ДИС 11.10.12

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}_{(A)} \cap f^{-1}_{(B)}$$

Нека $x \in f^{-1}_{(A \cap B)} \Rightarrow f(x) \in A, f(x) \notin B \Rightarrow$

$$f^{-1}_{(A \cap B)} \subset f^{-1}_{(A)} \cap f^{-1}_{(B)}$$

Нека $x \in f^{-1}_{(A)}$ и $f^{-1}_{(B)} \Rightarrow f(x) \in A$ и $f(x) \in B \Rightarrow$

$f(x) \in A \cap B$ ~~т.е.~~ $f^{-1}_{(A)} \cap f^{-1}_{(B)} \subset f^{-1}_{(A \cap B)}$

Нека са дадени изображения

$f: X \longrightarrow Y$, $g: Y \longrightarrow Z$

тогава можем да определим ново изображение

$h: X \longrightarrow Z$ по следният начин

$h(x) = g(f(x)) \in Z$

h се нарича композиция на f и g

означение - $h = g \circ f$ g след f

← посока

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$g \circ f \neq f \circ g$

$f(n) = 1/n^n$ $\quad g(n) = 1 + n^2$

$(g \circ f)(n) = g(1/n^2) = 1 + (1/n^2)^2 = 1 + 1/n^4$

$(f \circ g)(n) = f(1+n^2) = 1/(1+n^2)^2$

Докажете че композицията на две биекции е биекция

Нека $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ са биекции

искаме да докажем $g \circ f: X \to Z$ е биекция

т.е. че е инекция и сюрекция едновр.

1) $g \circ f$ е инекция

Нека $x_1 \neq x_2$

$(g \circ f)(x_1) \neq g(f(x_1))$; $(g \circ f)(x_2) \neq g(f(x_2))$

понеже f е инекция $\Rightarrow (g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)$

$\Rightarrow g \circ f$ - инекция

$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$

Искаме да докажем че $g \circ f$ е сюрекция

Нека $z \in Z$, тогава че съществува такъв $x \in X$, искаме да докажем $(g \circ f)(x) = z$

Ако $f: X \to Y$ е биекция то съществува биекция $g: Y \to Z$ т.ч.

$$(g \circ f)(x) = x \text{ за всяко } x \in X$$

g - се нарича обратно изображение на f и се означава f^{-1}

Да се докаже също че $f(g(y)) = y$ за всяко $y \in Y$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x$$
$$(f \circ f^{-1})(y) = y$$

Понеже f е сюрекция за $\forall y \in Y$ съществува $x \in X$ такова че $f(x) = y$

полагаме $g(y) \overset{def}{=} x$

Нека допуснем че съществува $x' \in X$ такова че $g(y) = x'$, $f(x') = y$ $\Rightarrow$

$$f(x) = y = f(x') \Rightarrow x = x'$$

Понеже f е инекция

Да докажем че g е биекция

$$\boxed{g(y) \overset{def}{=} x \Rightarrow g(f(x)) = x}$$

Нека да докажем че g е инекция

за $y_1 \neq y_2$ трябва $g(y_1) \neq g(y_2)$ и
съществуват $x_1, x_2 \in X$ такива че

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1) = y_1 \\ f(x_2) = y_2 \end{array}\right\} x_1 \neq x_2$$

В такъв случай $g(y_1) \neq g(y_2)$ - инекция

Допускаме че g е сюрекция т.е.
за всяко $x \in X$ съществува $y \in Y$ такова че

$$\text{полагаме} \Rightarrow \begin{array}{l} g(y) = x \\ y = f(x) \Rightarrow g(f(x)) = x \end{array}$$
при f - биекция

$$f(g(y)) = y$$

Нека $y \in Y$ и съществува $x \in X$ такова че

$$y = f(x) \Rightarrow g(y) = x \Rightarrow f(g(y)) = f(x) = y$$

Група, Пръстен, Поле
основни математически структури

Група – множество с операция
(операцията е функцията $\mu: G \times G \to G$)

при $\mu \to +$ $\boxed{a \mu b}$ – $a+b$

$\mu(a,b)$ – при $\mu \to \times$ $\boxed{a \mu b}$ – $a.b$ – $a \times b$

Всяко $a, b \in G$ е определено (def) $a+b=G$

Свойства

① $(a+b)+c = a+(b+c)$

② съществува $e \in G$ такова че за всяко $\in G$ имаме $a+e=a$ т.е. съществува неутрален елемент (e)

③ за всяко $a \in G$ съществува $b \in G$ такова че $a+b=e$

④ $a+b=b+a$ – Абелева група – комутативна

Пръстен – Множество с две операции
(R) – множество

Свойства

① R е абелева група относно операция събиране

② Всяко $a, b, c \in R$ е изпълнено
$(a.b).c = a.(b.c)$ – асоциативност

③ $(a+b).c = ac+bc$ и $c.(a+b) = ac+bc$
дистрибутивен закон

(4) Ако $a.b = b.a$ тогава R - комутативен пръстен

$R[x]$ - множество от всички полиноми на x с коефициент в пръстен R

В пръстен е възможно $a.b=0$ макар че $a \neq 0$ и $b \neq 0$

пример

$$\left.\begin{array}{l} f(n) = \max\{0, n\} \\ g(n) = \max\{0, -n\} \end{array}\right\} f(n) \cdot g(n) = 0 \text{ за } \forall n \in \mathbb{Z}$$

Поле

Def

Две групи свързани с операции

$(a,b)(c,d) \overset{def}{=} ac + 2bd + bc + cd$ / $(1,0)$ неутрален

$(a,b) + (c,d) \overset{def}{=} (a+c, b+d)$ / $(0,0)$ неутрален