III ГЛАВА

ОПЕРАТОРИ С ПОСТОЯННИ КОЕФИЦИЕНТИ, ФУНДАМЕНТАЛНИ РЕШЕНИЯ. ПАРАМЕТРИКС

§ 3.1. ФУНДАМЕНТАЛНИ РЕШЕНИЯ

Нека

$$P(\partial) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \partial^\alpha$$

е **линеен диференциален оператор с постоянни коефициенти** $a_a \in \mathcal{C}$ от ред, ненадминаващ $m \in N$. Ако поне един от коефициентите a_α, $|\alpha| = m$, не се анулира, ще казваме, че P е от ред m.

Дефиниция 3.1.1. Разпределението $E \in \mathscr{D}'(R^n)$ се нарича **фундаментално решение** на оператора P, ако

(3.1.1) $$P(\partial)E = \delta.$$

Пример 3.1.2. От пример 2.4.2 а) следва, че функцията на Хевисайд $H(x)$ е фундаментално решение за $P(y)\equiv y'$, $y \in D'(R^1)$. Същото свойство има и разпределението

$$-H(-x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

Ако познаваме поне едно фундаментално решение E на P, то можем да решаваме нехомогенното уравнение

(3.1.2) $$P(u) \equiv P(\partial)(u) = f$$

при условие, че за E и $f \in \mathscr{D}'(R^n)$ **съществува конволюцията им**. Очевидно $u = E*f$ е решение на (3.1.2), защото

$$P(u) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \partial^\alpha u = P(E)*f = \delta*f = f.$$

Съществуването на конволюцията $E*f$ се осигурява обикновено с помощта на някое от следните условия

1) $f \in \mathscr{E}'(R^n)$;

2) E и f са разпределения с конволютивни носители;

3) E и f са локално интегруеми функции, принадлежащи на подходящи пространства например от тип $L_p(R^n)$.

Пример 3.1.2 показва, че **фундаменталното решение не е единствено**. Очевидно е, че то се определя с точност до решение на хомогенното уравнение

$Pu = 0$. Намирането на подходящо фундаментално решение, притежаващо някакви допълнителни свойства, често е от съществено значение.

С помощта на фундаментални решения се третират и по-сложни задачи от (3.1.2), например задачата на Коши, изследване на регулярността на решенията на (3.1.2) (вж. §3.2) и др. В този параграф ще докажем следната основна

Теорема 3.1.3. Всеки ненулев линеен диференциален оператор с постоянни коефициенти притежава фундаментално решение.

Доказателството е дадено най-напред от Еренпрайс и Малгранж (Ehrenpreiss - Malgrange). Тук се излага един вариант, принадлежащ на Хьормандер, който използва елементарни средства и в частност, не се опира на сведения от функционалния анализ. В основата на доказателството лежи фактът, че практически "познаваме" трансформацията на Фурие на фундаменталното решение. Ако приложим трансформацията на Фурие към двете страни на (3.1.1), получаваме релацията

$$Q(\xi)\,\hat{E} = 1, \tag{3.1.3}$$

където $Q(\xi)$ е полиномът $\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha (i\xi)^\alpha = P(i\xi)$ и е използвано равенството $\hat{\delta} = 1$. Ако $Q(\xi) \neq 0$, $\forall \xi \in R^n$, то е естествено да дефинираме E като обратна трансформация на Фурие на функцията $Q(\xi)^{-1}$, т.е.

$$(E, \varphi) = \int_{R^n} \frac{\mathscr{F}^{-1}(\varphi)}{Q(\xi)}\, d\xi, \quad \varphi \in \mathscr{D}(R^n).$$

В общия случай обаче, полиномът Q се анулира и това налага интегрирането да се прехвърли в комплексната област, за да се осигури сходимост наа интеграла.

Доказателството се опира на следната

Лема 3.1.4. Ако полиномът $Q(\xi)$ не е тъждествено равен на нула, то съществуват

а) редица $\{\theta_\kappa\} \subset R^n$, $|\theta_\kappa| \le 1$;

б) разлагане на единицата $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty$, $\psi_\kappa \in C_0^\infty(R^n)$, $\psi_\kappa \ge 0$, $\sum_{k=1}^\infty \psi_k(x) \equiv 1$;

в) константа $c > 0$, такава, че

$$|Q(\xi + z\theta_k)| \ge c, \ \forall \xi \in \operatorname{supp} \psi_\kappa, \ \forall z \in \mathscr{C}, \ |z| = 1. \tag{3.1.4}$$

Доказателство на теорема 3.1.3. Приемайки лемата за доказана, **дефинираме** E, полагайки за всяко $\varphi \in \mathscr{D}(R^n)$

$$(E, \varphi) = \sum_{k=1}^\infty \int_{R^n} \psi_k(\xi) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{\tilde{\varphi}(\xi + z\theta_k)}{Q(\xi + z\theta_k)} \frac{dz}{z} \right) d\xi, \tag{3.1.5}$$

където $\tilde{\varphi} = \mathscr{F}^{-1}(\varphi)$ е обратната трансформация на Фурие.

Най-напред да проверим, че с (3.1.5) са дефинира разпределение. Нека $\varphi \in \mathscr{D}(|x| \le R)$, R - произволно фиксирано. Изхождайки от представянето

$$\tilde{\varphi}(\eta) = (2\pi)^{-n}\int e^{i\eta x}.\varphi(x)dx = \frac{(2\pi)^{-n}}{(1+|\eta|^2)^n}.\int(1-\Delta_x)^n e^{i\eta x}.\varphi(x)dx,$$

където $\Delta_x = \sum_{j=1}^{n}\partial_j^2$ е **операторът на Лаплас**, намираме след интегриране по части, че

$$|\tilde{\varphi}(\xi + z\theta)| = (1+|\xi|^2)^{-n}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{|x|\le R} e^{ix\xi}.\sum_{|\alpha|\le n} c_\alpha.\partial_x^\alpha(e^{iz\theta x}\varphi(x))dx \le c.\frac{p_{2n}(\varphi)}{(1+|\xi|^2)^n},$$

където $p_{2n}(\varphi) \equiv \sum_{|\alpha|\le 2n}\sup|\partial^\alpha\varphi|$, за всички $\varphi \in \mathscr{D}(|x| \le R)$, като константата c зависи от R.

Сега чрез (3.1.4) се вижда, че

$$|(E,\varphi)| \le \sum_{k=1}^{\infty}\int_{R^n}\psi_k(\xi)\left(\frac{1}{2\pi}\int\frac{\mathrm{const}.p_{2n}(\varphi)}{(1+|\xi|^2)^n}.\frac{|dz|}{|z|}\right)d\xi = \mathrm{const}.p_{2n}(\varphi).\int\frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^n},$$

с което окончателно е доказано, че $E \in \mathscr{D}'(R^n)$ и има ред не по-висок от $2n$.

Доказателството на теоремата завършваме с помощта на формулата на Коши

$$(P(\partial)E,\varphi) = \Big(\sum_{|\alpha|\le m}a_\alpha\,\partial^\alpha E,\varphi\Big) = \Big(E,\sum_{|\alpha|\le m}a_\alpha(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\varphi\Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\int_{R^n}\psi_k(\xi)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{\mathscr{F}^{-1}\Big(\sum_{|\alpha|\le m}a_\alpha(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\varphi\Big)(\xi+z\theta_k)}{Q(\xi+z\theta_k)}.\frac{dz}{z}\right)d\xi =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\int_{R^n}\psi_k(\xi).\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\tilde{\varphi}(\xi+z\theta_k)\frac{dz}{z}\right)d\xi = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{R^n}\psi_k(\xi).\tilde{\varphi}(\xi)\,d\xi = \int_{R^n}\tilde{\varphi}(\xi)d\xi = \mathscr{F}(\tilde{\varphi})(0) = \varphi(0).$$

(Използването на формулата на Коши се основава на очевидната аналитичност на $f(z) = \tilde{\varphi}(\xi + z\theta_\kappa)$.)

Доказателство на лема 3.1.4. Нека L_m е крайномерно линейно пространство над $\mathscr{C}$ от всички полиноми $M(z_1, ..., z_n)$ от степен не по-висока от m на n променливи. Очевидно е, че

$$n(M) = \left(\sum_{|\alpha| \le m} |\partial^\alpha M(0)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

е **норма** в L_m. Функцията

$$L_m \ni M \mapsto r(M) = \sup_{\substack{|\theta| \le 1 \\ \theta \in R^n}} \left(\inf_{\substack{|z|=1 \\ z \in \mathcal{C}}} |M(z\theta)| \right)$$

има свойствата

а) $r(\lambda M) = |\lambda| r(M), \ \forall \lambda \in \mathcal{C}, \ \forall M \in L_m$;

б) $r(M) = 0 \ \Rightarrow \ M \equiv 0$;

в) r е непрекъсната функция.

За да установим свойство б), отбелязваме, че от $r(M) = 0$ следва

$$\forall \theta, \ \theta \in R^n, \ |\theta| \le 1, \ \exists z = z(\theta) \in \mathcal{C}, \ |z| = 1, \ M(z\theta) = 0.$$

Фиксираме $\theta_0 \in R^n$, $|\theta_0| \le 1$, и ще докажем, че $M(\theta_0) = 0$. За произволно $\lambda \in [0, 1]$ (т.е. все едно за $\lambda\theta_0 \in R^n$, чиято норма не надминава едно) съществува число $z = z(\lambda)$, $|z| = 1$, за което $M(z\lambda\theta_0) = 0$, т.е. $M(\mu\theta_0) = 0$, където $\mu = \lambda z(\lambda)$ и $|\mu| = |\lambda|$. Следователно полиномът $p(\lambda) \equiv M(\lambda\theta_0)$ има нули върху всяка окръжност $\{\mu \in \mathcal{C} | |\mu| = R\}$ с радиус $R \le 1$, което показва, че $p(\lambda) \equiv 0$. В частност $p(1) = 0$, което ни дава желаното равенство $M(\theta_0) = 0$. Тъй като M се анулира в реална околност на началото, диференцирайки последователно в подходящи направления (по **реалните оси** θ_j) равенството

$$M(\theta) \equiv \sum_{|\alpha| \le m} d_\alpha \theta^\alpha = 0, \quad |\theta| < 1,$$

установяваме, че всички $d_\alpha \in \mathcal{C}$ са нули.

За да установим свойство в), фиксираме $M_0 \in L_m$ и $\varepsilon > 0$ и разглеждаме полиномите M, за които

$$n(M - M_0) < \delta, \ \delta > 0.$$

Тогава, за всяко $\theta \in R^n$, $|\theta| \le 1$, и за всяко $z \in \mathcal{C}$, $|z| = 1$, е в сила

$$|M(z\theta) - M_0(z\theta)| \le C\delta, \ C = \mathrm{const}(m, n),$$

т.е.

$$|M_0(z\theta)| - C\delta \le |M(z\theta)| \le |M_0(z\theta)| + C\delta.$$

Оттук при произволно фиксирано $\theta \in R^n$, $\theta \le 1$, намираме

$$\inf_{|z|=1, z \in \mathcal{C}} |M_0(z\theta)| - C\delta \le \inf_{|z|=1, z \in \mathcal{C}} |M(z\theta)| \le \inf_{|z|=1, z \in \mathcal{C}} |M_0(z\theta)| + C\delta,$$

което изразява непрекъснатостта на M_0 на функцията

(3.1.6) $$L_m \ni M \mapsto \inf_{|z|=1, z\in\mathcal{C}} |M(z\theta)|,$$

тъй като можем да изберем $\delta \in (0, \frac{\varepsilon}{C})$.

Вземайки точната горна граница на всички θ от единичното кълбо в R^n в последните неравенства следва, че

$$r(M_0) - C\delta \le r(M) \le r(M_0) + C\delta,$$

С това непрекъснатостта на $r = r(M)$ е установена.

Ако означим $C_1 = \inf_{n(M)=1} r(M) > 0$, то

(3.1.7) $$r(M) \ge C_1.n(M), \ \forall\, M \in L_m.$$

Следователно за всяко фиксирано $M \in L_m$ съществува $\theta = \theta(M) \in R^n$, $|\theta| \le 1$, $\le$ за което

$$\inf_{|z|=1, z\in\mathcal{C}} || \ge C_1.n(M).$$

Предвид непрекъснатостта на функцията (3.1.6), съществува околност на M, в която (3.1.7) е валидно с константа $C_2 = \frac{1}{2}C_1$, вместо C_1, за всички полиноми от околността.

Чрез полинома Q от условието на лемата дефинираме полиномите θ_0

$$Q_\xi(\zeta) \equiv Q(\xi + \zeta), \ \forall\, \xi \in R^n.$$

Последните бележки показват, че за всяко $\xi \in R^n$ съществуват $\theta_\xi \in R^n$, $|\theta_\xi| \le 1$, и околност W_ξ на ξ такива, че

(3.1.8) $$|Q_\eta(z\theta_\xi)| = |Q(\eta + z\theta_\xi)| \ge C_2.n(Q_\eta), \forall\, z \in \mathcal{C}, \ |z| = 1.$$

Без ограничения можем да считаме, че

$$W_\xi \subset \{\xi \mid |\xi - \zeta| < 1\}.$$

Нека V_ξ е околност, за която $\xi \in V_\xi \subset\subset W_\xi$. Избирайки последователно **крайни покрития** от околностите V_ξ съответно за единичното кълбо и за разликите на венците $\{\xi|\ n \le |\xi| \le n + 1\}$, $n \in N$, и вече избраното покритие за кълбото $\{\xi||\xi| \le n\}$, намираме **изброимо покритие** V_{ξ_k}, $k = 1, 2, \ldots$, на R^n. Полагаме $\theta_\kappa = \theta_{\xi_k}$, $V_k = V_{\xi_k}$. Тъй като всяка околност от покритието V_k, $k = 1, 2,$

... , се пресича най-много с **краен брой околности**[1] V_j, то построявайки за всяко $k = 1, 2, \ldots$ функция $\rho_\kappa \in C_0^\infty(\psi_\kappa)$, $0 \le \rho_\kappa \le 1$, $\rho_\kappa \equiv 1$ в околност на компакта $V_k \setminus (\bigcup_{j \mp k} V_j)$ (вж. лема 2.2.3), формулата $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k(x)$ дефинира коректно C^∞-функция, която никъде не се анулира. Тогава $\{\psi_\kappa\}$, $k = 1, 2, \ldots$, където $\psi_\kappa \equiv \rho_\kappa . F^{-1}$, е търсеното **разлагане на единицата**, подчинено на покритието $V_1, V_2, \ldots$ на R^n.

Тъй като членовете на $Q(\zeta) \equiv \sum_{|\alpha| \le m} c_\alpha \zeta^\alpha$ с максимална степен, т.е. $Q^{max}(\zeta) \equiv \sum_{|\alpha| = m} c_\alpha \zeta^\alpha$, са инвариантни при транслация, то ако означим

$$C_2 . n(Q^{max}) = c > 0,$$

тогава

$$C_2 . n(Q_\xi) \ge C_2 . n\,(Q_\xi^{max}) = C_2 . n(Q^{max}) = c > 0$$

за всяко $\xi \in R^n$. Заедно с (3.1.8) това доказва окончателна лема 3.1.4.

Задача. Покажете, че функцията $r(M)$, дефинирана в началото на горното доказателство, не е норма. (По този начин се установява, че твърдението в [ChP, стр. 31] не е вярно.)

Упътване (Ангел М. Иванов). За $n = 1$, $M_1(x) = 2x^2 - 1$, $M_2(x) = x^2 + 1$ е изпълнено

$$r(M_1) + r(M_2) < r(M_1 + M_2)$$

защото $r(M_1) = 1$, $r(M_2) = 1$, $r(M_1 + M_2) = 3$.

Забележка 3.1.5. Ясно е, че ако фиксираме област Ω, то за всяко $f \in \mathscr{E}'(\Omega)$ съществува разпределение $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, за което

$$P(\partial)u = f,$$

т.е. операторите с постоянни коефициенти са локално разрешими. Съществуват примери (на по-сложни оператори), когато това свойство не е налице; например (Х. Леви, 1956 г.) следното уравнение

$$\partial_1 u + i\partial_2 u + i(x_1 + ix_2)\,\partial_3 u = f\,(x_1, x_2, x_3),$$

където $f \in C^\infty(R^3)$ е подходяща функция, не притежава решения в класа $\mathscr{D}'$ в никоя подобласт на R^3. Задачата за изследване на локалната разрешимост на линейните диференциални оператори е един от централните въпроси на общата теория на диференциалните уравнения (вж. [E]).

[1] Покритие с това свойство се нарича **локално крайно**.

§3.2. РЕГУЛЯРНОСТ НА РЕШЕНИЯТА НА НЕХОМОГЕННИ УРАВНЕНИЯ

Изследването на гладкостта на решенията на (3.1.2) ще подготвим с въвеждането на някои необходими понятия.

Дефиниция 3.2.1. Нека $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, $\Omega \subset R^n$ – област. Множеството от точки, които не притежават околност, в която u съвпада с C^∞-функция, се нарича **сингулярен носител** на разпределението u и се означава с singsupp u.

Очевидно е, че в допълнението на относително затвореното множество singsupp u разпределението u е равно на C^∞-функция. За разпределение или функция, която не е навсякъде от класа C^∞, ще казваме, че притежава сингулярности (върху singsupp).

Нека

$$P(x, \partial) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \partial^\alpha$$

е линеен диферепциален оператор с **променливи** коефициенти

$$a_\alpha \in C^\infty(\Omega).$$

За всяко разпределение $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ е очевидно включването

$$\operatorname{singsupp} P(x, \partial)u \subset \operatorname{singsupp} u.$$

То е строго, както се вижда от примера $x^2 \dfrac{d\delta}{dx} = 0$.

Основният въпрос, който ще ни интересува в този параграф е кога решенията на $P(x, \partial)u = h$ **не притежават** други сингулярности освен тези, които произхождат от h (т.е. освен в точките от singsupp h, където h има сингулярност или с други думи, когато в горното включване има всъщност равенство).

Пример 3.2.2. Лесно е да се посочат примери, когато подобно свойство **не е в сила**. От 2.1 е известно например, че сред решенията на

$$\partial_x\partial_y u = 0 \tag{2.1.1}$$

се съдържат функциите $f(x) + g(y)$, където f и g са локално интегруеми функции. Фактически всички решения на (2.1.1) се дават с формулата

$$u = f(x)\otimes 1(y) + 1(x)\otimes g(y), \quad f, g \in \mathscr{D}'(R^1),$$

където $1(z)$ е разпределение (по променливата z), което съвпада с константата единица.

Дефиниция 3.2.3. Линейният диференциален оператор $P(x, \partial)$ с коефициенти $a_\alpha \in C^\infty(\Omega)$ се нарича **хипоелиптичен** в отвореното множество Ω, ако

$$\operatorname{singsupp} P(x, \partial)u = \operatorname{singsupp} u, \quad \forall u \in \mathscr{D}'(\Omega).$$

Дефиниция 3.2.4. Разпределението $F \in \mathscr{D}'(\Omega)$ се нарича **параметрикс** за оператора $P(x, \partial)$, ако

$$P(x, \partial)F - \delta \in C^{\infty}(\Omega).$$

За оператора с **постоянни коефициенти**

$$P(\partial)u \equiv \sum_{|\alpha|\le m} a_{\alpha}\, \partial^{\alpha} u,\ \ a_{\alpha} \in C,$$

ще докажем

Теорема 3.2.5. Следните твърдения са еквивалентни

а) операторът $P(\partial)$ е хипоелиптичен в R^n;

б) операторът $P(\partial)$ притежава фундаментално решение $E \in \mathscr{D}'(\Omega)$, което принадлежи на $C^{\infty}(R^n \backslash \{0\})$;

в) операторът $P(\partial)$ притежава параметрикс $F \in \mathscr{D}'(\Omega)$, който принадлежи на .

Доказателство. Импликациите а) $\Rightarrow$ б) $\Rightarrow$ в) са очевидни. Ще докажем, че от в) следва а).

Без ограничение можем да считаме, че параметриксът F е от $\mathscr{E}'(R^n)$. Наистина, достатъчно е да рагледаме αF вместо F, където функцията $\alpha \in C_0^{\infty}(R^n)$ е тъждествено равна на единица в околност на началото. Тогава $(1 - \alpha)F \in C^{\infty}(R^n)$, а следователно е безкрайно гладка и функцията

$$f_1 \equiv P(\partial)[(1 - \alpha)F] = P(\partial)F - P(\partial)(\alpha F) = \delta + f_2 - P(\partial)(\alpha F),$$

където $f_2 = P(F) - \delta \in C^{\infty}(R^n)$, т.е. αF е параметрикс (от същия тип).

И така, без ограничение можем да считаме, че параметриксът F е от $\mathscr{E}'(R^n)$ и има свойството

(3.2.1) $$P(\partial)F = \delta + \theta, \quad \theta \in C_0^{\infty}(R^n).$$

Тъй като диференцируемостта е локално свойство, импликацията в) $\Rightarrow$ а) ще бъде доказана, ако установим, че за всяко отворено множество $\Omega \subset R^n$ от свойството $P(\partial)u \in C^{\infty}(\Omega)$ за произволно разпределение $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ следва, че $u \in C^{\infty}(\Omega)$. Фактически ще покажем, че за всяко отворено множество O, чиято затворена обвивка K е компактна и се съдържа в Ω.

Фиксираме $\beta \in C_0^{\infty}(\Omega)$, която е тъждествено равна на единица в околност на K. Означаваме

(3.2.2) $$g = P(\partial)(\beta u).$$

Това разпределение е очевидно с компактен носител, а върху O съвпада с $P(\partial)u$ и следователно $g \in C^{\infty}(O)$. Конволюцията

$$F{*}g \equiv F{*}P(\beta u) = (\beta u)P(F) = (\beta u){*}(\delta + \theta),$$

т.е.

(3.2.3) $$\beta u = F{*}g - \theta{*}(\beta u)$$

Разбира се, $\theta{*}(\beta u) \in C_0^\infty(R^n)$, защото $\theta \in C_0^\infty(R^n)$ и $\beta u \in \mathcal{E}'(R^n)$. Фиксираме $\gamma \in C_0^\infty(|x| < \mu)$, където числото $\mu > 0$ е достатъчно малка (вж. по-долу) и $\gamma \equiv 1$ в $\{x \mid |x| < \frac{\mu}{2}\}$. Ясно е, че $(1 - \gamma)F \in C_0^\infty$ и следователно изследването на

$$F{*}g = [\gamma F + (1-\gamma)F]{*}P(\beta u) = (\gamma F){*}P(\beta u) + [(1-\gamma)F]{*}P(\beta u)$$

се свежда до изследване на първото събераемо в дясната страна, тъй като второто е от $C^\infty(R^n)$. Формулата на Лайбниц (2.4.4) показва, че

$$P(\beta u) = \beta P(u) + M,$$

където всеки член от израза M съдържа поне един множител, който е производна на функцията β и следователно $M \equiv 0$ в **околност на компакта** K. Обаче

$$\operatorname{supp}\,[(\gamma F){*}M] \subset \operatorname{supp}\,(\gamma F) + \operatorname{supp} M$$

и **ако числото μ е достатъчно малко**, то $(\gamma F){*}M \equiv 0$ в K, т.е. в K тази конволюция е C^∞-функция.

Другото събераемо $(\gamma F){*}(\beta Pu)$ е от $C^\infty(R^n)$ тъй като $\gamma F \in \mathcal{E}'(R^n)$, а $\beta Pu \in C^\infty(R^n)$ по предположение.

В заключение, връщайки се към (3.2.3), виждаме, че над областта O (където $\beta \equiv 1$), разпределението $u \in C^\infty$. С това теорема 3.2.5 е доказана.

Забележка 3.2.6. Хипоелиптични са например **операторът на Лаплас** $\Delta = \sum_{k=1}^{n}\partial_k^2$ и **операторът на топлопроводността** $\partial_t - \Delta$ (вж. §3.3 и §3.6), **бихармоничният оператор** Δ^2 и др.

Важен клас от хипоелиптични оператори въвежда следната

Дефиниция 3.2.7. Диференциалният оператор $P(x, \partial) \equiv \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\partial^\alpha$ с коефициенти $a_\alpha \in C^\infty(\Omega)$, $\Omega \subset R^n$ - област, се нарича **елиптичен** оператор в Ω, ако **главният му символ**

$$P_m(x, \xi) \equiv \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$$

не се анулира за $x \in \Omega$ и $\xi \in R^n \backslash \{0\}$.

Теорема 3.2.8. Ако $P(\partial) \equiv \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha \partial^\alpha$ е елиптичен оператор с постоянни коефициенти, то $P(\partial)$ е хипоелиптичен.

Доказателството следва от съществуването на параметрикс F за $P(\partial)$, принадлежащ на $C^\infty(R^n \backslash \{0\})$ (теорема 3.2.5). Условието за елиптичност е еквивалентно с

$$\inf_{\xi \in R^n, |\xi|=1} |P_m(\xi)| = c > 0,$$

откъдето, предвид хомогенността на полинома $P_m(\xi)$ следва, че

$$|P_m(\xi)| \ge c|\xi|^m, \ \forall \ \xi \in R^n.$$

Тъй като за членовете от по-ниска степен в $P(\xi)$ е валидна оценката

$$\left| \sum_{|\alpha|<m} a_\alpha \xi^\alpha \right| \le \text{const.} \, |\xi|^{m-1}, \quad |\xi| \ge 1,$$

то съществува достатъчно голямо число $R \ge 1$, за което

(3.2.4) $$|P(\xi)| \ge \frac{c}{2} |\xi|^m, \quad \forall \xi \in R^n, \quad |\xi| \ge R.$$

Фиксираме функцията $\theta \in C^\infty(R^n)$, за която

$$\theta(\xi) = \begin{cases} 0, & |\xi| \le R, \\ 1, & |\xi| \ge R+1. \end{cases}$$

Очевидно е, че разпределението

$$F = \mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\theta(\xi)}{P(\xi)} \right) \in \mathscr{S}'$$

е параметрикс за $P(\partial)$, защото

$$P(\partial)F - \delta = \mathscr{F}^{-1}(\theta(\xi) - 1) \in \mathscr{S},$$

тъй като $\theta(\xi) - 1 \in C_0^\infty(R^n)$.

Остава да се убедим, че $F \in C^\infty(R^n \backslash \{0\})$. За тази цел е достатъчно да покажем, че за всеки мултииндекс $\alpha \in N^n$ е в сила

(3.2.5) $$x^\alpha F \in C^q(R^n), \ = m + |\alpha| - n - 1.$$

Изхождаме от равенството

$$x^{\alpha}F = \mathscr{F}^{-1}\left((i\partial_{\xi})^{\alpha}\,\frac{\theta(\xi)}{P(\xi)}\right)$$

Ясно е, че съгласно формулата на Лайбниц (2.4.4), дясната страна представлява сума от краен брой членове. Всако събираемо, в което функцията θ е диференцирана, е от класа на Шварц $\mathscr{S}$ като прообраз на функция от C_0^{∞} при трансформацията на Фурие. Остава да се убедим, че събираемото

$$\mathscr{F}^{-1}\left(\theta(\xi).(i\partial_{\xi})^{\alpha}.\frac{1}{P(\xi)}\right) \in C^{q}(R^{n}),$$

където числото q е определено в (3.2.5).

От една страна, производната $\partial_{\xi}^{\alpha}P(\xi)^{-1}$ е линейна комбинация на членове от вида

$$\text{(3.2.6)} \qquad \frac{(\partial^{\beta_1}P).(\partial^{\beta_2}P)...(\partial^{\beta_k}P)}{P^{k+1}},\ |\beta_1| + \ldots + |\beta_\kappa| = |\alpha|,$$

а от друга

$$|\partial^{\beta}P(\xi)| \leq \text{const}.|\xi|^{m-|\beta|},\quad \forall\xi \in R^{n},\quad |\xi| \geq R.$$

Следователно, предвид (3.2.4), всяко събираемо от вида (3.2.6) се мажорира от $\text{const}.|\xi|^{-m-|\alpha|}$ при $|\xi| \geq R.$ Това показва, че интегралът

$$\mathscr{F}^{-1}\left(\theta(\xi).(i\partial_{\xi})^{\alpha}.\frac{1}{P(\xi)}\right) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{n}}\int e^{ix\xi}.\theta(\xi)(i\partial_{\xi})^{\alpha}\frac{1}{P(\xi)}\ d\xi$$

е сходящ и може да бъде диференциран по параметъра x с произволен оператор ∂_x^{γ}, за който числото $|\gamma| = q$ е такова, че

$$|\xi|^{-m-|\alpha|},|\xi|^{-m-|\alpha|}, \leq |\xi|^{-m-1},$$

с което се осигурява равномерна сходимост на интеграла, получен при формалното диференциране. Остава да съобразим, че условието

$$|\gamma| - m - |\alpha| + n + 1 \leq 0$$

осигуряващо горното неравенство, съвпада с изискването (3.2.5) за числото q.