ДИС 25.10

$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = c_0 + c_1(x-\alpha) + \dots + c_n(x-\alpha)^n$

$\alpha, a_0 \dots a_n \in F$

	a_n	...	a_0
α	$b_n = a_n$	b_{n-1}	b_1	$r = \alpha b_1 + a_0$ – остатък или $\alpha = -\frac{a_0}{b_1}$

$b_k = b_{k-1} + \alpha a_{k-1}$

$p(x) = (x-\alpha)t(x) + p(\alpha)$ – остатък

Задача

За полинома $p(x) = x^4 - 7x^3 + 13x^2 - 14x - 4$ пресметнете $p(5)$

	1	-7	13	-14	-4
5	5	-2	3	1	1 – остатък

$p(x) = (x-5)(x^3 - 2x^2 + 3x + 1) + 1$

$p(5) = 1$

$p(x) = x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 9$ Чрез $p(3)$

	1	-5	4	0	-9
3	1	-2	-2	-6	-27

$p(x) = (x-3)(x^3 - 2x^2 - 2x - 6) - 27$

$p(3) = -27$

Решете у-то

$4x^4 + 4x^3 - 25x^2 - x + 6 = 0$

$\alpha = 6/4 = 3/2$

	4	4	-25	-1	6
2	4	12	-1	-3	

$(x-2)(4x^3 + 12x^2 - x - 3) = 0$

Подредете по степените на $x-4$ полинома

$x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16$

	1	-3	6	-10	16
4	1	1	10	30	136

$P(x) = (x-4)(x^3 + x^2 + 10x + 30) + 136$

	1	1	10	30
4	1	5	30	150

$P(x) = (x-4)((x-4)(x^2 + 5x + 30) + 150) + 136$

	1	5	30
4	1	9	66

$P(x) = (x-4)^2((x-4)(x+9) + 66) + 150(x-4) + 136$

$P(x) = (x-4)^2((x-4)^2 + 13(x-4) + 66) + 150(x-4) + 136$

$P(x) = (x-4)^4 + 13(x-4)^3 + 66(x-4)^2 + 150(x-4) + 136$

Тождество на Безу

За всеки два полинома $f, g \in F[x]$ съществуват полиноми $u, v \in F[x]$ т. че

$$d = uf + vg \qquad d = (f, g)$$

при това $(u, v) = 1$

от Евклид

$$f = q_1 g + r_1 \qquad \deg r_1 < \deg g$$
$$g = q_2 r_1 + r_2 \qquad \deg r_2 < \deg r_1$$

$$r_2 = q_3 r_1 \qquad r_2 = g - q_2 r_1$$
$$r_1 = f - q_1 g$$

$$r_2 = q_3 r_1 = g - q_2 (f - q_1 g) = \underbrace{-q_2}_{u} f + \underbrace{(1 + q_1 q_2)}_{v} g$$

Пример

$x^8 - 1$ и $x^3 - 1$ намерете u и v

т. че $d = (x^8 - 1)u(x) + (x^3 - 1)v(x)$

$$\begin{array}{r|l} x^8 - 1 : x^3 - 1 & x^5 + x^2 \\ -\underline{x^8 - x^5} & \\ x^5 - 1 & \\ -\underline{x^5 - x^2} & \\ x^2 - 1 \longrightarrow & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} x^3 - 1 : x^2 - 1 & x \\ -\underline{x^3 - x} & \\ x - 1 & \end{array}$$

НОД $x^2 - 1, x^3 - 1 = x - 1$

$$x^8 - 1 = (x^5 + x^2)(x^3 - 1) + (x^2 - 1)$$
$$x^3 - 1 = x(x^2 - 1) + x - 1$$
$$x - 1 = (x^3 - 1) - x(x^2 - 1)$$

$$(x^2-1) = x^8-1 - (x^5+x^2)(x^3-1)$$

$$x-1 = (x^3-1) - x\left[x^8-1-(x^5+x^2)(x^3-1)\right] =$$

$$(x^3-1)\underbrace{(1+x^6+x^3)}_{u(x)} - \underbrace{x}_{v(x)}(x^8-1)$$

$u(x) = -x$

$v(x) = 1+x^6+x^3$

Определение

Казваме че $f \in F_{[x]}$ е неразложим над F ако единствените делители на f са a, af $(a \in F)$

I] Всеки полином $f \in F_{[x]}$ се разлага на неразложими множители

Ако $f = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k = q_1 \cdot \ldots \cdot q_s$ и $p_1 \ldots p_k, q_1 \ldots q_s$ са неразложими то $k = s$ $p_i = a_i q_i$

$a \in F$, $i \in 1 \ldots k$

$f = pq$ $\quad \deg p < \deg f$, $\deg q < \deg f$

$p = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$

$q = q_1 \cdot \ldots \cdot q_s$

Пример

x^2-2 е неразложим над $\mathbb{Q}$

но не и над $\mathbb{R}$ $\quad x^2-2 = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

Т1

За всеки полином $f \in F[x]$ съществува $p_1 \dots p_k \in F[x]$ (неразложим полином) т.че $f = p_1 \dots p_k$

Ако $f = p_1 \dots p_k = q_1 \dots q_s$ то $s = k$ и $p_1 = a q_1$, $a \in F$, $\deg f > 0$

Индукция по k ; $p_1 \dots p_k = q_1 \dots q_s \Rightarrow$

$p_1 \mid q_1 \dots q_s \Rightarrow \exists i \in [1,s]$ т.че $\rightarrow p_i \mid q_i$

Понеже q_i е неразложим $\Rightarrow \exists a_1 \in F$ т.че $p_1 = a_1 q_i$

$p_1 \dots p_k = a_1 q_i p_2 \dots p_k = q_i \dots q_s = a_1 p_2 \dots p_k =$

$= q_2 \dots q_s \Rightarrow k = s \quad (k-1 = s-1)$

$\exists a_1 \dots a_k \in F$ т.че $p_i = a_i q_i \quad i \in [2,s]$

Т1

Основна теорема на алгебрата. Т на Гаус

Всеки полином (ненулев) с реални коефициенти има поне един комплексен корен

$\forall f \in \mathbb{R}[x] \quad \exists \alpha \in \mathbb{C}$ т.че $f = (x-\alpha) q$

$q \in$

Всеки полином с комплексен коефициент има комплексен корен
(Всяко алгебрично уравнение с комплексен коефициент има реален корен)

Доказателство

Нека $f \in \mathbb{C}_{[x]}$. Тогава $f\bar{f}$ е с $\mathbb{R}$ коефициент

$$f = a_0 + a_1 z + \dots a_n z^n \qquad a_i \in \mathbb{C}$$
$$\bar{f} = \overline{a_0 + \dots a_n z^n} = \bar{a}_0 + \dots \bar{a}_n \bar{z}^n$$

Ако $z = \bar{z}$ то $z \in \mathbb{R}$

$\overline{f\bar{f}} = \bar{f}\bar{\bar{f}} = f\bar{f}$ $\qquad \bar{\bar{f}}$ - инволюция

Нека $\alpha \in \mathbb{C}$ е корен на $f\bar{f}$ (α ∃ от Т на Гаус)

$$\bar{f}(\alpha) f(\alpha) = 0 \Rightarrow \bar{f}(\alpha) = 0 \text{ или } f(\alpha) = 0$$

$\bar{f}(\alpha) = f(\bar{\alpha})$ защото $\overline{\bar{f}(\alpha)} = f(\bar{\alpha}) = 0 \Rightarrow$

$\bar{\alpha}$ е корен на f

Т6/

Неразложимите полиноми над $\mathbb{C}$ са линейни

Доказателство

Ако $f \in \mathbb{C}_{[x]}$ то ∃ $\alpha \in \mathbb{C}$ т.че $f(\alpha) = 0 \Rightarrow$

$$f(z) = (z - \alpha) g(z)$$

$g \in \mathbb{C}_{[z]}$ т.че ∃ $\beta \in \mathbb{C}$ т.че $g(\beta) = 0 \Rightarrow$

$$g(z) = (z - \beta) p(z) \qquad \deg p < \deg g$$

и т.н. комплексен корен

Т6

Неразложими полиноми с реални коефициенти са полиномите от вида $x-\alpha$, ax^2+bx+c при $b^2-4ac<0$ (с дискриминанта <0)

Доказателство

Нека $f \in \mathbb{R}[x]$ и $\alpha_1 - \alpha_n$ са всички реални корени на f. Тогава $f(x) = (x-\alpha_1) \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_n) g(x)$
$\deg g < \deg f$ ($g \in \mathbb{R}[x]$)

Според Т. на Бауе $\exists \alpha \in \mathbb{C}$ т.че $g(x) = (x-\alpha) h(x)$
$\deg h < \deg g$

$f = a_0 a_1 x \ldots a_n x^n \in \mathbb{R}$ и $f(\alpha) = 0$ $\alpha \in \mathbb{C}$
то и за $f(\bar{\alpha}) = 0$ $\exists p \in \mathbb{R}[x]$ т.че $h(x) = (x-\bar{\alpha}) p(x) \Rightarrow$

$$g(x) = (x-\alpha)(x-\bar{\alpha}) p(x)$$

$$(x-\alpha)(x-\bar{\alpha}) = x^2 - x(\alpha+\bar{\alpha}) + \alpha\bar{\alpha} =$$
$$x^2 - 2\operatorname{re}\alpha x + |\alpha|^2$$

$|\alpha|^2 = a^2+b^2$ $\alpha = a+ib$

$\operatorname{re}\alpha = a$

$a^2 - (a^2+b^2) = -b^2 < 0$

Т7

За всеки комутативен пръстен (без делители на нула), съществува поле в което той се влага (изображение което е инжекция в поле)

($a \neq 0$ е делител на нула ако $\exists b \neq 0, ab \in R$, т.че $ab = 0$)

Дефиниция

A се влага в B (AB пръстени), ако $\exists f: A \to B$ т.че $f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2)$ и $f(a_1) f(a_2) = f(a_1 a_2)$ като f е инжективно ($a_1 \neq a_2$)

Ако A, B са множества и имаме $A \times B$ то $R \subset A \times B$ се нарича релация

Означение $(x,y) \in R \to xRy$

x и y са в релация

(релация - множество на наредени двойки)

Дефиниция

Една релация се нарича:

- транзитивна ако за xRy и yR_2 то xR_2
- симетрична ако xRy то yRx
- рефлексивна ако xRx

Ако и трите дефиниции са в сила на една релация, то тя се нарича релация на еквивалентност

Релация на еквивалентност се бележи с $\sim$

Нека R е пръстен със свойствата по-горе

Образуваме $R \times R$

въвеждаме в R релация на еквивалентност по следния начин

$$(a,b) \sim (c,d) \Rightarrow ad = cb$$

Да се мисли $[(a,b)] = \frac{a}{b}$

рефлексивна → $(ab) \sim (ab) \Rightarrow ab = ba$

транзитивна → $(ab) \sim (cd)$ и $(cd) \sim (pq)$ то

$ad = bc$, $cq = dp$ } дали $aq = bp$

$$\left| \begin{array}{l} ad = bc \;/\cdot q \\ cq = dp \;/\cdot b \end{array} \right\} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} adq = bcq \\ bcq = bdp \end{array} \right| -$$

$$adq = beq = bcq = bdp \Rightarrow aq = bp$$

$[(a,b)] \overset{def}{=} \{(c,d) \in R \times R \mid (c,d) \sim (a,b)\}$

клас на еквивалентност с представяне елемента (a,b)

Множеството от всички класове на еквивалентност се означава

$R \times R / \sim$ – фактор множество

$R \times R / \sim$ е поле относно следните операции

- събиране $[(a,b)] + [(c,d)] = [(ad+bc, bd)]$
- умножение $[(a,b)][(c,d)] = [(ac, bd)]$

– $[(a,b)][(c,d)] = [(a,b)]$ т.е. $[(ac, bd)] \sim [(a,b)] \Leftrightarrow$

$acb = bda \Rightarrow c = d$

$1 = [(c,c)] = [(d,d)]$ $\quad c \neq 0, d \neq 0$

(единичен елемент)

– $[(a,b)] + [(c,d)] = [(a,b)]$ т.е.

$[(ad+bc, bd)] \sim [(a,b)] \Leftrightarrow$

$(ad+bc)b = bda \Rightarrow adb + bcb = bda$

$b^2 c = 0 \Rightarrow c = 0$, $0 = [(0,d)]$

(нулев елемент)