r} c_i (x_i - t)_+^{r-1}\, dt =$$

$$= \sum_{i=k}^{k+r} c_i \int_{x_k}^{x_i} (x_i - t)^{r-1}\, dt = \sum_{i=k}^{k+r} c_i \left(-\frac{1}{r}(x_i - t)^r\right)\Big|_{x_k}^{x_i} =$$

$$= \frac{1}{r} \sum_{i=k}^{k+r} c_i (x_i - x_k)^r = \frac{1}{r} \underbrace{(t - x_k)^r [x_k \ldots x_{k+r}]}_{1} = \frac{1}{r}\ \square$$

ПНДРП

Полином на най-добро равномерно приближение

$x \in [a,b]$, $f \in C[a,b]$. Търси се $P(x) \in \Pi_n$ т.ч.
$\max_{x \in [a,b]} |P(x) - f(x)| \to \min$ (равномерна норма)
$P(x)$ – ПНДРП

$\|f - P\|_{C[a,b]}$ – равномерна норма

$E_n := \inf_{P \in \Pi_n} \|f - P\|$ – грешка

Th на Чебишов

НДУ за това $P(x) \in \Pi_n$ да е ПНДРП е да $\exists$ т. $n+2$ различни т. на алтернанс т.ч.
$f(x_i) - P(x_i) = \varepsilon (-1)^i \|f - P\|_{C[a,b]}$

$\varepsilon = \{1, -1\}$, $i = 0 \div n+1$, $(x_0 < x_1 \ldots < x_{n+1})$
НДУ – необх. и достатъчно условие

1 зад. Док. че ако $f(x)$ е четна (нечетна) то ПНДРП е също четен (нечетен) за $x \in [-a, a]$

Док. От единствеността на ПНДРП − $P(x)$

$f(-x) = f(x)$ за $\forall x [-a, a]$

$E_n(f) = \max\limits_{x\in[-a,a]} |f(x) - P(x)| = \max\limits_{x\in[-a,a]} |f(-x) - P(-x)| =$

$= \max\limits_{x\in[-a,a]} |f(x) - P(-x)| \Rightarrow P(-x)$ − също ПНДРП то той е $!$ $\Rightarrow P(x) = P(-x) \Rightarrow$

P − четна ф-я

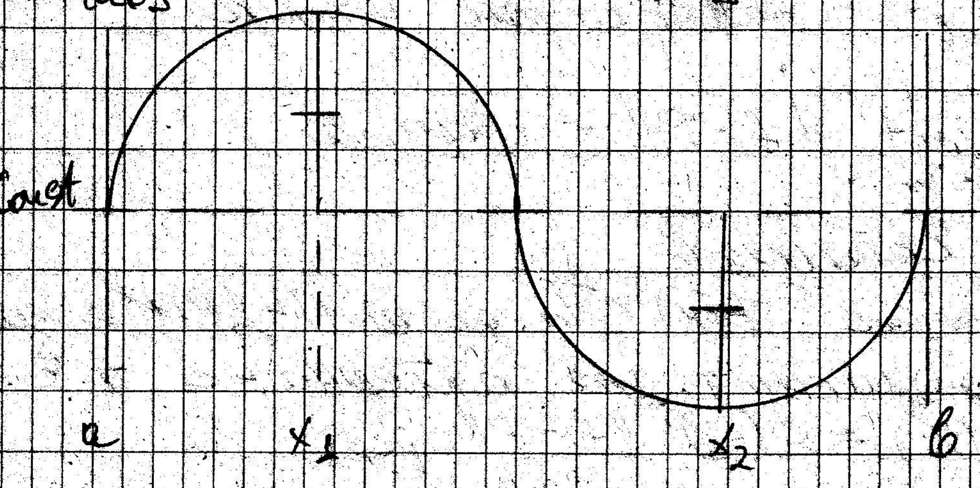
Зад 2. Да се намери

Нека $f(x) \in C[a, b]$? ПНДРП от нулева степен за $f(x)$, $x \in [a\ b]$

Реш.

$P(x) = const \in \Pi_0$: $\exists$ 2т. т.с

$\max\limits_{x\in[a b]} |f(x) - c| = -\min\limits_{x\in[a b]} (f(x) - c)$



$f \in C[a b] \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\exists x_1 : f(x_1) - f\ \max \\ \exists x_2 : f(x_2) = f\ \min\end{array}\right\} \Rightarrow c = \frac{1}{2}(f(x_1) + f(x_2)) \Rightarrow$

$P(x) = c = \frac{1}{2}(f(x_1) + f(x_2)) \in \Pi_0$ − ПНДРП

4

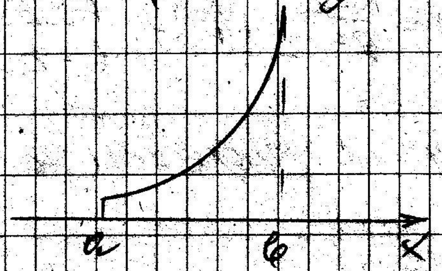
Зад. Нека $f(x) \in C^1[a,b]$ е изпъкнала (вдлъбната) за $\forall x \in [a,b]$. Да се намери ПНБРП $P(x) \in \Pi_1$ за $f(x)$, $x \in [a,b]$

$C^1[a,b]$ - има първа производна

изпъкнала (вдлъбната) - има втора производна

Реш.

Нека $f(x)$ - изпъкнала в $[a,b]$



$P(x) \in \Pi_1 \xRightarrow{\text{Th Чеб}}$ трябват ни 3 т. на алтернанс

Вземаме x_0, x_1, x_2

$x_0 < x_1 < x_2$

Поне $x_0 \in [a,b]$ - Да допуснем че $x_1 \in (a,b) \Rightarrow$

$P(x) = Ax + B$

$f(x_2) - P(x_2) = P(x_1) - f(x_1) = f(x_0) - P(x_0) = \|f - P\| \Rightarrow$

x_0 и x_1 - т-ки на локален екстремум за $f(x) - P(x)$

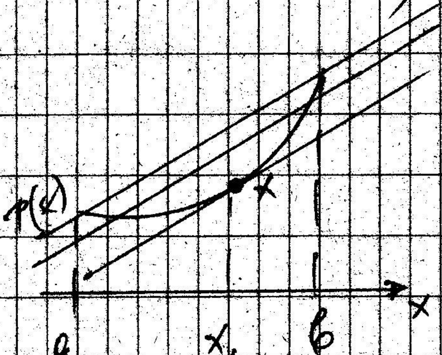
$\Rightarrow$

$f'(x_0) - P'(x_0) = P'(x_1) - f'(x_1) = 0 \Rightarrow f'(x_0) = A = f'(x_1)$ / от $f(x) = Ax + B$

$P'(x) = A$ но $x_0 \neq x_1$ и $f'(x)$ е строго монотонна

$\Rightarrow$ от $x_0 < x_1 \Rightarrow f'(x_0) \neq f'(x_1) \Rightarrow$ ↯

$\Rightarrow$ само 1 вътр. точка



$\Rightarrow x_0 = a,\ x_2 = b,\ x_1 \in (a,b)$

C_x за построяване на ПНБРП

1) $p(x) \in \Pi_1$ да минава през точките $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$

2) $\exists$ т. $x_1 \in (a,b)$: $f'(x_1) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

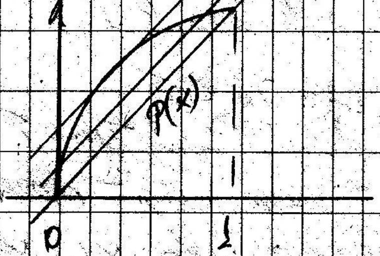
3) $P(x) = p(x) - \frac{1}{2}\left(p(x_1) - f(x_1)\right)$ — ПНДРП
$E_1 = \frac{1}{2}\left|f(x_1) - p(x_1)\right|$ — грешка

Зад. ПНДРП е $\Pi_1 = ?$ за $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$

Реш.

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} < 0$ за $\forall x \in [0,1]$

Граф



$p(x) = \frac{x-a}{b-a} f(b) + \frac{b-x}{b-a} f(a)$

Интерпол. полином на Лагранж

$\Rightarrow p(x) = x \cdot 1 + (1-x) \cdot 0 = x$

$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = 1$

$x_1 = ?$, $f'(x_1) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{4} \Rightarrow$

$P(x) = p(x) - \frac{1}{2}\left(p(x_1) - f(x_1)\right) = x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \underbrace{x + \frac{1}{8}}_{\text{ПНДРП}}$

$E_1 = \frac{1}{8}$ — грешка