ДЦС 16.10.12

Поле

2 групи свързани с операции

$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$ | $(0,0)$ неутрален
$(a,b)(c,d)=(ac+2bd, bc+ad)$ | $(1,0)$ неутрален

пример $(0,1)(0,1)=(2,0)$

Свойства

$a+b=b+a$
$(a+b)+c=a+(b+c)$
$a+0=a$
$\exists b \in F$ такова че $a+b=0$ за $\forall a \in F$
$a.b=b.a$
$(a.b).c=a.(b.c)$
$a.1=a$
$\exists b \in F$ такова че за $\forall a \neq 0$, $ab=1$
$a(b+c)=ab+ac$

Пример
Нека $(a,b)(c,d)=(1,0)$ тогава

$$\begin{cases} ac+2bd=1 \\ bc+ad=0 \end{cases}$$

$(a,b)^{-1}=\left(\frac{-a}{2b^2-a^2}, \frac{b}{2b^2-a^2}\right)$ при $2b^2-a^2 \neq 0$
или $2 \neq \frac{a^2}{b^2}$

Полиноми

Нека F е поле $a_1, a_2 \dots a_n \in F$ $(a_0, a_1 \dots a_n, 0, 0 \dots)$

$f : \mathbb{N} \to F$ която приема краен брой стойности $\neq 0$ се нарича полином

Множеството от полиномите образува пръстен относно следните операции

$$\left.\begin{matrix} (a_0, a_1 \dots a_n \dots) \\ (b_0, b_1 \dots b_n \dots) \end{matrix}\right\} + \overset{def}{\Longrightarrow} (a_0+b_0, a_1+b_1 \dots a_n+b_n, \dots)$$

f $\quad$ g

Означаваме $F[x]$

$f \cdot g = (c_0, c_1 \dots c_n \dots)$ тогава

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j \qquad k = 0, \dots \deg f + \deg g, \deg f, \deg g$$

deg - степен на f и g (последният ненулев елемент)

$(0,0,0 \dots 0 \dots 0 \dots)$ - неутрален относно събиране
$(1,0,0 \dots 0 \dots 0 \dots)$ - неутрален относно умножение

Нека докажем че $(fg)h = f(gh)$

Нека $(fg)h = (e_0, e_1 \dots)$ $\quad fg = \sum_{e+s=p} a_e b_s = c_p$

$f(gh) = (d_0, d_1 \dots)$

$h = (h_0, h_1 \dots)$ $\quad gh = \sum_{s+j=z} b_s h_j = m_z$

$f = (a_0, a_1 \dots)$

$g = (b_0, b_1 \dots)$

$$e_k = \sum_{p+j=k} c_p h_j = \sum_{e+s+j=k} a_e b_s h_j$$

$$d_k = \sum_{e+z=k} a_e m_z = \sum_{e+s+j=k} a_e b_s h_j$$

def

$x = (0, 1, 0 \dots 0)$

$x^2 = (0, 0, 1 \dots)$

$x^n = (0 \dots 0\ 1\ 0 \dots)$ единицата стои на $n+1$ място

$(a_0 a_1 \dots a_n 00) = (a_0 000 \dots) + (0 a_1 0 \dots) + \dots + (0 0 \dots a_n 0) =$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

$$a x^n = (0 \dots \underset{n+1}{a} \dots)$$

Т За всеки $f, g \in F[x]$, $\exists$ единствени $q, r \in F[x]$, такива че

$$f = qg + r, \quad \deg r < \deg g$$

q - частно , r - остатък

Доказателство

Ако $\deg f < \deg g$ полагаме $q=0$, $r=f$

Ако $\deg f \geq \deg g$ тогава прилагаме индукция по степента на f

Нека $f=ax+b$, $g=cx+d \Rightarrow r \in F \Rightarrow$

$$ax+b=q(cx+d)+r$$

$$ax+b=qcx+qd+r$$
$$x(a-qc)=r+qd-b$$

$$\left.\begin{array}{l} a-qc=0 \\ q=\frac{a}{c} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad r=b-d\frac{a}{c}$$

Нека теоремата е вярна за полиноми от степен $< n$. Ще докажем при това предположение че е вярно за полиноми от степен n

Образуваме $f=a_0+a_1x+\dots a_nx^n$
$g=b_0+b_1x \dots b_mx^m \quad n \geq m$

$$f_1=f-a_nb_m^{-1}x^{n-m}g$$

$\deg f_1 < n \Rightarrow \exists\, q_1, r_1 \in F_{[x]}$, такива че $f_1=q_1g+r_1$

$\deg r_1 < \deg g$

Тогава

$$f = q_1 g + r_1 + a_n b_m^{-1} x^{n-m} g =$$

$$(q_1 + a_n b_m^{-1} x^{n-m}) g + r_1$$

Нека $f = q_1 g + r_1 = q_2 g + r_2$ искаме да докажем че $q_1 = q_2$, $r_1 = r_2$ (единственост)

Допускаме $q_1 \neq q_2$

$$\deg r_1 < \deg g$$
$$\deg r_2 < \deg g$$

$0 = (q_1 - q_2) g + r_1 - r_2$ или

$r_2 - r_1 = (q_1 - q_2) g$ но

$\deg (r_2 - r_1) < \deg g$ т.е.

$\deg (q_1 - q_2) g + \deg g < \deg g$

в противоречие $\Rightarrow$ единствен полином