ДИС 09.10.12

A, B — множества

$A \cup B = \{x\}$ $x \in A$ или $x \in B$

объединение

$A \cap B = \{x\}$ $x \in A$ и $x \in B$

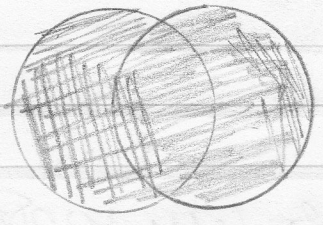
сечение

$A = \{1,2,3,4,5,8\}$
$B = \{2,3,7\}$
$\Rightarrow$ $A \cup B = \{1,2,3,4,5,7,8\}$, $A \cap B = \{2,3\}$

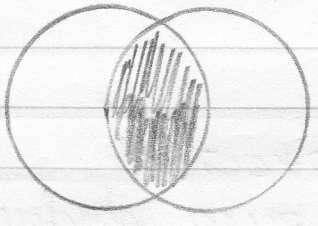
$A \setminus B = \{x \in A, x \notin B\}$

разница

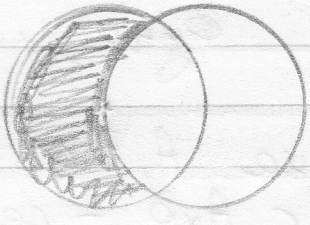
$A \setminus B = \{1,4,5,8\}$; $B \setminus A = \{7\}$



$A \cup B$



$A \cap B$



$A \setminus B$

$2^A = \{x \mid x \subset A\}$ подмножество на A

Пишем $A \subset B$ ако $\forall a \in A \Rightarrow a \in B$

$2^B = \{\{\emptyset\}, \{2\}, \{3\}, \{7\}, \{2,3\}, \{3,7\}, \{2,7\}, \{2,3,7\}\}$

Аксиома

Съществува празно множество за всяко подмножество

$\emptyset \subset A$ за всяко множество A

Декартово произведение

$A \times B \stackrel{def}{=} \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$

$(a,b) \stackrel{def}{=} \{\{a\},\{a,b\}\} \in 2^{2^{A \cup B}}$

$(a,b) = (a_1,b_1) \iff a = a_1, b = b_1$

Свойство

Функция

Нека A, B са множества
$f \subset A \times B$ - се нарича функция или изображение от A в B, ако за всяко $x \in A, y_1, y_2 \in B$.

$(x,y_1) = (x,y_2) \Rightarrow y_2 = y_1 = y$

y - стойност на функцията в x $\quad f(x)$

$y = f(x)$

означение $f: A \to B$
A - дефиниционно множество
B - множество от стойности

$f: A \to B$ се нарича инекция или взаимно еднозначно ако от $x_1 \neq x_2$

$(x_1, x_2 \in A) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

и еквивалентно ако $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Дефиниция (сюрж)

$f: A \to B$ се нарича сюрекция (сюрж) ако за всяко $y \in B$ съществува $x \in A$, такова че $y = f(x)$

y - образ на x

x - прообраз

Дефиниция (биективно)

$f: A \to B$ се нарича биекция ако е едновременно инекция и сюрекция

Примери

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$; $f(n) = n^2$

дали е инекция, сюрекция или биекция

Не е сюрекция, защото не съществува $n \in \mathbb{Z}$ така че $n^2 = m$ за $m < 0$, $m \in \mathbb{Z}$

т.е. няма число което вдигнато на квадрат да дава отрицателно число

Дали $m^2 = n^2$ или $m^2 - n^2 = 0$ т.е.

$(m+n)(m-n) = 0$

Не е инекция $\Rightarrow$
не е биекция

Ако $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $(m+n)(m-n) = 0$

$m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow m = n$

инекция но не е сюрекция

Нека $M = \{m \in \mathbf{N} \mid \exists n \in \mathbf{N}, m = n^2\}$

Тогава $f: \mathbf{N} \to M$ е биекция

$f: X \to Y$, $A \subset X$, $B \subset Y$

$f(A) \overset{def}{=} \{y \in B \mid \exists x \in A$ така че $y = f(x)\}$

образ на множеството A при изображена f

$f^{-1}(B) \overset{def}{=} \{x \in A,$ така че $f(x) \in B\}$

прообраз на B при изображена функция

Задача

$f: \{1,2,3\} \to \mathbb{N}$ намерете:

$f(A) \setminus f(B)$; $f(A \setminus B)$; $f(A \cap B)$; $f(A) \cap f(B)$

$A = \{1,2\}$; $B = \{2,3\}$; $f(1) = f(3) = f(x)$; $f(2) = y$

$f(A) = \{x, y\}$

$f(B) = \{x, y\}$

$f(A) \setminus f(B) = \emptyset$

$A \setminus B = \{1\}$

$f(A \setminus B) = \{x\}$

$A \cap B = \{2\}$

$f(A \cap B) = \{y\}$

$f(A) \cap f(B) = \{x, y\}$

Сега $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$

$x \in f(A) \setminus f(B) \Rightarrow x \in f(A)$

$x \notin f(B)$

Щом $x \in f(A) \Rightarrow \exists y \in A$ така че $y = f(x)$ и $y \in A \setminus B \Rightarrow$

$x \in f(A) \setminus f(B)$

ЗАДАЧА

Да се докаже

а) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

б) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$

в) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

Решение

а) Нека $x \in f^{-1}(A \cup B) \Rightarrow f(x) \in A \cup B \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \in A \\ f(x) \in B \end{array}\right\} \Rightarrow x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$