Теория на Множествата

Съдържание

1.Принцип на Неограничената абстракция.Парадокс на Ръсел 2

2.Аксиоматика на Цермело-Френкел 3

3.Наредена двойка.Релации 11

4.Функции.Лема на Тарски за неподвижната точка 15

5.Равномощни множества 18

6.Сравняване на множества по мощност
Теорема на Кантор-Шрьодер-Бернщайн 19

7.Теорема на Кантор за степенното множество 21

8.Изброими и неизброими множества 23

9.Частични наредби и строго частични наредби 27

10.Гъсти наредби.Теорема на Кантор за изброимите гъсти линейни
наредби 32

11.Полурешетки и решетки ,лексикографско ,антилексикографско и
канонично умножение и наредби ,добра наредба 37

12.Ординални числа,основни свойства и трансфинитна индукция . . . 43

13.Аксиомна схема за замяната и трансфинитна рекурсия 49

14.Равномощност на ординали ,операции с ординални числа ,аксиома
за безкрайността и аксиома за избора 54

1.Принцип на Неограничената Абстракция. Парадокс на Ръсел

1.1 Принцип на Неограничената Абстракция

Принцип на неограничената абстракция:Нака $\mathcal{A}(x)$ е свойство.Има множество A такова ,че неговите елементи а точно онези обекти ,които имат свойство $\mathcal{A}(x)$.

$x \in A \Leftrightarrow \mathcal{A}(x)$ или $A \leftrightharpoons \{x|\mathcal{A}(x)\}$.

1.2 Парадокс на Ръсел

Нека дефинираме свойството $\mathcal{R}(x) = (x \notin x)$, което се нарича нормалност на множествата или регулярност на Ръсел.

От принципа за неограничената абстракция следва ,че имаме множество R дефинирано по следния начин:$R \leftrightharpoons \{x|\mathcal{R}(x)\} = \{x|x \notin x\}$.

Нека вземем $x = R$ имаме право на това понеже разглеждаме всички обекти без ограничение(затова е метод на неограничената абстракция).

Получаваме $R \in R$ следоварелно $\mathcal{R}(R)$ е изпълнено значи имаме $R \notin R$.

Да от $R \notin R$ следва ,че е изпъленено $\mathcal{R}(R)$, от което следва ,че $R \in R$.

Получаваме едновременно $R \in R$ и $R \notin R$(което е парадокса).

2.Аксиоматика на Цермело-Френкел

Аксиома 0 (Аксиома за съществуване): Има поне едно множество.

$$\exists x(x=x)$$

Аксиома 1 (Аксиома за обема): Ако две множества имат едни и същи елементи , то те са равни.

$$\forall A \forall B(\forall z(z\in A \Leftrightarrow z\in B)\Rightarrow A=B)$$

Ще изложим следните логически аксиоми:

1) $x=x$

2) $x=y\Rightarrow y=x$

3) $x=y \wedge y=z \Rightarrow x=z$

4) $((x=x') \wedge (x\in y))\Rightarrow (x'\in y)$

5) $((x\in y) \wedge (y=y'))\Rightarrow (x\in y)$

Следва една по специална аксиома , която всъщност е аксиомна схема съдържаща безброй много аксиоми в себе си:

Аксиома 2 (Аксиомна схема за отделянето-ограничената абстракция):

Нека $\varphi(x;u_1,u_2,...,u_n)=\varphi(x;\bar{u}\,)$, $(\bar{u}\,=(u_1,u_2,...,u_n))$ е теоритико-множестве но свойство.Нека A е множество.Тогава съществува множеството сред чиито елементи са точно онези елементи на A за които е изпълнено $\varphi(x;\bar{u}\,)$.

След като изложихме дефиницията на Аксиома 2 е редно да докажем следната:

Теорема (Теорема за единственост): При фиксирани A, φ и $\bar{u}$ има единствено множество B , такова че: $\forall z(z\epsilon B\Leftrightarrow (z\epsilon A\wedge\varphi(z;\bar{u}\,)))$.

Доказателство:

По условие имаме фиксирани: множеството A , теоритико-множествено свойство $\varphi(x;\bar{u})$ и фиксирани променливи $\bar{u}=(u_1,u_2,...,u_n)$.

Нека B_1 и B_2 са множества , за които е изпълнено следното:

(1) $\forall z(z\in B_1\Leftrightarrow (z\in A\wedge\varphi(z;\bar{u}\,)))$

(2) $\forall z(z\in B_2\Leftrightarrow (z\in A\wedge\varphi(z;\bar{u}\,)))$

От Аксиома1 имаме: $\forall z((z \in B_1 \Leftrightarrow z \in B_2) \Rightarrow B_1 = B_2)$.

Нека вземем произволно множество z , ще докажем че: $z \in B_1 \Leftrightarrow z \in B_2$.

Нека $z_1 \in B_1$ и от (1) имаме $z \in A \wedge \varphi(z; \bar{u})$, а от (2) имаме $z \in B_2$.От тук следва ,че : $z \in B_1 \Leftrightarrow z \in B_2$, но z беше избрано произволно от където следва ,че:

$\forall z(z \in B_1 \Leftrightarrow z \in B_2)$ и като приложим Аксиома1 , следва че: $B_1 = B_2$.

Ще изложим един пример за дефиниране на теоритико-множествено свойство:

Нека дефинираме $\varphi(x, y) = \forall z(z \in x \Rightarrow z \in y)$.

С $P_{\varphi(x,y)}$ бележим свойството , което се определя от формулата φ.

Може да се въвежда съкратен запис на дадено свойство определено от дадена формула φ.

Пример при горната формула $\varphi(x,\ y) = \forall z(z \in x \Rightarrow z \in y)$ общоприето е в математиката $P_{\varphi(x,y)}$ да се бележи с $\subseteq$.

Ще разгледаме следното важно за Теория на Множествата:

Твърдение(за съществуване и единственост на прозното множество): Съществува единствено множество, което не съдържа нито един елемент.

$\exists! A \forall x(x \notin A)$

Доказателство:

(Съществуване)

Съгласно Аксиома0 има поне едно множество.Нека вземем едно такова множество B. Да разгледаме следното свойство $\varphi(x) = (x \neq x)$.

Съгласно Теоремата за единственост на Аксиома2 , следва че има единствено множество A , за което е изпълнено $\forall z(z \in A \Leftrightarrow (z \in B \wedge \varphi(x))) \equiv \forall z(z \in A \Leftrightarrow (z \in B \wedge x \neq x))$.Следователно имаме следната дефиниция за множеството A:

$A = \{x | x \in B \wedge x \neq x\}$.

Ще докажем ,че $\forall x(x \notin A)$.

Да допуснем противното , като предположим ,че има някакво произволно избрано множество x , за което е изпълнено $x \in A$.От дефиницията на множеството A имаме ,че ако $x \in A$ следва $x \in B \wedge x \neq x$.Съгласно Логическата аксиома 1$(x = x)$ получаваме противоречие , от което следча че $\forall x(x \notin A)$.

(Единственост)

Ще докажем следното твърдение с което ще покажем ,че празното множество е единствено:

$\forall A_1 \forall A_2((\forall x(x \notin A_1) \wedge \forall x(x \notin A_2)) \Rightarrow A_1 = A_2)$

Нека вземем две произволни множества A_1 и A_2 , за които е изпълнено:

1) $\forall x(x \notin A_1)$

2) $\forall x(x \notin A_2)$

От Аксиома1 имаме ,че ако $\forall z((z \in A_1 \Leftrightarrow z \in A_2) \Rightarrow A_1 = A_2)$.Нека изберем произволно множество z.Ще докажем ,че твърдението $z \in A_1 \Leftrightarrow z \in A_2$ е равносилно на $z \notin A_1 \Leftrightarrow z \notin A_2$.

(i) Нека $z \notin A_1$ от 1) следва , че $z \notin A_2$.Следователно $z \notin A_1 \Rightarrow z \notin A_2$.

(ii) Нека $z \notin A_2$ от 2) следва , че $z \notin A_1$.Следователно $z \notin A_2 \Rightarrow z \notin A_1$.

От (i) и (ii) следва ,че $z \notin A_1 \Leftrightarrow z \notin A_2$ което е равносилно на $z \in A_1 \Leftrightarrow z \in A_2$.

Множеството z беше избрано произволно ,следователно е изпълнено:

$\forall z(z \in A_1 \Leftrightarrow z \in A_2)$ и от Аксиома1 следва ,че: $A_1 = A_2$.

Следователно $\exists! A \forall x(x \notin A)$ и обикновенно бележим $A = \varnothing$.

Аксиома 3 (Аксиома за чифта):За всеки две множества a и b съществува множество A измежду чиито елементи са a и b.

$\forall a \forall b \exists A(a \in A \wedge b \in B)$

Теорема (Теорема за съществуване и единственост на чифт):Съществува единствено множество A такова , че: $\forall x(x \in A \Leftrightarrow x = a \vee x = b)$.

Доказателство:

(Съществъване)

От Аксиома 3 следва ,че съществува множество B за което $a \in B \wedge b \in B$.

Нека $\varphi(z, a, b) = ((z = a) \vee (z = b))$.От Аксиома2 и Теоремата за единственост следва ,че съществува множество $C = \{u | u \in B \wedge \varphi(u, a, b)\}$.Ще докажем ,че:

$\forall x(x \in C \Leftrightarrow x = a \vee x = b)$.

Нека x е произволно множество.

1.Нека $x \in C$ от дефиницията на C следва ,че $x \in B \wedge \varphi(x, a, b) \equiv x \in B \wedge (x = a \vee x = b)$ следователно имаме: $x \in C \Rightarrow (x = a \vee x = b)$.

2.Нека $\varphi(x,a,b)=(x=a\vee x=b)$.

2.1)Нека $x=a$ понеже $a\in B$ следва ,че $x\in B\wedge\varphi(x,a,b)$ от където следва:

$(x=a\Rightarrow x\in C)$.

2.2)Нека $x=b$ понеже $b\in B$ следва ,че $x\in B\wedge\varphi(x,a,b)$ от където следва:

$(x=b\Rightarrow x\in C)$.

$\left\{\begin{smallmatrix}2.1\\2.2\end{smallmatrix}\right.\Rightarrow(x\in C\Leftrightarrow x=a\vee x=b)$.

От $\left\{\begin{smallmatrix}1.\\2.\end{smallmatrix}\right.$ и произволността на избора на x следва $\forall x(x\in C\Leftrightarrow x=a\vee x=b)$.

От където следва ,че $C=\{a,b\}$, което наричаме чифт.Когата $a=b$ $C=\{a\}$ наричаме синглетон на a.

Пример за запис на синглетон в Теория на Множествата:

$\exists a(x=\{a\})\equiv\exists a\exists A(\forall z(z\in A\Leftrightarrow z=a)\wedge x=A)\equiv\exists a\forall z(z\in A\Leftrightarrow z=a)$.

$\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\{\{\varnothing\}\}\},\ldots$

Твърдение: $\varnothing\neq\{\varnothing\}$.

Доказателство:

От Аксиома1 имаме ,че $\forall z((z\in A\Leftrightarrow z\in B)\Rightarrow A=B)$.

В наша случай $A=\varnothing,B=\{\varnothing\}$.Виждаме ,че $\varnothing\in\{\varnothing\}$ от тук следва ,че $\varnothing\in\varnothing$, което не е вярно от където следва ,че: $\varnothing\neq\{\varnothing\}$.

Ще покажем начина по ,който Цермело е въвел естествените числа с помоща само на синглетон на дадено множество.

Приемаме ,че $0=\varnothing$ за $1=\{0\}=\{\varnothing\},2=\{1\}=\{\{\varnothing\}\},3=\{2\}=\{\{\{\varnothing\}\}\},\ldots,n=\{n-1\}=\{\{\ldots\{\varnothing\}\ldots\},\ldots$.

Има и друг начин за представяне на естествени числа ,който е бил предложен от Фон Нойман.

$0=\varnothing$, $1=\{0\}=\{\varnothing\}$, $2=\{0,\ 1\}=\{\varnothing,\ \{\varnothing\}\}$, ...понататък неможем да продължим понеже сме въвели множество което е чифт ,затова ще бъде изложена следната:

Аксиома 4 (Аксиома за обединението):За всяко множество A съществува множество B ,такова че всички елементи на елементите на A са елементи на B.

$\forall A \exists B(\forall x \forall y(x \in y \wedge y \in A \Rightarrow x \in B))$.

Както се вижда и от предните аксиоми , за всяка аксиома чрез която се образува ново множество доказахме неговата единственост и за тази аксиома традицията няма да бъде развалена.

Теорема(Теорема за единственост):За всяко множество A съществува единствено множество B такова ,че всички елементи на елементите на A са елементи на B.

$\forall A \exists! B(\forall x(x \in B \Leftrightarrow \exists y(x \in y \wedge y \in A)))$.

Доказателство:

Множеството A е фиксирано и целта ни е да докажем ,че при него се получава единствено множество B с гореспоменатите свойства.

Нека дефинираме множеството B: $B \leftrightharpoons \{x | \exists y(x \in y \wedge y \in A\}$.

Нека допуснем ,че за множествата B_1 и B_2 ,които са произволно избрани е изпълнено:

$(i) B_1 = \{x | \exists y(x \in y \wedge y \in A)\}$.

$(ii) B_2 = \{x | \exists y(x \in y \wedge y \in A)\}$.

Ще покажем ,че $B_1 = B_2$.

1)Нека x е произволно множество , за което имаме $x \in B_1$.От (i) следва ,че

$\exists y(x \in y \wedge y \in A)$, нека y_0 е едно такова значи: $x \in y_0 \wedge y_0 \in A$ да но от (ii) следва ,че $x \in B_2$ следователно : $x \in B_1 \Rightarrow x \in B_2$.

2)В обратната посока е аналогично.

От $\left\{ \begin{smallmatrix} 1) \\ 2) \end{smallmatrix} \right. \Rightarrow B_1 = B_2$.С което твърдението е доказано.

Мновеството B означаваме с $\cup A$.

Вече може да дефинираме естествено число 3 според дефиницията на Фон Нойман.Нека $A = \{\{0\}, \{1, 2\}\}$ тогава според Аксиома4 и Теоремата за единственост следва ,че съществува множество $B = \cup A = \cup \{\{0\}, \{1, 2\}\} = \{0, 1, 2\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = 3$.

Нека да разгледаме следната задача: Да се докаже ,че празното множество е подмножество на всяко множество.

Доказателство:

Трябва да покажем ,че $\forall z(\varnothing \subseteq z)$ което е еквивалентно на $\forall z(\forall x(x \in \varnothing \Rightarrow x \in z))$.

Да допуснем противното , че $\exists x(x \in \varnothing \Rightarrow x \notin z)$.И нека разгледаме едно такова $x_0 \in \varnothing \wedge x_0 \notin z$.Да но имаме ,че $x_0 \in \varnothing$ но това е противоречие с дефиницията на празното множество.От тука следва ,че не съществува x , което да преднадлежи на $\varnothing$ а да не преднадлежи на z.Следователно $\forall z(\varnothing \subseteq z)$ е вярно.

Ще разгледаме следната дефиниция на обединение на две множества.

Дефиниция:$A \cup B \leftrightharpoons \cup\{A, B\}$.

Израза от дефиницията е еквивалентен на следния:

$\forall x(x \in \cup\{A, B\} \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B)$.

Свойства на обединението:

1)$\varnothing \cup A = A$

2)$A \cup A = A$ (идемпотентност на обединението)

3)$A \cup B = B \cup A$ (комутативност на обединението)

4)$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (асоциативност на обединението)

5)$((A \subseteq A_1) \wedge (B \subseteq B_1) \Rightarrow (A \cup B) \subseteq (A_1 \cup B_1))$ (монотонност на обединението по отношение на включване).

6)$\forall x(x \in A \Rightarrow \exists y(y \in B \wedge x \subseteq y)) \Rightarrow (\cup A \subseteq \cup B)$

Ще докажем свойство 6:

Вижда се ,че $(\cup A \subseteq \cup B) \equiv \forall x(\exists y(y \in A \wedge x \in y) \Rightarrow \exists z(z \in B \wedge x \in z))$.

Нека си изберем произволно множество x.Нека $\exists y(y \in A \wedge x \in y)$.Ще докажем ,че $\exists z(z \in B \wedge x \in z)$.Нека фиксираме едно y_0: $y_0 \in A \wedge x \in y_0$ от лявата част на свойство 6 следва ,че щом има $y_0 \in A \Rightarrow \exists t(t \in B \wedge y_0 \subseteq t)$.Нека си фиксираме едно t_0: $((t_0 \in B) \wedge (y_0 \subseteq t_0))$.От $(x \in y_0) \wedge (y_0 \subseteq t_0)$ следва $x \in t_0$.Следователно имаме за t_0: $t_0 \in B \wedge x \in t_0$ от където следва ,че $\exists z(z \in B \wedge x \in z)$ в случая $z = t_0$.Следователно $\forall x(\exists y(y \in A \wedge x \in y) \Rightarrow \exists z(z \in B \wedge x \in z))$ е вярно значи и $\cup A \subseteq \cup B$ е вярно.

Задача: Да се докажат свойствата от 1 до 5.

Дефиниция(сечение):$A \cap B \leftrightharpoons \cap\{A, B\} \equiv \forall x(x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B)$.

Чрез Аксиома2 може да дефинираме множеството $C = \cap\{A, B\}$.

$\forall x(x \in C \Leftrightarrow x \in A \wedge \varphi(x, B))$ където $\varphi(x, B) = (x \in B)$.

Дефиниция(разлика):$A \backslash B \leftrightharpoons \forall x(x \in A \backslash B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B)$.

Нека да дефинираме следното множество: $\cap \varnothing \leftrightharpoons \varnothing$.

Ще разгледаме следното:

Твърдение:Не съществува множество на всички множества.

$\neg \exists B(\forall x(x \in B))$

Доказателство:

В това доказателство ще сведем нещата до конструкция повтаряща Ръселовия парадокс.

Да допуснем ,че $\exists B(\forall x(x \in B))$.Нека разгледаме едно конкретно множество B_0 за което е изпълнено $\forall x(x \in B_0)$.

$R = \{x | x \in B_0 \wedge x \notin x\}$.

Както знаем свойството $\varphi(x) = (x \notin x)$ е вярно за всяко множество, понеже едно множество неможе да пренадлежи на себе си.

Случаи 1:$R \in R$ това е така понеже B_0 съдържа всички множества включително и R а също е изпълнено и условието $R \notin R$, което води до противоречие с $R \in R$.

Случай 2:$R \notin R$ всяко множество неможе да пренадлежи на себе си и $R \in B_0$, но от тук следва ,че $R \in R$ което е в противоречие с $R \notin R$.

Следователно допускането е грешно и не съществува множество на всички множества.

Аксиома 5 (Аксиома за спетенното множество):За всяко множество A съществува множество B сред чиито елементи са всички подмножества на A.

$\forall A \exists B(\forall x(x \subseteq A \Rightarrow x \in B))$

Теорема(Теорема за единственност на степенното множество):

$\forall A \exists! B(\forall x(x \in B \Leftrightarrow x \subseteq A))$.

Доказателството е аналогично на доказателствата на предните теореми за единственост.

Ще бележим степенното множество по следния начин: $\mathcal{P}(A) \leftrightharpoons \{x|x \subseteq A\}$.

Свойства на степенното множество:

1)Понеже A е множество следва ,че $\varnothing \subseteq A$ от където следва $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$.

2)Също имаме ,че $\forall A(A \subseteq A)$ следователно $A \in \mathcal{P}(A)$.

3)$(A \subseteq B) \Rightarrow (\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B))$

4)$\forall A(\cap \mathcal{P}(A) = \varnothing)$

5)$\forall A(\cup \mathcal{P}(A) = A)$

Задача: Да се докажат горните свойства.

Дефиниция:Казваме ,че z е транзитивно множество , ако $z \subseteq \mathcal{P}(z)$.

Аналогични дефиниции са:

$\forall y(y \in z \Rightarrow y \subseteq z) \equiv \forall y(y \in z \Rightarrow \forall x(x \in y \Rightarrow x \in z))$

$\forall x \forall y(x \in y \wedge y \in z \Rightarrow x \in z)$

Втората аналогична форма на дефиницията показва най-явно от къде произлиза термина “транзитивно множество”.

Бележим транзитивните множества по следния начин: Trans(x): $\forall z(z \in x \Rightarrow z \subseteq x)$.

Свойства на транзитивните множества:

1)$\text{Trans}(x) \Rightarrow \text{Trans}(\cup x)$

Доказателство:

Нека x е транзитивно множество и $y \in \cup x$ е произволно избрано, следователно $\exists z(y \in z \wedge z \in x)$.Значи $z \in x$ и Trans(x) следва ,че $z \subseteq x$.Понеже $y \in z$ и Trans(x) следва ,че $y \in x$.Тогава при обединение на елемнетите от x ,множеството y ще стане подмножество следователно $y \subseteq \cup x$, с което доказахме ,че за произволно $(y \in \cup x \Rightarrow y \subseteq \cup x) \Rightarrow \text{Trans}(\cup x)$.

2)$\text{Trans}(x) \Rightarrow \text{Trans}(\cap x)$

Доказателство:

Случай1: $x = \varnothing$, вижда се че свойството е изпълнено.

Случай2: $x \neq \varnothing$ и $\mathrm{Trans}(x)$.

Нека изберем произволно $y \in \cap x \leftrightarrow \forall z(z \in x \wedge y \in z)$.От $z \in x \wedge \mathrm{Trans}(x) \rightarrow z \subseteq x$

От $y \in z \wedge z \subseteq x \rightarrow \forall z(z \in x \wedge y \in z \wedge y \in x) \rightarrow y \subseteq \cap x \rightarrow (\mathrm{Trans}(x) \Rightarrow \mathrm{Trans}(\cap x))$.

3)$(\forall y(y \in x \Rightarrow \mathrm{Trans}(y)) \Rightarrow \mathrm{Trans}(\cap x)$.

Доказателство:

Случай 1:$x = \varnothing \rightarrow \mathrm{Trans}(\cap x)$.

Случай 2:$x \neq \varnothing$

Нека $y_0 \in x \Rightarrow \mathrm{Trans}(y_0)$ и $z \in \cap x \rightarrow \forall y(y \in x \wedge z \in y)$ следователно $z \in y_0 \wedge \mathrm{Trans}(y_0) \rightarrow z \subseteq y_0$ имаме също $z \in \cap x \wedge (\forall y(y \in x \wedge z \subseteq y)) \rightarrow z \subseteq \cap x$.

Дефиниция:$S(x) \leftrightharpoons x \cup \{x\}$.

Твърдение: Ако x е транзитивно множество то $S(x)$ също е транзитивно множество.

Доказателство:

Ще разгледаме два случая ,при които $y \in S(x)$

1) $y \in x \wedge \mathrm{Trans}(x) \rightarrow y \subseteq x$ следователно $y \subseteq x \cup \{x\} = S(x)$.

2) $y \in \{x\}$ следователно $(y = x) \wedge (x \subseteq \{x\} \subseteq (x \cup \{x\} = S(x)) \rightarrow y \subseteq S(x)$

От $\left\{ \begin{smallmatrix} 1) \\ 2) \end{smallmatrix} \right. \rightarrow (\mathrm{Trans}(x) \Rightarrow \mathrm{Trans}(S(x)))$.

3.Наредена двойка.Релации

3.1 Наредена двойка

Дефиниция:Наредена двойка $(x,\ y)$ наричаме множеството $\{\{x,\ \varnothing\},\ \{y,\ \{\varnothing\}\}\}$.

Дефиниция(Дефиниция на Куратовски):Наредена двойка $(x,\ y)$ наричаме множеството $\{\{x\}, \{x, y\}\}$.

Условието две наредени двойки (x, y) и (x', y') да са равни е:

$(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow ((x = x') \wedge (y = y'))$.

Твърдение:Дефиницията на Куратовски удовлетворява условието $(x,\ y) = (x', y') \Leftrightarrow ((x = x') \wedge (y = y'))$.

Доказателство:

$(\Leftarrow)$Нека $x = x' \wedge y = y'$.Трябва да докажем ,че $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x'\}, \{x', y'\}\}$.

От $x = x' \to \{x\} = \{x'\}$ и $\{x, y\} = \{x', y\}$ и $y = y'$ следва $\{x', y\} = \{x', y'\} \to \{x, y\} = \{x', y'\}$ следователно $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x'\}, \{x', y'\}\}$ следователно $(x, y) = (x', y')$.

$(\Rightarrow)$Нека $(x, y) = (x', y')$.Трябва да докажем ,че $x = x' \wedge y = y'$.

От $(x, y) = (x', y') \to \{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x'\}, \{x', y'\}\}$.

Имаме ,че $\{x\} \in \{\{x\}, \{x, y\}\} = (x, y) \to \{x\} \in \{\{x'\}, \{x', y'\}\}$.

Разглеждаме следните случаи:

1)$\{x\} = \{x'\} \to x = x' \to \{x, y\} = \{x', y\} \to \{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x'\}, \{x', y\}\}$ и от

$\{\{x\},\ \{x,\ y\}\} = \{\{x'\},\ \{x',\ y'\}\} \to \{\{x'\},\ \{x',\ y\}\} = \{\{x'\},\ \{x',\ y'\}\} \to y = y'$ следователно $x = x' \wedge y = y'$.

2)$\{x\} = \{x', y'\}$.От $x' \in \{x', y'\} \wedge \{x\} = \{x', y'\} \to x' \in \{x\} \to x' = x \to \{x\} = \{x'\}$.

От $y' \in \{x', y'\} \wedge \{x\} = \{x', y'\} \to y' \in \{x\} \to y' = x \to \{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x'\}, \{x', y'\}\} \to x = x' \wedge y = y'$.

Нека разгледаме следните изрази:

1)$\cup (x, y) = \cup \{\{x\}, \{x, y\}\} = \{x\} \cup \{x, y\} = \{x, y\}$

2)$\cup \cup (x, y) = \cup \{x, y\} = x \cup y$

3)$(x, y) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\{x, y\}))$

Доказателство на 3):

От дефиницията на Куратовски имаме ,че $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

$(x \in \{x, y\}) \wedge (y \in \{x, y\}) \wedge (\{x\} \in \mathcal{P}(\{x, y\})) \wedge (\{x, y\} \in \mathcal{P}(\{x, y\})) \to \{\{x\}, \{x, y\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\{x, y\}))$.

3) може да се докаже и чрез директно разписване на $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{x, y\}))$.

Прието е наредена двойка да се означава с $\mathrm{OrdPr}(u)$.Следните дефиниции са еквивалентни с дефиниция на Куратовски.

$\mathrm{OrdPr}(u) \leftrightharpoons \exists x \exists y (u = (x, y)) \equiv \mathrm{OrdPr}(u) \leftrightharpoons \exists x \exists y (u = \{\{x\}, \{x, y\}\})$.

Дефиниция(Дефиниция на декартово произведени):

$A \times B = \{u | u \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \wedge \exists x \exists y (u = (x, y) \wedge x \in A \wedge y \in B)\}$

Както се вижда дефиницията на декартово произведени е направено с помоща на Аксиома2 където свойството е $\varphi(u, A, B) = (\exists x \exists y (u = (x, y) \wedge x \in A \wedge y \in B))$.

Свойства на декартовото произведени:

1)$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

2)$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

3)$A \times (B \backslash C) = (A \times B) \backslash (A \times C)$

Задача: Да се докажат горните свойства.

3.2 Релации

Дефиниция:Казваме ,че едно множество е бинарна релация ако всеки негов елемент е наредена двойка.

$\mathrm{Rel}(A) \leftrightharpoons \forall x (x \in A \Rightarrow \mathrm{OrdPr}(x))$

Дефиниция:Нека $\mathrm{Rel}(A)$.Дефиниционната област на A наричаме множеството от елементи x , такива че за някои y , $(x, y) \in A$.

$\mathrm{Dom}(A) \leftrightharpoons \{x | \exists y ((x, y) \in A)\} = \{x | x \in \cup \cup A \wedge \exists y ((x, y) \in A)\}$

Дефиниция:Нека $\mathrm{Rel}(A)$.Област от стойности на A наричаме множеството от елементи y , такива че за някои x , $(x, y) \in A$.

$\mathrm{Rng}(A) \leftrightharpoons \{y | \exists x ((x, y) \in A)\} = \{y | y \in \cup \cup A \wedge \exists x ((x, y) \in A)\}$

Нека A е бинарна релация.Тогава $A \subseteq \mathrm{Dom}(A) \times \mathrm{Rng}(A)$.

Дефиниция:Множеството $\mathrm{Dom}(A) \cup \mathrm{Rng}(A)$ се нарича поле(не в алгебричен смисъл) на релацията A.

Твърдение:Ако A_1 и A_2 са бинарни релации то $A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2$ и $A_1 \backslash A_2$ са също бинарни релации.

Дефиниция:Нека C е множество.Релацията $A = C \times C$ наричаме универсална или пълна бинарна релация на множеството C.

Дефиниция:Нека C е множество.Идемпотент id_C на множеството C наричаме следнара релация $\mathrm{id}_C = \{y | \exists x(x \in C \wedge y = (x, x))\}$.

Дефиниция:Нека $\mathrm{Rel}(A)$.Обръщане на релацията A наричаме следната релация $A^{-1} = \{(x, y) | (y, x) \in A\}$.

Свойства на обръщането на релация:

1)$(A^{-1})^{-1} = A$

2)$(A_1 \cup A_2)^{-1} = A_1^{-1} \cup A_2^{-1}$

3)$(A_1 \cap A_2)^{-1} = A_1^{-1} \cap A_2^{-1}$

4)$(A_1 \backslash A_2)^{-1} = A_1^{-1} \backslash A_2^{-1}$

Задача: Да се докажат горните свойства.

Дефиниция:Нека A и B са бинарни релации.Тогава дефинираме операцията

$\circ$ наречена композиция по следния начин:

$A \circ B \risingdotseq \{(x, y) | \exists z((x, z) \in A \wedge (z, y) \in B)\}$

Задача: Да се докажат следните свойства на операцията $\circ$:

1)$A_1 \circ A_2 \neq A_2 \circ A_1$ ($\circ$ не е комутативна)

2)$A_1 \circ (A_2 \circ A_3) = (A_1 \circ A_2) \circ A_3$ (асоциативност на $\circ$)

3)Вярно ли е:$A \circ (B_1 \cup B_2) = (A \circ B_1) \cup (A \circ B_2)$?

4)Вярно ли е:$A \circ (B_1 \cap B_2) = (A \circ B_1) \cap (A \circ B_2)$?

5)Вярно ли е:$A\circ(B_1\backslash B_2)=(A\circ B_1)\backslash(A\circ B_2)$?

6)Вярно ли е:$(B_1\backslash B_2)\circ A=(B_1\circ A)\backslash(B_2\circ A)$?

4.Функции.Лема на Тарски за неподвижната точка

4.1 Функции

Дефиниция:Нека A е бинарна релация.Казваме ,че A е функция ,ако удовлетворява следното услвовие:

$\forall x\forall y\forall y'((x,y)\in A\wedge(x,y')\in A\Rightarrow y=y')$

Когато A е функция бележим това с $\mathrm{Func}(A)$.

Ако $\mathrm{Dom}(A)=B$ и $\mathrm{Rng}(A)\subseteq C$ то казваме ,че A е функция от B към C.Бележим с $A\colon B\rightarrow C$.

Дефиниция:Ако A е функция и $\mathrm{Dom}(A)\subseteq B$ и $\mathrm{Rng}(A)\subseteq C$.Тогава функцията A наричаме частична функция от B към C.

Дефиниция:Нека A: $B\rightarrow C$ е функция и $\mathrm{Rng}(A)=C$ казваме ,че A е сюрективна.

Дефиниция:Нека A: $B\rightarrow C$ е функция.Казваме ,че A е инективна функция ако е изпълнено следното условие:

$((x\neq x')\wedge(x,y)\in A)\Rightarrow((x',y)\notin A)$

Еквивалентно на последното условие е следното:

$\forall x\forall x'\forall y((x,y)\in A\wedge(x',y)\in A\Rightarrow x=x')$.

Дефиниция:Всяка функция , която е едновременно инекция и сюрекция се нарича биекция.

Дефиниция:Нека $A\colon B\to C$ е функция и $B_1\subseteq B$.Множеството

$A[B_1]=\{y|(\exists x\in B_1)(A(x)=y)\}$ наричаме образ на множеството B_1 при A.

Дефиниция:Рестрикция на функцията $A\colon B\to C$ до множеството $B_1\subseteq B$ наричаме функцията $P=A\restriction B_1=A\cap(B_1\times\mathrm{Rng}(A))$.

Ако $f\colon A\to B$ е функция и $A_1\subseteq A$ то образа на A_1 при f може да се дефинира и по следния начин: $f[A_1]=\mathrm{Rng}(f\restriction A_1)$.

Дефиниция:Нека $f\colon A\to B$ е функция и $B_1\subseteq\mathrm{Rng}(f)$.Тогава дефинираме праобраз на множеството B_1 при f^{-1} : $f^{-1}[B_1]=\{x|f(x)\in B_1\}=\mathrm{Rng}(f^{-1}\cap(B_1\times A))$.

Дефиниция:Нека f и g са функции.Казваме ,че f и g са съвместими функции ако $f\cup g$ е функция.

Твърдение:Нека $\mathrm{Func}(f)$ и $\mathrm{Func}(g)$.Тогава f и g са съвместими т.с.т.к.

$f\restriction(\mathrm{Dom}(f)\cap\mathrm{Dom}(g))=g\restriction(\mathrm{Dom}(f)\cap\mathrm{Dom}(g))$.

или еквивалентно на горното условие е следното:

$(\forall x\in(\mathrm{Dom}(f)\cap\mathrm{Dom}(g)))(f(x)=g(x))$.

Доказателство:

$(\Rightarrow)$ Нека f и g са съвместими.Нека си изберем произволно $z=(a,b)$ и $z\in f\restriction(\mathrm{Dom}(f)\cap\mathrm{Dom}(g))\to a\in(\mathrm{Dom}(f)\cap\mathrm{Dom}(g))\wedge b\in\mathrm{Rng}(f)$.Следователно $a\in\mathrm{Dom}(g)\to(a,g(a))\in g$ и $(a,b=f(a))\in f$ от тук следва ,че $(a,f(a)),(a,g(a))\in f\cup g$ и понеже функциите f и g са съвместими от Дефиницията следва ,че $f\cup g$ е функция , а от Дефиницията за функция следва ,че $f(a)=g(a)$.Следовалтено $(a,f(a)=b)\in g\to(a,b)\in(g\restriction(\mathrm{Dom}(f)\cap\mathrm{Dom}(g))$.

$(\Leftarrow)$ Нека е в сила равенството $f\restriction(\mathrm{Dom}(f)\cap\mathrm{Dom}(g))=g\restriction(\mathrm{Dom}(f)\cap\mathrm{Dom}(g))$.Нека си изберем произволно две наредени двойки $(a,b),(a,b')\in f\cup g$.

Ще разгледаме следните случаи:

1)$(a,b),(a,b')\in f$ и понеже f е функция от Дефиницията за функция следва $b=b'$.

2)$(a,b),(a,b')\in g$ и понеже g е функция от Деф. за функция следва $b=b'$.

3) БОО $(a,b)\in f$, $(a,b')\in g$ следователно $a\in \mathrm{Dom}(f)\wedge a\in \mathrm{Dom}(g)$ от където следва ,че $(a,b)\in (f\restriction(\mathrm{Dom}(f)\cap \mathrm{Dom}(g)))=(g\restriction(\mathrm{Dom}(f)\cap \mathrm{Dom}(g)))$ и

$(a,b')\in (f\restriction(\mathrm{Dom}(f)\cap \mathrm{Dom}(g)))=(g\restriction(\mathrm{Dom}(f)\cap \mathrm{Dom}(g)))$ и понеже f и g са функции следва ,че $b=b'\rightarrow (a,b)=(a,b')\rightarrow f\cup g$ е функция.

Твърдение:Нека F е множество от функции всеки две , от които са съвместими.Тогава $\cup F$ е функция.

$\mathrm{Dom}(\cup F)=\cup\{\mathrm{Dom}(f)|f\in F\}$.

Задача: Да се докаже горното твърдение.

Задача: Да се докаже:

1)Ако A и X са множества и $x\in X\Rightarrow x\subseteq A$.Тогава $f[\cup X]=\cup\{f[x]|x\in X\}$.

2)Ако A и X са множества и $x\in X\Rightarrow x\subseteq A$.Тогава вярно ли е $f[\cap X]=\cap\{f[x]|x\in X\}$.

3)Ако $\mathrm{Func}(f)$.Тогава $\mathrm{Func}(f^{-1})$ т.с.т.к f е инекция.

4)Нека $\mathrm{Func}(f)$ и $f\colon A\rightarrow B$ и множеството Y е дефинирано по следния начин, $(\forall y\in Y)(y\subseteq \mathrm{Rng}(f))$.Тогава $f^{-1}[\cup Y]=\cup\{f[y]|y\in Y\}$ и $f^{-1}[\cap X]=\cap\{f[y]|y\in Y\}$.

4.2 Лема на Тарски за неподвижната точка

Преди да изложим Лемата на Тарски ще се запознаем с няколко дефиниции на понятия използвани в лемата.

Дефиниция:Нека $f\colon\ \mathcal{P}(A)\ \rightarrow\ \mathcal{P}(A)$ където A множество е функция.Казваме ,че f е монотонна , ако $\forall x_1\forall x_2(x_1\subseteq x_2\subseteq A\Rightarrow f(x_1)\subseteq f(x_2))$.

Дефиниция:Нека $f\colon X\rightarrow Y$ е функция.Казваме ,че x_0 е неподвижна точка за f ако $f(x_0)=x_0$.

Лема(Лема на Тарски за неподвижната точка):Нека $f\colon \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ където A множество е монотонна функция.Тогава f има неподвижна точка.Също така съществуват неподвижните точки X_1 и X_2 за които са изпълнени следните условия:

1) $(\forall x \in \mathcal{P}(A))(f(x) = X \Rightarrow X_1 \subseteq X)$

2)$(\forall x \in \mathcal{P}(A))(f(x) = X \Rightarrow X \subseteq X_2)$

Доказателсво:

Нека $f\colon \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ е монотонна функция , следователно $f(x) \subseteq X$.

Нека $\mathcal{X} = \{X \,|(X \in \mathcal{P}(A))(f(X) \subseteq X)\} \neq \varnothing$ защото $f(A) \in \mathcal{P}(A)$ т.е. $f(A) \subseteq A$.

Нека $X_0 = \cap\, \mathcal{X}$, $X_0 \subseteq A$.Нека $X \in \mathcal{X}$ то $X_0 \subseteq X$ и $f(X_0) = X$.Понеже $X \in \mathcal{X}$ следва ,че $f(X) \subseteq X$ следователно $f(X_0) \subseteq X$, но понеже X беше избрано произволно следва ,че $f(X_0) \subseteq (\,\cap\, \mathcal{X} = X_0) \to f(X_0) \subseteq X_0$ което е условието едно множество да пренадлежи на $\mathcal{X}$.Имаме ,че $f(X_0) \subseteq X_0$ ако $X_0^{'} = f(X_0)$, $X_0^{'} \subseteq X_0$ е множество и имаме $f(X_0^{'}) \subseteq X_0' \leftrightarrow f(f(X_0)) \subseteq f(X_0) \subseteq X_0 \to f(X_0) \in \mathcal{X}$.Но ние доказажме ,че $(\forall X \in \mathcal{X})(X_0 \subseteq X)$ следователно $X_0 \subseteq f(X_0)$ от където следва ,че $f(X_0) = X_0$(която е минимална неподвижна точка).

Нека $\mathcal{Y} = \{Y \,|(Y \in \mathcal{P}(Y))(Y \subseteq f(Y))\}$ и нека $Y_0 = \cup\, \mathcal{Y}$.Нека изберем произволно едно $Y \in \mathcal{Y}$ то $Y \subseteq Y_0$ имаме ,че $Y \subseteq f(Y) \subseteq f(Y_0)$ следователно $Y \subseteq f(Y_0)$.Множеството Y беше избрано произволно , следователно $(\,\cup\, \mathcal{Y} = Y_0) \subseteq f(Y_0)$.Имаме ,че $Y_0 \subseteq f(Y_0)$ следовалтено $Y_0 \in \mathcal{Y}$.Понеже функцията f е монотонна и $Y_0 \subseteq f(Y_0)$ следва ,че $f(Y_0) \subseteq f(f(Y_0))$ от където следва ,че $f(Y_0) \in \mathcal{Y}$ и $f(Y_0) \subseteq Y_0$ следователно $Y_0 = f(Y_0)$(което е максимална неподвижна точка).

5.Равномощни множества

Дефиниция:Нека A и B са множества.Тогава казваме ,че A и B са равномощни , ако съществува биекция между A и B , $f\colon A \to B$.Бележим ги по следния начин $A \sim B$ или $\bar{\bar{A}} = \bar{\bar{B}}$.

$A \sim B : \exists f(\mathrm{Func}(f) \wedge \mathrm{Dom}(f) = A \wedge \mathrm{Rng}(f) = B \wedge$ "f е инекция")

Свойства:

1)$A \sim A$

$2) A \sim B \Rightarrow B \sim A$

$3) A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$

$4) A \sim \varnothing \Rightarrow A = \varnothing$

$5) A \sim A \times \{\varnothing\}$

$6) A \sim A_1 \wedge B \sim B_1 \wedge A \cap B = A_1 \cap B_1 = \varnothing \Rightarrow A \cup B \sim A_1 \cup B_1$

$7) A \sim A_1 \wedge B \sim B_1 \Rightarrow A \times B \sim A_1 \times B_1$

Дефиниция:Нека A и B са множества тогава ${}^{A}B = \{f \mid f \colon A \to B\}$.

Задача.Да се докаже:

$1) A \sim A_1 \wedge B \sim B_1 \Rightarrow {}^{A}B \sim {}^{A_1}B_1$.

$2) A \sim B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \sim P(B)$

$3) {}^{A}\{0,1\} \sim \mathcal{P}(A)$

6.Сравняване на множества по мощност. Теорема на Кантор-Шрьодер-Бернщайн

6.1 Сравняване на множества по мощност

Дефиниция:Нека A и B са множества.Казваме ,че мощността на A не надминава мощността B ($\bar{\bar{A}} \leqslant \bar{\bar{B}}$) , ако съществува инекция $f \colon A \to B$.

Свойства:

$1) \bar{\bar{A}} \leqslant \bar{\bar{A}}$

$2) \bar{\bar{A}} \leqslant \bar{\bar{B}} \wedge \bar{\bar{B}} \leqslant \bar{\bar{C}} \Rightarrow \bar{\bar{A}} \leqslant \bar{\bar{C}}$

3)$\bar{\bar{A}} \leqslant \bar{\bar{A}}' \wedge \bar{\bar{B}} \leqslant \overline{\overline{B'}} \wedge A \cap B = A' \cap B' = \varnothing \Rightarrow \overline{\overline{A \cup B}} \leqslant \overline{\overline{A' \cup B'}}$

4)$\bar{\bar{A}} \leqslant \bar{\bar{A}}' \wedge \bar{\bar{B}} \leqslant \overline{\overline{B'}} \Rightarrow \overline{\overline{A \times B}} = \overline{\overline{A' \times B'}}$

5)$\bar{\bar{A}} \leqslant \bar{\bar{A}}' \wedge \bar{\bar{B}} \leqslant \overline{\overline{B'}} \Rightarrow \overline{\overline{{}^{A}B}} \leqslant \overline{\overline{{}^{A'}B'}}$

Задача: Да се докажат горните свойства.

Дефиниция:Нека A и B са множества.Казваме ,че мощността на A е строго по-малка от мощността на $B(\bar{\bar{A}} < \bar{\bar{B}})$ ако $\bar{\bar{A}} \leqslant \bar{\bar{B}} \wedge \bar{\bar{A}} \neq \bar{\bar{B}}$.

Свойства:

1)$\bar{\bar{A}} \not< \bar{\bar{A}}$

2)$\bar{\bar{A}} \leqslant \bar{\bar{B}} \Leftrightarrow \bar{\bar{A}} < \bar{\bar{B}} \vee \bar{\bar{A}} = \bar{\bar{B}}$

3)$\bar{\bar{A}} \leqslant \bar{\bar{B}} \wedge \bar{\bar{B}} < \bar{\bar{C}} \Rightarrow \bar{\bar{A}} < \bar{\bar{C}}$

Задача: Да се докажат горните свойства.

6.2 Теорема на Кантор-Шрьодер-Бернщайн

Теорема(Теорема на К-Ш-Б):Нека A и B са множества и $\bar{\bar{A}} \leqslant \bar{\bar{B}} \wedge \bar{\bar{B}} \leqslant \bar{\bar{A}}$.Тогава множествата A и B са равномощни ($\bar{\bar{A}} = \bar{\bar{B}}$).

Доказателство:

От $\bar{\bar{A}} \leqslant \bar{\bar{B}}$ и $\bar{\bar{B}} \leqslant \bar{\bar{A}}$ следва ,че съществуват инекции от A към B и от B към A.Нека $f\colon A \to B$ и $g\colon B \to A$ са такива инекции.

Трябва да намерим такова множество X , за което са изпълнение следното:

$g[B \setminus f[X]] = A \setminus X$ и тогава търсената от нас биекция ще е $(f \upharpoonright X) \cup (g^{-1} \upharpoonright (A \setminus X))$. Търсим множеството X.

От $g[B \setminus f[X]] = A \setminus X$ имаме $X = A \setminus g[B \setminus f[X]]$.

Нека си изберем една функция $F\colon \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ и я дефинираме по следния начин $F(X) = A \setminus g[B \setminus f[X]]$ за $X \in \mathcal{P}(A)$.

Ще покажем ,че функцията F е монотонна.Нека си вземем две множества $X_1 \subseteq X_2 \subseteq A$.

Понеже функциите f и g са инективни , което ще означава ,че всеки различен елемент се изобразява в различен следователно $f[X_1] \subseteq f[X_2] \subseteq B$.Следователно $B\setminus f[X_2] \subseteq B\setminus f[X_1] \subseteq B \rightarrow g[B\setminus f[X_2]] \subseteq g[B\setminus f[X_1]] \subseteq A$ следователно $A\setminus g[B\setminus f[X_1]] \subseteq A\setminus g[B\setminus f[X_2]]$ т.е. $F(X_1) \subseteq F(X_2)$ следователно F е монотонна функция и от Лемата на Тарски за неподживна точка следва ,че F има неподживна точка и нека множеството X_0 е тази неподвижна точка. Тогава $X_0 \subseteq A$ и $F(X_0) = X_0$ т.е. $X_0 = A\setminus g[B\setminus f[X_0]] \rightarrow A\setminus X_0 = g[B\setminus f[X_0]]$.Нека дефинираме функцията $h = (f \upharpoonright X_0) \cup (g^{-1} \upharpoonright (A\setminus X_0))$.

Трябва да докажем ,че $\mathrm{Func}(h)$. Имаме ,че $\mathrm{Func}(h) \Leftrightarrow \forall x \forall y \forall y'((x, y) \in h \wedge (x, y') \in h \Rightarrow y = y')$.Ще разгледаме два случая:

1)$x \in X_0 \rightarrow h(x) = (f \upharpoonright X_0)(x)$ която е функция следователно $y = y'$.

2)$x \in A\setminus X_0 \rightarrow h(x) = (g^{-1} \upharpoonright (A\setminus X_0))(x)$ понеже g е инкеция следва ,че g^{-1} е функция ,следователно $y = y'$.

От 1) и 2) следва $\mathrm{Func}(h)$.

Трябва да докажем ,че h е инективна.Нека си вземем произволно $a', a'' \in A$ и $a' \neq a''$ трябва да докажем ,че $h(a') \neq h(a'')$.Ще разгледаме случаи:

1)Ако $a', a'' \in X_0 \rightarrow h(a') = f(a')$ и $h(a'') = f(a'')$ и f е инекция ,следователно $f(a') \neq f(a'') \rightarrow h(a') \neq h(a'')$.

2)Ако $a', a'' \notin X_0 \rightarrow a', a'' \in (A\setminus X_0) \rightarrow h(a') = g^{-1}(a') \wedge h(a'') = g^{-1}(a'')$ от тук следва ,че $\exists b', b''$: $g(b') = a' \wedge g(b'') = a''$ понеже g е инекция и $a' \neq a''$ следва ,че $b' \neq b'' \rightarrow h(a') \neq h(a'')$.

3)Ако без ограничение на общноста(БОО) $a' \in X_0 \wedge a'' \in (A\setminus X_0)$ следователно

$h(a') = f(a') \in f[X_0]$ и $h(a'') = g^{-1}(a'') \in B\setminus f[X_0]$ от където следва ,че $h(a') \neq h(a'')$.

Остана да докажем ,че h е сюрективна или ,че $\mathrm{Rng}(h) = B$.Имаме ,че

$\mathrm{Rng}(h) = \mathrm{Rng}((f \upharpoonright X_0) \cup (g^{-1} \upharpoonright (A\setminus X_0))) = \mathrm{Rng}(f \upharpoonright X_0) \cup \mathrm{Rng}(g^{-1} \upharpoonright (A\setminus X_0)) = f[X_0] \cup B\setminus f[X_0] = B$ следователно h е сюрективна.

Доказахме ,че h е биекция между A и B от където следва ,че $\bar{\bar{A}} = \bar{\bar{B}}$.

7.Теорема на Кантор за степенното множество

Теорема(Теорема на Кантор за степенното множество):Нека A е множество.Тогава $\bar{\bar{A}} < \overline{\overline{\mathcal{P}(A)}}$.

Доказателство:

От дефиницията за ненадминаваща мощност следва ,че ако намерим инекция от A към $\mathcal{P}(A)$ то $\bar{\bar{A}} \leqslant \overline{\overline{\mathcal{P}(A)}}$.Една такава инекция е функцията g: $A \to \mathcal{P}(A)$ дефинирана по следния начин $g(x) = \{x\}$ следователно $\bar{\bar{A}} \leqslant \overline{\overline{\mathcal{P}(A)}}$.

Да допуснем ,че съществува функция f , която е сюрекция , понеже f: $A \to \mathcal{P}(A)$ следва ,че ако $x \in A$ то $f(x) \subseteq A$.Ще разгледаме следното множество

$B_0 = \{x | x \in A \wedge x \notin f(x)\}$ следователно $B_0 \subseteq A$, $B_0 \in \mathcal{P}(A)$ и понеже f е сюрекция следва ,че $\exists x(x \in A \wedge f(x) = B_0)$.Нека си вземем едно такова $x_0 \in A \wedge f(x_0) = B_0$ следователно имаме 2 случая:

1)$x_0 \in B_0 \wedge f(x_0) = B_0 \wedge x_0 \in B_0 \to x_0 \notin f(x_0) \to x_0 \notin B_0$(противоречие)

2)$x_0 \notin B_0 \to \neg(x_0 \in A \wedge x_0 \notin f(x_0)) \leftrightarrow x_0 \notin A$(не е вярно) или $x_0 \in f(x_0) \to x_0 \in f(x_0) = B_0 \to x_0 \in B_0$(противоречие)

От $\left\{ \begin{smallmatrix} 1) \\ 2) \end{smallmatrix} \right.$ следва ,че не съществува сюрекция от A към $\mathcal{P}(A)$ следователно $\bar{\bar{A}} < \overline{\overline{\mathcal{P}(A)}}$ е вярно.

Твърдение:Ако A е непразното множество, тогава $\neg \exists B(\forall x(x \in B \Leftrightarrow \bar{\bar{x}} = \bar{\bar{A}}))$.

Доказателство:

Да допуснем ,че такова множество B съществува.Да разгледаме едно такова множество $B_0 = \{x | x \in B \wedge \exists a(x = A \times \{a\})\}$ тогава $\mathrm{Rel}(\cup B_0)$ и $\forall a(a \in \mathrm{Rng}(\cup B_0))$ понеже $A \times \{a\} \sim A \wedge (A \times \{a\}) \in B_0 \wedge a \in \mathrm{Rng}(A \times \{a\}) \to a \in \mathrm{Rng}(\cup B_0)$.От където следва ,че множеството $\cup$ B_0 е множество на всички множества , което е противоречие.

Следващото твърдение , сме доказали по-рано , но сега ще изложим друго доказателство използващо Теоремата на Кантор.

Твърдение:Не съществува множество на всички множества: $\neg \exists V(\forall x(x \in V))$.

Доказателство:Да допуснем ,че V_0 е множество на всички множества.Тогава $\mathcal{P}(V_0) \subseteq V_0 \to \overline{\overline{\mathcal{P}(V_0)}} \leqslant \bar{\bar{V_0}}$, но от Теоремата на Кантор имаме ,че $\bar{\bar{V_0}} < \overline{\overline{\mathcal{P}(V_0)}}$ с което получаваме противоречие от където следва ,че не съществува множество на всички множества.

8.Изброими и неизброими множества

8.1 Изброими множества

Дефиниция:Дефинираме множеството на естествените числа по следния начин $\omega = \{0, 1, 2, ...\}$.Като вместо ω може да се бележи и с $\mathbb{N}$.

Дефиниция:Нека A е множество.Казваме ,че A е крайно ако

$(\exists n \in \omega)(\bar{\bar{A}} = \overline{\overline{\{0, ...n-1\}}})$.

Дефиниция:Нека A е множество.Казваме ,че A е изброимо ако $\bar{\bar{A}} = \bar{\bar{\omega}}$.

Дефиниция:Нека A е множество.Казваме ,че A е безкрайно ако A не е крайно.

Твърдение:Ако A е безкрайно множество,то съществува множесто $A_1 \subseteq A$ такова ,че A_1 е изброимо.

Доказателство:

Ако $A \neq \varnothing$ следва ,че има поне един елемент $a_0 \in A$.Тогава $A \backslash \{a_0\} \neq \varnothing$, защото иначе A е крайно , следователно има елемент $a_1 \in (A \backslash \{a_0\}) \wedge a_1 \in A \wedge a_1 \neq a_0$.

Нека за някое естествено число n: $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n$ са два по два различни елементи на множеството A.Тогава $A\backslash\{a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n\} \neq \varnothing$, защото множеството A би било крайно с $n+1$ елемента.Тогава има елемент $a_{n+1} \in (A\backslash\{a_0, a_1, \ldots, a_n\} \wedge a_{n+1} \in A \wedge a_{n+1} \notin \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$.Съгласно Принципа на Математическата Индукция имаме редица $a_0,\ a_1,\ \ldots a_n,\ \ldots$.Дефинираме следната функция $f\colon \omega \rightarrow A$, $f(n) = a_n$ и $\mathrm{Dom}(f) = \omega$, $\mathrm{Rng}(f) \subseteq A$ и f е инективна.

Множеството на рационалните числа може да се представи като декартово произведение на естесвените , като първата коодрината на наредените двойки е числителя , а втората знаменателя.$\mathbb{Q} = \omega \times \omega$.

Ще докажем ,че множестовото на рационалните числа е изброимо($\mathbb{Q} \sim \omega$).

$Q \sim \omega \leftrightarrow \omega \times \omega \sim \omega$ за да докажем последното твърдение , трябва да намерим биекция $f\colon \omega \times \omega \rightarrow \omega$, не е трудно да се види ,че една такава биекция е

$f(x,y) = 2^x(2y+1) - 1$.

От $\mathbb{Q} \sim \omega$ следва ,че :Ако A и B са изброими множества то и $A \times B$ е изброимо.

Ако имаме ω^n то : $\omega^n = \omega \times (\omega^{n-1}) \sim \omega^{n-1} = \omega \times (\omega^{n-2}) \sim \omega^{n-2} \sim \ldots \sim \omega \times \omega \sim \omega$ следователно $\omega^n \sim \omega$.

Нека $\mathcal{I}$ е множество от отворени интервали от реални числа и нека за $\mathcal{I}$ е изпълнено следното $(\forall I_1 \forall I_2((I_1 \neq I_2) \wedge (I_1 \in \mathcal{I}) \wedge (I_2 \in \mathcal{I})))(I_1 \cap I_2 = \varnothing)$.Тогава $\mathcal{I}$ е най-много изброимо.Нека $I \in \mathcal{I}$ следователно $I = (\alpha,\ \beta) \wedge \alpha < \beta$.Тогава избираме рационално число $r_I \in (\alpha,\ \beta) = I$ примерно $r_I = \frac{\alpha+\beta}{2}$.Нека $f\colon \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{Q}$ дефинирана по следния начин $f(I) = r_I$, $I \in \mathcal{I}$, $r_I \in \mathbb{Q}$.От това ,че интервалите елементи на $\mathcal{I}$ са два по два непресичащи лесно се вижда ,че f е биективна функция ,следователно $\mathcal{I} \sim \mathbb{Q} \sim \omega \rightarrow \mathcal{I} \sim \omega$.

Твърдение:Нека A е безкрайно множество и B е най-много изброимо.Тогава е вярно ,че $A \cup B \sim A$.

Доказателство:

$B_1 = (B\backslash A) \subseteq B$ където B_1 е най-много изброимо.Може да отделим едно изброимо множество $A_1 = \{a_0, a_1, \ldots\} \subseteq A$.Тогава $A \cup B_1 = ((A\backslash A_1) \cup A_1) \cup B_1 = (A\backslash A_1) \cup (A_1 \cup B_1)$ и е очевидно ,че $A \sim (A\backslash A_1) \cup A_1$.Дефинираме следната функция:

$$f(x) = \begin{cases} x\,, x \in A\backslash A_1 \\ a_{2n}, a_n = x \in A_1 \\ a_{2n+1}, b_n = x \in B_1 \end{cases}$$

Дефиниция:Нека A е множество.Казваме ,че функцията $f\colon\ \omega \ \rightarrow \ A$ е изборима редица от тип ω от елементи на A.

Дефиниция:Нека A е множество.Казваме ,че функцията $f\colon \{0, ..., n-1\} \rightarrow A$ е крайна редица от елементи на A.

8.2 Неизброими множества

Дефиниция:Нека A е множество.Казваме ,че A е неизброимо ако A не е най-много изброимо или ако A е безкрайно и не е изброимо.

Твърдение:Множеството от всички изброими редици от 0 и 1 е неизброимо.

Доказателство:

Да допуснем ,че α_0, α_1, ... е редица , в която се срещат всички изброими редици от 0 и 1.Тогава имаме:

α_0: $\alpha_{00}\,\alpha_{01} \ldots \alpha_{0n} \ldots$

α_1: $\alpha_{10}\,\alpha_{11} \ldots \alpha_{1n} \ldots$

...

α_n: $\alpha_{n0}\,\alpha_{n1} \ldots \alpha_{\mathrm{nn}} \ldots$

...

Нека образуваме следната редица от 0 и 1 с членове:

$\beta_0 = (1 - \alpha_{00}) \in \{0, 1\} \wedge \beta_0 \neq \alpha_{00}$

$\beta_1 = (1 - \alpha_{11}) \in \{0, 1\} \wedge \beta_1 \neq \alpha_{11}$

...

$\beta_n = (1 - \alpha_{\mathrm{nn}}) \in \{0, 1\} \wedge \beta_n \neq \alpha_{\mathrm{nn}}$

...

Тогава за редицата β: $\beta_0\,\beta_1\dots\beta_n\dots$ $(\forall n(\beta \neq \alpha_n))$ не се среща никъде измежду $\alpha_0\,\alpha_1\dots\alpha_n\dots$ от където следва противоречие , доказващо неизброимостта.

За всеки два произволни интервала от реални числа (a,b) и (a',b') имаме ,че:

$(a,b) \sim (a',b')$ като функцията $f(x) = \frac{x-a}{b-a}(b'-a') + a'$ е търсената биекция.

Множеството на реалнити числа ,ще бележим с $\mathbb{R}$ и за него имаме ,че:

$\mathbb{R} \sim {}^{\omega}2(2^{\omega}) \sim \mathcal{P}(\omega)$ следователно $\mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\omega)$.

Нака си зададем следния въпрос: ? $\exists A \subseteq \mathbb{R}: \bar{\bar{\omega}} < \bar{\bar{A}} \wedge \bar{\bar{A}} < \bar{\bar{\mathbb{R}}}$

Контимиум хипотеза наричаме следното твърдение: $(\neg\exists A(A \subseteq \mathbb{R}))(\bar{\bar{\omega}} < \bar{\bar{A}} \wedge \bar{\bar{A}} < \bar{\bar{\mathbb{R}}})$ или ,че следващата мощност след мощноста на естествените числа е мощноста на реалните.

Дали $(0,\ 1) \sim \mathbb{R}$.Не е трудно да се сетим ,че функцията $\mathrm{tg}(x)$ представлява биекция между $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ и $\mathbb{R}$ и не е трудно да намерим функция $f: (0,1) \to (-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2})$ която да е биекция. Една такава биекция е $f(x) = x\pi - \frac{\pi}{2}$.Тогава функцията $h(x)$: $(0,\ 1) \to \mathbb{R}$ ще дефинираме по следния начин: $h(x) = \mathrm{tg}(f(x)) = \mathrm{tg}(x\pi - \frac{\pi}{2})$ е търсената биекция , следователно $(0,1) \sim \mathbb{R}$.

Ще докажем също ,че $(0,1) \times (0,1) \sim (0,1)$.Нека $\alpha = 0, \alpha_0\alpha_1\dots$ и $\beta = 0, \beta_0\beta_1\dots$.

Нека дефинираме следната функция $f(\alpha,\ \beta) = 0,\ \alpha_0\beta_0\alpha_1\beta_1\dots$.Лесно се показва ,че f е биекция.Следователно имаме ,че $(0,1)^n \sim (0,1)$ а от $(0,1) \sim \mathbb{R}$ следва ,че $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \sim \mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^n \sim \mathbb{R}$.

Задача:Да се докаже ,че ${}^{C}({}^{B}A) \sim {}^{C\times B}(A)$.

Имаме ,че ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{R} \sim (2^{\omega})^{2^{\omega}} \sim 2^{\omega\times 2^{\omega}} \sim 2^{2^{\omega}} \sim 2^{\mathbb{R}} \sim \mathcal{P}(\mathbb{R})$.Следователно $\bar{\bar{\mathbb{R}}} < \overline{\overline{{}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}}}$.

Задача:Да се докаже ,че ако $A = \{f \,|\, f: \mathbb{R} \to \omega\}$ то $A \sim \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

9. Частични наредби и строго частични наредби

9.1 Частични наредби

Дефиниция:Нека A е множество и $R \subseteq A \times A \to \mathrm{Rel}(R)$.Казваме,че релацията R е рефлексивна в A ако $\forall x(x \in A \Rightarrow (x,x) \in R)$ или $\mathrm{id}_A \subseteq R$.

Дефиниция:Нека A е множество и $R \subseteq A \times A \to \mathrm{Rel}(R)$.Казваме ,че

релацията R е иррефлексивна в A ако $(\forall x \in A)((x,x) \notin R)$ или $R \cap \mathrm{id}_A = \varnothing$.

Дефиниция:Нека A е множество и $R \subseteq A \times A \to \mathrm{Rel}(R)$.Казваме ,че

релацията R е симетрична в A ако $(\forall x \in A)(\forall y \in A)((x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R)$

или $R = R^{-1}$.

Дефиниция:Нека A е множество и $R \subseteq A \times A \to \mathrm{Rel}(R)$.Казваме ,че

релацията R е антисиметрична в A ако $\forall x \forall y((x,y) \in R \wedge (y,x) \in R) \Rightarrow (x = y)$ или $R \cap R^{-1} \subseteq \mathrm{id}_A$.

Дефиниция:Нека A е множество и $R \subseteq A \times A \to \mathrm{Rel}(R)$.Казваме ,че

релацията R е асиметрична в A ако $(\forall x \in A)(\forall y \in A)((x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \notin R)$

или $R \cap R^{-1} = \varnothing$.

Дефиниция:Нека A е множество и $R \subseteq A \times A \to \mathrm{Rel}(R)$.Казваме ,че релацията R е транзитивна ако $\forall x \forall y \forall z((x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R)$ или $R \circ R \in R$.

Дефиниция:Нека A е множество и $R \subseteq A \times A$.Казваме ,че R е частична наредба в A ако R е рефлексивна ,антисиметрична и транзитивна.

Дефиниция:Наредената двойка $(A,\ \ R)$ наричаме частично наредено множество , когато A е множество , а R е частична наредба.

Дефиниция:Ако R е частична наредба в A и $x, y \in A$.Казваме ,че x и y са R-сравними , ако $(x, y) \in R$ или $(y, x) \in R$.

Дефиниция:Ако всеки два елемента от полето на релацията R са R-сравними то казваме ,че R е линейна наредба или

$(\forall x \in \mathrm{Fld}(R))(\forall y \in \mathrm{Fld}(R))((x, y) \in R \vee (y, x) \in R)$.

Твърдение:Нека A е множество и $A_1 \subseteq A$ и $(A,\ R)$ е частично наредено множество.Тогава $(A_1,\ R \cap (A_1 \times A_1))$ също в частично наредено множество.Като $R \cap (A_1 \times A_1)$ наричаме индуцирана наредба.

Ако $(A,\ R)$ е частично наредено множество следва ,че $(A,\ R^{-1})$ също е частично наредено множество.

Задача: Нека R е асиметрична .Да се докаже ,че R е иррефлексивна.

Решение: Да допуснем ,че R не е иррефлексивна , следователно

$(\exists x \in \mathrm{Fld}(R))((x, x) \in R)$, нека x_0 е такова ,че $(x_0, x_0) \in R$ тогава като

разменим координатите получаваме (x_0, x_0) , но $(x_0, x_0) \notin R$ получаваме

противоречие с допуснатото съществуване следователно R е иррефлексивна.

Задача: Да се докаже ,че $R \cup \mathrm{id}_{\mathrm{Fld}(R)}$ е антисиметрична т.с.т.к. R е

асиметрична.

9.2 Строги частични наредби

Дефиниция:Нека A е множество и $R \subseteq A \times A \to \mathrm{Rel}(R)$, R е частична наредба .Тогава $(A, R\backslash \mathrm{id}_A)$ наричаме строго частично наредено множество ,

а $R\backslash \mathrm{id}_A$ строга наредба.

Твърдение:$(A,\ R)$ (A-множество , $R \subseteq A \times A$- строга частична наредба) е строго частично наредено множество т.с.т.к.:

1)R е асиметрична релация

2)R е транзитивна релация.

Доказателство:

$(\Rightarrow)$ Нека (A, R') е частично наредено множество.От дефиницията имаме ,че

$(A, R\backslash \mathrm{id}_A)$ е строго частично наредено множество.От последната задача

в точка 9.1 следва ,че R е асиметрична.

Нека $(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \to (x,y) \in R' \wedge (y,z) \in R' \to (x,z) \in R'$.

Ако $x = z$, то $(x,y) \in R \wedge (z,y) \in R$ но $(y,z) \in R$, е което получаваме противоречие с това ,че R е асиметрична.Следователно $x \neq z$ т.е. $(x,z) \notin \mathrm{id}_A \to$

$(x,z) \in R \to$ R е транзитивна.

$(\Leftarrow)$Нека R е асиметрична и транзитивна , следователно $R \cap \mathrm{id}_A = \varnothing$ и от

гореспоменатата задача следва ,че $R \cup \mathrm{id}_A$ е антисиметрична и рефлексивна.

Трябва да покажем ,че $R \cup \mathrm{id}_A$ е транзитивна релация.Тогава ще имаме ,че

$(A, R \cup \mathrm{id}_A)$ е частично наредено множество ,а $R \cup \mathrm{id}_A$ частична наредба.

Нека $(x,y) \in (R \cup \mathrm{id}_A) \wedge (y,z) \in (R \cup \mathrm{id}_A) \to (x,z) \in R \vee (x,z) \in \mathrm{id}_A$.

в случая $(x,z) \in R$, което е изпълнено по условие.

в случая $(x,z) \in \mathrm{id}_A$, следователно $x = z$, но $(x,z) \notin R$ когато $x = z$.

Следва ,че или $(x,z) \in R$ или $(x,z) \in \mathrm{id}_A$.От $R \cap \mathrm{id}_A = \varnothing \to (R \cup \mathrm{id}_A)\backslash \mathrm{id}_A = R$,

следователно (A, R) е строго частично наредено множество.

Ако (A, R) е строго частично наредено множество то (A, R^{-1}) също е строго частично наредено множество.

Твърдение:Нека A е множество и $A_1 \subseteq A$ и (A, R) е строго частично наредено множество.Тогава $(A_1, R \cap (A_1 \times A_1))$ също в строго частично наредено множество.Като $R \cap (A_1 \times A_1)$ наричаме индуцирана наредба.

Дефиниция:Нека (A, R) е частично наредено множество и $A_0 \subseteq A$, $a_0 \in A$.

Казваме ,че a_0 е горна граница за A_0 в (A, R) когато $(\forall x \in A_0)((x, a_0) \in R)$.

Дефиниция:Нека (A, R) е частично наредено множество и $A_0 \subseteq A$, $a_0 \in A$.

Казваме ,че a_0 е долна граница за A_0 в (A, R) когато $(\forall x \in A_0)((a_0, x) \in R)$

(или a_0 е горна граница за A_0 в (A, R^{-1})).

Дефиниция:Казваме ,че A_0 е ограничено отгоре множество т.с.т.к.

съществува горна граница a_0 за A_0.

Дефиниция:Казваме ,че A_0 е ограничено отдолу множество т.с.т.к.

съществува долна граница a_0 за A_0.

Дефиниция:Нека (A, R) е частично наредено множество и $A_0 \subseteq A$.

Казваме ,че a_0 е най-голям елемент за A_0 в (A, R) ако $a_0 \in A_0$ и

$(\forall x \in A_0)((x, a_0) \in R)$.

Дефиниция:Нека (A, R) е частично наредено множество и $A_0 \subseteq A$.

Казваме ,че a_0 е най-малък елемент за A_0 в (A, R) ако $a_0 \in A_0$ и

$(\forall x \in A_0)((a_0, x) \in R)$.

Дефиниция:Нека (A, R) е частично наредено множество и $A_0 \subseteq A, a_0 \in A$.

Казваме , че a_0 е точна горна граница за A_0 в (A, R) ако a_0 е горна граница

за A_0 в (A, R) и a_0 е най-малък елемент в множеството на горните граници на

A_0 в (A, R).Бележим с : $\sup_R A_0 = a_0$.

Дефиниция:Нека (A, R) е частично наредено множество и $A_0 \subseteq A, a_0 \in A$. Казваме , че a_0 е точна долна граница за A_0 в (A, R) ако a_0 е долна граница за A_0 в (A, R) и a_0 е най-голям елемент в множеството на долните граници на A_0 в (A, R).Бележим с : $\inf_R A_0 = a_0$.

Дефиниция:Нека (A, R) е частично наредено множество.Казваме ,че a_0 е максимален елемент в (A, R) т.с.т.к. $a_0 \in A$ и $\neg\exists a((a_0, a) \in R \wedge a_0 \neq a)$.

Дефиниция:Нека (A, R) е частично наредено множество.Казваме ,че a_0 е минимален елемент в (A, R) т.с.т.к. $a_0 \in A$ и $\neg\exists a((a, a_0) \in R \wedge a_0 \neq a)$.

Дефиниция:Нека (A, R) е частично наредено множество.Верига(линейно наредена част) на (A, R) се нарича подмножеството B на A такова ,че всеки два негови елементи са R- сравними.
Тогава $(B, R \cap (B \times B))$ е линейно наредено множество.

Пример: Нека $(A, \subseteq_A)$ е частично наредено множество.Тогава ако D е верига и $D \subseteq A$ то $(\forall x \in D)(\forall y \in D)(x \subseteq y \vee y \subseteq x)$.

Нека (A, R) е частично наредено множество.Нека дефинираме следното множеството $C_R = \{A_0 | A_0 \subseteq A, A_0$ е верига в $(A, R)\}$.Тогава $(C_R, \subseteq_{C_R})$ е частично наредено множество , в което всяка верига има супремум.
Ще покажем ,че ако D е верига в $(C_R, \subseteq_{C_R})$, то $\cup D \in C_R$.Но първо ще покажем ,че $\cup D \subseteq A$ т.е. $\cup D$ е верига в (A, R).
Нека $x, y \in \cup D$.От $x \in \cup D$ избираме $D_1 \in D$ такова ,че $x \in D_1$,а от $y \in \cup D$ избираме $D_2 \in D$ такова ,че $y \in D_2$.Понеже D е верига в $(C_R, \subseteq_{C_R})$ и $D_1 \in D \wedge D_2 \in D \rightarrow (D_1 \subseteq D_2 \vee D_2 \subseteq D_1)$.
1) $D_1 \subseteq D_2 \rightarrow x \in D_2 \wedge y \in D_2$, но x и y са произволно избрани ,следователно

D_2 е верига в $(A, R) \rightarrow (x, y) \in R \vee x = y \vee (y, x) \in R$.

2) $D_2 \subseteq D_1 \rightarrow x \in D_1 \wedge y \in D_1$, но x и y са произволно избрани ,следователно D_1 е верига в $(A, R) \rightarrow (x, y) \in R \vee x = y \vee (y, x) \in R$.

10.Гъсти наредби.
Теорема на Кантор за изброимите гъсти линейни наредби

10.1 Гъсти наредби

Дефиниция:Нека A е множество и $R \subseteq A \times A \rightarrow \mathrm{Rel}(R)$.Казваме ,че (A, R) е гъсто линейно наредено множество ако R е линейна наредба и

$(\forall x \in A)(\forall y \in A)(x \neq y \wedge (x, y) \in R \Rightarrow \exists z((z \neq x) \wedge (z \neq y) \wedge (x, z) \in R \wedge (z, y) \in R)$.

Пример: $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ е гъсто линейно наредено множество.

Дефиниция:Нека (A, R) и (B, S) са частично наредени множества.Казваме, че те са изоморфни , ако съществува биекция $f\colon A \rightarrow B$ такава ,че $(\forall x \in A)(\forall y \in A)((x, y) \in R \Rightarrow (f(x), g(y)) \in S)$.Всяка такава функция f ще наричаме изоморфизъм от (A, R) в (B, S).

10.2 Теорема на Кантор за изброимите гъсти линейни наредби

Теорема(Теорема на Кантор за избоимите гъсти линейни наредби):

Всеки две гъсто линейно наредени множества ,които нямат най-малък нито най-голям елемент и са изброими са изоморфни.

Доказателство:Доказателството ще бъде изложено схематично.

Нека $(A,\ R)$ и $(B,\ S)$ са произволно избрани гъсто линейно наредени множества.Те са изброими , следователно може да бъдат записани в редица, чиито индекси са естествените числа.

(A,R): $a_0, a_1, a_2, \ldots$

(B,S): $b_0, b_1, b_2, \ldots$

За да покажем ,че (A,R) и (B,S) са изоморфни трябва да намерим изоморфизъм между тях.

Нека $f(a_0) = b_0$.

1 стъпка) Първия член на редицата $a_0, a_1, \ldots$, който не е в $\mathrm{Dom}(f)$:

-$(a_0, a_1) \in R$, взимаме най-малкото n_0 такова ,че $(b_0, b_{n_0}) \in S, n_0 \notin \{0\}$.

-$(a_1, a_0) \in R$, взимаме най-малкото n_0 такова ,че $(b_{n_0}, b_0) \in S, n_0 \notin \{0\}$.

дефинираме $f(a_1) = b_{n_0}$.

2 стъпка) Взимаме първия член на редицата $b_0, b_1, \ldots$, който още не е разгледан.В случая b_1.Трябва да се разгледат следните случаи:

$b_0 < b_1 < b_{n_0}, b_{n_0} < b_1 < b_0; b_1 < b_0 < b_{n_0}, b_1 < b_{n_0} < b_0; b_0 < b_{n_0} < b_1, b_{n_0} < b_0 < b_1;$

Където b_{n_0} е последния избран член на редицата $b_0, b_1, \ldots$ в стъпка 1.

При изпълняване на стъпка 1 и стъпка 2 изброимо много пъти ще постоим функция f която е биекция запазваща наредбата.

Задача:Нека $(A, \leqslant)$ е гъсто линейно наредено множество без пръв и последен елемент ,$(B, \leqslant)$ е гъсто линейно наредено множество без пръв и последен елемент , $\bar{\bar{A}} = \bar{\bar{B}}$, A и B са неизброими.Вярно ли е ,че $(A, \leqslant)$ и $(B, \leqslant)$ са изоморфни?

Решение: Трябва да намерим две такива наредби $\bar{\bar{A}} = \bar{\bar{B}} = \bar{\bar{\mathbb{R}}}$ такива ,че да няма изоморфизъм между тях.Да вземем следните две наредени множества $(\mathbb{R}, \preccurlyeq)$ и $(\mathbb{R}\backslash\{\sqrt{2}\}, \preccurlyeq)$ $(\mathbb{R}\backslash\{\sqrt{2}\} \sim \mathbb{R})$.

$(\mathbb{R}, \preccurlyeq)$ $\quad ------\cdot_a---\cdot_\alpha---\cdot_b-----$ и $a \preccurlyeq b$

$(\mathbb{R}\backslash\{\sqrt{2}\})$ $\quad ------) \circ_{\sqrt{2}} (------$

$\qquad\qquad\qquad\qquad A \qquad\qquad\qquad\qquad B$

A и B са два интервала обединението ,на които е $\mathbb{R}\backslash\{\sqrt{2}\}$.

Да допуснем ,че f е изомофризъм на $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}\backslash\{\sqrt{2}\}$.Тогава $f^{-1}[A]$ е множество ограничено отгоре ,а $f^{-1}[B]$ е множество ограничено отдолу.

Също така $f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B] = \varnothing$ и $f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B] = \mathbb{R}$.Нека $\alpha = \sup_{\mathbb{R}} f^{-1}[A]$.

Следователно имаме следните два случая : $f(\alpha) \in A$ или $f(\alpha) \in B$.

1) $f(\alpha) \in A \rightarrow (\forall a \in f^{-1}[A])(\alpha \succcurlyeq a) \rightarrow f(\alpha) \succcurlyeq f(a)$,но точна горна граница на A е $\sqrt{2}$, което не пренадлежи на A т.е. може да намерим число α': $\alpha \prec \alpha' \prec \sqrt{2}$, с което получаваме противоречие показващо ,че в този случай f няма къде да изобрази супремума на $f^{-1}[A]$, които е α.

2) $f(\alpha) \in B$, случая е аналогичен на първия.

Доказахме ,че ако две наредени множества са равномощни но не са изброими то те не са изоморфни.

Дефиниция:Нека $(A, \leqslant)$ е частично наредено множество.Казваме ,че f е автоморфизъм за $(A, \leqslant)$ ако f е изоморфизъм на $(A, \leqslant)$ в $(A, \leqslant)$.

Задача:

1.Колко са автоморфизмите за $(\mathbb{N}, \leqslant)$?

2.Колко са автоморфизмите за $(\mathbb{Z}, \leqslant)$?

3.Колко са автоморфизмите за $(\mathbb{Q}, \leqslant)$?

Решение:

1.$\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ е единствен автоморфизъм за $(\mathbb{N}, \leqslant)$.

2.Множеството на автоморфизмите за $(\mathbb{Z}, \leqslant)$ е с мощност $\bar{\bar{\mathbb{N}}}$.

Твърдение: Нека f е автоморфизъм за $(\mathbb{Z}, \leqslant)$.Тогава съществува $n \in \mathbb{Z}$ такова ,че $f = f_n (f_n(x) = x + n)$.

Подзадача: да се даде доказателство на горното твърдение.

3.Множеството на автоморфизмите за $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ е с мощност $\overline{\overline{\mathcal{P}(\mathbb{N})}} = \bar{\bar{\mathbb{R}}}$.

Трябва да намерим изоморфизъм запазващ наредбата в $\mathbb{Q}$.

Нека $f(x)=\begin{cases} a_x \, , x\in\mathbb{N} \\ f^k(x), x\in(k-1,k) \end{cases}$. Броя на редиците получен от f^k е $\mathbb{Q}\times\ldots\times\mathbb{Q}=$ $=\mathbb{Q}^w\sim R\sim\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Следното твърдение е било установено от Серпински.

Твърдение:Нека $\mathcal{A}=(\mathcal{P}(\mathbb{N}),\subseteq)$ е частично наредено множество.В $\mathcal{A}$ има верига с мощност $\overline{\overline{\mathcal{P}(\mathbb{N})}}=\bar{\bar{\mathbb{R}}}$.

Доказателство:

Фиксираме една наредба на $\mathbb{Q}$: $r_0, r_1, \ldots$

Нека $\alpha\in R$.Дефинираме $x_\alpha=\{n|r_n\leqslant\alpha\}\to x_\alpha\in\mathcal{P}(\mathbb{N})$.Ще покажем ,че за всяко $\alpha<\beta$, $x_\alpha\subset x_\beta$.Нека $r\in\mathbb{Q}$ и $\alpha<r<\beta$ то $r=r_{n_0}$ за някое $n_0\in N$.Тогава $n_0\notin x_\alpha$ и $n_0\in x_\beta\to x_\alpha\neq x_\beta$.Остава да видим ,че $x_\alpha\subseteq x_\beta$.Нека $n\in x_\alpha\to$ $r_n\leqslant\alpha<\beta\to r_n<\beta\to n\in x_\beta\to x_\alpha\subseteq x_\beta$.От $x_\alpha\subseteq x_\beta\wedge x_\alpha\neq x_\beta\to x_\alpha\subset x_\beta$.Тогава дефинираме следното множество $C=\{x_\alpha|\alpha\in\mathbb{R}\}\to C\sim\mathbb{R}\to x\in C\to x\in\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Избираме α и β , то $x=x_\alpha, y=x_\beta$:

- $\alpha=\beta\to x_\alpha=x_\beta$
- $\alpha<\beta\to x_\alpha\subset x_\beta$
- $\beta<\alpha\to x_\beta\subset x_\alpha$

Следователно имаме $x\subset y\vee x=y\vee y\subset x$ т.е. C е верига в $\mathcal{A}$.

Твърдение:Нека $A\subseteq\mathbb{R}$ е отворен интервал.Тогава A може да се представи като обединение на изброимо много непресичащисе отворени интервали.

Доказателство:Нека $A\subseteq\mathbb{R}$.

Нека дефинираме следните множества: $x\in A$.

$L_x=\{y\in R|y<x\wedge y\notin A\}$ и $R_x=\{y\in R|x<y\wedge y\notin A\}$.

- $L_x=R_x=\varnothing\to A=\mathbb{R}$
- $L_x=\varnothing\wedge R_x\neq\varnothing\to R_x$ е ограничено отдолу и $\beta=\inf R_x$.Тогава $(-\infty,\beta)\subseteq A$,

$\beta > x \wedge \beta \notin A$.Ако $\beta \in A$ то съществува околност на β в множеството A , следователно ще има по-голям елемент от β в $A \rightarrow \beta \notin A$.

$\bullet L_x \neq \varnothing \wedge R_x = \varnothing \rightarrow L_x$ е ограничено отгоре и $\alpha = \sup L_x \rightarrow (\beta, +\infty) \subseteq A, \alpha \notin A$.

$\bullet L_x \neq \varnothing \wedge R_x \neq \varnothing \rightarrow \alpha = \sup L_x \wedge \beta = \inf R_x$.Тогава $x \in (\alpha, \beta) \subseteq A$ и $\alpha, \beta \notin A$.

На всяко $x \mapsto (\alpha_x, \beta_x)$.Дефинираме множеството $B = \{(\alpha_x, \beta_x) | x \in A\}$.

Ще докажем ,че ако $I_1, I_2 \in B \rightarrow I_1 = I_2 \vee (I_1 \cap I_2 = \varnothing)$.Нека $I_1, I_2 \in B$ и $I_1 \neq I_2$.

Да допуснем ,че $I_1 \cap I_2 \neq \varnothing$.Нека изберем $x_0 \in (I_1 \cap I_2), x_0 \mapsto (\alpha_{x_0}, \beta_{x_0})$, но това е максималният интервал ,на който пренадлежи x_0 и $x_0 \in I_1 \cap I_2 \rightarrow I_1 = I_2$.

Следователно B е най-много изброимо защото е множество от непресичащисе интервали , и във всеки интервал има рационално число което му се съпоставя.Така се получава биекция $f: B \rightarrow \mathbb{Q}$, следователно $B \sim \mathbb{N}$.

Ще покажем ,че $A = \cup B$.

1.Нека $x \in A \rightarrow x \in (\alpha_x, \beta_x) \in B \rightarrow x \in \cup B \rightarrow A \subseteq \cup B$.

2.Нека $x \in \cup B \rightarrow$ съществува единствен интервал (α_x, β_x): $x \in (\alpha_x, \beta_x) \subseteq A \rightarrow$ $x \in A \rightarrow \cup B \subseteq A$.От 1 и 2 следва ,че $A = \cup B$.

Дефиниция:Нека $A \subseteq R$ и $\alpha \in R$.Казваме ,че α е точка на натрупване за A, ако $(\forall \varepsilon > 0)(O^{\varepsilon}(\alpha) \cap A)$ има неизброимо много точки ($O^{\varepsilon}(\alpha)$- околност с радиус ε на точката α).

Дефиниция: x е изолирана точка за множеството A ако съществува околност на x , O^{ε} такава ,че $O^{\varepsilon}(x) \cap A = \{x\}$.

Дефиниция: A е съвършенно множество ако е затворено без изолирани точки множество.

Твърдение: Нека A е затворено множество от реални числа.Тогава съществува единствена двойка от множества C, B такива ,че:

1.$A = C \cup B$.

2.C е съвършенно множество.

3.B е най-много изброимо и $B \cap C = \varnothing$.

Задача1:Нека A^C е множество от точки на натрупване за A.Да се докаже,че A^C е затворено и няма изолирани точки (е съвършенно).

Задача2:Всяко неизброимо множество има поне една точка на натрупваме.

Задача3: Ако A е затворено множество и $A^C \subseteq A$ то $A \backslash A^C$ е най-много изброимо.

Обединеното на решенията на горните 3 задачи предствлява доказателството на тръвдението.

Нека разгледаме следния интервал $C_0 = [0, 1]$.
Дефинираме $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ (махаме средната $\frac{1}{3}$ от интервала C_0).
Дефинираме $C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$(махаме средната $\frac{1}{3}$ от двата интервала образуващи C_1).
... т.н.
$C = \cap_{n=0}^{\infty} C_n$ е неизброимо множество и C е "празно" отвътре.Това се нарича Канторов прах.

11.Полурешетки и решетки ,лексикографско ,антилексикографско и канонично умножение и наредби ,добра наредба

11.1 Полурешетки и решетки

Дефиниция:Нека $\mathcal{A} = (A, \leqslant)$ и $\mathcal{B} = (B, \preccurlyeq)$ са частично наредени множества.

Казваме ,че f е изоморфизъм на $\mathcal{A}$ върху $\mathcal{B}$ ако $f\colon A\to B$ е биекция и $(\forall x\in A)(\forall y\in A)(x\leqslant y\Longleftrightarrow f(x)\preccurlyeq f(y))$.Казваме ,че f е изоморфно влагане на $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$ ако f е изоморфизъм на $\mathcal{A}$ върху индуцираното частично наредено множество $(f[A],\preccurlyeq\cap(f[A]\times f[A]))$.

Нека $\mathcal{A}=(A,\leqslant)$ е частично наредено множество и $a\in A$,ще дефинираме следното множество $O_a=\{x|x\in A\wedge x\leqslant a\}$.$O_a$ наричаме ляв отрез на A.

Имаме ,че $O_a\subseteq A\to O_a\in\mathcal{P}(A)$.Нека дефинираме следната функция: за $a\in A$ $f(a)=O_a$.Ще покажем ,че тя е инекция.Нека $O_a=O_b$,ще докажем ,че $a=b$.

От дефиницията на O_a , O_b имаме ,че $a\in O_a$ и $b\in O_b$ понеже $O_a=O_b\to a\in O_b$ $\to a\leqslant b$ и $b\in O_a\to a\leqslant b\to a=b\to f\colon A\to\mathcal{P}(A)$ е инекция.Ще покажем ,че f запазва наредбата т.е. $a\leqslant b\longleftrightarrow O_a\subseteq O_b$.

$(\to)$ Нека $a\leqslant b$ и $x\in O_a$ от дефиницията $\to x\leqslant a$ и от транзитивността $\to x\leqslant a\leqslant b\to x\leqslant b\to x\in O_b\to O_a\subseteq O_b$.

$(\leftarrow)$ Нека $O_a\subseteq O_b$.От дефиницията имаме $a\in O_a\to a\in O_b\to a\leqslant b$.

Следователно всяко частично наредено множество $(A,\leqslant)$ е изоморфно вложено в $(\mathcal{P}(A),\subseteq_{\mathcal{P}(A)})$.

Дефиниция:Нека $\mathcal{A}=(A,\leqslant)$ е частично наредено множество.Казваме ,че $\mathcal{A}$ е горна полурешетка ако $(\forall a\in A)(\forall b\in A)(\exists c(c=\sup\{a,b\}))$.Горната полурешетка е с единица ако $\exists$supA.А за операцията sup трябва да са в сила следните свойства:

1)$\sup\{a,a\}=a$ (идемпотентност)

2)$\sup\{a,b\}=\sup\{b,a\}$ (комутативност)

3)$\sup\{a,\sup\{b,c\}\}=\sup\{\sup\{a,b\},c\}$ (асоциативност)

4)$\sup\{a,\mathrm{supA}\}=\mathrm{supA}=1$ (свойство на единицата)

Нека дефинираме следната операция $\sup\{a,b\}=_{\mathrm{def}}a\sqcup b$.Тогава горните свойства могат да се запишат по следния начин:

Твърдение:Нека за $(A,\sqcup)\,,\sqcup\colon A\times A\to A$ са в сила свойствата 1,2 и 3.Тогава $\mathcal{A}=(A,\leqslant)$,където $a\leqslant b \leftrightharpoons a\sqcup b=b$ е горна полурешетка.

1)$a\sqcup a=a$ (идемпотентност)

2)$a\sqcup b=b\sqcup a$ (комутативност)

3)$a\sqcup(b\sqcup c)=(a\sqcup b)\sqcup c$ (асоциативност)

Ако $(A,\sqcup)$ има неутрален елемент то той е единица за $\mathcal{A}$ и е в сила:

4)$a\sqcup 1=1$ (свойство на единицата - най-големия елемент)

Доказателство:

Нека $a\in A$.Ще докажем ,че $a\sqcup a=a\ \to a\leqslant a$,което е вярно от свойството рефлексивност.Нека $a,b\in A$ и $a\leqslant b\wedge b\leqslant a\ \to a=b$ от свойството антисиметричност.От дефиницията $a\sqcup b=b$ и $b\sqcup a=a$ имаме ,че $b=a\sqcup b=b\sqcup a=a\to a=b$. От свойството транзитивност имаме $a\leqslant b\wedge b\leqslant c\Rightarrow a\leqslant c$.От дефиницията $a\sqcup b=b\,,b\sqcup c=c\ \to a\sqcup c=a\sqcup(b\sqcup c)=(a\sqcup b)\sqcup c=b\sqcup c=c\ \to a\leqslant c$.

Дефиниция:Нека $\mathcal{A}=(A,\leqslant)$ е частично наредено множество.Казваме ,че $\mathcal{A}$ е долна полурешетка ако $(\forall a\in A)(\forall b\in A)(\exists c(c=\inf\{a,b\}))$.Долната полурешетка е с нула ако $\exists$infA.А за операцията inf трябва да са в сила следните свойства:

1)$\inf\{a,a\}=a$ (идемпотентност)

2)$\inf\{a,b\}=\inf\{b,a\}$ (комутативност)

3)$\inf\{a,\inf\{b,c\}\}=\inf\{\inf\{a,b\},c\}$ (асоциативност)

4)$\inf\{a,\mathrm{infA}\}=\mathrm{infA}=0$ (свойство на единицата)

Твърдение:Нека за $(A,\sqcap)\,,\sqcap\colon A\times A\to A$ са в сила свойствата 1,2 и 3.Тогава $\mathcal{A}=(A,\leqslant)$,където $a\leqslant b \leftrightharpoons a\sqcap b=a$ е горна полурешетка.

1)$a\sqcap a=a$ (идемпотентност)

2)$a\sqcap b=b\sqcap a$ (комутативност)

3)$a\sqcap(b\sqcap c)=(a\sqcap b)\sqcap c$ (асоциативност)

Ако $(A,\sqcap)$ има неутрален елемент то той е нула за $\mathcal{A}$ и е в сила:

4)$a \sqcap 0 = 0$ (свойство на нулата - най-малкия елемент)

Дефиниция:$\mathcal{A}$ е решетка ,ако $\mathcal{A}$ е както горна така и долна полурешетка.

Дефиниция:Нека за $(A, \sqcup, \sqcap)$, $\sqcap: A \times A \rightarrow A$, $\sqcup: A \times A \rightarrow A$ са в сила свойствата 1,2,3,4,5,6,7 и 8.Тогава $\mathcal{A} = (A, \leqslant)$,където $a \leqslant b \leftrightharpoons a \sqcup b = b$ и
$a \leqslant b \leftrightharpoons a \sqcap b = a$ е решетка.

1)$a \sqcup a = a$ (идемпотентност)

2)$a \sqcup b = b \sqcup a$ (комутативност)

3)$a \sqcup (b \sqcup c) = (a \sqcup b) \sqcup c$ (асоциативност)

4)$a \sqcap a = a$ (идемпотентност)

5)$a \sqcap b = b \sqcap a$ (комутативност)

6)$a \sqcap (b \sqcap c) = (a \sqcap b) \sqcap c$ (асоциативност)

7)$a \sqcap (a \sqcup b) = a$ (закон за поглъщането)

8)$a \sqcup (a \sqcap b) = a$ (закон за поглъщането)

Континуална индукция

Нека $A \subseteq R$.

(1)$\exists a: (-\infty, a) \subseteq A$

(2) $\forall x((-\infty, x) \subseteq A \Rightarrow \exists y(x < y \wedge (-\infty, y) \subseteq A))$

тогава $A = R$.

11.2 Лексикографско ,антилексикографско и канонично умножение и наредби ,добра наредба

Дефиниция:Нека $(A_1, \leqslant_1)$ и $(A_2, \leqslant_2)$ са частично наредени множества.

Дефинираме сума на тези частично наредени множества по следния начин:

нека $A_1' = A_1 \times \{1\}$ и $A_2' = A_2 \times \{2\}$ като $(A_1', \leqslant_1')$: $(a,1) \leqslant_1' (b,1) \leftrightharpoons a \leqslant_1 b$ и $(A_2', \leqslant_2')$: $(c,2) \leqslant_2' (d,2) \leftrightharpoons c \leqslant_2 d$.Като $A_1' \cap A_2' = \varnothing$ тогава $(A_1, \leqslant_1) \oplus (A_2, \leqslant_2) \leftrightharpoons$ $(A_1' \cup A_2', \leqslant)$: $(x,i) \leqslant (y,j) \leftrightharpoons \begin{cases} x \leqslant_1 y & , i = j = 1 \\ x \leqslant_2 y & , i = j = 2 \\ x = x & , i = 1, j = 2 \end{cases}$.Като се прави проверка ,че $(A_1' \cup A_2', \leqslant)$ е частично наредено множество.

Дефиниция:Нека $\mathcal{A}_1 = (A_1, \leqslant_1)$ и $\mathcal{A}_2 = (A_2, \leqslant_2)$ са частично наредени множества.Дефинираме $\mathcal{A}_1 \odot_K \mathcal{A}_2 \leftrightharpoons (A_1 \times A_2, \leqslant_K)$,където $(x_1, y_1) \leqslant_K (x_2, y_2) \leftrightharpoons (x_1 \leqslant_1 x_2) \wedge (y_1 \leqslant_2 y_2)$ се нарича по координатна наредба като $\mathcal{A}_1 \odot_K \mathcal{A}_2$ е частично наредено множество($\odot_K$ наричаме по координатно произведение).

Ако $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ са линейно наредени множества то не винаги $\mathcal{A}_1 \odot_K \mathcal{A}_2$ е линейно наредено множество.

Дефиниция:Нека $\mathcal{A}_1 = (A_1, \leqslant_1)$ и $\mathcal{A}_2 = (A_2, \leqslant 2)$ са частично наредени множества.Дефинираме $\mathcal{A}_1 \odot_l \mathcal{A}_2 \leftrightharpoons (A_1 \times A_2, \leqslant_l)$,където $(x_1, y_1) \leqslant_l (x_2, y_2) \leftrightharpoons (x_1 <_1 x_2) \vee ((x_1 = x_2) \wedge (y_1 \leqslant_2 y_2))$ се нарича лексикографска наредба като $\mathcal{A}_1 \odot_l \mathcal{A}_2$ е частично наредено множество($\odot_l$ наричаме лексикографско произведение).

Ако $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ са линейно наредени множества то $\mathcal{A}_1 \odot_l \mathcal{A}_2$ също е линейно наредено множество.

Дефиниция:Нека $\mathcal{A}_1 = (A_1, \leqslant_1)$ и $\mathcal{A}_2 = (A_2, \leqslant 2)$ са частично наредени множества.Дефинираме $\mathcal{A}_1 \odot_{\mathrm{al}} \mathcal{A}_2 \leftrightharpoons (A_1 \times A_2, \leqslant_{\mathrm{al}})$,където $(x_1, y_1) \leqslant_{\mathrm{al}} (x_2, y_2) \leftrightharpoons (y_1 <_2 y_2) \vee ((y_1 = y_2) \wedge (x_1 \leqslant_1 x_2))$ се нарича антилексикографска наредба като $\mathcal{A}_1 \odot_{\mathrm{al}} \mathcal{A}_2$ е частично наредено множество ($\odot_{\mathrm{al}}$ наричаме антилексикографско произведение).

Лесно се вижда ,че $\mathcal{A}_1 \odot_l \mathcal{A}_2 \cong \mathcal{A}_2 \odot_{\mathrm{al}} \mathcal{A}_1$.

Дефиниция:Нека $\mathcal{A} = (A, \leqslant)$ е частично наредено множество.Казваме ,че $\mathcal{A}$ е добре наредено множесто ако $\forall B(B \neq \varnothing \wedge B \subseteq A): B$ има най-малък елемент.

Твърдение:Ако $\mathcal{A}$ е добре наредено множество то $\mathcal{A}$ е линейно наредено.

Твърдение:Нека $(A, \leqslant)$ е добре наредено множество.Тогава $(A \times A, \leqslant_C)$ е добре наредено множество ,където

$(x_1, y_1) \leqslant_C (x_2, y_2) \leftrightharpoons (\max(x_1, y_1) < \max(x_2, y_2)) \vee (\max(x_1, y_1) = \max(x_2, y_2) \wedge (x_1 < x_2)) \vee (\max(x_1, y_1) = \max(x_2, y_2) \wedge x_1 = x_2 \wedge y_1 \leqslant y_2)$ ($\leqslant_C$ наричаме канонична наредба).

Дефиниция(Индукция по Пеано):Нека $A \subseteq \mathbb{N}$.Ако

1) $0 \in A$

2)$\forall x(x \in A \Rightarrow S(x) \in A)$.

Тогава $A = \mathbb{N}$.

Дефиниция(Обобщена Индукция):Нека $A \subseteq \mathbb{N}$.Тогава ако $\forall x(\forall y(y < x \Rightarrow y \in A) \Rightarrow x \in A)$,то $A = \mathbb{N}$.

Твърдение:Нека $\mathcal{A} = (A, <)$ е добре наредено множество и $B \subseteq A$ удовлетворява свойството $(\forall x \in A)((\forall y \in A)(y < x \Rightarrow y \in B) \Rightarrow x \in B)$.Тогава $B = A$.

(твърдението показва ,че във всяко добро наредено множество може да се прилага принципа на математическата индукция)

Доказателство:Нека B удовлетворява горното свойство.Да допуснем ,че $B \neq A$ т.е. $A \backslash B \neq \varnothing$.Понеже $\mathcal{A}$ е добре наредено множество ,следователно съществува най-малък елемент x_0 (спрямо наредбата $<$) в множеството $A\setminus B$.Допускаме ,че съществува елемент x' ,такъв че $x' < x_0 \wedge x' \notin B$.Но тогава $x' \in A\setminus B \wedge x' < x_0$,което противоречи на това ,че x_0 е най-малкия елемент на $A\setminus B$.Тогава според удовлетвореното от B свойство ,имаме щом всички елементи по-малки от x_0 пренадлежат на B следва ,че $x_0 \in B$,което показва, че $x_0 \notin A\setminus B$,което е в противоречие с допуснатото следователно $A\setminus B = \varnothing \rightarrow A = B$.

12.Ординални числа,основни свойства и трансфинитна индукция

12.1 Ординални числа

Нека x е множество дефинираме $(x,\ \varepsilon_x)$ като наредено спрямо следната наредба, $\varepsilon_x \leftrightharpoons \{(y,z) | (y \in x \wedge z \in x) \wedge y \in z\}$.

Дефиниция(Епсилон Добра Наредба):

$$\mathrm{EWO}(x) \leftrightharpoons \forall y \forall z (y \in x \wedge z \in x \Rightarrow y \in z \vee y = z \vee z \in y) \wedge$$
$$\wedge \forall u (u \neq \varnothing \wedge u \subseteq x \Rightarrow \exists y (y \in u \wedge y \cap u = \varnothing))$$

Дефиниция:Казваме ,че x е ординално число ($\mathrm{Ord}(x)$) ако са в сила следните свойства $\mathrm{Trans}(x) \wedge \mathrm{EWO}(x)$.

12.2 Основни свойства

Свойства на ординалните числа:

α и β са ординални числа ,а x и y са множества.

$(\#)\, \alpha < \beta \leftrightharpoons \alpha \in \beta$; $\alpha \leqslant \beta \leftrightharpoons \alpha < \beta \vee \alpha = \beta$

1. $\alpha \notin \alpha$; $(\forall x)\neg(x \in \alpha \wedge \alpha \in x)$; $(\forall x \in \alpha)(\forall y \in \alpha)\neg(x \in y \wedge y \in x)$
2. $\alpha < \beta \wedge \beta < \gamma \Rightarrow \alpha < \gamma$
3. $\neg(\alpha < \alpha)$; $\alpha < \beta \Rightarrow \neg(\beta < \alpha)$
4. $\mathrm{Ord}(S(\alpha))$; $\alpha < S(\alpha)$; $\neg\exists\beta(\alpha < \beta \wedge \beta < S(\alpha))$
5. $x \in \alpha \Rightarrow \mathrm{Ord}(x)$
6. $x \subseteq \alpha \wedge \mathrm{Trans}(x) \Rightarrow x = \alpha \vee x \in \alpha$
7. $\alpha \leqslant \beta \Longleftrightarrow \alpha \subseteq \beta$
8. $\alpha < \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta < \alpha$
9. $\alpha < \beta \Longleftrightarrow S(\alpha) \leqslant \beta$
10. $(\forall y \in x)\mathrm{Ord}(y) \Rightarrow \mathrm{EWO}(x) \wedge \mathrm{Ord}(\cup x)$
11. $(\forall y \in x)\mathrm{Ord}(y) \Rightarrow$ "(x, ε_x) е добре наредено множество"
12. $(\forall y \in x)\mathrm{Ord}(y) \Rightarrow (\cup x \leqslant \beta \Longleftrightarrow (\forall \alpha \in x)(\alpha \leqslant \beta))$

Доказателство:

1)

1.1) $\alpha \notin \alpha$

Да допуснем ,че $\alpha \in \alpha$.Тогава $\{\alpha\} \subseteq \alpha$ и $\{\alpha\} \neq \varnothing$.Тогава $\exists y(y \in \{\alpha\} \wedge y \cap \{\alpha\} = \varnothing)$.Нека разгледаме едно такова $y \in \{\alpha\} : y \cap \{\alpha\} = \varnothing$.От $y \in \{\alpha\} \Rightarrow y = \alpha$ следователно $\alpha \in y$ и $\alpha \in \{\alpha\}$ от където следва $\alpha \in y \cap \{\alpha\}$,което е в противоречие с $y \cap \{\alpha\} = \varnothing$.

1.2) $(\forall x)\neg(x \in \alpha \wedge \alpha \in x)$

Нека Ord(α) и $x \in \alpha$.Да допуснем ,че $\alpha \in x$. $\alpha \in x$,$x \in \alpha$ и Ord(α) $\rightarrow$ Trans(α) $\rightarrow$ $\alpha \in \alpha$,което е противоречие.

1.3) $(\forall x \in \alpha)(\forall y \in \alpha)\neg(x \in y \wedge y \in x)$

Нека $x \in \alpha$, $y \in \alpha$ тогава $\{x, y\} \subseteq \alpha$, $\{x, y\} \neq \varnothing$.Тогава $\exists z(z \in \{x, y\} \wedge z \cap \{x, y\} = \varnothing)$.

Нека z е такова ,че $z \in \{x, y\}, z \cap \{x, y\} = \varnothing$.

- $z = x$ тогава $x \cap \{x, y\} = \varnothing \rightarrow y \notin x$
- $z = y$ тогава $y \cap \{x, y\} = \varnothing \rightarrow x \notin y$

2) се доказва чрез свойствата 1

3)

3.1) $\neg(\alpha < \alpha)$ следва от $\alpha \notin \alpha$ (св1.1)

3.2) $\alpha < \beta \Rightarrow \neg(\beta < \alpha)$ от св1

4)

4.1) Ord($S(\alpha)$)

Нека Ord(α) и $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ и Trans(α) $\rightarrow$ Trans($S(\alpha)$) (доказано в темата за транзитивни множества).Нека $x, y \in S(\alpha)$ са произволно избрани.Трябва да проверим $x \in y \vee x = y \vee y \in x$? От $x, y \in S(\alpha)$ следват 4 случая:

- $x, y \in \{\alpha\} \rightarrow x = y = \alpha$
- $x \in \alpha$, $y \in \alpha$. В този случай твърдението вярно защото Ord(α)
- $x \in \alpha$, $y \in \{\alpha\} \rightarrow y = \alpha \rightarrow x \in y$
- $y \in \alpha$, $x \in \{\alpha\} \rightarrow x = \alpha \rightarrow y \in x$

Нека $u \neq \varnothing : u \subseteq S(\alpha)$ е произволно избрано.Нека $u' = u \setminus \{\alpha\}$.

- $u' = \varnothing$.Тогава $u = \{\alpha\}, \alpha \in u$ и $\alpha \cap u = \alpha \cap \{\alpha\} = \varnothing$,защото $\alpha \notin \alpha$.
- $u' \neq \varnothing$.Тогава $u' \subseteq \alpha$ и имаме ,че Ord(α). Нека $y \in u'$ и $y \cap u' = \varnothing$.От $y \in u'$

$\rightarrow y \in u$.Ще докажем ,че $y \cap u = \varnothing$. $y \cap u \subseteq y \cap (u' \cup \{\alpha\}) = (y \cap u') \cup (y \cap \{\alpha\}) =$ $= y \cap \{\alpha\} = \varnothing \rightarrow y \cap u \subseteq \varnothing \rightarrow y \cap u = \varnothing$.От $y \in u'$, $u' \subseteq u \rightarrow y \in u$.

4.2) $\alpha < S(\alpha)$

Нека $\mathrm{Ord}(\alpha)$.От св 4.1 имаме ,че $\mathrm{Ord}(S(\alpha))$ и $\alpha \in S(\alpha)$ от дефиницията $(\#) \rightarrow$ $\alpha < S(\alpha)$.

4.3) $\neg\exists\beta(\alpha < \beta \wedge \beta < S(\alpha))$

Да допуснем противното ,че $\exists\beta(\alpha < \beta \wedge \beta < S(\alpha)) \rightarrow \alpha \in \beta \wedge \beta \in S(\alpha)$.

$S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\} \rightarrow \beta \in \alpha$,което противоречи на $\alpha \in \beta$ или $\beta = \alpha$,което противоречи на $\alpha \in \beta$.

5) $x \in \alpha \Rightarrow \mathrm{Ord}(x)$

Нека $x \in \alpha$.Трябва да покажем ,че $\mathrm{Trans}(x)$.Нека $z \in y$ и $y \in x$ са произволно избрани и трябва да докажем ,че $z \in x$.Имаме ,че $x \in \alpha$ и $\mathrm{Trans}(\alpha) \rightarrow x \subseteq \alpha \rightarrow$ $y \in \alpha \rightarrow y \subseteq \alpha \rightarrow z \in \alpha \rightarrow x, y, z \in \alpha$.Следователно имаме $x \in z \vee x = z \vee z \in x$.

- $x = z$ тогава имаме $x \in y \wedge y \in x$ и $x, y \in \alpha$ което е противоречие със св1.
- $x \in z$ тогава $\varnothing \neq \{x, y, z\} \subseteq \alpha \rightarrow \exists v(v \in \{x, y, z\} \wedge v \cap \{x, y, z\} = \varnothing)$.
  - $v = x$ имаме $y \in x = v$ и $y \in \{x, y, z\} \rightarrow y \in v \cap \{x, y, z\} = \varnothing$- абсурд
  - $v = y$ имаме $z \in y = v$ и $z \in \{x, y, z\} \rightarrow z \in v \cap \{x, y, z\} = \varnothing$ - абсурд
  - $v = z$ имаме $x \in z = v$ и $x \in \{x, y, z\} \rightarrow x \in v \cap \{x, y, z\} = \varnothing$ - абсурд

$\rightarrow z \in x \rightarrow \mathrm{Trans}(x)$.

Нека $y, z \in x$ трябва да покажем ,че $y \in z \vee y = z \vee z \in y$? Имаме $x \in \alpha \rightarrow x \subseteq \alpha$ и $y, z \in x \rightarrow y, z \in \alpha \rightarrow y \in z \vee y = z \vee z \in y$.

Нека $u \neq \varnothing : u \subseteq x$ е произволно избрано.Трябва да покажем ,че $\exists y(y \in u \wedge y \cap u = \varnothing)$.От $x \in \alpha \rightarrow x \subseteq \alpha$ и $u \subseteq x \rightarrow u \subseteq \alpha \rightarrow$ твърдението е изпълнено.

6) $x \subseteq \alpha \wedge \mathrm{Trans}(x) \Rightarrow x \in \alpha \vee x = \alpha$

Нека $u = \alpha \backslash x$.

- $u = \varnothing$ тогава $x = \alpha$
- $u \neq \varnothing$ и $u \subseteq \alpha$.Тогава вземаме $y : y \in u$ и $y \cap u = \varnothing$.Твърдим ,че $x = y$.
  - (1) $z \in x \rightarrow z \in \alpha$ и $y \in \alpha \rightarrow y \in z \vee y = z \vee z \in y$
    - $y = z \rightarrow y \in x \rightarrow y \notin u$ - противоречие
    - $y \in z$ и $z \in x$, $\mathrm{Trans}(x) \rightarrow y \in x \Rightarrow y \notin u$ - абсурд

    $\rightarrow z \in y \rightarrow x \subseteq y$

(2) $z \in y, y \in \alpha \to z \in \alpha$.Допускаме ,че $z \notin x$.Тогава $z \in u$(от $z \in \alpha$ и $z \notin x$)

$\to z \in y \cap u = \varnothing$ - абсурд $\quad \to z \in x \to y \subseteq x \to y = x$.

От $x = y, y \in u, u \subseteq \alpha \to x \in \alpha$.

7) $\alpha \leqslant \beta \Longleftrightarrow \alpha \subseteq \beta$

($\Rightarrow$) Нека $\alpha \leqslant \beta$. От (#) имаме $\alpha < \beta \vee \alpha = \beta \longleftrightarrow \alpha \in \beta \vee \alpha = \beta$.От $\alpha \in \beta \to \alpha \subset \beta$ и от $\alpha = \beta \to \alpha \subseteq \beta$.

($\Leftarrow$) Нека $\alpha \subseteq \beta$ и от Trans$(\beta) \to \alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \to \alpha < \beta \vee \alpha = \beta \to \alpha \leqslant \beta$.

8) $\alpha < \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta < \alpha$

Нека Ord(α) и Ord(β) и $x = \alpha \cap \beta$.От $\begin{cases} \text{Trans}(x) \\ x \subseteq \alpha \end{cases} \to x = \alpha \vee x \in \alpha$ и $\begin{cases} \text{Trans}(x) \\ x \subseteq \beta \end{cases} \to$

$x = \beta \vee x \in \beta$.

- $x = \alpha$ и $x = \beta \to \alpha = \beta$
- $x = \alpha$ и $x \in \beta \to \alpha \in \beta \to \alpha < \beta$
- $x \in \alpha$ и $x = \beta \to \beta \in \alpha \to \beta < \alpha$
- $x \in \alpha$ и $x \in \beta \to x \in \alpha \cap \beta \to x \notin x$ и Ord(x) - абсурд.

9) $\alpha < \beta \Longleftrightarrow S(\alpha) \leqslant \beta$

($\Rightarrow$) Нека $\alpha < \beta \to \alpha \in \beta$. Имаме $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$.

$x \in S(\alpha)$ е произволно избрано $\to \begin{cases} x \in \alpha \to x \in \beta \\ x = \alpha \to x \in \beta \end{cases} \to S(\alpha) \subseteq \beta \to S(\alpha) \leqslant \beta$.

($\Leftarrow$) Нека $S(\alpha) \leqslant \beta \to S(\alpha) \subseteq \beta$ т.е. $\alpha \cup \{\alpha\} \subseteq \beta$.Имаме $\alpha \in \alpha \cup \{\alpha\} \to \alpha \in \beta \to \alpha < \beta$.

10) $(\forall y \in x)\text{Ord}(y) \Rightarrow \text{EWO}(x) \wedge \text{Ord}(\cup x)$

Нека $(\forall y \in x)\text{Ord}(y)$.

EWO(x): Нека $y', y'' \in x$ произволно избрани.Тогава Ord(y') и Ord$(y'') \to$

$y' < y'' \vee y' = y'' \vee y'' < y' \longleftrightarrow y' \in y'' \vee y' = y'' \vee y'' \in y'$.

Нека $u \neq \varnothing : u \subseteq x$ произволно избрано.Избираме произволно $\alpha \in u$.Нека

$u' = \alpha \cap u$:

- $u' = \varnothing$ тогава $\alpha \in u$ и $\alpha \cap u = \varnothing$

$\bullet u' \neq \varnothing \to u' \subseteq \alpha$. Избираме $y \in u' \wedge y \cap u' = \varnothing$.Имаме $y \in u'$, $u' \subset u \to y \in u$.

Твърдим ,че $y \cap u = \varnothing$.Да допуснем ,че $y \cap u \neq \varnothing$.Нека $z \in y \cap u \to z \in u \subseteq x \to$ $z \in x \to \mathrm{Ord}(z)$ или $z \in y \to z \in u' \to z \in u \to z \notin \alpha \to \neg(z < \alpha) \to z = \alpha \vee \alpha < z \to$ $z = \alpha \vee \alpha \in z$.

- $z = \alpha \to \alpha \in y \cap u$ и $y \in u' = u \cap \alpha \to y \in \alpha$ - абсурд
- $\alpha \in z \to \alpha \in y$ (защото $z \in y \cap u$) $\to \alpha \in y$ и $y \in u' = u \cap \alpha \to y \in \alpha \to$ противоречие със св1

$\mathrm{Ord}(\cup x)$:

$(\forall y \in x)\mathrm{Trans}(y) \Rightarrow \mathrm{Trans}(\cup x)$: Нека $z_1 \in z_2, z_2 \in \cup x$ са произволно избрани.

Избираме $y \in x$: $z_2 \in y \to \mathrm{Ord}(y) \to \mathrm{Trans}(y) \to z_1 \in y \to z_1 \in \cup x$.

$\mathrm{EWO}(\cup x)$: Нека $Z = \{z | z \in y \wedge y \in x\} = \cup x$.Имаме $(\forall z \in Z)\mathrm{Ord}(z) \to$ $(\forall z \in Z)\mathrm{EWO}(z) \to \mathrm{EWO}(\cup x)$.

$\to \mathrm{Ord}(\cup x)$.

11) $(\forall y \in x)\mathrm{Ord}(y) \Rightarrow$ “(x, ε_x) е добре наредено множество”

Иррефлексивността на ε_x следва от св 1.1 ,асиметричността от св 1.2 и транзитивността от св2 $\to \varepsilon_x$ е строга наредба.

Нека $u \neq \varnothing$: $u \subseteq x$ е произволно избрано.Тогава u има най-малък елемент относно ε_x.Има y: $y \in u$, $y \cap u = \varnothing$.Твърдим ,че $(\forall z \in u)(y \varepsilon_x z \vee y = z)$. Имаме $z \in u \to \mathrm{Ord}(z)$, $\mathrm{Ord}(y) \to z < y \vee z = y \vee y < z \to z \varepsilon_x y \vee z = y \vee y \varepsilon_x z$,където $z \varepsilon_x y$ е невъзможно.

Твърдение: Нека x е множество от ординали.Тогава съществува ординал β такъв ,че $(\forall \alpha \in x)(\alpha < \beta)$ и в частност $\beta \notin x$: $\beta = S(\cup x)$.

12.3 Трансфинитна индукция

I форма: Нека $\varphi(\bar{u}\,,\alpha)$ е теоритико множествено свойство и $\mathrm{Ord}(\alpha),\mathrm{Ord}(\beta)$. Тогава $\exists\alpha\varphi(\bar{u}\,,\alpha)\Rightarrow\exists\alpha'(\varphi(\bar{u}\,,\alpha')\wedge\forall\beta(\beta<\alpha'\Rightarrow\neg\varphi(\bar{u}\,,\beta)))$.

Единственото α' : $\varphi(\bar{u}\,,\alpha')\wedge\forall\beta(\beta<\alpha'\Rightarrow\neg\varphi(\bar{u}\,,\beta))$ ще означаваме с $\mu\alpha[\varphi(\bar{u}\,,\alpha)]$.

Доказателство: Нека $\exists\alpha\varphi(\bar{u}\,,\alpha)$ и фиксираме $\bar{u}$.Избираме α_0: $\varphi(\bar{u}\,,\alpha_0)$. Нека $A=\{\alpha|\alpha<S(\alpha_0)\wedge\varphi(\bar{u}\,,\alpha)\}$.Имаме $\alpha_0\in A\rightarrow A\neq\varnothing$ (непразно множество от ординали).Нека $(A,<_A)$, $<_A\leftrightharpoons\{(\gamma_1,\gamma_2)|\gamma_1\in A\wedge\gamma_2\in A\wedge\gamma_1<\gamma_2\}$, α' е най-малкия елемент на A съгласно св11 и $\alpha'<S(\alpha_0)$, $\varphi(\bar{u}\,,\alpha')$.Нека $\beta<\alpha'$.Тогава $\beta<S(\alpha_0)$.Ако $\varphi(\bar{u}\,,\beta)\rightarrow\beta\in A\rightarrow\alpha'\leqslant\beta$ - абсурд $\rightarrow\neg\varphi(\bar{u}\,,\beta)$.

II форма: $\forall\alpha'((\forall\beta<\alpha')\psi(\bar{u}\,,\beta)\Rightarrow\psi(\bar{u}\,,\alpha'))\Rightarrow\forall\alpha\psi(\bar{u}\,,\alpha)$.

Доказателство: Прилагаме правилото от Математическата Логика за Контрапозиция $((A\Rightarrow B)\Longleftrightarrow(\neg B\Rightarrow\neg A))$.

13. Аксиомна схема за замяната и трансфинитна рекурсия

13.1 Аксиомна схема за замяната

Нека $\varphi(\bar{u}\,,x,y)$ е теоритико множествено свойство.Тогава с $F(x)$ ще означаваме формулната операция $\forall x\exists!y\varphi(\bar{u}\,,\ x,\ y)$ и $y\ \leftrightharpoons\ F_{\varphi(\bar{u})}(x)$.Формулата на формулната оперция $F\restriction A$ дефинираме като $\psi(\bar{u}\,,x,y)=(x\in A\wedge\varphi(\bar{u}\,,x,y))\vee$ $\vee(x\notin A\wedge y=\varnothing)$.

Аксиома 6 (Аксиомна схема за замяната): Нека $\varphi(\bar{u}\,, x, y)$ е теоритико множествено свойство и за някой избор на $\bar{u}$,$\varphi(\bar{u}\,, x, y)$ определя формулната операция $\forall x \exists ! y \varphi(\bar{u}\,, x, y)$.Тогава съществува множество $B: \forall y (y \in B \Longleftrightarrow \exists x (x \in A \wedge \varphi(\bar{u}\,, x, y)))$.

От Аксиомната схема за замяната имаме:

$F \restriction A = \{(x, y) | x \in A \wedge \varphi(\bar{u}\,, x, y)\}$ е функция .

$F[A] = \{y | x \in A \wedge \varphi(\bar{u}\,, x, y)\}$ е множество (образ на A).

$\exists B \forall z (z \in B \Longleftrightarrow \exists x \exists y (z = (x, y) \wedge x \in A \wedge y = F(x)))$.

13.2 Трансфинитна рекурсия

Трансфинитна рекурсия:Нека при някой набор от параметри $\bar{u}$,$\varphi(\bar{u}\,, x, y)$ определя формулна операция $G(\bar{u}\,, x)$.Тогава съществува формулна операция F ,такава че $\forall \alpha (F(\alpha) = G(\bar{u}\,, F \restriction \alpha))$,където $\mathrm{Ord}(\alpha)$.При това F е единствена в следния смисъл: ако за $i = 1, 2$ $\forall \alpha (F_i(\alpha) = G(\bar{u}\,, F_i \restriction \alpha))$ то $\forall \alpha (F_1(\alpha) = F_2(\alpha))$.

Пример:

$F(0) = G(\bar{u}\,, F \restriction 0) = G(\bar{u}\,, \varnothing)$

$F(1) = G(\bar{u}\,, F \restriction 1) = G(\bar{u}\,, \{(0, F(0))\})$

$F(2) = G(\bar{u}\,, F \restriction 2) = G(\bar{u}\,, \{(0, F(0)), (1, F(1))\})$

...

$F(n) = G(\bar{u}\,, F \restriction n) = G(\bar{u}\,, \{(0, F(0)), ..., (n-1, F(n-1))\})$

... и т.н.

Доказателство(Трансфинитна рекурсия):

Единственост: Нека $i = 1, 2$ и $\forall \alpha (F_i(\alpha) = G(\bar{u}\,, F_i \restriction \alpha))$. Да допуснем ,че $\exists \alpha (F_1(\alpha) \neq F_2(\alpha))$.Нека $\alpha_0 = \mu \alpha [F_1(\alpha) \neq F_2(\alpha)]$ и $F_1(\alpha)$ е определена от

$\psi_1(\bar{u}, \alpha, z)$,а $F_2(\alpha)$ е определена от $\psi_2(\bar{u}, \alpha, z)$.Тогава $\exists z_1 \exists z_2 (z_1 \neq z_2 \wedge \psi_1(\bar{u}, \alpha, z_1) \wedge \psi_2(\bar{u}, \alpha, z_2))$.Имаме $(\forall \beta < \alpha_0) \neg (F_1(\beta) \neq F_2(\beta)) \rightarrow (\forall \beta < \alpha_0)(F_1(\beta) = F_2(\beta))$

$\rightarrow F_1 \upharpoonright \alpha_0 = F_2 \upharpoonright \alpha_0 \rightarrow F_1(\alpha_0) = G(\bar{u}, F_1 \upharpoonright \alpha_0) = G(\bar{u}, F_2 \upharpoonright \alpha_0) = F_2(\alpha_0) \rightarrow$

$F_1(\alpha_0) = F_2(\alpha_0)$,което е в противоречие с $\alpha_0 = \mu\alpha[F_1(\alpha) \neq F_2(\alpha)]$.

Дефиниция:Нека $\mathrm{Comp}(\bar{u}, \alpha, f) \leftrightharpoons \mathrm{Func}(f) \wedge (\mathrm{Dom}(f) = S(\alpha)) \wedge (\forall \beta \leqslant \alpha)(f(\beta) = G(\bar{u}, f \upharpoonright \beta))$.Ако е вярно $\mathrm{Comp}(\bar{u}, \alpha, f)$ за някое f ,то f наричаме α-пресмятане.

Свойства:

1.$\mathrm{Comp}(\bar{u}, \alpha, f) \Rightarrow (\forall \beta \leqslant \alpha)\mathrm{Comp}(\bar{u}, \beta, f \upharpoonright S(\beta))$

Доказателство:

Нека $\mathrm{Comp}(\bar{u}, \alpha, f) \rightarrow \mathrm{Func}(f) \wedge (\mathrm{Dom}(f) = S(\alpha)) \wedge (\forall \beta \leqslant \alpha)(f(\beta) = G(\bar{u}, f \upharpoonright \beta))$

и $\mathrm{Ord}(\beta)$: $\beta \leqslant \alpha \rightarrow S(\beta) \leqslant S(\alpha) \rightarrow S(\beta) \subseteq S(\alpha) \rightarrow f \upharpoonright S(\beta)$ е функция и

$\mathrm{Dom}(f \upharpoonright S(\beta)) = S(\beta)$.Трябва да докажем ,че $(\forall \gamma \leqslant \beta)((f \upharpoonright S(\beta))(\gamma) = G(\bar{u}, (f \upharpoonright S(\beta)) \upharpoonright \gamma))$.Нека $\gamma \leqslant \beta, \beta \leqslant \alpha$.Тогава $(f \upharpoonright S(\beta))(\gamma) = f(\gamma)$ и $(f \upharpoonright S(\beta)) \upharpoonright \gamma = f \upharpoonright \gamma$

$\rightarrow (f \upharpoonright S(\beta))(\gamma) = f(\gamma) = G(\bar{u}, f \upharpoonright \gamma) = G(\bar{u}, (f \upharpoonright S(\beta)) \upharpoonright \gamma)$.

2.$\mathrm{Comp}(\bar{u}, \alpha, f) \wedge \mathrm{Comp}(\bar{u}, \alpha, \gamma) \Rightarrow f = g$

Доказателство: Нека $\mathrm{Comp}(\bar{u}, \alpha, f) \wedge \mathrm{Comp}(\bar{u}, \alpha, g) \rightarrow \mathrm{Func}(f), \mathrm{Func}(g)$ и

$\mathrm{Dom}(f) = S(\alpha) = \mathrm{Dom}(g)$.Да допуснем ,че $f \neq g \rightarrow \exists \alpha'(f(\alpha') \neq g(\alpha') \wedge \alpha' \leqslant \alpha)$.

Нека $\alpha_0 = \mu\alpha[f(\alpha) \neq g(\alpha)] \rightarrow f(\alpha_0) \neq g(\alpha_0)$, $\alpha_0 \in \mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(g) = S(\alpha) \rightarrow$

$\alpha_0 \leqslant \alpha$ и ако $\beta < \alpha_0 \rightarrow f(\beta) = g(\beta) \rightarrow f \upharpoonright \alpha_0 = g \upharpoonright \alpha_0$.Тогава при $\beta = \alpha_0$ имаме

$f(\alpha_0) = G(\bar{u}, f \upharpoonright \alpha_0) = G(\bar{u}, g \upharpoonright \alpha_0) = g(\alpha_0) \rightarrow f(\alpha_0) = g(\alpha_0)$ - противоречие.

3.$\mathrm{Comp}(\bar{u}, \alpha, f) \wedge \mathrm{Comp}(\bar{u}, \alpha', g) \Rightarrow f \subseteq g \vee g \subseteq f$

Доказателство:

- $\alpha = \alpha'$ - в този случай твърдението следва от св2
- $\alpha < \alpha'$ - ще докажем твърдението в този случай
- $\alpha' < \alpha$ - в този случай е аналогичен на случай 2

Нека $\alpha < \alpha' \rightarrow S(\alpha) \leqslant \alpha' \rightarrow g \upharpoonright S(\alpha)$ е α-пресмятане и f е α-пресмятане и от св2 следва ,че $g \upharpoonright S(\alpha) = f$,а $g \upharpoonright S(\alpha) \subseteq g \rightarrow f \subseteq g$.

4.$\forall\alpha\exists f\, \mathrm{Comp}(\bar{u}\,, \alpha, f)$

Доказателство:Чрез трансфинитна индукция.

Нека $\mathrm{Ord}(\alpha)$ и $(\forall\beta < \alpha)(\exists f\ \mathrm{Comp}(\bar{u}\,,\ \beta,\ f))$.Нека $\theta(\bar{u}\,,\ x,\ y) \leftrightharpoons (\mathrm{Ord}(x) \wedge \exists z\, \mathrm{Comp}(\bar{u}\,, x, z) \wedge \mathrm{Comp}(\bar{u}\,, x, y)) \vee (\mathrm{Ord}(x) \wedge \neg\exists z\, \mathrm{Comp}(\bar{u}\,, x, y)) \vee (\neg\mathrm{Ord}(x) \wedge y = \varnothing) \rightarrow \forall x\exists! y\theta(\bar{u}\,, x, y)$.

Единственост: Нека $\theta(\bar{u}\,, x, y_1)$ и $\theta(\bar{u}\,, x, y_2)$.

1. ако $\neg\mathrm{Ord}(x) \rightarrow y_1 = y_2 = \varnothing$

2. ако $\mathrm{Ord}(x) \wedge \neg\exists z\, \mathrm{Comp}(\bar{u}\,, x, z) \rightarrow y_1 = y_2 = \varnothing$

3. ако $\mathrm{Ord}(x) \wedge \exists z\, \mathrm{Comp}(\bar{u}\,, x, z) \wedge \mathrm{Comp}(\bar{u}\,, x, y_1) \wedge \mathrm{Comp}(\bar{u}\,, x, y_2)$,от св2 $\rightarrow$

$y_1 = y_2$

Съществуване: Нека $B = \{y | \exists x(x \in \alpha \wedge \theta(\bar{u}\,, x, y))\}$.Тогава имаме:

$\begin{cases} (\forall y \in B)(\exists\beta < \alpha)\mathrm{Comp}(\bar{u}, \beta, y) \\ (\forall\beta < \alpha)((\forall f)\mathrm{Comp}(\bar{u}, \beta, f)) \Rightarrow f \in B \end{cases}$ и $B = \theta(\bar{u}\,, x, y)[\alpha]$.

От $(\forall y \in B)\mathrm{Func}(y)$ и от св3 $\rightarrow (\forall y_1 \in B)(\forall y_2 \in B)(y_1 \subseteq y_2 \vee y_2 \subseteq y_1) \rightarrow \mathrm{Func}(\cup B)$ и ще покажем ,че$\mathrm{Dom}(\cup B) = \cup\{\mathrm{Dom}(y) | y \in B\} = \cup\{S(\beta) | \beta < \alpha\} = \alpha$.

Нека $\gamma \in \cup\ \{S(\beta) | \beta < \alpha\} \rightarrow$ избираме β_0: $\beta_0 < \alpha$ и $\gamma \in S(\beta_0) \rightarrow S(\beta_0) \leqslant \alpha \rightarrow S(\beta_0) \subseteq \alpha \rightarrow \gamma \in \alpha \rightarrow \cup\{S(\beta) | \beta < \alpha\} \subseteq \alpha$.

Нека $\gamma \in \alpha \rightarrow \gamma < \alpha$ и $\gamma < S(\gamma) \rightarrow \gamma \in S(\gamma) \rightarrow \gamma \in \cup\{S(\beta) | \beta < \alpha\}$ при $\beta = \gamma \rightarrow \alpha \subseteq \cup\{S(\beta) | \beta < \alpha\} \rightarrow \mathrm{Dom}(\cup B) = \alpha$.

Нека $g = \cup B \cup \{(\alpha, G(\bar{u}\,, \cup B))\}$.Имаме $\alpha \notin \mathrm{Dom}(\cup B) \rightarrow \mathrm{Func}(g)$ и $\mathrm{Dom}(g) = \mathrm{Dom}(\cup B) \cup \{\alpha\} = \alpha \cup \{\alpha\} = S(\alpha)$.

Нека $\beta \leqslant \alpha$

- $\beta = \alpha$: $g(\beta) = g(\alpha) = G(\bar{u}\,, \cup B) = G(\bar{u}\,, g \upharpoonright \alpha) = G(\bar{u}\,, g \upharpoonright \beta)$
- $\beta < \alpha$: $g(\beta) = (\cup B)(\beta)$ избираме f_0: $\mathrm{Comp}(\bar{u}\,, \beta, f_0) \rightarrow (\cup B)(\beta) = f_0(\beta) = G(\bar{u}\,, f_0 \upharpoonright \beta) = G(\bar{u}\,, g \upharpoonright \beta)$

$\rightarrow \mathrm{Comp}(\bar{u}\,, \alpha, g) \rightarrow \exists f\, \mathrm{Comp}(\bar{u}\,, \alpha, f)$.

5.Нека $\chi(\bar{u}\,, x, y) \leftrightharpoons \mathrm{Ord}(x) \wedge \exists f(\mathrm{Comp}(\bar{u}\,, x, f) \wedge y = f(x)) \vee (\neg\mathrm{Ord}(x) \wedge y = \varnothing)$.

Тогава $\forall x \exists ! y \chi(\bar{u}, x, y)$.

Доказателство:

Ще докажем ,че $\forall x \exists y \chi(\bar{u}, x, y)$ - съществуване:

- ако $\neg \mathrm{Ord}(x) \rightarrow y = \varnothing$

- ако $\mathrm{Ord}(x)$: съгласно св4 може да вземем $f\colon \mathrm{Comp}(\bar{u}, x, f)$ и $\mathrm{Dom}(f) = S(x) \ni x$ и $y \leftrightharpoons f(x)$

Ще докажем ,че $\chi(\bar{u}, x, y_1) \wedge \chi(\bar{u}, x, y_2) \Rightarrow y_1 = y_2$ - единственост:

- ако $\neg \mathrm{Ord}(x) \rightarrow y_1 = \varnothing$ и $y_2 = \varnothing \rightarrow y_1 = y_2$

- ако $\mathrm{Ord}(x) \rightarrow \exists f(\mathrm{Comp}(\bar{u}, x, f) \wedge y_1 = f(x))$ и $\exists f(\mathrm{Comp}(\bar{u}, x, f) \wedge y_2 = f(x))$.Нека $f_1\colon \mathrm{Comp}(\bar{u}, x, f_1) \wedge y_1 = f_1(x)$ и $f_2\colon \mathrm{Comp}(\bar{u}, x, f_2) \wedge y_2 = f_2(x)$.От св2 $\rightarrow f_1 = f_2$ и $y_1 = f_1(x) = f_2(x) = y_2 \rightarrow y_1 = y_2$.

Нека F е формула зададена с χ и α е ординал.Тогава $F(\alpha) = G(\bar{u}, F \restriction \alpha)$.

Доказателство: Избираме $f\colon \mathrm{Comp}(\bar{u}, \alpha, f) \Rightarrow F(\alpha) = f(\alpha)$.Нека $\beta < \alpha$.Тогава

$S(\beta) \leqslant \alpha$ и $\mathrm{Comp}(\bar{u}, \beta, f \restriction S(\beta)) \rightarrow F(\beta) = (f \restriction S(\beta))(\beta) = f(\beta) \rightarrow F \restriction \alpha = f \restriction \alpha$.

$F(\alpha) = f(\alpha) = G(\bar{u}, f \restriction \alpha) = G(\bar{u}, F \restriction \alpha)$.

Дефиниция: $\mathrm{Suc}(\alpha) \leftrightharpoons \exists \beta(\alpha = S(\beta))$ - α е непосредствен наследник(има непосредствен предшественик).

Дефиниция: $\mathrm{Lim}(\alpha) \leftrightharpoons \alpha \neq 0 \wedge \neg \mathrm{Suc}(\alpha)$ - α е граничен наследник (няма непосредствен предшественик).

От горните дефиниции имаме : $\forall \alpha \mathrm{Ord}(\alpha) \Rightarrow \alpha = 0 \vee \mathrm{Suc}(\alpha) \vee \mathrm{Lim}(\alpha)$.

Трансфинитна индукция(III форма):Нека $\varphi(\bar{u}, x)$ е теоритико множествено свойство и $\bar{u}$ са набор от параметри.Ако следните три условия се идовлетворяват :

- $\varphi(\bar{u}, 0)$
- $\forall \alpha(\varphi(\bar{u}, \alpha) \Rightarrow \varphi(\bar{u}, S(\alpha)))$

- $\forall\alpha(\mathrm{Lim}(\alpha)\wedge(\forall\beta<\alpha)\varphi(\bar{u}\,,\beta)\Rightarrow\varphi(\bar{u}\,,\alpha))$

Тогава $\forall\alpha\varphi(\bar{u}\,,\alpha)$.

Задача:Да се докаже ,че е в сила III форма на трансфинитната индукция.

Трансфинитна рекусрия(II форма):Нека за някой параметри $\bar{u}$: $G_1(\bar{u}\,,x)$ и $G_2(\bar{u}\,,x)$ са формули и A е множество.Тогава съществува единствена формулна операция F:

- $F(0)=A$
- $\forall\alpha(F(S(\alpha))=G_1(\bar{u}\,,F(\alpha)))$
- $\forall\alpha(\mathrm{Lim}(\alpha)\Rightarrow F(\alpha)=G_2(\bar{u}\,,F\restriction\alpha))$

Теорема:Нека $(A,\leqslant)$ е добре наредено множество.Тогава съществува единствени ординал α и изоморфизъм $f\colon\alpha\to A$, $(A\leqslant)\cong(\alpha,\leqslant_\alpha)$.

14.Равномощност на ординали ,операции с ординални числа , аксиома за безкрайност и аксиома за избора

14.1 Равномощност на ординали

В тази глава ще отроворим на въпроса ? $\forall\alpha\exists\beta(\bar{\bar{\alpha}}<\bar{\bar{\beta}})$,където α и β са ординали.Тогава различните по мощност ординали могат да бъдат представители за мощност на множествата ,които имат добра наредба.

Твърдение:За всяко множество A съществува ординал α ,такъв че не съществува инекция $f\colon\alpha\to A$; $\forall A\exists\alpha\neg\exists f(f\colon\alpha\to A, f$-инекция).

Доказателство:Нека A е произволно множество и $f\colon\alpha\to A$, f е инекция .

Тогава $f\colon\alpha\to f[\alpha]$ е биекция ,следователно едно такова ординално число α поражда добра наредба в подмножество на A.

Нека $B=\{\alpha|\exists R(R\in\mathcal{P}(A\times A)\wedge(\alpha,\leqslant)\cong(\mathrm{Dom}(R),R)\}$ и

$\mathcal{X}=\{R|R\in\mathcal{P}(A\times A)\times(\mathrm{Dom}(R),R)$ е добре наредено множество $\}$.

$G(x)=\begin{cases}\mu\alpha[(\alpha,\leqslant)\cong(\mathrm{Dom}(x),x)]\ ,\mathrm{Rel}(x)\wedge{}''(\mathrm{Dom}(x),x)\ e\,d.n.\mathrm{mn-vo}{}''\wedge\exists\alpha(\alpha,\leqslant)\cong(\mathrm{Dom}(x),x)\\ 0\ ,\ \mathrm{inache}\end{cases}$

Имаме $\forall x\,\mathrm{Ord}(G(x))$ и получаваме $(\forall x\in\mathcal{X})G(x)=\mu\alpha[(\alpha,\leqslant)\cong(\mathrm{Dom}(x),x)]$,то $\mathrm{Range}(G\restriction\mathcal{X})$ е множество от ординали.Тогава съществува ординал α_0 :

$\alpha_0\notin\mathrm{Range}(G\restriction\mathcal{X})$.Ще покажем ,че не съществува инекция f , $f\colon\alpha_0\to A$.

Ако има така инекция то $f[\alpha_0]\subseteq A$, $(f[\alpha_0],R)\cong(\alpha,\leqslant)$ и $R\in\mathcal{X}\to G(R)=\alpha_0$ - абсурд.

Дефинираме следната формулна операция:

$\mathcal{H}(A)\leftrightharpoons\mu\alpha[\neg\exists f(f\colon\alpha\to A)]\wedge(f$-инекция) и $\mathrm{Ord}(\mathcal{H}(A))$.Следователно $\overline{\overline{\mathcal{H}(A)}}\nleqslant\bar{\bar{A}}$ тогава $\overline{\overline{\mathcal{H}(\alpha)}}\nleqslant\alpha$ и $\mathrm{Ord}(\alpha)\to\bar{\bar{\alpha}}<\overline{\overline{\mathcal{H}(\alpha)}}$ и $\alpha<\mathcal{H}(\alpha)\to\forall\alpha\exists\beta(\alpha<\beta\wedge\bar{\bar{\alpha}}<\bar{\bar{\beta}})$.

Ще докажем ,че не съществува множество на всички неравномощни ординали.

Нека A е множество и $(\forall x\in A)\mathrm{Ord}(x)$ удовлетворчващо следните свойства:

$\forall\alpha\forall\beta(\alpha<\beta\wedge\beta\in A\Rightarrow\bar{\bar{\alpha}}<\bar{\bar{\beta}})$ и $\forall\alpha(\forall\beta(\beta<\alpha\Rightarrow\bar{\bar{\beta}}<\bar{\bar{\alpha}})\Rightarrow\alpha\in A)$.

Тогава имаме $\forall\alpha(\alpha\in\cup A)$ - абсурд.

Свойство: $(\alpha<\beta\wedge\beta<\mathcal{H}(\alpha)\Rightarrow\bar{\bar{\alpha}}=\bar{\bar{\beta}})$.

Имаме $\bar{\bar{\alpha}}\leqslant\bar{\bar{\beta}}$, следователно или $\bar{\bar{\alpha}}=\bar{\bar{\beta}}$ или $\bar{\bar{\alpha}}<\bar{\bar{\beta}}$.

Ако $\bar{\bar{\alpha}}<\bar{\bar{\beta}}$ то няма инекция от β в α $\to\mathcal{H}(\alpha)\leqslant\beta$ - абсурд ,следователно $\bar{\bar{\alpha}}=\bar{\bar{\beta}}$.

Дефиниция:Кардинално число наричаме такъв ординал ,който не е равномощен с никой по-малък от него: $\mathrm{Card}(\lambda)\leftrightharpoons\mathrm{Ord}(\lambda)\wedge\forall\alpha(\alpha<\lambda\Rightarrow\bar{\bar{\alpha}}<\bar{\bar{\lambda}})$.

Имаме ,че $\forall\alpha\ \mathcal{H}(a)$ е кардинално число ,следователно най-малкото кардинално число ,което е по-голямо от α.

$\forall A(\exists\lambda(\text{Card}(\lambda) \wedge \bar{\bar{\lambda}} = \bar{\bar{A}})$ е еквивалентно на $\exists R((A, R)$ е добре наредено множество) .

Дефиниция:Мощност на едно множество наричаме това кардинално число, което е равномощно с него.

14.2 Операции с ординални числа

Ще дефинираме операциите чрез трансфинитна рекурсия.

1) $\alpha + \beta$

$$\begin{cases} \bullet\ \alpha + 0 \leftrightharpoons \alpha \\ \bullet\ \alpha + S(\beta) \leftrightharpoons S(\alpha + \beta) \\ \bullet\ \text{Lim}(\beta) \Rightarrow \alpha + \beta = \cup\{\alpha + \gamma | \gamma < \beta\} \end{cases}$$

$\alpha + \beta \neq \beta + \alpha$

$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$

2) Свойства на ординалните числа като добри наредби.

- $(\alpha \oplus \beta, \preccurlyeq) \cong (\alpha + \beta, \leqslant)$
- $\alpha_1 < \alpha_2 \Longleftrightarrow \beta + \alpha_1 < \beta + \alpha_2$
- $\alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 + \beta \leqslant \alpha_2 + \beta$

3) $\alpha.\beta$

$$\begin{cases} \bullet\ \alpha.0 \leftrightharpoons 0 \\ \bullet\ \alpha.S(\beta) \leftrightharpoons (\alpha.\beta) + \alpha \\ \text{Lim}(\beta) \Rightarrow \alpha.\beta \leftrightharpoons \cup\{\alpha.\gamma | \gamma < \beta\} \end{cases}$$

$\alpha.\beta \neq \beta.\alpha$

$\alpha.(\beta.\gamma) = (\alpha.\beta).\gamma$

4) α^γ

$$\begin{cases} \bullet\ \alpha^0 \leftrightharpoons 1 \\ \bullet\ \alpha^{S(\beta)} \leftrightharpoons \alpha^\beta.\alpha \\ \bullet\ \mathrm{Lim}(\beta) \Rightarrow \alpha^\beta \leftrightharpoons \cup\{\alpha^\gamma | \gamma < \beta\} \end{cases}$$

5) $(\alpha \odot_{\mathrm{al}} \beta, \preccurlyeq_{\mathrm{al}}) \cong (\alpha.\beta, \leqslant)$

14.3 Аксиома за безкрайността

Аксиома 7 (Аксиома за безкрайността): $\exists \alpha \mathrm{Lim}(\alpha)$.

Тогава ω дефинираме така: $\omega \leftrightharpoons \mu\alpha[\mathrm{Lim}(\alpha)]$ и имаме следното свойство :
$\forall \beta \forall \gamma (\beta < \omega \wedge \gamma < \omega \Rightarrow \beta + \gamma < \omega \wedge \beta.\gamma < \omega \wedge \beta^\gamma < \omega)$.

Дефиниция:Едно множество x се нарича естествено число ако $x \in \omega$.

14.4 Аксиома за избора

Дефиниция: Нека A е множество.Казваме ,че f е функция на избора за A ако $f\colon \mathcal{P}(A) \backslash \{\varnothing\} \to A$ и $(\forall x \in \mathrm{Dom}(f))(f(x) \in x)$.Бележим това ,че f е функция на избора за множеството A с $Cf(A, f)$.

Аксиома 8 (Аксиома за избора (AC)): $\forall A \exists f Cf(A, f)$.

Теорема (Теорема на Цермело) : (AC) $\Longleftrightarrow \forall A \exists R((A, R)$ е добре наредено множество) .

Доказателство:

($\Leftarrow$) Нека за A изберем такова R ,че (A, R) е добре наредено множество.

Тогава търсената функция е :

$f \leftrightharpoons \{(x, y) | x \in \mathcal{P}(A) \backslash \{\varnothing\} \wedge y \in x \wedge \forall z (z \in x \Rightarrow (y, z) \in R)\}$.

($\Rightarrow$) Нека A е множество , $Cf(A, f)$ и $\infty \notin A$.

Дефинираме $F(\alpha) = \begin{cases} f(A \backslash \mathrm{Range}(F \upharpoonright \alpha)) \text{, ako } A \backslash \mathrm{Range}(F \backslash \alpha) \neq \varnothing \\ \infty \text{, inache} \end{cases}$.

Тогава имаме следните свойства:

$(\bullet)$ $\alpha_1 < \alpha_2 \wedge F(\alpha_2) \neq \infty \Rightarrow F(\alpha_1) \neq \infty$

$(\bullet)$ $\alpha_1 < \alpha_2 \wedge F(\alpha_2) \neq \infty \Rightarrow F(\alpha_1) \neq F(\alpha_2)$

$(\bullet)$ $\exists \alpha (F(\alpha) = \infty)$

и нека $\mu\alpha[F(\alpha) = \infty] = \alpha_0$.Тогава $F \upharpoonright \alpha_0$ е функция и $\mathrm{Dom}(F \upharpoonright \alpha_0) = \alpha_0$,

$\mathrm{Range}(F \upharpoonright \alpha_0) = A$ и $F \upharpoonright \alpha_0$ е инекция $\rightarrow$ $F \upharpoonright \alpha_0$ е биекция на α_0 върху A.

Дефинираме

$R = \{(x, y) | x, y \in A \wedge \exists \alpha_1 \exists \alpha_2 (\alpha_1 < \alpha_2 \wedge (F \upharpoonright \alpha_1)(\alpha_1) = \alpha_1 \wedge (F \upharpoonright \alpha_2)(\alpha_2) = y)\}$.

Тогава (A, R) е добре наредено множество.

Твърдение: $(\mathrm{AC}) \Longleftrightarrow \forall A \exists \alpha (A \sim \alpha)$.

Твърдение: $(\mathrm{AC}) \Longleftrightarrow \forall R (\mathrm{Rel}(R) \Rightarrow \exists f (\mathrm{Func}(f) \wedge f \subseteq R \wedge \mathrm{Dom}\,(R) = \mathrm{Dom}(f))$.

$(\mathrm{AC}) \Longleftrightarrow \forall f (\mathrm{Func}(f) \Rightarrow \exists A (A \subseteq \mathrm{Dom}(f) \wedge f \upharpoonright A$ е инекция $\wedge\ \mathrm{Range}(f \upharpoonright A) = \mathrm{Range}(f)))$.

Нека (A, R) е наредено множество и R е релация на еквивалентност.

Тогава за $x \in A$ дефинираме $[x]_R \leftrightharpoons \{y | x R y\}$ - клас на еквивалентност и

$A/_R \leftrightharpoons \{[x]_R | x \in A\}$ - фактор множество на A от R .Имаме ,че:

$\forall A \forall R (R$ е релация на еквивалентност в $A \Rightarrow \exists A_0 (A_0 \subseteq A \wedge (\forall x \in A)([x]_R \cap A_0$ е синглетон))) или $\forall A \forall R (R$ е релация на еквивалентност в $A \Rightarrow \exists f (f \colon A/_R \rightarrow A$ $\wedge\ f(x) \in x))$.

Твърдение: $\forall X((\forall x \in X)(x \neq \varnothing) \wedge (\forall x \in X)(\forall y \in X)(x \neq y \Rightarrow x \cap y = \varnothing) \Rightarrow \exists Y(\forall x \in A)(Y \cap x$ е синглетон$))$.

Лема (Лема на Цорн): Нека е в сила (AC) ,$\mathcal{X} = (X, R)$ е частично наредено множество и всяка верига в $\mathcal{X}$ има горна граница.Тогава в $\mathcal{X}$ има поне един максимален елемент.

Твърдение: (AC)$\Longleftrightarrow$ Нека $\mathcal{X} = (X, R)$ е частично наредено множество и всяка верига в $\mathcal{X}$ има горна граница.Тогава за всяко $a \in X$ съществува максимален елемент $b : (a, b) \in R$.

Лема (Лема на Куратовски): Нека $\mathcal{X} = (X, R)$ е частично наредено множество.Тогава в $(C(x), \subseteq)$ (верига) има максимален елемент т.с.т.к. $\mathcal{X} = (X, R)$ е частично наредено множество ,Y е верига в $\mathcal{X}$ и съществува максимална верига Y_0: $Y \subseteq Y_0$.

Твърдение: (AC)$\Longleftrightarrow \forall A \forall B(\bar{\bar{A}} \leqslant \bar{\bar{B}} \vee \bar{\bar{B}} \leqslant \bar{\bar{A}})$.

Дефиниция:Казваме ,че φ е междинно твърдение ако ZF $\vdash$ (AC) $\Rightarrow \varphi$, ZF $\vdash \varphi \Rightarrow$ (AC), ZF $\nvdash \varphi$ и ZF $\nvdash \neg\varphi$ (ZF - аксиоматична система на Цермело-Френкел ,а $\vdash$ - синтактично следване) .