0.1 Уравнения на Хамилтън

Хамилтоновият формализъм дава различен и равностоен начин на възприемане на класическата механика, сравнен с Лагранжовият формализъм. Като цяло уравненията на Хамилтън не осигуряват по-удобен начин за решаването на даден проблем. Вместо това, те осигуряват дълбоки прозрения в двете общи структури на класическата механика и нейната връзка с квантовата механика, както и връзките с други области на науката.

Стойността на Хамилтоняна е общата енергия на системата. За една затворена система, Хамилтоняна е сумата от кинетичната и потенциалната енергия. Уравненията на Хамилтън, които дават времевото развитие на системата, се дават по следният начин:

$$\begin{aligned}\dot{p}_i(t) &= -\frac{\partial H(p_i(t), q_i(t), t)}{\partial q_i}, \\ \dot{q}_i(t) &= \frac{\partial H(p_i(t), q_i(t), t)}{\partial p_i}\end{aligned}$$

В горните уравнения, точката означава производни по времето, p_i се наричат обобщени импулс, q_i се наричат обобщени координати, $H(p_i(t), q_i(t), t)$ е скаларна величина която наричаме Хамилтониян на системата (пълната енергия на системата) и е свързана с Лагранжияна посредством равенството:

$$H(p_i(t), q_i(t), t) = \sum_i p_i(t)\,\dot{q}_i(t) - \mathcal{L}(q_i(t), \dot{q}_i(t), t).$$

Уравненията на Хамилтън са привлекателни, с оглед на своята простота и красота, но с леко нарушена симетрия (заради знака -). Уравненията на Хамилтън са диференциални уравнения от първи ред, за разлика от уравненията на Лагранж-Ойлер, който са диференциални уравнения от втори ред.

Нека сега изведем уравненията на Хамилтън от уравненията на Лагранж-Ойлер. Тоест тръгваме от:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)}{\partial q_i} = 0$$

и дефинираме обобщеният импулс като:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)}{\partial \dot{q}_i}$$

тогава уравненията на Лагранж-Ойлер стават:

$$\frac{d}{dt}p_i - \frac{\partial \mathcal{L}(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)}{\partial q_i} = 0 \Leftrightarrow \dot{p}_i = \frac{\partial \mathcal{L}(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)}{\partial q_i}$$

а от друга страна за диференциала на Лагранжияна можем да запишем:

$$d\mathcal{L}(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) = \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}d\dot{q}_i\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}dt$$

в последното уравнение можем да заместим $\frac{\partial \mathcal{L}(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)}{\partial q_i}$ с неговото равно $(\dot{p}_i)$ както и $\frac{\partial \mathcal{L}(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)}{\partial \dot{q}_i}$ с неговото равно (p_i), тогава получаваме:

$$d\mathcal{L} = \sum_i (\dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}dt \Leftrightarrow d\mathcal{L} = \sum_i [\dot{p}_i dq_i + d(p_i\dot{q}_i) - \dot{q}_i dp_i] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}dt$$

след като прехвърлим $d(p_i\dot{q}_i)$ от ляво на равенството имаме:

$$d\left(\underbrace{\sum_i p_i\dot{q}_i - \mathcal{L}}_{=H(p_i(t), q_i(t), t)}\right) = \sum_i (-\dot{p}_i dq_i + \dot{q}_i dp_i) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}dt$$

тоест получихме:

$$dH = \sum_i (-\dot{p}_i dq_i + \dot{q}_i dp_i) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}dt,$$

но от друга страна за диференциала на Хамилтониана $H(p_i(t), q_i(t), t)$ имаме:

$$dH(p_i(t), q_i(t), t) = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt.$$

Сравнявайки последните два израза за диференциала на Хамилтониана следват уравненията на Хамилтън:

$$\begin{aligned} \dot{p}_i(t) &= -\frac{\partial H(p_i(t), q_i(t), t)}{\partial q_i}, \\ \dot{q}_i(t) &= \frac{\partial H(p_i(t), q_i(t), t)}{\partial p_i}. \end{aligned}$$

Заедно с равенството

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}.$$

За да направите връзката с Нютоновата формулировка на механиката нека да разгледаме един пример. Най-простият възможен пример е да разгледаме едномерна система, състояща се от една частица с масата m намираща се в потенциално поле. Хамилтонияна представлява енергията на системата, която е сумата на кинетична и потенциална енергия, традиционно отбелязвани като T и V:

$$H = T + V, \quad T = \frac{p^2}{2m}, \quad V = V(x)$$

Сега производната по времето на импулса е силата на Нютон, тоест първото уравнение на Хамилтън означава, че силата действаща на частицата е равен на скоростта, с която се променя потенциала спрямо променливата x (неговото местонахождение). Последното твърдение е еквивалентно на: силата е равнява на отрицателният градиент на потенциална енергия ($F = -gradV = -\frac{\partial V}{\partial x}$). Второто уравнение на Хамилтън тук означава, че скоростта на частицата е равна на производната на кинетичната енергия по отношение на импулса.

Ще изведем уравненията на Хамилтон и от принципа на минималното действие. Тоест тръгваме от действието

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)\, dt$$

и използваме, че :

$$H(q, p, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \Leftrightarrow \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)$$

за да изразим действието, чрез Хамилтонияна $H(q, p, t)$:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) \right) dt$$

сега можем да вземем вариация на действието

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) \right) dt = 0$$

$\Rightarrow$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i p_i \delta \dot{q}_i + \sum_i \dot{q}_i \delta p_i - \delta H(q, p, t) \right) dt = 0$$

първият член от последното равенство интегрираме по части като отчетем, че

$$\delta \dot{q}_i = \delta \left(\frac{dq_i}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (\delta q_i)$$

$\Rightarrow$

$$\underbrace{p_i \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2}}_{=0} + \int_{t_1}^{t_2} \left(-\sum_i \dot{p}_i \delta q_i + \sum_i \dot{q}_i \delta p_i - \underbrace{\delta H(q, p, t)}_{= \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i} \right) dt = 0$$

$\Rightarrow$

$$\sum_i \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right] dt = 0$$

тоест вариацията на действието е нула когато са изпълнени уравненията на Хамилтон:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} &= 0 \\ \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} &= 0 \end{aligned}$$

0.2 Скобки на Поасон

Да намерим необходимото и достатъчно условие за една функция $f(q,p,t)$ да е пръв интеграл (да остава постоянна с времето).

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left[\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial t} \right] = 0$$

Използваме уравненията на Хамилтон$\Rightarrow$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left[\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right] = 0$$

Да дефинираме скобки на Поасон за величините f и H като

$$[f, H] = \sum_i \left[\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right]$$

Тогава по-горното равенство се записва във вида

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] = 0$$

То изразява необходимото условие f да е пръв интеграл. Освен необходимо условие това е и достатъчно условие за f да е пръв интеграл. В частност, ако $\partial f / \partial t = 0$, то горното условие се редуцира до $[f, H] = 0$.

Аналогично скобките на Поасон могат да се дефинират за всяка двойка функции $f(q,p,t)$ и $g(q,p,t)$:

$$[f, g] = \sum_i \left[\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right]$$

____

Задача 1
Докажете следните тъждества, за произволни функции $f(q,p,t)$, $g(q,p,t)$, $u(q,p,t)$ и $v(q,p,t)$ и константи a, b, c:
1.1 $[f, g] = -[g, f]$
1.2 $[f, c] = 0$
1.3 $[f, f] = 0$
1.4 $[af + bu, g] = a[f, g] + b[u, g]$
1.5 $[fu, g] = [f, g]u + f[u, g]$
1.6 $\frac{\partial}{\partial t}[f, g] = \left[\frac{\partial}{\partial t} f, g\right] + \left[f, \frac{\partial}{\partial t} g\right]$

____

Задача 2
Докажете следните тъждества:
2.1 $[f, q_i] = -\frac{\partial}{\partial p_i} f$
2.2 $[f, p_i] = \frac{\partial}{\partial q_i} f$

Като следствие от горните тъждества, уравненията на Хамилтон могат да се запишат във вида

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} = [q_i, H] \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} = [p_i, H] \end{aligned}$$

____

Задача 3

Докажете следните тъждества:

3.1 $[q_i, q_k] = 0$

3.2 $[p_i, p_k] = 0$

3.3 $[q_i, p_k] = \delta_{i,k}$

Последните съотношения се наричат фундаментални скобки на Поасон. Те представляват условие за каноничност на величините q и p и са класически аналози на комутационните съотношения на Хайзенберг.

____

Задача 4

Ако l и n са цели числа и ако $[f, g] = 0$ то докажете следните тъждества:

4.1 $[f, g^n] = 0$

4.2 $\left[f^l, g^n\right] = 0$

____

Задача 5

Между скобките на Поасон, съставени от три функции, съществува следното съотношение, т.нар. тъждество на Якоби,

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0$$

Докажете тъждеството на Якоби.

____

Задача 6

С помощта на тъждеството на Якоби докажете следната теорема на Поасон:

ако f и g са два интеграла на движението, то $[f, g]$ е също интеграл на движението, т.е. $[f, g] = const$