Глава 6

Функционално поле на алгебрично многообразие. Локален пръстен на точка.

1. Регулярни и рационални функции. Функционално поле.

Определение 6.1. *Квази-афинно (квази-проективно) многообразие е непразно сечение $V \cap U$ на афинно (проективно) алгебрично многообразие V със Зариски отворено подмножество U на $\overline{k}^n$, съответно на $\mathbb{P}^n(\overline{k})$.*

Квази-афинните и квази-проективните многообразия $V \cap U$ са неприводими съгласно разглежданията от доказателството на Твърдение 5.32(iii).

Определение 6.2. *Нека $V \subseteq \overline{k}^n$ е квази-афинно многообразие, $p \in V$, а $W(p)$ е Зариски отворена околност на p, върху V. Функция $f : W(p) \to \overline{k}$ е регулярна в точка p, ако съществува Зариски отворена околност $W'(p) \subseteq W(p)$, в която $f = \frac{g}{h}$ се представя като частно на елементи $g, h \in \overline{k}[V]$ на афинния координатен пръстен $\overline{k}[V]$ на V с $h(p) \neq 0$.*

Определение 6.3. *Нека $V \subseteq \mathbb{P}^n(\overline{k})$ е квази-проективно многообразие, $p \in V$, а $W(p)$ е Зариски отворена околност на p върху V. Функция $f : W(p) \to \overline{k}$ е регулярна в точка p, ако за всички стандартни афинни отворени подмножества $U_i = \{x \in \mathbb{P}^n(\overline{k}) \mid x_i \neq 0\} \simeq \overline{k}^n$ на $\mathbb{P}^n(\overline{k})$ с $W(p) \cap U_i \neq \emptyset$, ограниченията $f : W(p) \cap U_i \to \overline{k}$ са регулярни в p функции.*

Определение 6.4. *Функция $f : W \to \overline{k}$ е регулярна в Зариски отворено подмножество W на квази-афинно или квази-проективно многообразие V, ако f е регулярна във всяка точка p на W.*

Пример 6.5. *Ако $X = \{(x, y) \in \overline{k}^2 \mid x^5 = y^2 + y\}$, то функцията $\frac{x}{y}$ не е регулярна върху точките $(a_1, 0) \in X$. Уравнението $x^5 = 0$ има единствено решение $x = 0$, така че $\frac{x}{y}$ е регулярна върху $X \setminus \{(0, 0)\}$. Функцията $\frac{y}{x}$ не е регулярна върху точките $(0, a_2) \in X$. Уравнението $y^2 + y = y(y + 1) = 0$ има две решения - $y_1 = 0$ и $y_2 = -1$, така че $\frac{y}{x}$ е регулярна върху $X \setminus \{(0, 0), (0, -1)\}$.*

Да разгледаме наредените двойки (W, f), където W е непразно Зариски отворено подмножество на квази-афинно или квази-проективно многообразие V, а $f : W \to \overline{k}$ е функция, регулярна в W. Двойките (W_1, f_1) и (W_2, f_2) са еквивалентни, $(W_1, f_1) \sim (W_2, f_2)$, ако съществува непразно Зариски отворено подмножество $\emptyset \neq W \subseteq W_1 \cap W_2$, върху което $f_1|_W \equiv f_2|_W$ съвпадат. Да отбележим, че сечението на непразни Зариски отворени подмножества W_1, W_2 на квази-афинно или квази-проективно многообразие V е непразно. В противен случай имаме разлагане $V = (V \setminus W_1) \cup (V \setminus W_2)$ в обединение на Зариски затворените $V \setminus W_j$ и $V = V \setminus W_j$ за някое $1 \leq j \leq 2$, съгласно неприводимостта на V. В резултат, $W_j = \emptyset$, което е противоречие. Твърдим, че определената по-горе релация $(W_1, f_1) \sim (W_2, f_2)$ е релация на еквивалентност. Ясно е, че $(W, f) \sim (W, f)$ и $(W_1, f_1) \sim (W_2, f_2)$ е равносилно на $(W_2, f_2) \sim (W_1, f_1)$. Ако $(W_1, f_1) \sim (W_2, f_2)$ и $(W_2, f_2) \sim (W_3, f_3)$, то избираме Зариски отворени

$\emptyset \neq W_{12} \subseteq W_1 \cap W_2$, $\emptyset \neq W_{23} \subseteq W_2 \cap W_3$ с $f_1|_{W_{12}} = f_2|_{W_{12}}$, $f_2|_{W_{23}} = f_3|_{W_{23}}$. В резултат, върху Зариски отвореното подмножество $\emptyset \neq W = W_{12} \cap W_{23}$ имаме $f_1|_W = f_2|_W = f_3|_W$, откъдето $(W_1, f_1) \sim (W_3, f_3)$. Оттук следва, че двойките (W, f) се разбиват на непресичащи се класове на еквивалентност $\overline{(W, f)}$. Определяме събиране и умножение на класове на еквивалентност $\overline{(W_j, f_j)}$ чрез техни представители

$$\overline{(W_1, f_1)} + \overline{(W_2, f_2)} := \overline{(W_1 \cap W_2, f_1 + f_2)}, \quad \overline{(W_1, f_1)}.\overline{(W_2, f_2)} := \overline{(W_1 \cap W_2, f_1 f_2)}.$$

Определението е коректно, т.е. не зависи от избора на представители на класовете на еквивалентност. По-точно, ако $(W_i, f_i) \sim (W_i', f_i')$ с $f_i|_{U_i} = f_i'|_{U_i}$ за Зариски отворени $\emptyset \neq U_i \subseteq W_i \cap W_i'$, то $\emptyset \neq U_o := U_1 \cap U_2 \subseteq (W_1 \cap W_1') \cap (W_2 \cap W_2')$ е непразно Зариски отворено подмножество на V, върху което $f_1 + f_2|_{U_o} = f_1' + f_2'|_{U_o}$, $f_1 f_2|_{U_o} = f_1' f_2'|_{U_o}$.

Лема-Определение 6.6. *Множеството $\overline{k}(V)$ на класовете на еквивалентност $\overline{(W, f)}$ е поле, което се нарича функционално поле на квази-афинното или квази-проективното многообразие V.*

Доказателство: Комутативните и асоциативните закони за събиране и умножение, както и дистрибутивният закон за събиране и умножение зависят от краен брой аргументи $\overline{(W_i, f_i)}$, $1 \leq i \leq m$ с $m = 2$ или $m = 3$. Съгласно неприводимостта на V, сечението $W = \cap_{i=1}^m W_i$ е непразно Зариски отворено подмножество на V и гореспоменатите аксиоми в $\overline{k}(V)$ се свеждат до съответните аксиоми в пърстена на функциите $W \to \overline{k}$. Нулевият елемент на $\overline{k}(V)$ е $\overline{(W, 0)}$, а единичният елемент е $\overline{(W, 1)}$ за произволно непразно Зариски отворено подмножество $W \subseteq V$. Всеки елемент $\overline{(W, f)}$ има противоположен $\overline{(W, -f)}$. Произволен елемент $\overline{(W, f)} \neq \overline{(W', 0)}$ има обратен $\overline{(W \setminus Z(f), f^{-1})}$, където $Z(f)$ е множеството на нулите на f. Зариски отвореното подмножество $W \setminus Z(f)$ на V е непразно, защото в противен случай $W \subseteq Z(f)$ и $f|_W \equiv 0$, противно на $\overline{(W, f)} \neq \overline{(W', 0)}$, Q.E.D.

Следствие 6.7. *Ако U е непразно Зариски отворено подмножество на квази-афинно или квази-проективно многообразие V, то функционалните полета на U и V съвпадат, $\overline{k}(U) = \overline{k}(V)$.*

Доказателство: Твърдим, че всяка двойка (W, f) върху U е двойка върху V. По определение, произволно Зариски отворено подмножество W на U е от вида $W = W' \cap U$ за Зариски отворено подмножество $W' \subseteq V$. Следователно W е Зариски отворено във V и (W, f) е двойка върху V. Оттук следва включването $\overline{k}(U) \subseteq \overline{k}(V)$. Обратно, всеки клас на еквивалентност $\overline{(W_o, f_o)} \in \overline{k}(V)$ има представител $\overline{(W_o \cap U, f_o)} \in \overline{k}(U)$, така че $\overline{k}(V) \subseteq \overline{k}(U)$ и $\overline{k}(V) = \overline{k}(U)$, Q.E.D. В частност, функционалното поле на проективно алгебрично многообразие $V \subseteq \mathbb{P}^n(\overline{k})$ съвпада с функционалното поле $\overline{k}(V \cap U_i)$ на сечението $V \cap U_i$ на V с произволно стандартно афинно отворено подмножество U_i, стига $V \cap U_i \neq \emptyset$.

2. Локален пръстен

Лема-Определение 6.8. *За произволна точка p на квази-афинно или квази-проективно многообразие V, класовете на еквивалентност $\overline{(W, f)} \in \overline{k}(V)$ с $p \in W$ образуват локален подпръстен $\mathcal{O}_p(V)$ на $\overline{k}(V)$ с максимален идеал*

$$\mathfrak{M}_p(V) = \{\overline{(W, f)} \in \overline{k}(V) \quad | \quad p \in W, \quad f(p) = 0\}. \tag{6.1}$$

Пръстенът $\mathcal{O}_p(V)$ се нарича локален пръстен на точката p във V.

Доказателство: Подмножеството $\mathcal{O}_p(V)$ на $\overline{k}(V)$ е затворено относно изваждане и умножение, т.е.

$$\overline{(W_1, f_1)} - \overline{(W_2, f_2)} = \overline{(W_1 \cap W_2, f_1 - f_2)} \in \mathcal{O}_p(V),$$

$$\overline{(W_1, f_1)}.\overline{(W_2, f_2)} = \overline{(W_1 \cap W_2, f_1 f_2)} \in \mathcal{O}_p(V) \quad \text{за} \quad \forall \overline{(W_j, f_j)} \in \mathcal{O}_p(V),$$

защото от $p \in W_1$ и $p \in W_2$ следва $p \in W_1 \cap W_2$. Следователно $\mathcal{O}_p(V)$ е подпръстен на $\overline{k}(V)$.
Елементът $\overline{(W, f)} \in \mathcal{O}_p(V)$ е обратим в $\mathcal{O}_p(V)$, ако съществува обратен елемент $\overline{(W \setminus Z(f), f^{-1})} \in \overline{k}(V)$ с $p \in W \setminus Z(f)$. С други думи, $\overline{(W, f)} \in \mathcal{O}_p(V)^*$ точно когато $f(p) \neq 0$ или необратимостта на $\overline{(W, f)} \in \mathcal{O}_p(V)$ в $\mathcal{O}_p(V)$ е еквивалентна на $\overline{(W, f)} \in \mathfrak{M}_p(V)$. По този начин, всеки собствен идеал в $\mathcal{O}_p(V)$ се съдържа в $\mathfrak{M}_p(V)$ и $\mathfrak{M}_p(V)$ е единственият максимален идеал на $\mathcal{O}_p(V)$, Q.E.D.
От Следствие 6.7 и Лема-Определение 6.8 получаваме непосредствено следното

Следствие 6.9. *За произволно непразно Зариски отворено подмножество U на квази-афинно или квази-проективно многообразие V и произволна точка $p \in U$, локалният пръстен на p в U съвпада с локалния пръстен на p във V, $\mathcal{O}_p(U) = \mathcal{O}_p(V)$.*
В частност, за произволно квази-проективно многообразие $V \subset \mathbb{P}^n(\overline{k})$ и произволно стандартно афинно отворено подмножество $U_i \subset \mathbb{P}^n(\overline{k})$, съдържащо точката $p \in V$, локалните пръстени $\mathcal{O}_p(V) = \mathcal{O}_p(V \cap U_i)$ съвпадат.

Определение 6.10. *Локалният пръстен на непразно Зариски отворено подмножество U на квази-афинно или квази-проективно многообразие V се определя като сечението*

$$\mathcal{O}_U(V) = \cap_{p \in U} \mathcal{O}_p(V)$$

на локалните пръстени на всичките му точки.

По този начин, за произволно Зариски отворено подмножество U на квази-афинно или квази-проективно многообразие V и произволна точка $p \in U$ са в сила включванията на пръстени

$$\mathcal{O}_V(V) \subseteq \mathcal{O}_U(V) \subseteq \mathcal{O}_p(V) \subseteq \overline{k}(V).$$

3. Връзка между афинния координатен пръстен, локалните пръстени и функционалното поле на афинно многообразие.

Определение 4.38 въведе понятията афинен координатен пръстен на афинно алгебрично множество $V \subseteq \overline{k}^n$ и афинен координатен пръстен над k на афинно алгебрично множество V/k, определено над k. За да опишем връзките между афинния координатен пръстен $\overline{k}[V]$ на афинно алгебрично многообразие V, функционалното поле $\overline{k}(V)$ и локалните пръстени $\mathcal{O}_p(V)$ на $p \in V$ доказваме съвпадението на афинните координатни пръстени на квази-афинно многообразие и негово непразно Зариски отворено подмножество.

Лема 6.11. *(i) Ако $V \subseteq \overline{k}^n$ е квази-афинно многообразие, а $U \subseteq \overline{k}^n$ е Зариски отворено подмножество с $V \cap U \neq \emptyset$, то афинните координатни пръстени $\overline{k}[V] = \overline{k}[V \cap U]$ на V и $V \cap U$ съвпадат.*
(ii) Ако $V/k \subseteq \overline{k}^n$ е квази-афинно многообразие, определено над k, а $U \subseteq \overline{k}^n$ е Зариски отворено подмножество с $V \cap U \neq \emptyset$, то V и $V \cap U$ има един и същи афинен координатен пръстен $k[V] = k[V \cap U]$ над k.

Доказателство: (i) Достатъчно е да установим, че идеалите $I(V) = I(V \cap U)$ на V и $V \cap U$ съвпадат. От $V \cap U \subseteq V$ следва, че $I(V \cap U) \supseteq I(V)$. За произволен полином $g(x_1, \ldots, x_n) \in I(V \cap U) \subseteq \overline{k}[x_1, \ldots, x_n]$ имаме $V \cap U \subseteq Z(g)$. Съгласно

неприводимостта на V, Зариски затворената обвивка $\overline{V} = \overline{V \cap U} \subseteq Z(g)$, така че $g \in I(\overline{V}) \subseteq I(V)$ и $I(V \cap U) \subseteq I(V)$. Това доказва $I(V) = I(V \cap U)$ и $\overline{k}[V] = \overline{k}[V \cap U]$.
(ii) От (i) следва, че

$$I(V)_k = I(V) \cap k[x_1, \ldots, x_n] = I(V \cap U) \cap k[x_1, \ldots, x_n] = I(V \cap U)_k$$

и $k[V] = k[V \cap U]$, Q.E.D.

Лема 6.12. *Ако R е ньотеров комутативен пръстен с единица, а M е крайно породен R-модул, то всеки R-подмодул N на M е крайно породен над R.*

Доказтелство: С индукция по броя n на пораждащите $\mu_1, \ldots, \mu_n$ на $M = R\mu_1 + \ldots + R\mu_n$, ако $M = R\mu_1$, то за произволен R-подмодул N на $M = R\mu_1$ множеството

$$C_N = \{r \in R \ \mid \ r\mu_1 \in N\}$$

на коефициентите на елементите на N е идеал в R. Пръстенът R е ньотеров, така че съществуват краен брой пораждащи $r_1, \ldots, r_l$ на $C_N = \langle r_1, \ldots, r_l \rangle = Rr_1 + \ldots + Rr_l$. Тогава $N = Rr_1\mu_1 + \ldots + Rr_l\mu_1$ е крайно породен R-модул.
За произволно естествено число n да разгледаме естествения хомоморфизъм на R-модули

$$\pi_n : M = R\mu_1 + \ldots + R\mu_n \longrightarrow M/R\mu_n,$$

$$\pi_n\left(\sum_{i=1}^{n} r_i\mu_i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} r_i\mu_i + R\mu_n$$

с ядро $\ker(\pi_n) = R\mu_n$ и образ

$$\mathrm{im}(\pi_n) = M/R\mu_n = R(\mu_1 + R\mu_n) + \ldots + R(\mu_{n-1} + R\mu_n),$$

който е породен от $\mu_1 + R\mu_n, \ldots, \mu_{n-1} + R\mu_n$ като R-модул. За произволен R-подмодул N на M, хомоморфизмът π_n се ограничава до епиморфизъм

$$\pi_n : N \longrightarrow (N + R\mu_n)/R\mu_n.$$

По индукционно предположение, подмодулът $(N+R\mu_n)/R\mu_n$ на $(n-1)$-породения R-модул $M/R\mu_n$ е крайно породен, т.е.

$$(N + R\mu_n)/R\mu_n = R(\nu_1 + R\mu_n) + \ldots + R(\nu_m + R\mu_n)$$

за някакви елементи $\nu_1, \ldots, \nu_m \in N$. От друга страна, R-подмодулът $N \cap R\mu_n$ на $R\mu_n$ е крайно породен или

$$N \cap R\mu_n = R\lambda_1 + \ldots + R\lambda_l$$

за подходящи $\lambda_1, \ldots, \lambda_l \in N \cap R\mu_n$. Твърдим, че

$$N = R\lambda_1 + \ldots + R\lambda_l + R\nu_1 + \ldots + R\nu_m \tag{6.2}$$

се поражда от $\lambda_1, \ldots, \lambda_l, \nu_1, \ldots, \nu_m \in N$ като R-модул. Включването

$$R\lambda_1 + \ldots + R\lambda_l + R\nu_1 + \ldots + R\nu_m \subseteq N$$

следва от $\lambda_j, \nu_i \in N$. Всеки елемент $x \in N$ се изобразява в

$$\pi_n(x) = \sum_{i=1}^{m} r_i(\nu_i + R\mu_n)$$

под действие на π_n, така че $x_o := x - \sum\limits_{i=1}^{m} r_i \nu_i \in N$ попада в ядрото $\ker(\pi_n) \cap N = N \cap R\mu_n$. Следователно $x_o = \sum\limits_{j=1}^{l} s_j \lambda_j$ за подходящи $s_j \in R$ и

$$x = \sum_{j=1}^{l} s_j \lambda_j + \sum_{i=1}^{m} r_i \nu_i.$$

Това доказва 6.2, Q.E.D.

Лема 6.13. *Нека R е ньотерова комутативен пръстен с единица, $R[a_1, \ldots, a_n]$ е крайно породена R-алгебра, а S е такъв подпръстен на $R[a_1, \ldots, a_n]$, съдържащ R, че $R[a_1, \ldots, a_n]$ е крайно породен S-модул. Тогава S е крайно породена R-алгебра.*

Доказателство: Нека

$$R[a_1, \ldots, a_n] = Sb_1 + \ldots + Sb_m.$$

Без ограничение на общността ще считаме, че $b_m = 1_R$, присъединявайки единицата на R към пораждащата система на $R[a_1, \ldots, a_n]$ като S-модул. От $a_p \in R[a_1, \ldots, a_n]$ за $\forall 1 \leq p \leq n$ следва съществуването на $\alpha_{p1}, \ldots, \alpha_{pm} \in S$, така че

$$a_p = \sum_{q=1}^{m} \alpha_{pq} b_q.$$

От друга страна, за произволни $1 \leq i, j \leq m$ елементите $b_i, b_j \in R[a_1, \ldots, a_n]$ имат произведение $b_i b_j \in R[a_1, \ldots, a_n]$, така че

$$b_i b_j = \sum_{q=1}^{m} \alpha_{ijq} b_q$$

за подходящи $\alpha_{ijq} \in S$. Да разгледаме подпръстена

$$S_o := R[\alpha_{pq}, \alpha_{ijq} \ \mid \ 1 \leq p \leq n, \ \ 1 \leq i, j, q \leq m]$$

на S. Пръстенът S_o е ньотеров комутативен пръстен с единица, като крайно породена алгебра над ньотеровия комутативен пръстен с единица R. Твърдим, че

$$R[a_1, \ldots, a_n] = S_o b_1 + \ldots + S_o b_m.$$

Модулът $M_o := S_o b_1 + \ldots + S_o b_m$ над пръстена S_o е подгрупа на адитивната група $(R[a_1, \ldots, a_n], +)$, защото $(S_o, +)$ е подгрупа на $(S, +)$ и $(S, +)$ е подгрупа на $(R[a_1, \ldots, a_n], +)$. Съгласно $b_i b_j = \sum\limits_{q=1}^{m} \alpha_{ijq} b_q \in M_o$, за $\forall 1 \leq i, j \leq m$, S_o-модулът M_o е подпръстен на $R[a_1, \ldots, a_n]$. От друга страна, R е подпръстен на S_o и $S_o = S_o b_m$ е подпръстен на M_o, така че R е подпръстен на M_o. Вземайки предвид $a_p = \sum\limits_{q=1}^{m} \alpha_{pq} b_q \in M_o$ за $\forall 1 \leq p \leq n$ получаваме, че $R[a_1, \ldots, a_n]$ се съдържа, а оттам и съвпада с M_o, $R[a_1, \ldots, a_n] = M_o$.

По построение, S_o е подпръстен на S, така че S е S_o-модул. Пръстенът S_o е ньотеров, а пръстенът S е S_o-подмодул на крайно породения S_o-модул $R[a_1, \ldots, a_n]$, така че

$$S = S_o \sigma_1 + \ldots + S_o \sigma_l$$

е крайно породен S_o-модул. От една страна,

$$S = S_o \sigma_1 + \ldots + S_o \sigma_l \subseteq S_o[\sigma_1, \ldots, \sigma_l].$$

От друга страна,

$$S_o[\sigma_1, \ldots, \sigma_l] \subseteq S,$$

защото S_o е подпръстен на S, $\sigma_1, \dots, \sigma_l \in S$ и S е затворено относно умножение и събиране на свои елементи. Следователно

$$S = S_o[\sigma_1, \dots, \sigma_l] = R[\alpha_{pq}, \alpha_{ijq} \;\mid\; 1 \leq p \leq n, \;\; 1 \leq i, j, q \leq m][\sigma_r \;\mid\; 1 \leq r \leq l] =$$
$$= R[\alpha_{pq}, \alpha_{ijq}, \sigma_r \;\mid\; 1 \leq p \leq n, \;\; 1 \leq i, j, q \leq m, \;\; 1 \leq r \leq l]$$

е крайно породена R-алгебра, Q.E.D.

Лема 6.14. *Ако k е безкрайно поле и разширението $L \supset k$ е крайно породена k-алгебра, $L = k[a_1, \dots, a_n]$, то $a_1, \dots, a_n$ са алгебрични над k.
В частност, L е крайно разширение на k.*

Доказателство: Полето от частни $k(a_1, \dots, a_n)$ на $L = k[a_1, \dots, a_n]$ се съдържа, а оттам и съвпада с полето L. Да допуснем, че някой пораждащ a_i на L над k не е алгебричен над k и да изберем максимално трансцендентно (т.е. алгебрично независимо) подмножество $a_1, \dots, a_m$ на $a_1, \dots, a_n$. Тогава за $\forall m+1 \leq i \leq n$ съществува нетъждествено нулев полином $h_i(y_1, \dots, y_m, y_i) \in k[y_1, \dots, y_m, y_i]$ с $h_i(a_1, \dots, a_m, a_i) = 0$, зависещ от y_i.
Полето $L_o = k(a_1, \dots, a_m)$ на рационалните функции на $a_1, \dots, a_m$ с коефициенти от k е подполе на $k(a_1, \dots, a_n) = L$, съдържащо k. Полиномите

$$h_i(a_1, \dots, a_m, y_i) \in k[a_1, \dots, a_m][y_i] \subseteq L_o[y_i]$$

с корени a_i не се анулират тъждествено съгласно алгебричната независимост на $a_1, \; \dots, a_m$. По този начин, всички a_i за $m+1 \leq i \leq n$ се оказват алгебрични над L_o. От една страна имаме влагания на пръстени

$$L = k[a_1, \dots, a_n] \subseteq k[a_1, \dots, a_m][a_{m+1}, \dots, a_n] \subseteq L_o[a_{m+1}, \dots, a_n].$$

От друга страна, $L_o[a_{m+1}, \dots, a_n]$ е подпръстен на L, защото L_o е подполе на L, $a_{m+1}, \dots, a_n \in L$ и полето L е затворено относно умножение и събиране на свои елементи. Следователно $L = L_o[a_{m+1}, \dots, a_n]$ е крайно породена L_o-алгебра. Поради алгебричността на $a_{m+1}, \dots, a_n$ над L_o, степента $[L : L_o] < \infty$ е крайна и L е крайно породен L_o-модул. Прилагаме Лема 6.13 към ньотеровата област с единица k, крайно породената k-алгебра $L = k[a_1, \dots, a_n]$ и подпръстена L_o на L, съдържащ k. Понеже L е крайномерно линейно пространство над L_o, полето

$$L_o = k\left[\frac{f_1(a_1, \dots, a_m)}{g_1(a_1, \dots, a_m)}, \dots, \frac{f_t(a_1, \dots, a_m)}{g_t(a_1 \dots, a_m)}\right]$$

е крайно породена k-алгебра за някакви полиноми $f_i(x_1, \dots, x_m), g_i(x_1, \dots, x_m) \in k[x_1, \dots, x_m]$, $g_i(a_1, \dots, a_m) \neq 0$. Всеки елемент $\lambda \in k$ е различен от a_m, защото a_m е алгебрично независимо над k. Оттук $\frac{1}{a_m - \lambda} \in L_o$ и съществуват неотрицателни цели $d_1, \dots, d_t$, както и полином $F_\lambda(x_1, \dots, x_m) \in k[x_1, \dots, x_m]$, за които

$$\frac{1}{a_m - \lambda} = \frac{F_\lambda(a_1, \dots, a_m)}{g_1(a_1 \dots, a_m)^{d_1} \dots g_t(a_1, \dots, a_m)^{d_t}}$$

Последното равенство е еквивалентно на

$$(a_m - \lambda) F_\lambda(a_1, \dots, a_m) = g_1(a_1, \dots, a_m)^{d_1} \dots g_t(a_1, \dots, a_t)^{d_t}.$$

Съгласно алгебричната независимост на a_m над $k(a_1, \dots, a_{m-1})$, получаваме равенството на полиноми

$$(x_m - \lambda) F_\lambda(a_1, \dots, a_{m-1}, x_m) = g_1(a_1, \dots, a_{m-1}, x_m)^{d_1} \dots g_t(a_1, \dots, a_{m-1}, x_m)^{d_t}$$

на променливата x_m с коефициенти от $k(a_1, \dots, a_{m-1})$. Множеството на корените на дясната страна е крайно и представлява обединението на корените на $g_i(a_1, \dots, a_{m-1}, x_m)$ за всички $1 \leq i \leq t$. Но всяко $x_m = \lambda \in k$ е корен на лявата страна, така че безкрайността на k води до противоречие, доказващо алгебричността на всяко a_i над k, Q.E.D.

ЛЕМА 6.15. *(i) Всички максимални идеали в* $\overline{k}[x_1,\ldots,x_n]$ *са от вида*

$$\mathfrak{N}_p = \langle x_i - p_i \mid 1 \leq i \leq n \rangle \triangleleft \overline{k}[x_1,\ldots,x_n]$$

за някаква точка $p = (p_1,\ldots,p_n) \in \overline{k}^n$.
(ii) Ако $V \subseteq \overline{k}^n$ *е афинно многообразие, то всички максимални идеали в афинния координатен пръстен* $\overline{k}[V]$ *са от вида*

$$\mathfrak{M}_p = \langle x_i - p_i + I(V) \mid 1 \leq i \leq n \rangle$$

за някаква точка $p = (p_1,\ldots,p_n) \in V$.

Доказателство: (i) Ако $\mathfrak{N} \triangleleft \overline{k}[x_1,\ldots,x_n]$ е максимален идеал, то фактор-пръстенът

$$L := \overline{k}[x_1,\ldots,x_n]/\mathfrak{N} = (\overline{k} + \mathfrak{N}/\mathfrak{N})[x_1+\mathfrak{N},\ldots,x_n+\mathfrak{N}] \simeq$$

$$\simeq (\overline{k}/\overline{k}\cap\mathfrak{N})[x_1+\mathfrak{N},\ldots,x_n+\mathfrak{N}] = \overline{k}[x_1+\mathfrak{N},\ldots,x_n+\mathfrak{N}]$$

е поле и крайно породена $\overline{k}$-алгебра. Съгласно Лема 6.14, елементите $x_i+\mathfrak{N}$ са алгебрични над $\overline{k}$. Следователно $x_i+\mathfrak{N}$ са алгебрични над k и принадлежат на $\overline{k} \simeq \overline{k}+\mathfrak{N}/\mathfrak{N}$. С други думи, за $\forall 1 \leq i \leq n$ съществува $p_i \in \overline{k}$, така че $x_i+\mathfrak{N} = p_i+\mathfrak{N}$. Оттук, $x_i - p_i \in \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}_p := \langle x_i - p_i \mid 1 \leq i \leq n\rangle \subseteq \mathfrak{N}$. Още повече, алгебричното разширение $\overline{k}[x_1,\ldots,x_n]/\mathfrak{N}$ на алгебрично затвореното поле $\overline{k}$ съвпада с $\overline{k}$. Допускането $\mathfrak{N}_p \subsetneqq \mathfrak{N}$ за идеалите $\mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{N}$ на $\overline{k}[x_1,\ldots,x_n]$ води до $0 \subsetneqq \mathfrak{N}/\mathfrak{N}_p \subseteq \overline{k}[x_1,\ldots,x_n]/\mathfrak{N} \simeq \overline{k}$ за съответните фактори. Следователно $\mathfrak{N}/\mathfrak{N}_p = \overline{k}$ и $1 \in \mathfrak{N}$. Това противоречи на максималността на идеала $\mathfrak{N}$ и доказва, че $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_p$.
(ii) Всеки идеал I в афинния координатен пръстен $\overline{k}[V] = \overline{k}[x_1,\ldots,x_n]/I(V)$ е фактор $I = J/I(V)$ на идеал $J \triangleleft \overline{k}[x_1,\ldots,x_n]$, съдържащ идеала $I(V)$ на V. За да докажем това твърдение забелязваме, че множеството

$$J := \{f \in \overline{k}[x_1,\ldots,x_n] \mid f \in I(V) \in I\}$$

на повдиганията на елементите на I е идеал в $\overline{k}[x_1,\ldots,x_n]$. По-точно, за произволни $f_1, f_2 \in J$ и $f \in \overline{k}[x_1,\ldots,x_n]$ имаме $f_1 - f_2, ff_1 \in J$, съгласно

$$f_1 - f_2 + I(V) = (f_1+I(V)) - (f_2+I(V)) \in I, \ \ f_1f + I(V) = (f_1+I(V))(f+I(V)) \in I.$$

Включването $I(V) \subseteq J$ следва от $g + I(V) = I(V) \in I \triangleleft \overline{k}[V]$ за $\forall g \in I(V)$. От определението на множеството J следва, че $J/I(V) = I$. Фактор-пръстените

$$\overline{k}[V]/I \simeq (\overline{k}[x_1,\ldots,x_n]/I(V))/(J/I(V)) \simeq \overline{k}[x_1,\ldots,x_n]/J$$

са изоморфни, така че I е максимален идеал в $\overline{k}[V]$ тогава и само тогава, когато J е максимален идеал в $\overline{k}[x_1,\ldots,x_n]$. В (i) доказахме, че всеки максимален идеал в $\overline{k}[x_1,\ldots,x_n]$ е от вида

$$J = \langle x_i - p_i \mid 1 \leq i \leq n \rangle = \mathfrak{N}_p \triangleleft \overline{k}[x_1,\ldots,x_n]$$

за някаква точка $p = (p_1,\ldots,p_n) \in \overline{k}^n$. Следователно всеки максимален идеал в $\overline{k}[V]$ е от вида

$$I = J/I(V) = \langle x_i - p_i + I(V) \mid 1 \leq i \leq n \rangle = \mathfrak{M}_p \triangleleft \overline{k}[V].$$

От включването $I(V) \subseteq J = \mathfrak{N}_p$ следва $V = ZI(V) \supseteq Z(\mathfrak{N}_p) = \{p\}$ за афинното многообразие V, Q.E.D.
Следващата лема напомня локализацията на комутативна област с единица R по прост идеал $\mathfrak{p} \triangleleft R$.

ЗАДАЧА 6.16. *Нека R е комутативна област с единица, $F(R)$ е полето от частни на R, а $\mathfrak{p}$ е прост идеал в R. Разглеждаме множеството $R_{\mathfrak{p}}$ на онези елементи $\alpha \in F(R)$, които имат представител $\frac{a}{b}$ с $a \in R$, $b \in R \setminus \mathfrak{p}$ и подмножеството $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}$ на $R_{\mathfrak{p}}$, съставено от онези $\alpha \in F(R)$, за които съществува представител $\frac{a}{b}$ с $a \in \mathfrak{p}$, $b \in R \setminus \mathfrak{p}$. Тогава $R_{\mathfrak{p}}$ е локален подпръстен на $F(R)$ с максимален идеал $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}$, съдържащ R като подпръстен.*
Пръстенът $R_{\mathfrak{p}}$ се нарича локализация на R относно простия идеал $\mathfrak{p}$ и съдържа R като подпръстен.

Упътване: Проверете, че множеството $R_{\mathfrak{p}}$ е затворено относно изваждане и умножение, за да твърдите, че $R_{\mathfrak{p}}$ е подпръстен на $F(R)$. Мултипликативната група $R_{\mathfrak{p}}^*$ на $R_{\mathfrak{p}}$ се състои от онези $\frac{\alpha}{\beta} \in R_{\mathfrak{p}}$, за които $\alpha \notin \mathfrak{p}$. Следователно множеството на необратимите елементи на $R_{\mathfrak{p}}$ съвпада с $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}$ и $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}$ е единственият максимален идеал на $R_{\mathfrak{p}}$.

ЛЕМА 6.17. *Нека V е квази-афинно многообразие. Тогава:*
(i) локалният пръстен

$$\mathcal{O}_p(V) \simeq \overline{k}[V]_{\mathfrak{M}_p} := \left\{ \frac{f}{g} \;\middle|\; f, g \in \overline{k}[V], \quad g \notin \mathfrak{M}_p \right\}$$

на точка $p = (p_1, \ldots, p_n) \in V$ е изоморфен на локализацията $\overline{k}[V]_{\mathfrak{M}_p}$ на афинния координатен пръстен $\overline{k}[V]$ по максималния идеал

$$\mathfrak{M}_p = \{ f \in \overline{k}[V] \;\; | \;\; f(p) = 0 \} = \langle x_1 - p_1 + I(V), \ldots, x_n - p_n + I(V) \rangle$$

на p в $\overline{k}[V]$;
(ii) $\mathcal{O}_{\overline{V}}(\overline{V}) \simeq \overline{k}[V]$ за Зариски затворената обвивка $\overline{V} = ZI(V)$;
(iii) функционалното поле $\overline{k}(V)$ е полето от частни $F(\overline{k}[V])$ на афинния координатен пръстен $\overline{k}[V]$.

Доказателство: (i) По определение, локализацията на $\overline{k}[V]$ относно максималния идеал $\mathfrak{M}_p$ е пръстенът

$$\overline{k}[V]_{\mathfrak{M}_p} := \left\{ \frac{f}{g} \;\middle|\; f, g \in \overline{k}[V], \quad g \notin \mathfrak{M}_p \right\}.$$

Елементите на $\overline{k}[V]_{\mathfrak{M}_p}$ са регулярни функции в p, така че имаме хомоморфизъм на пръстени

$$\varphi : \overline{k}[V]_{\mathfrak{M}_p} \longrightarrow \mathcal{O}_p(V),$$
$$\varphi\left(\frac{f}{g}\right) = \overline{\left(V \setminus Z(g), \frac{f}{g}\right)}$$

за Зариски отворената околност $V \setminus Z(g)$ на p върху V. Хомоморфизмът φ е влагане, защото $\overline{\left(V \setminus Z(g), \frac{f}{g}\right)} = \overline{(U, 0)}$ означава съществуване на непразно Зариски отворено подмножество $U_o \subseteq (V \setminus Z(g)) \cap U$ с $\frac{f}{g}|_{U_o} = 0$. В резултат, $U_o \subseteq Z\left(\frac{f}{g}\right) \subseteq Z(f)$ и Зариски затворената обвивка $V = \overline{U_o} \subseteq Z(f)$. Това води до тъждествено анулиране на f върху V и $\ker(\varphi) = \{0\}$. От друга страна, φ е епиморфизъм, защото всеки клас на еквивалентност $\overline{(U, \psi)} \in \mathcal{O}_p(V)$ задава регулярна функция $\psi : U \to \overline{k}$ в Зариски отворена околност U на p. По определението за регулярност на ψ в точка p съществува Зариски отворена околност $p \in U_o \subseteq U$, в която $\psi = \frac{f}{g} : U_o \to \overline{k}$ е частно на $f, g \in \overline{k}[V]$ с $g(p) \neq 0$. Сега $\frac{f}{g} \in \overline{k}[V]_{\mathfrak{M}_p}$ и

$$\varphi\left(\frac{f}{g}\right) = \overline{\left(V \setminus Z(g), \frac{f}{g}\right)} = \overline{\left(U_o, \frac{f}{g}\right)} = \overline{(U_o, \psi)} = \overline{(U, \psi)},$$

откъдето $\varphi : \overline{k}[V]_{\mathfrak{M}_p} \to \mathcal{O}_p(V)$ е изоморфизъм на пръстени.
(ii) От определението на $\mathcal{O}_{\overline{V}}(\overline{V})$ и (i) имаме

$$\mathcal{O}_{\overline{V}}(\overline{V}) = \cap_{p\in\overline{V}}\mathcal{O}_p(\overline{V}) = \cap_{p\in\overline{V}}\mathcal{O}_p(V) = \cap_{p\in\overline{V}}\overline{k}[V]_{\mathfrak{M}_p}.$$

Остава да проверим, че

$$\cap_{p\in\overline{V}}\overline{k}[V]_{\mathfrak{M}_p} = \overline{k}[V].$$

Включването $\cap_{p\in\overline{V}}\overline{k}[V]_{\mathfrak{M}_p} \supseteq \overline{k}[V]$ е ясно.
Обратно, нека $\frac{f}{g} \in \cap_{p\in\overline{V}}\overline{k}[V]_{\mathfrak{M}_p} \subseteq F(\overline{k}[V])$, където $F(\overline{k}[V])$ е полето от частни на $\overline{k}[V]$. Съгласно (i) елементът $g \in \overline{k}[V] = \overline{k}[\overline{V}]$ не принадлежи на нито един максимален идеал $\mathfrak{M}_p$, $p \in \overline{V}$ на $\overline{k}[\overline{V}]$, така че $g \in \overline{k}[\overline{V}]^*$ е обратим в $\overline{k}[\overline{V}]$. Оттук, $\frac{1}{g} \in \overline{k}[\overline{V}]$ и $\frac{f}{g} \in \overline{k}[\overline{V}] = \overline{k}[V]$.
(iii) За $F(\overline{k}[V]) \subseteq \overline{k}(V)$ използваме, че $\overline{k}(V)$ е поле, съдържащо $\overline{k}[V]$. За обратното включване $\overline{k}(V) \subseteq F(\overline{k}[V])$ да изберем произволен клас на еквивалентност $\overline{(U,\psi)} \in \overline{k}(V)$ и да отбележим, че регулярността на ψ в произволна точка $p \in U$ дава представяне $\psi = \frac{f}{g}$ с $f, g \in \overline{k}[V]$, $g(p) \neq 0$. Тогава можем да считаме, че $\frac{f}{g} \in \overline{k}[V]_{\mathfrak{M}_p} \subset F(\overline{k}[V])$. Това доказва, че $\overline{k}(V) = F(\overline{k}[V])$, Q.E.D.
Ще използваме наготово Теоремата на Hilbert за базиса, която гласи, че пръстенът $k[x_1,\ldots,x_n]$ на полиномите на няколко променливи с коефициенти от поле k е ньотеров. По определение това означава, че всеки идеал в $k[x_1,\ldots,x_n]$ е крайно породен. Оттук, афинният координатен пръстен $k[X]$ над k на квазиафинно многообразие $X/k \subseteq \overline{k}^n$, определено над k е ньотеров пръстен. Това се дължи на наличието на епиморфизъм $\pi : k[x_1,\ldots,x_n] \to k[X]$, който издърпва идеалите $I \triangleleft k[X]$ в идеали $\pi^{-1}(I) \triangleleft k[x_1,\ldots,x_n]$. Непосредствено се проверява, че ако $\pi^{-1}(I) = \langle \widetilde{f_1},\ldots,\widetilde{f_s}\rangle \triangleleft k[x_1,\ldots,x_n]$ се поражда от полиноми $\widetilde{f_1},\ldots,\widetilde{f_s} \in k[x_1,\ldots,x_n]$, то $I = \langle \pi(\widetilde{f_1}),\ldots,\pi\widetilde{f_s})\rangle \triangleleft k[X]$ се поражда от образите $\pi(\widetilde{f_i})$ на $\widetilde{f_s}$ в афинние координатен пръстен $k[X]$.

СЛЕДСТВИЕ 6.18. *Нека $V \subseteq \overline{k}^n$ е квази-афинно многообразие, $p \in V$ и $\mathfrak{M}_p$ е максималният идеал на точката p в афинния координатен пръстен $\overline{k}[V]$. Тогава всеки собствен идеал I в локалния пръстен $\mathcal{O}_p(V)$ на p във V е локализация $I = J_{\mathfrak{M}_p}$ на идеал $J \subseteq \mathfrak{M}_p \subset \overline{k}[V]$. Произволна пораждаща система $f_1,\ldots,f_s$ на J като идеал в $\overline{k}[V]$ поражда I като идеал в $\mathcal{O}_p(V)$.*
В частност, $\mathcal{O}_p(V)$ е ньотерова локална област.

Доказателство: Нека J е идеал в $\overline{k}[V]$, съдържащ се в $\mathfrak{M}_p$. Тогава локализацията му $J_{\mathfrak{M}_p}$ се състои от онези елементи на $\overline{k}[V]_{\mathfrak{M}_p} \simeq \mathcal{O}_p(V)$, които имат представяне $\frac{f}{g}$ с $f \in J$, $g \in \overline{k}[V] \setminus \mathfrak{M}_p$. Непосредствено се проверява, че $J_{\mathfrak{M}_p}$ е идеал в $\overline{k}[V]_{\mathfrak{M}_p}$. По-точно, произволни $f_1, f_2 \in J$, $f \in \overline{k}[V]$ и $g_1, g_2, g \in \overline{k}[V] \setminus \mathfrak{M}_p$ е в сила

$$\frac{f_1}{g_1} - \frac{f_2}{g_2} = \frac{f_1g_2 - f_2g_1}{g_1g_2} \in J_{\mathfrak{M}_p} \quad \text{и} \quad \frac{f_1}{g_1}\frac{f}{g} = \frac{f_1f}{g_1g} \in J_{\mathfrak{M}_p},$$

съгласно $f_1g_2 - f_2g_1, f_1f \in J$ и $g_1g_2, g_1g \notin \mathfrak{M}_p$ оради простотата на идеала $\mathfrak{M}_p$. Идеалът $J_{\mathfrak{M}_p} \subsetneq \overline{k}[V]_{\mathfrak{M}_p}$ е собствен, защото в противен случай съществуват $f \in J$ и $g \in \overline{k}[V] \setminus \mathfrak{M}_p$ с $\frac{F}{g} = 1$. В резултат, $g = f \in J \subseteq \mathfrak{M}_p$, противно на избора на $g \notin \mathfrak{M}_p$.
Нека $I \triangleleft \overline{k}[V]_{\mathfrak{M}_p} \simeq \mathcal{O}_p(V)$ е произволен собствен идеал $I \subsetneq \overline{k}[V]_{\mathfrak{M}_p}$. Тогава множеството

$$J = \left\{ f \in \overline{k}[V] \quad | \quad \exists g \in \overline{k}[V] \setminus \mathfrak{M}_p \quad \text{с} \quad \frac{f}{g} \right\}$$

на числителите на елементите на I е идеал в $\overline{k}[V]$, съдържащ се в $\mathfrak{M}_p$. За да проверим това твърдение да забележим, че $J = I \cap \overline{k}[V]$. По-точно, $J \subseteq I$, защото за $\forall f \in J$ с $\frac{f}{g} \in I \triangleleft \mathcal{O}_p(V)$ за някое $g \in \overline{k}[V] \setminus \mathfrak{M}_p \subseteq \mathcal{O}_p(V)$ имаме $f = \left(\frac{f}{g}\right) g \in I \triangleleft \mathcal{O}_p(V)$. По определение, J е подмножество на $\overline{k}[V]$, така че $J \subseteq I \cap \overline{k}[V]$. Обратно, ако $f \in I \cap \overline{k}[V]$, то f има представяне $f = \frac{f}{1} \in I$ с $1 \in \overline{k}[V] \setminus \mathfrak{M}_p$, откъдето $f \in J$ съгласно определението на J.
Сега за произволни $f_1, f_2 \in J$ и $f \in \overline{k}[V]$ имаме $f_1 - f_2 \in I \cap \overline{k}[V] = J$, защото $(I, +)$ и $(\overline{k}[V], +)$ са подгрупи на $(\mathcal{O}_p(V), +)$. Освен това, $f_1 f \in I \cap \overline{k}[V] = J$, защото $I \triangleleft \mathcal{O}_p(V)$ и $\overline{k}[V]$ е подпръстен на $\mathcal{O}_p(V)$. Ще проверим, че локализацията $J_{\mathfrak{M}_p} = I$ на J относно $\mathfrak{M}_p$ съвпада с I. От една страна, за $\forall f \in J = I \cap \overline{k}[V]$ и $\forall g \in \overline{k}[V] \setminus \mathfrak{M}_p \subset \mathcal{O}_p(V)$ имаме $\frac{f}{g} = f\left(\frac{1}{g}\right) \in I \triangleleft \mathcal{O}_p(V)$. От друга страна, ако $\frac{f}{g} \in I$, то $f \in J$, $g \in \overline{k}[V] \setminus \mathfrak{M}_p$, така че $I = J_{\mathfrak{M}_p}$.
Ако $f_1, \ldots, f_s \in J = I \cap \overline{k}[V]$ са пораждащи на J като идеал в $\overline{k}[V]$, то $\langle f_1, \ldots, f_s \rangle_{\mathcal{O}_p(V)} = f_1 \mathcal{O}_p(V) + \ldots + f_s \mathcal{O}_p(V) \subseteq I$. Произволен елемент $\frac{f}{g} \in I$ има числител $f \in J = \langle f_1 \ldots, f_s \rangle_{\overline{k}[V]}$, който се представя като $f = f_1 h_1 + \ldots + f_s h_s$ за някакви $h_1, \ldots, h_s \in \overline{k}[V]$. Следователно

$$\frac{f}{g} = f_1 \frac{h_1}{g} + \ldots + f_s \frac{h_s}{g} \in \langle f_1, \ldots, f_s \rangle_{\mathcal{O}_p(V)}$$

и $I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle_{\mathcal{O}_p(V)}$, Q.E.D.

Задача 6.19. *Дадени са афинна хипер-елиптична крива*

$$V = \{(x, y) \in \overline{k}^2 \ \mid \ y^2 = f_{2n+1}(x)\},$$

където $f_{2n+1}(x) \in \overline{k}[x]$ е полином от степен $2n+1$ с корен $\alpha \in \overline{k}$ и точки $p = (\alpha, 0)$, $q = (\beta, \gamma) \in V$ с $\gamma \neq 0$. Да се докаже, че афинният координатен пръстен

$$\overline{k}[V] = \{a(x) + b(x) y \ \mid \ a(x), b(x) \in \overline{k}[x]\}.$$

Да се опишат локалните пръстени $\mathcal{O}_p(V)$, $\mathcal{O}_q(V)$ и функционалното поле $\overline{k}(V)$ на V.

Задача 6.20. *В означенията от Задача 6.19 да се докаже, че афинната хипер-елиптична крива V има проективна обвивка*

$$\overline{V} = \left\{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2(\overline{k}) \ \mid \ y^2 z^{2n-1} = z^{2n+1} f_{2n+1}\left(\frac{x}{z}\right)\right\}.$$

Да се опише функционалното поле $\overline{k}(\overline{V})$ на $\overline{V}$ и локалните пръстени $\mathcal{O}_P(\overline{V})$, $\mathcal{O}_Q(\overline{V})$ на точките $P = [\alpha : 0 : 1], Q = [\beta : \gamma : 1] \in \overline{V}$.

Задача 6.21. *В означенията от Задачи 6.19 и 6.20, нека $f_{2n+1}(x) = \sum\limits_{i=3}^{2n+1} x^i$, $U_1 = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2(\overline{k}) \ \mid \ y \neq 0\}$ и $t_1 = \frac{x}{y}$, $t_2 = \frac{z}{y}$. Да се докаже, че афинният координатен пръстен на $V \cap U_1$ е*

$$\overline{k}[V \cap U_1] = \left\{ \sum_{i=0}^{2n-2} a_i(t_1) t_2^i \ \middle| \ a_i(t_1) \in \overline{k}[t_1] \right\}.$$

Да се опише локалният пръстен $\mathcal{O}_S(\overline{V})$ на точката $S = [0 : 1 : 0] \in \overline{V}$.

Задача 6.22. *За произволно съвършено поле k и полиноми $f(x), g(x) \in \overline{k}[x]$ да се докаже, че афинният координатен пръстен на*

$$V = \{(x, y, z) \in \overline{k}^3 \ \mid \ y^2 = f(x), \quad z^2 = g(x)\}$$

е изоморфен на

$$\overline{k}[V] = \{a(x) + b(x)y + c(x)z + d(x)yz \mid a(x), b(x), c(x), d(x) \in \overline{k}[x]\}.$$

Нека α е общ корен на $f(x)$ и $g(x)$, β е корен на $f(x)$, но не и на $g(x)$, а γ не е корен нито на $f(x)$, нито на $g(x)$. Да се опишат локалните пръстени $\mathcal{O}_p(V)$, $\mathcal{O}_r(V)$, $\mathcal{O}_q(V)$ на точките $p = (\alpha, 0, 0), q = (\beta, 0, \lambda), r = (\gamma, \mu, \nu) \in V$.

ЗАДАЧА 6.23. *В означенията от Задача 6.22 да се докаже, че ако* $\deg(f) \geq 3$, $\deg(g) \geq 3$, *то проективната обвивка на V е*

$$\overline{V} = \left\{ [x:y:z:t] \in \mathbb{P}^3(\overline{k}) \;\middle|\; y^2 t^{\deg(f)-2} = t^{\deg(f)} f\left(\frac{x}{t}\right), \, z^2 t^{\deg(g)-2} = t^{\deg(g)} g\left(\frac{x}{t}\right) \right\}.$$

Да се опише функционалното поле $\overline{k}(\overline{V})$ на $\overline{V}$ и локалните пръстени $\mathcal{O}_P(\overline{V})$, $\mathcal{O}_Q(\overline{V})$, $\mathcal{O}_R(\overline{V})$ на точките

$$P = [\alpha : 0 : 0 : 1], \quad Q = [\beta : 0 : \lambda : 1], \quad R = [\gamma : \mu : \nu : 1] \in \overline{V}.$$

ЗАДАЧА 6.24. *В означенията от Задача 6.23 да се докаже, че стандартната хиперравнина $H_4 = \{[x:y:z:t] \in \mathbb{P}^3(\overline{k}) \mid t = 0\}$ пресича $\overline{V}$ в проективната права*

$$\overline{V} \cap H_4 = \{[0:y:z:0] \in \mathbb{P}^3(\overline{k})\} \simeq \{[y:z] \in \mathbb{P}^1(\overline{k})\} = \mathbb{P}^1(\overline{k}).$$

За $U_1 = \{[x:y:z:t] \in \mathbb{P}^3(\overline{k}) \mid y \neq 0\}$ да се провери, че афинният координатен пръстен $\overline{k}\left[\overline{V} \cap H_4 \cap U_1\right] = \overline{k}\left[\frac{z}{y}\right]$ съвпада с пръстена на полиномите на една променлива и да се опишат локалните пръстени на точките от $\overline{V} \cap H_4 \cap U_1$.

4. Функционално поле над k

Сега ще разгледаме ефекта на разширението на полето от константи k до алгебричната обвивка $\overline{k}$ на k върху афинния координатен пръстен и функционалното поле на афинно многообразие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.25. *Ако V/k е квази-афинно многообразие, определено над поле k, то полето от частни $F(k[V])$ на афинния координатен пръстен $k[V]$ на V над k се нарича k-функционално поле на V/k и се бележи с $k(V)$.*
Ако V/k е квази-проективно многообразие, определено над поле k, то за произволно стандартно афинно отворено подмножество U_i, полето от частни $F(k[V \cap U_i])$ на афинния координатен пръстен $k[V \cap U_i]$ на $V \cap U_i$ над k се нарича k-функционално поле на V/k.

Следващата лема доказва коректността на определението на k-функционално поле на квази-проективно многообразие $V/k \subseteq \mathbb{P}^n(\overline{k})$, определено над k.

ЛЕМА 6.26. *Нека $V/k \subseteq \mathbb{P}^n(\overline{k})$ е квази-проективно многообразие, определено над k, а U_i, U_j са стандартни афинни отворени подмножества с $V \cap U_i \neq \emptyset$, $V \cap U_j \neq \emptyset$, то k-функционалните полета*

$$k(V \cap U_i) = k(V \cap U_j)$$

на $V \cap U_i$ и $V \cap U_j$ съвпадат.

Доказателство: Достатъчно е да докажем съвпадението

$$k[V \cap U_i] = k[V \cap U_j]$$

на афинните координатни пръстени на $V \cap U_i$ и $V \cap U_j$ над k, за да получим съвпадението

$$F(k[V \cap U_i]) = F(k[V \cap U_j])$$

на съответните полета от частни. Съгласно Лема 6.11 (ii) имаме

$$k[V \cap U_i] = k[V \cap U_i \cap U_j] = k[V \cap U_j],$$

стига $V \cap U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Да допуснем, че $V \cap U_i \cap U_j = \emptyset$. Тогава

$$V \subseteq \mathbb{P}^n(\overline{k}) \setminus (U_i \cap U_j) = [\mathbb{P}^n(\overline{k}) \setminus U_i] \cup [\mathbb{P}^n(\overline{k}) \setminus U_j].$$

Това позволява да преставим $V = [V \cap (\mathbb{P}^n(\overline{k}) \setminus U_i)] \cup [V \cap (\mathbb{P}^n(\overline{k}) \setminus U_j)]$ Поради неприводимостта на V оттук следва $V = V \cap (\mathbb{P}^n(\overline{k}) \setminus U_i)$ след евентуална размяна между U_i и U_j. В резултат, $V \subseteq \mathbb{P}^n(\overline{k}) \setminus U_i$, откъдето $V \cap U_i = \emptyset$, противно на избора на U_i с $V \cap U_i \neq \emptyset$. Това доказва $V \cap U_i \cap U_j \neq \emptyset$ и съвпадението $k[V \cap U_i] = k[V \cap U_j]$ на афинните координатни пръстени, Q.E.D.

Нека V/k е квази-афинно многообразие, определено над съвършено поле k. Тъждественото влагане

$$k[x_1, \ldots, x_n] \hookrightarrow \overline{k}[x_1, \ldots, x_n]$$

индуцира влагане на афинните координатни пръстени

$$k[x_1, \ldots, x_n]/I_k(V) = k[V] \hookrightarrow \overline{k}[V] = \overline{k}[x_1, \ldots, x_n]/I(V),$$

защото $k[x_1, \ldots, x_n] \cap I(V) = I_k(V)$. Оттук следва влагането на полетата от частни

$$F(k[V]) = k(V) \hookrightarrow \overline{k}(V) = F(\overline{k}[V]).$$

Твърдение 6.27. *Нека $V \subseteq \overline{k}^n$ е квази-афинно многообразие с идеал $I(V) \triangleleft \overline{k}[x_1, \ldots, x_n]$, определен над k, т.е. $I(V)$ се поражда от полиноми с коефициенти от k. Тогава*
(i) афинният координатен пръстен $\overline{k}[V] = l_{\overline{k}}(k[V])$ съвпада с $\overline{k}$-линейната обвивка на афинния координатен пръстен $k[V]$ на V над k;
(ii) функционалното поле $\overline{k}(V) = \overline{k} * k(V)$ на V е композитът $\overline{k} * k(V)$ на алгебричната обвивка $\overline{k}$ на k с k-функционалното поле $k(V)$ на V, т.е. $\overline{k} * k(V)$ е подполето на $\overline{k}(V)$, породено от $\overline{k}$ и $k(V)$.

Доказателство: (i) Да забележим, че $\overline{k}$-линейната обвивка на полиномиалния пръстен $k[x_1, \ldots, x_n]$ е $\overline{k}[x_1, \ldots, x_n]$. По предположение, $\overline{k}$-линейната обвивка на идеала $I(V)_k$ на V над k изчерпва $I(V)$. Твърдим, че фактор-пръстенът

$$\overline{k}[V] = \overline{k}[x_1, \ldots, x_n]/I(V) = l_{\overline{k}}(k[x_1, \ldots, x_n])/l_{\overline{k}}(I(V)_k)$$

съвпада с $\overline{k}$-линейната обвивка

$$l_{\overline{k}}\,(k[x_1, \ldots, x_n]/I(V)_k)$$

на афинния координатен пръстен $k[V]$ на V над k или вземането на $\overline{k}$-линейна обвивка комутира с факторизацията по съответния идеал.

Естественият епиморфизъм на пръстени

$$k[x_1, \ldots, x_n] \longrightarrow k[V] = k[x_1, \ldots, x_n]/I(V)_k$$

се продължава до сюрективно $\overline{k}$-линейно изображение

$$\psi : l_{\overline{k}}(k[x_1, \ldots, x_n]) \longrightarrow l_{\overline{k}}(k[V]),$$

$$\psi\left(\sum_{i=1}^m c_i f_i\right) = \sum_{i=1}^m c_i (f_i + I(V)_k) \quad \text{за} \quad \forall c_i \in \overline{k}, \quad f_i \in k[x_1, \ldots, x_n].$$

Ядрото

$$\ker \psi = \left\{ \sum_{i=1}^m c_i f_i \;\middle|\; \sum_{i=1}^m c_i (f_i + I(V)_k) = l_{\overline{k}}(I(V)_k) \right\} =$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^m c_i f_i \;\middle|\; \sum_{i=1}^m c_i f_i \in l_{\overline{k}}(I(V)_k) \right\} = l_{\overline{k}}(I(V)_k).$$

Следователно ψ индуцира $\overline{k}$-линеен изоморфизъм

$$\overline{k}[V] = l_{\overline{k}}(k[x_1, \dots, x_n])/l_{\overline{k}}(I(V)_k) \simeq l_{\overline{k}}(k[V]).$$

(ii) Вземайки предвид $\overline{k}(V) = F(\overline{k}[V]) = F(l_{\overline{k}}(k[V]))$ и $k(V) = F(k[V])$, свеждаме твърдението към

$$F(l_{\overline{k}}(k[V])) = F(k[V]) * \overline{k}. \tag{6.3}$$

От една страна, $F(k[V]) \subseteq F(l_{\overline{k}}(k[V]))$, защото $k[V] \subseteq l_{\overline{k}}(k[V])$. Освен това, $\overline{k} \subset F(l_{\overline{k}}(k[V]))$, така че полето $F(k[V]) * \overline{k}$, породено от $F(k[V])$ и $\overline{k}$ се съдържа в $F(l_{\overline{k}}(k[V]))$. От друга страна, $k[V] \subseteq F(k[V]) * \overline{k}$ и $\overline{k} \subset F(k[V]) * \overline{k}$, откъдето $l_{\overline{k}}(k[V]) \subseteq F(k[V]) * \overline{k}$ и $F(l_{\overline{k}}(k[V])) \subseteq F(k[V]) * \overline{k}$. Това доказва (6.3), Q.E.D.

Задача 6.28. *Да се докаже, че за произволно афинно многоборазие $V \subset \overline{k}^n$ съществува крайно алгебрично разширение $E \supseteq k$, така че функционалното поле $\overline{k}(V) = \overline{k} * F(E[V])$ съвпада с композита на $\overline{k}$ и полето от частни $F(E[V])$ на фактор-пръстена $E[V] = E[x_1, \dots, x_n]/(I(V) \cap E[x_1, \dots, x_n])$.*

5. Действие и фиксирани точки на абсолютната група на Galois

Лема 6.29. *Всеки автоморфизъм $\varphi \in Gal(\overline{k}/k)$ от абсолютната група на Galois на съвършено поле k индуцира автоморфизъм*

$$\varphi : \overline{k}[V_o] \longrightarrow \overline{k}[V_o]$$

на афинния координатен пръстен $\overline{k}[V_o]$ на квази-афинно многообразие V_o/k, определено над k и автоморфизъм

$$\varphi : \overline{k}(V_o) \longrightarrow \overline{k}(V_o)$$

на функционалното поле $\overline{k}(V_o)$ на V_o/k.

Доказателство: По определение, квази-афинното многообразие $V_o = V \cap U$, определено над k е сечение на афинно многообразие V/k, определено над k със Зариски отворено подмножество $U \subset \overline{k}^n$. Съгласно $\overline{k}[V_o] = \overline{k}[V \cap U] = \overline{k}[V]$ и $\overline{k}(V_o) = \overline{k}(V \cap U) = \overline{k}(V)$, достатъчно е да докажем лемата за афинното многообразие V/k, определено над k.

Всеки елемент $\varphi \in Gal(\overline{k}/k)$ задава автоморфизъм

$$\varphi : \overline{k}[x_1, \dots, x_n] \longrightarrow \overline{k}[x_1, \dots, x_n],$$

$$\varphi\left(\sum_{i=(i_1,\dots,i_n)} c_i x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}\right) = \sum_{i=(i_1,\dots,i_n)} \varphi(c_i) x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$$

на полиномиалния пръстен $\overline{k}[x_1, \dots, x_n]$. По-точно, φ е съгласувано със събирането на полиноми,

$$\varphi\left(\sum_i c_i x_1^{i_1} \dots, x_n^{i_n} + \sum_i d_i x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}\right) = \varphi\left(\sum_i (c_i + d_i) x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}\right) =$$

$$= \sum_i \varphi(c_i + d_i) x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} = \sum_i \varphi(c_i) x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} + \sum_i \varphi(d_i) x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} =$$

$$= \varphi\left(\sum_i c_i x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}\right) + \varphi\left(\sum_i d_i x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}\right).$$

В наредените n-торки от неотрицателни цели числа $\left(\mathbb{Z}^{\geq 0}\right)^n$ въвеждаме частична наредба $i << j$, ако $j - i = (j_1 - i_1, \dots, j_n - i_n) \in \left(\mathbb{Z}^{\geq 0}\right)^n$. Тогава

$$\varphi\left(\left(\sum_i c_i x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}\right)\left(\sum_j d_j x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n}\right)\right) = \varphi\left(\sum_m \left(\sum_{i<<m} c_i d_{m-i}\right) x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}\right) =$$

$$= \sum_m \varphi \left(\sum_{i<<m} c_i d_{m-i} \right) x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} = \sum_m \sum_{i<<m} \varphi(c_i)\varphi(d_{m-i}) x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} =$$

$$= \left(\sum_i \varphi(c_i) x_1^{i_1} x_n^{i_n} \right) \left(\sum_j \varphi(d_j) x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n} \right) = \varphi \left(\sum_i c_i x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \right) .\varphi \left(\sum_j d_j x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n} \right)$$

и $\varphi : \overline{k}[x_1, \dots, x_n] \to \overline{k}[x_1, \dots, x_n]$ е хомоморфизъм на пръстени. Непосредствено се вижда, че този хомоморфизъм се обръща от

$$\varphi^{-1} : \overline{k}[x_1, \dots, x_n] \to \overline{k}[x_1, \dots, x_n],$$

така че $\varphi : \overline{k}[x_1, \dots, x_n] \to \overline{k}[x_1, \dots, x_n]$ е автоморфизъм на $\overline{k}[x_1, \dots, x_n]$.
Ако $V = Z(S)/k$, $S \subset k[x_1, \dots, x_n]$ е афинно алгебрично многообразие, определено над k, то всеки елемент $\varphi \in Gal(\overline{k}/k)$ задава взаимно еднозначно изображение $\varphi : V \to V$. По-точно, за всяка точка $a \in V$ и всеки полином $f(x_1, \dots, x_n) \in S$ е в сила

$$0 = \varphi(0) = \varphi(f(a)) = f(\varphi(a)),$$

така че $\varphi(a) \in Z(S) = V$.
Оттук следва, че $\forall \varphi \in Gal(\overline{k}/k)$ индуцира взаимно еднозначно изображение

$$\varphi : I(V) \longrightarrow I(V),$$

защото за произволен полином $g(x_1, \dots, x_n) \in I(V) \triangleleft \overline{k}[x_1, \dots, x_n]$ и произволна точка $a \in V \subseteq \overline{k}^n$ имаме

$$\varphi(g)(a) = \varphi(g)(\varphi\varphi^{-1}(a)) = \varphi(g(\varphi^{-1}(a)) = \varphi(0) = 0,$$

съгласно $\varphi^{-1}(a) \in V$.
Автоморфизмът $\varphi : \overline{k}[x_1, \dots, x_n] \to \overline{k}[x_1, \dots, x_n]$, който се ограничава до изображение $\varphi : I(V) \to I(V)$ индуцира автоморфизъм

$$\varphi : \overline{k}[V] = \overline{k}[x_1, \dots, x_n]/I(V) \longrightarrow \overline{k}[x_1, \dots, x_n]/I(V) = \overline{k}[V]$$

на афинния координатен пръстен $\overline{k}[V]$ на афинното алгебрично многообразие V/k. По-точно, $\varphi(f + I(V)) = \varphi(f) + I(V)$ за $\forall f \in \overline{k}[x_1, \dots, x_n]$ е коректно определено, защото от $f_1 - f \in I(V)$ следва $\varphi(f_1) - \varphi(f) = \varphi(f_1 - f) \in I(V)$. Освен това, φ е хомоморфизъм на пръстени с нулево ядро, защото ако $\varphi(f) \in I(V)$, то $f = \varphi^{-1}\varphi(f) \in I(V)$. Всеки елемент $g + I(V) \in \overline{k}[V]$ има праобраз $\varphi^{-1}(g) + I(V)$ под действие на φ и $\varphi : \overline{k}[V] \to \overline{k}[V]$ е автоморфизъм на $\overline{k}[V]$.
Този автоморфизъм се продължава до автоморфизъм

$$\varphi : \overline{k}(V) = F(\overline{k}[V]) \longrightarrow F(\overline{k}[V]) = \overline{k}(V)$$

на полето от частни $\overline{k}(V)$ на $\overline{k}[V]$. По-точно, $\varphi\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\varphi(f)}{\varphi(g)}$ за $\forall f, g \in \overline{k}[V]$, $g \neq 0$ е коректно зададена върху $\overline{k}(V)$, защото от $\frac{f}{g} = \frac{f_1}{g_1}$ следва $fg_1 = f_1 g$, така че $\varphi(f)\varphi(g_1) = \varphi(fg_1) = \varphi(f_1 g) = \varphi(f_1)\varphi(g)$ и $\frac{\varphi(f)}{\varphi(g)} = \frac{\varphi(f_1)}{\varphi(g_1)}$. Освен това, φ е хомоморфизъм на пръстени съгласно

$$\varphi\left(\frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2}\right) = \varphi\left(\frac{f_1 g_2 + f_2 g_1}{g_1 g_2}\right) = \frac{\varphi(f_1 g_2 + f_2 g_1)}{\varphi(g_1 g_2)} =$$

$$= \frac{\varphi(f_1)\varphi(g_2) + \varphi(f_2)\varphi(g_1)}{\varphi(g_1)\varphi(g_2)} = \frac{\varphi(f_1)}{\varphi(g_1)} + \frac{\varphi(f_2)}{\varphi(g_2)} = \varphi\left(\frac{f_1}{g_1}\right) + \varphi\left(\frac{f_2}{g_2}\right)$$

и

$$\varphi\left(\frac{f_1}{g_1} . \frac{f_2}{g_2}\right) = \varphi\left(\frac{f_1 f_2}{g_1 g_2}\right) = \frac{\varphi(f_1 f_2)}{\varphi(g_1 g_2)} \frac{\varphi(f_1)\varphi(f_2)}{\varphi(g_1)\varphi(g_2)} = \frac{\varphi(f_1)}{\varphi(g_1)} . \frac{\varphi(f_2)}{\varphi(g_2)} = \varphi\left(\frac{f_1}{g_1}\right) . \varphi\left(\frac{f_2}{g_2}\right).$$

Хомоморфизмът $\varphi : \overline{k}(V) \to \overline{k}(V)$ е изоморфизъм, защото има коректно определен обратен хомоморфизъм $\varphi^{-1} : \overline{k}(V) \to \overline{k}(V)$, Q.E.D.

Твърдение 6.30. *Нека k е съвършено поле, а $V \subseteq \overline{k}^n$ е квази-афинно многообразие с идеал $I(V) \lhd \overline{k}[x_1, \ldots, x_n]$, определен над k. Тогава*
(i) $Gal(\overline{k}/k)$-инвариантите на афинния координатен пръстен $\overline{k}[V]$ се изчерпват от афинния координатен пръстен $k[V]$ на V над k,

$$\overline{k}[V]^{Gal(\overline{k}/k)} = k[V];$$

(ii) $Gal(\overline{k}/k)$-инвариантите на функционалното поле $\overline{k}(V)$ на V се изчерпват от k-функционалното поле $k(V)$ на V,

$$\overline{k}(V)^{Gal(\overline{k}/k)} = k(V).$$

Доказателство: (i) Всеки елемент на $\overline{k}[V] = l_{\overline{k}}(k[V])$ е $\overline{k}$-линейна комбинация $f = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i f_i$ на $f_1, \ldots, f_m \in k[V]$ с коефициенти $\alpha_i \in \overline{k}$. Групата на Galois $Gal(\overline{k}/k)$ оставя на място f тогава и само тогава, когато

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i = f = \varphi(f) = \sum_{i=1}^{m} \varphi(\alpha_i) f_i. \tag{6.4}$$

Без ограничение на общността можем да считаме, че $f_1, \ldots, f_m$ са линейно независими над $\overline{k}$ след замяна на $f_1, \ldots, f_m$ с максимална линейно независима над $\overline{k}$ подсистема. Тогава от (6.4) следва $\varphi(\alpha_i) = \alpha_i$ за $\forall 1 \leq i \leq m$, $\varphi \in Gal(\overline{k}/k)$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in k$. По този начин установихме, че $f \in \overline{k}[V]^{Gal(\overline{k}/k)}$ точно когато $f \in k[V]$.
Всеки елемент на функционалното поле $\overline{k}(V)$ е частно $\frac{f}{g}$ на $f, g \in \overline{k}[V]$. Повдиганията $\widetilde{f}(x_1, \ldots, x_n), \widetilde{g}(x_1, \ldots, x_n) \in \overline{k}[x_1, \ldots, x_n]$ на f и g до полиноми на $x_1, \ldots, x_n$ имат краен брой коефициенти, които са алгебрични над k. Нека обединението на коефициентите на $\widetilde{f}(x_1, \ldots, x_n)$ и $\widetilde{g}(x_1, \ldots, x_n)$ е $c_1, \ldots, c_m$. Да означим с $h_i(t) \in k[t]$ минималните полиноми на c_i над k и да разгледаме полето на разлагане E на произведението

$$h_1(t) \ldots h_m(t) \in k[t]$$

над k. Полето E е крайно разширение на Galois на k и абсолютната група на Galois $Gal(\overline{k}/k)$ се ограничава до крайната група $Gal(\overline{k}/k)|_E = Gal(E/k)$. Ако $\frac{f}{g} \in F\left(\overline{k}(V)^{Gal[\overline{k}/k]}\right) = \overline{k}(V)^{Gal(\overline{k}/k)}$, то $Gal(\overline{k}/k)$-инвариантното частно

$$\frac{f}{g} = \frac{\widetilde{f}(x_1, \ldots, x_n) + I(V)}{\widetilde{g}(x_1, \ldots, x_n) + I(V)} = \frac{\widetilde{f}(x_1, \ldots, x_n) \prod\limits_{\sigma \in Gal(E/k) \setminus \{\mathrm{Id}\}} \sigma(\widetilde{f}(x_1, \ldots, x_n)) + I(V)}{\widetilde{g}(x_1, \ldots, x_n) \prod\limits_{\sigma \in Gal(E/k) \setminus \{\mathrm{Id}\}} \sigma(\widetilde{f}(x_1, \ldots, x_n)) + I(V)}$$

има $Gal(\overline{k}/k)$-инвариантен числител $F(x_1, \ldots, x_n) + I(V)$ с

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \widetilde{f}(x_1, \ldots, x_n) \prod_{\sigma \in Gal(E/k) \setminus \{\mathrm{Id}\}} \sigma(\widetilde{f}(x_1, \ldots, x_n)),$$

така че и знаменателят

$$G(x_1, \ldots, x_n) = \widetilde{g}(x_1, \ldots, x_n) \prod_{\sigma \in Gal(E/k) \setminus \{\mathrm{Id}\}} \sigma(\widetilde{f}(x_1, \ldots, x_n)) + I(V)$$

е $Gal(\overline{k}/k)$-инвариантен. Прилагайки (i) получаваме съществуването на полиноми $F'(x_1, \ldots, x_n), G'(x_1, \ldots, x_n) \in k[x_1, \ldots, x_n]$ с $F'(x_1, \ldots, x_n) + I(V) =$

$F(x_1,\dots,x_n)+I(V)$, $G'(x_1,\dots,x_n)+I(V)=G(x_1,\dots,x_n)+I(V)$. Оттук

$$\frac{f}{g}=\frac{F'(x_1,\dots,x_n)+I(V)}{G'(x_1,\dots,x_n)+I(V)}=\frac{F'(x_1,\dots,x_n)+I(V)_k}{G'(x_1,\dots,x_n)+I(V)_k}\in F(k[V])=k(V),$$

съгласно

$$(k[x_1,\dots,x_n]+I(V))/I(V)\simeq$$
$$\simeq k[x_1,\dots,x_n]/(k[x_1,\dots,x_n]\cap I(V))=k[x_1,\dots,x_n]/I(V)_k,$$

Q.E.D.

Нека $V\subseteq\overline{k}^n$ е квази-афинно многообразие или $V\subseteq\mathbb{P}^n(\overline{k})$ е квази-проективно многообразие. Тогава алгебричната обвивка $\overline{k}$ на k е пълното поле от константи на функционалното поле $\overline{k}(V)$, защото всеки алгебричен над $\overline{k}$ елемент $\alpha\in\overline{k}(V)$ е алгебричен над k и принадлежи на $\overline{k}$. По-точно, ако $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{m}c_ix^i\in\overline{k}[x]$ е минималният полином на α над $\overline{k}$, то α е алгебричен над $k(c_0,\dots,c_m)$, така че степента $[k(c_0,\dots,c_m,\alpha):k(c_0,\dots,c_m)]<\infty$ е крайна. Всяко $c_i\in\overline{k}$ е алгебрично над k, така че $[k(c_0,\dots,c_m):k]<\infty$, откъдето

$$[k(c_0,\dots,c_m,\alpha):k]=[k(c_0,\dots,c_m,\alpha):k(c_0,\dots,c_m)][k(c_0,\dots,c_m):k]<\infty$$

и α е алгебричен над k.

Следствие 6.31. *Ако k е съвършено поле, а V е квази-афинно многообразие с идеал $I(V)\lhd\overline{k}[x_1,\dots,x_n]$, определен k, то k е пълното поле от константи на k-функционалното поле $k(V)$ на V.*

Доказателство: Нека $\alpha\in k(V)$ е алгебрично над k. Тогава $\alpha\in k(V)=\overline{k}(V)^{Gal(\overline{k}/k)}$ съгласно Твърдение 6.30 (ii), така че $\varphi(\alpha)=\alpha$ за всяко $\varphi\in Gal(\overline{k}/k)$. Но алгебричният над k елемент α принадлежи на алгебричната обвивка $\overline{k}$ и $\overline{k}^{Gal(\overline{k}/k)}=k$, така че $a\in k$, Q.E.D.

Да напомним, че за произволно квази-проективно многообразие V/k, определено над k и произволно стандартно афинно отворено подмножество U_i, пресичащо V имаме $k(V)=k(V\cap U_i)$ по определение. От друга страна, доказахме, че $\overline{k}(V)=\overline{k}(V\cap U_i)$. За съвършено поле k комбинираме тези факти с Твърдение 6.27 (ii), Твърдение 6.30 (ii) и Следствие 6.31, за да получим следното

Следствие 6.32. *Ако k е съвършено поле, а V е квази-проективно многообразие с хомогенен идеал $I_h(V)\lhd\overline{k}[x_0,\dots,x_n]$, определен над k, то*
(i) функционалното поле $\overline{k}(V)=\overline{k}*k(V)$ на V съвпада с композита на алгебричната обвивка $\overline{k}$ на k с k-функционалното поле $k(V)$ на V;
(ii) $Gal(\overline{k}/k)$-инвариантите на функционалното поле $\overline{k}(V)$ на V образуват k-функционалното поле $\overline{k}(V)^{Gal(\overline{k}/k)}=k(V)$ на V;
(iii) k е пълното поле от константи на k-функционаланото поле $k(V)$ на V.