ДИС 30.10.12

$R \times R / \sim$ - фактор множество

$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$

$$\left.\begin{array}{l} [(a,b)] + [(c,d)] = [(ad+bc, bd)] \\ [(a,b)][(c,d)] = [(ac, bd)] \\ 0 = [(0,d)] \quad d \in R \quad d \neq 0 \\ 1 = [(c;c)] \quad c \neq 0 \quad c \in R \end{array}\right\} \oplus$$

$[(a,b)]^{-1} = [(b,a)]$ за $a \neq 0$ обратен

$f : R \to R \times R / \sim$

$f(r) = [(r\varepsilon, \varepsilon)] \quad \varepsilon \neq 0$

$f(r_1 + r_2) = [((r_1+r_2)\varepsilon, \varepsilon)]$

означаване класа $[(a,b)] = \frac{a}{b}, \ b \neq 0$

$[(r_1\varepsilon + r_2\varepsilon, \varepsilon)] \Rightarrow f(r_1) + f(r_2) = [(r_1\varepsilon, \varepsilon)] + [(r_2\varepsilon, \varepsilon)] =$

$[(r_1\varepsilon^2 + r_2\varepsilon^2, \varepsilon^2)] = [((r_1+r_2)\varepsilon, \varepsilon)]$ //

$[(r_1\varepsilon, \varepsilon)] = [(r_2\varepsilon, \varepsilon)] \Rightarrow r_1\varepsilon^2 = r_2\varepsilon^2 \Rightarrow r_1 = r_2 \Rightarrow$

f е инекция.

$R = F_{[x]}$ F-поле

$R \times R / \sim$ поле от частни на цяла област R

Полето от частни е полето от рационални функции

Т За разлагане в елементарни дроби

Нека $p, q \in F_{[x]}$, F-поле, $(p,q) = 1$ (взаимно прости)

и $f \in F_{[x]}$, $\deg f < \deg p + \deg q$

Тогава съществуват $s, t \in F_{[x]}$, т.ч.

$f = sp + tq$ $\quad \deg s < \deg q$, $\deg t < \deg p$

Съгласно следствието от алгоритъм на Евклид (Теорема на Безу)

$$\exists\, u, v \in F[x] \text{ т.че } 1 = pu + qv \;/\cdot f \Rightarrow$$

$$f = pfu + fqv = \underset{s}{(fu)}p + \underset{t}{(fv)}q$$

Искаме степента на множителя пред p да е по-малка от q $\Rightarrow$

$$fu = qw + r \qquad \deg r < \deg q$$

$$f = (qw + r)p + fvq = rp + qwp + fvq =$$

$$rp + q(wp + vf)$$

полагаме $s = r$ и $t = wp + fv$ $\quad \deg t < \deg p$

$$f = sp + tq \Rightarrow \frac{f}{pq} = \frac{s}{q} + \frac{t}{p}$$

разлагането ще съдържа дроби от вида

$$\frac{g}{h^\delta} - g \in F[x] \qquad \deg g < \deg h$$

$$h \in F[x] \quad h - \text{неразложим над } F$$

разделяме g на $h^{\delta-1}$ и получаваме

$$g = h^{\delta-1}q_1 + r_1 \qquad \deg r_1 < \deg h^{\delta-1} \Rightarrow$$
$$(\delta-1)\deg h$$

$$r_1 = h^{\delta-2}q_2 + r_2 \qquad \deg r_2 < (\delta-2)\deg h$$

$$\delta \deg h > \deg q \Rightarrow \deg h^{\delta-1} + \deg q_1 =$$

$$(\delta-1)\deg h + \deg q_1$$

$$\delta \deg h > \delta \deg h - \deg h + \deg q_1 \Rightarrow$$

(намаляне)

$$\deg h > \deg q_1$$

$$\deg r_k = \deg h^{\delta-(k+1)} + \deg q_{k+1} =$$

$$(\delta-(k+1))\deg h + \deg q_{k+1}$$

$$\deg r_k < (\delta-k)\deg h$$

$$\frac{q}{h^\delta} = \frac{h^{\delta-1}q_1 + h^{\delta-2}q_2 + \dots + hq_{\delta-1} + r_{\delta-1}}{h^\delta} \geq$$

$$\frac{q_1}{h} + \frac{q_2}{h^2} + \dots + \frac{q_{\delta-1}}{h^{\delta-1}} + \frac{r_{\delta-1}}{h^\delta}$$

Зад

Разложете в сума от елементарни дроби следната рационална функция

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} \Rightarrow$$ НОД

$$\frac{A(1+x)+B(1-x)}{1-x^2} \Rightarrow A(1+x)+B(1-x)=1$$

$$x(A-B)+A+B=1$$

$$\left|\begin{array}{l} A-B=0 \\ A+B=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} A=B \\ 2A=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} A=1/2 \\ B=1/2 \end{array}\right.$$

само избягам скобите взимат отговора, т.е $A+B=1$
отговора се взема от числото над дробната черта (от условие)

$$\text{от } \frac{A}{1-x}+\frac{B}{1+x} \Rightarrow \frac{1}{2(1-x)}+\frac{1}{2(1+x)}$$

$$\frac{1}{1+x^3}=\frac{1}{(1+x)(1-x+x^2)}$$

Ако разлагане над $\mathbb{R}$ то елементарните дроби имат вида

$$\frac{A}{1+x}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1} \Rightarrow \frac{A(x^2-x+1)+(Cx+D)(1+x)}{(1+x)(x^2-x+1)}=1 \Rightarrow$$

$$(A+C)x^2+(C+D-A)x+A+D=1$$

$$\left|\begin{array}{l} A+C=0 \\ C+D-A=0 \\ A+D=1 \end{array}\right\}$$ матрица 3×3

$$\begin{matrix} A & C & D \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{A}{1+x} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1} \Rightarrow \frac{1}{3(1+x)} + \frac{2-x}{3(x^2-x+1)}$$