Дис 18 10 12

Разглеждаме полиномите

$$P(x) = x^3 - 3x^2 - x - 1$$
$$Q(x) = 3x^2 - 2x + 1$$

$x^3 - 3x^2 - x - 1 : 3x^2 - 2x + 1$

$- x^3 - 2/3x^2 + 1/3x$ — $1/3x - 7/9$

$- 7/9x^2 - 4/3x - 1$

$- 7/9x^2 + 14/9x - 7/9$

$- 26/9x + 2/9$

$$P(x) = (1/3x - 7/9)Q(x) - 26/9 + 2/9$$

f дели g $(f, g \in F[x])$ ако $\exists q \in F[x]$ т.че

$$g = qf \quad (\text{пишем } f \mid g)$$

Нека $p, q \in F[x]$

Казваме че един полином $d \in F[x]$ е най-голям общ делител на p и q ако $d \mid q$, $d \mid p$ и за всяко $d_1 \in F[x]$ за които $d_1 \mid p$ и $d_1 \mid q$ имаме $d_1 \mid d$

Алгоритъм на Евклид

I]

За всеки функции $f, g \in F[x]$ $(g \neq 0)$ съществува НОД - най-голям общ делител

Доказателство

Ако $f | g$ то f е НОД

Ако не то $g = qf + r$

$\deg r < \deg f, \; r \neq 0$

Ако $r | f$ то $f = q_1 r \Rightarrow$

$g = qq_1 r + r = (qq_1 + 1) r \Rightarrow r | g$ тогава r - НОД

Твърдение

Ако $f | (g_1 + g_2)$ и $f | g_1$ то $f | g_2$

Доказателство

$g_1 + g_2 = fs$ и $g_1 = ft$

$g_2 = fs - g_1 = fs - ft = (s - t) f$

Задача

Намерете НОД

$P(x) = x^4+1$ и $Q(x) = x^3-1$

$$\begin{array}{r|l} x^4+1 : x^3-1 & \\ \hline x^4-x & x \\ \hline 1+x & \end{array}$$

$$P(x) = xQ(x) + x+1 \Longrightarrow$$

Делим $Q(x)$ с остатъка

$$\begin{array}{r|l} x^3-1 : x+1 & \\ \hline x^3+x^2 & x^2-x+1 \\ \hline -1-x^2 & \\ -x^2-x & \\ \hline x-1 & \\ x+1 & \\ \hline -2 & \end{array}$$

$$\Rightarrow x^3-1 = (x^2-x+1)(x+1) - 2$$

$x-1 : (-2) = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \Longrightarrow$

P и Q са взаимно прости (с отг. число)

Схема на Хорнер

Нека $f(x) = a_0 + a_1x + \dots a_nx^n$ | $g(x) = x-\alpha$

$\exists\, q(x) = q_0 + q_1x + \dots q_{n-1}x^{n-1}$ и $r(x) = c$

Да изразим коефициента q_1 — q_{n-1} чрез a_0, a_1 — a_n, α

$$f(x) = g(x) q(x) + r(x)$$

или

$$a_0 + a_1 x - \cdots + a_n x^n = (x-\alpha)(q_0 + q_1 x - \cdots - q_{n-1} x^{n-1}) + c =$$

$$q_0 x + q_1 x^2 + \cdots \alpha q_{n-1} x^{n-1} + c$$

$$(a_0 + \alpha q_0 - c) + (a_1 - q_0 + \alpha q_1) x + (a_n - q_{n-1}) x^n = 0$$

$$\left| \begin{array}{l} a_0 + \alpha q_0 - c = 0 \\ a_1 - q_0 + \alpha q_1 = 0 \\ \vdots \\ a_{n-1} - q_{n-2} + \alpha q_{n-1} \\ a_n - q_{n-1} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} q_{n-1} = a_n \\ q_{n-2} = a_{n-1} + \alpha q_{n-1} \\ \vdots \\ q_0 = a_1 + \alpha q_1 \end{array} \right.$$

	a_n	a_{n-1}	~~~~~		
α	a_n				
	q_{n-1}	q_{n-2}			r