II ГЛАВА

# РАЗПРЕДЕЛЕНИЯ

## 2.1. УВОД

При опит за построяване на обща теория на частните диференциални уравнения веднага възникват трудности, породени от невъзможността да бъдат диференцирани всички функции, с които бихме искали да работим. Например уравненията

(2.1.1) $$u_{xy} = 0 \qquad \text{и} \qquad u_{yx} = 0$$

са еквивалентни в класа на двукратно гладките функции. Всъщност това не е така, когато се разглеждат в по-широк клас от функции. В частност, всички функции от вида

$$f(x) + g(y)$$

където $f \in C^1$, а $g$ е произволна, са решения на първото, а функциите от същия вид, но при условие, че $g \in C^1$, а $f$ е произволна, са решения на второто.

Тази трудност може да се избегне, ако вместо в обичайния (прието да се казва **класически**) смисъл, схващаме производните (в (2.1.1)) в т.нар. **слаб смисъл**. Ще поясним накратко този подход, предхождащ теорията на разпределенията и водещ до понятието **слабо решение**, представляващо обобщение на обичайното **класическо решение** (т.е. достатъчен брой пъти диференцируема функция, която поставена в уравнението, го превръща в тъждество).

Нека $K_1$ е линейното пространство на всички функции $\varphi \in C^1(R^2)$, които се анулират извън някакъв компакт (зависещ от $\varphi$). Примери за такива функции в едномерния случай се строят лесно, а в двумерния се получават например с ротация на едномерни графики, или във вида $\varphi_1(x).\varphi_2(y)$. При това лесно могат да се постигнат и допълнителни свойства: например да се посочат функции, които са положителни вътре в произволно избрано кълбо и анулиращи се извън него. Очевидно е, че ако $u = u(x, y)$ притежава непрекъсната частна производна относно $x$, то

(2.1.2) $$\int_{R^2} u_x.\varphi \, dxdy = -\int_{R^2} u\varphi_x \, dxdy, \qquad \forall\varphi \in K_1 .$$

Фактически това равенство определя еднозначно частната производна $u_x$, в смисъл, че ако $v \in C^0(R^2)$ удовлетворява

$$\int_{R^2} v.\varphi \, dxdy = -\int_{R^2} u\varphi_x \, dxdy, \qquad \forall\varphi \in K_1 ,$$

то $u_x \equiv v$. Наистина, от двете равенства следва, че

$$\int_{R^2} (u_x - v).\varphi \, dxdy = 0, \quad \forall\varphi \in K_1.$$

Сега допуснатото, че $u_x - v \neq 0$, води до противоречие, тъй като тази непрекъсната функция запазва знака си в околност на точката, където има ненулева стойност, а $\varphi$ може да се избере положителна в част от нея и нула в останалите точки от $R^2$. Трябва да се отбележи, че изискването за непрекъснатост бе направено за простота, а фактически горните резултати могат да се получат и само при предположение за интегруемост на $v$.

Тези бележки позволяват да се дефинира понятието **слаба производна**. За простота ще разглеждаме функциия дефинирани в $R^2$ и **локално интегруеми** там, т.е. интегруеми върху всеки компакт в $R^2$.

**Дефиниция 2.1.1.** Локално интегруемата функция $v$ се нарича **слаба производна** от тип $\dfrac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l}$ на локално интегруемата функция $u$, ако

$$\int v\varphi \, dxdy = (-1)^{k+l} \int u.\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l}\varphi \, dxdy, \ \forall\varphi \in K_m , \tag{2.1.3}$$

където $K_m$, $m = k + l$, се дефинира аналогично на $K_1$, но като се предполага диференцируемост до ред $m$.

Ясно е, че ако съществува класическа производна (от съответния тип), то съществува и слаба производна и те съвпадат. Веднага се вижда, че смесените производни в слаб смисъл са равни, защото това е вярно за помощните функции $\varphi$. Предвид дефиниция 2.1.1 можем да определим понятието **слабо решение** на (кое и да е) от уравненията (2.1.1) като локално интегруема функция $u$, за която

$$\int u.\partial_x \partial_y \varphi \, dxdy, \quad \forall\varphi \in K_2 .$$

По такъв начин двете уравнения (2.1.1) стават напълно еквивалентни, т.е. имат един и същ клас от слаби решения. Например, всики функции от вида $f(x) + g(y)$, където $f$ и $g$ са локално интегруеми, са слаби решения, защото

$$\int (f(x) + g(y))\partial_x \partial_y \varphi \, dxdy = \int f(x)(\partial_x \varphi)_y \, dxdy + \int g(y)(\partial_y \varphi)_x \, dxdy = 0.$$

Важно е да се отбележи, че производната $v$ в (2.1.3) фактически се схваща като **линеен функционал** над $K_m$, дефиниран еднозначно с дясната страна на равенството. Нещо повече, самите функции могат да се разглеждат като линейни функционали над подходящи линейни пространства ( а не като изображения от дефиниционната им област в множеството от стойности). Както и по-горе, отново е ясно, че числата

(2.1.4) $$\int u.\varphi\, dxdy, \qquad \forall \varphi \in K_l,$$

където $l$ е произволно избрано (например $l = 0$), определят еднозначно непрекъснатата функция $u$. (Последното предположение отново се прави за простота.) Ако следваме системно този подход на обобщаване на класическото понятие за функция, като се откажем от множеството от стойностите ѝ във всяка точка от дефиниционната област и като работим само с числата (2.1.4), ще можем да получим коректни дефиниции на редица понятия от физиката и техниката, например на материална точка, плътност на точков заряд, интензитет на сила, действаща в точка и т.н.

За илюстрация ще разгледаме понятието плътност на материална точка с маса единица. Всъщност не е възможно измерването на плътността на вещество в точка. Фактически се измерва **средната плътност** в достатъчно малка околност на точката (според желаната степен на точност) и тя се приема за приблизителна стойност на плътността в тази точка, т.е. "обобщената функция" се определя от средните си стойности в околност на точката. Идеализираното понятие "**плътност в точка**" се получава след граничен преход. (Понятието е коректно в обичайния смисъл, ако става дума за непрекъснати функции.)

Да се върнем към материалната точка с маса единица, разположена в наачалото на $R^3$. Разпределяме ("размазваме") масата в кълбо с център началото и радиус $\varepsilon > 0$ и получаваме средна плътност

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{4\pi\varepsilon^3}, & |x| \le \varepsilon, \\ 0, & |x| > \varepsilon. \end{cases}$$

Ако търсената плътност схващаме като граница $\delta(x) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(x)$, то пресметната във всяка точка $x$,

(2.1.5) $$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, x = 0, \\ 0, \quad x \ne 0. \end{cases}$$

Правилно определената функция **плътност** би трябвало би трябвало да позволява чрез интегриране на произволен обем $V$ да води до определяне на съдържащата се в него маса. В горния случай това означава, че

(2.1.6) $$\int_V \delta(x)dx \quad = \begin{cases} 1, & 0 \in V, \\ 0, & 0 \notin V. \end{cases}$$

Обаче, предвид (2.1.5), последният интеграл е винаги равен на нула. Следователно граничен преход, извършен във всяка тояка, ни води до абсурд.

Нека да подходим към проблема по начин, подобен на използвания при дефиницията на слаба производна. Ще пресметнем **слабата граница** на $f_\varepsilon(x)$ при $\varepsilon \to 0$, т.е.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{R^3} f_\varepsilon(x)\varphi(x)dx$$

за всяка непрекъсната функция $\varphi \in K_0$. (С цел да получим плътността като линеен функционал, след като опитът да я дефинираме като граница във всяка точка се оказа неуспешен.) Поради равномерната непрекъснатост на $\varphi$ е изпълнено

$$\forall \rho > 0 \ \exists \delta > 0: \ \ \forall x, \ |x| < \delta \ \Rightarrow \ |\varphi(x) - \varphi(0)| < \rho,$$

откъдето за всички $\varepsilon \in (0, \delta)$ получаваме

$$\left|\int f_\varepsilon(x).\varphi(x)dx - \varphi(0)\right| = \frac{3}{4\pi\varepsilon^3}\left|\int_{|x|<\varepsilon}[\varphi(x) - \varphi(0)]dx\right| \le \rho ,$$

т.е. границаа на функционалите

$$\varphi \mapsto \int f_\varepsilon(x)\varphi(x)dx \in R$$

е функционалът

$$\varphi \mapsto \varphi(0) \equiv \delta(\varphi) \in R.$$

Ако $f(x)$ е плътност на маса, разпределена например в краен обем, то за

$$\varphi_0 \equiv 1$$

интегралът

$$\int_{R^3} f(x).\varphi_0(x)dx$$

дава общата маса. Тъй като

$$\delta(\varphi_0) = \varphi_0(0) = 1,$$

то полученият функционал $\delta$ притежава необходимото свойство на **математическо** понятие, описващо **физическо** понятие, а именно да позволява възстановяване на общата маса. Същевременно функционалът $\delta$ е коректно дефиниран математически обект (за разлика от границата (2.1.5) във всяка точка, водеща до противоречие). Нарича се $\delta$ - функция на Дирак.

**Забележка.** Формално, за да бъде коректно равенството съдържащо $\delta(\varphi_0)$, би трябвало да продължим $\delta$ от $K_0$ върху $C(R^3)$, или поне до $C^\infty(R^3)$. Тази стъпка е стандартна (вж. края на §2.4 относно разпределения с компактен носител).

## 2.2. ПРОБНИ ФУНКЦИИ

Ще построим необходимия аналог на пространствата $K_m$ от §2.1, който ше ни позволи да дефинираме необходимите обекти (наричани **разпределения** или **обобщени функции**), позволяващи да се преодолеят трудностите, свързани с действието диференциране.

В изложението на главата се следва главно книгата [Н].

Нека $\Omega \subset R^n$ е област и всички функции, за които става дума по-нататък, да считаме за **комплекснозначни**, освен ако изрично не е предположено нещо друго. За всяка функция $f$, дефинирана в $\Omega$, затворената обвивка (в индуцираната в $\Omega$ от $R^n$ топология) на $\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}$ се нарича **носител** на $f$ и се означава $\operatorname{supp} f$. Означаваме с $C_0^k(\Omega)$, $0 \le k \le \infty$, множеството от $k$ пъти непрекъснато диференцируеми функции в $\Omega$. (При $k = 0$ този индекс обикновено се изпуска.) Подмножеството на $C^k(\Omega)$, състоящо се от функции, чиито носители са компакти и се съдържат в $\Omega$, се означава с $C_0^k(\Omega)$. Функциите от $C_0^\infty(\Omega)$ обикновено се наричат **пробни** (или **финитни**) функции (и именно това пространство е аналогът на $K_m$ от §2.1).

Лесно можем да се убедим в съществуването на такива функции. Например функцията

(2.2.1) $$\tilde{\omega}(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{|x|^2 - 1}\right), & |x| \le 1, \\ 0, & |x| \ge 1, \end{cases}$$

е от $C_0^\infty(R^n)$ и $\operatorname{supp}\tilde{\omega}$ съвпада с единичното кълбо, като при това тя е положителна вътре в него. Функцията

$$\psi_{\varepsilon,a}(x) = \tilde{\omega}\left(\frac{x-a}{\varepsilon}\right), \ a \in R^n, \ \varepsilon > 0,$$

е от $C_0^\infty(R^n)$ и носителят й съвпада с кълбото с център $a$ и радиус $\varepsilon$. С помощта на тези функции можем да построим нови елементи от $C_0^\infty(\Omega)$.

**Дефиниция 2.2.1.** Функцията $\omega(x) \equiv C\tilde{\omega}(x)$, където константата $C$ е такава, че

(2.2.2) $$\int_{R^n} \omega(x)dx = 1$$

се нарича **усредняващо ядро** или **регуляризатор**.

**Лема 2.2.2.** Нека $K \subset \Omega$ е компакт, чието разстояние до границата $\partial\Omega$ е по-голямо от $\delta > 0$, а функция $u$ е интегруема и се анулира извън $K$. Тогава при $\varepsilon \in (0, \delta)$ за функцията

(2.2.3) $$u_\varepsilon(x) = \int u(x - \varepsilon y)\omega(y)dy = \varepsilon^{-n} \int u(y)\omega\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)dy$$

е в сила:

а) $\operatorname{supp} u_\varepsilon$ се съдържа в множеството от точки, чието разстояние до $K$ не надминава $\varepsilon$;

б) $u_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$;

в) $u_\varepsilon$ клони равномерно към $u$ при $\varepsilon \to 0$, ако $u \in C(\Omega)$;

г) $u_\varepsilon$ клони към $u$ в $L_p(\Omega)$, $p \ge 1$, при $\varepsilon \to 0$, ако $u \in L_p(\Omega)$.

**Доказателство.** а) Ако $u_\varepsilon(x) \ne 0$, то съществува поне една точка $y$, $|y| \le 1$, за която $x - \varepsilon y \in K$. Следователно $\operatorname{dist}(x, K) \le \varepsilon$.

б) $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$, защото $\omega \in C^\infty$ (вж. втория интеграл в (2.2.3)).

в) Поради равномерната непрекъснатост на $u$

$$\forall \rho > 0 \ \exists \delta > 0: \ \forall x, z, |x - z| < \delta \ \Rightarrow \ |u(x) - u(z)| < \rho .$$

Оттук и от (2.2.2) следва, че при всички $\varepsilon \in (0, \delta)$ модулът на разликата

$$u_\varepsilon(x) - u(x) = \int (u(x - \varepsilon y) - u(x))\omega(y)dy$$

е по-малък от $\rho$.

г) Нека $p > 1$, а $q$ се определя от $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Най-напред, чрез неравенството на Хьолдер и (2.2.2), намираме

$$|u_\varepsilon(x)| \le \int |u(y)| \left\{\frac{1}{\varepsilon^n}\omega\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p}}\right\}.\left\{\frac{1}{\varepsilon^n}\omega\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}dy \le \left(\frac{1}{\varepsilon^n}\int |u(y)|^p .\omega\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)dy\right).1,$$

откъдето

$$\| u_\varepsilon \|_p^p = \int |u_\varepsilon|^p dx \le \varepsilon^{-n}\int\left[\int |u(y)|^p .\omega\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)dy\right]dx = \| u \|_p^p ,$$

след размяна на реда на интегриране. Тъй като за всяко $\rho > 0$ съществува функция $v \in C_0^0(\Omega)$, за която $\| u - v\|_p < \dfrac{\rho}{3}$, а съгласно последната оценка и $\| u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_p < \dfrac{\rho}{3}$, като изберем толкова малко $\varepsilon$, че да имаме $\|v_\varepsilon - v\|_p < \dfrac{\rho}{3}$ (вж. свойство в)), окончателно получаваме

$$\|u_\varepsilon - u\|_p \le \| u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_p + \|v_\varepsilon - v\|_p + \|v - u\|_p < \rho.$$

С това твърдение г) е доказано при $p > 1$.

**Задача.** Докажете твърдението г) за $p = 1$.

Функцията $u_\varepsilon$ се нарича **средна функция** или **регуляризация** на $u$. Често пъти се избира подходящо усредняващо ядро така, че носителят на $u_\varepsilon$ да притежава допълнителни свойства. В частност, конкретният вид на регуляризатора $\omega$ не е съществен и той може да бъде заменен от всяка друга функция от $C_0^\infty$ ($|x| < 1$) със свойството (2.2.2). За определеност ще използваме именно регуляризатора $\omega$, притежаващ допълнително и свойството **четност**, т.е. $\omega(-x) = \omega(x)$.

**Лема 2.2.3.** Нека $K$ е фиксиран компакт, $K \subset \Omega$. Тогава съществува $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, за която $0 \le \psi(x) \le 1$ и $\psi \equiv 1$ в околност на $K$.

**Доказателство.** Нека за $\lambda > 0$ да означим

$$K_\lambda = \{x \in \Omega |\ \mathrm{dist}(x, K) \le \lambda\}.$$

Фиксираме числата $\varepsilon, \rho, \delta$, за които

$$0 < \varepsilon < \rho < \varepsilon + \rho < \delta < \mathrm{dist}(K, \partial\Omega).$$

Ако усредним характеристичната функция $\chi$ на $K_\rho$ с ядро $\omega(x)$ както по-горе, то

$$\mathrm{supp}\, u_\varepsilon \subset K_{\varepsilon+\rho} \text{ и } u_\varepsilon \equiv 1 \text{ в } K_{\rho-\varepsilon} .$$

Сега сме в състояние да докажем

**Теорема 2.2.4.** (**за разлагане на единицата**) Нека $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ са отворени множества в $R^n$, чието обединение съдържа компакта $K$. Тогава съществуват функции $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega_j), j = 1, \dots, m$, за които $0 \le \varphi_j \le 1$, $\sum_{j=1}^m \varphi_j(x) \le 1$ и $\sum_{j=1}^m \varphi_j(x) \equiv 1$ в околност на $K$.

**Доказателство.** Лесно се вижда, че съществуват компактни подмножества $K_1, \ldots, K_m$, $K_j \subset \Omega_j$, такива, че $K \subset \bigcup_{j=1}^{m} K_j$. Наистина, понеже $H_1 = K \backslash \bigcup_{j=2}^{m} \Omega_j$ е компактно и се съдържа в $\Omega_1$, можем да изберем компакт $K_1 \subset \Omega_1$, който съдържа $H_1$ във вътрешността си $\overset{0}{K}_1$. След това избираме компакт $K_2 \subset \Omega_2$, съдържащ $K \backslash (\overset{0}{K}_1 \bigcup \bigcup_{j=3}^{m} \Omega_j)$ и т.н. С помоща на лема 2.2.3 намираме функции $\psi_j \in C_0^\infty(\Omega_j)$, $0 \le \psi_j \le 1$ и $\psi_j \equiv 1$ в околност на $K_j$. Тогава функциите $\varphi_1 = \psi_1$, $\varphi_j .= \psi_j(1 - \psi_1) \ldots (1 - \psi_{j-1})$, $j = 2, \ldots, m$, удовлетворяват изискванията на теоремата, тъй като

$$\sum_{j=1}^{m} \varphi_j(x) = 1 - (1 - \psi_1) \ldots (1 - \psi_\mu).$$

**Забележка 2.2.5.** Построената в теорема 2.2.4 система от функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ се нарича разлагане на единицата, подчинено на покритието $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$ на компакта $K$.

**Забележка 2.2.6.** Вж. теорема 6.20 от [R] за разлагане на единицата, подчинено на неограничено отворено покритие.

## 2.3. ДЕФИНИЦИЯ НА РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ

Пространствата, които ще въведем в този параграф, имат топологична структура, която е значително по-сложна от тази на нормираните пространства. Предложеният по-долу опростен подход е напълно достатъчен за нашите цели (вж. [H2], стр. 71).

**Дефиниция 2.3.1.** Ще казваме, че редицата $\{\varphi_j\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ **клони към**

$$\boldsymbol{\varphi \in C_0^\infty(\Omega)},$$

ако са налице следните две условия:

1) съществува компакт, съдържащ всички носители supp $\varphi_j$,

2) $\{\partial^\alpha \varphi_j\}$ клони равномерно към $\partial^\alpha \varphi$ за всеки мултииндекс $\alpha$.

Множеството $C_0^\infty(\Omega)$, в което е въведена сходимост съгласно тази дефиниция, ще означаваме с $\mathscr{D}(\Omega)$.

**Пример 2.3.2.** Нека $\varphi \in C_0^\infty(R^1)$. Тогава редицата $\varphi_j(x) \equiv \frac{1}{j}\varphi(x + j)$ удовлетворява само второто условие от горната дефиниция и следователно $\{\varphi_j\}$ не клони към нула в $\mathscr{D}(R^1)$.

**Задачи** ([B2]) **1.** Нека $\varphi \in \mathscr{D}(R^1)$. Проверете дали сред редиците ($k = 1, 2, \ldots$):

**а)** $\frac{1}{k}\varphi(x)$; **б)** $\frac{1}{k}\varphi(kx)$; **в)** $\frac{1}{k}\varphi\left(\frac{x}{k}\right)$

има сходящи в $\mathcal{D}(R^1)$.

**2.** Нека $\varphi, \eta \in \mathcal{D}(R^1)$ и $\eta \equiv 1$ в околност на $x = 0$. Докажете, че функцията

$$\psi(x) = \frac{1}{x^m}\left[\varphi(x) - \eta(x)\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k\right], \quad m = 1, 2, \ldots$$

принадлежи на $\mathcal{D}(R^1)$..

**Дефиниция 2.3.3.** Линейните непрекъснати функционали $u$: $\mathcal{D}(\Omega) \to C$ ще наричаме **разпределения**, а съвкупността им ще означаваме с $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

Стойностите на $u$ за $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ще означаваме с $u(\varphi)$ или с $(u, \varphi)$. Разбира се, линейността означава, че $u(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha u(\varphi) + \beta u(\psi)$, $\forall\, \alpha, \beta \in C, \forall \varphi, \psi \in D(\Omega)$. Разпределенията $u, v \in \mathcal{D}'(\Omega)$ са **равни**, ако $u(\varphi) = v(\varphi)$, $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

**Примери 2.3.4.** а) Ако $f : \Omega \to C$ е локално интегруема функция, то с помощта на съответствието

$$u: \mathcal{D}(\Omega) \;\mapsto\; u(\varphi) \equiv \int_\Omega f.\varphi dx \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\Omega))$$

се дефинира разпределение от $\mathcal{D}'(\Omega)$. Поне в случая на непрекъсната функция $f$ това е очевидно, както и че разпределението $u$ се определя еднозначно от $f$, т.е. ако един и същ функционал от този вид се дефинира с помощта на две непрекъснати функции $f$ и $g$, то $f \equiv g$ (вж. §2.1).

б) При фиксиран мултииндекс $\alpha$, дефинираме рапределение

$$v: \mathcal{D}(\Omega) \;\mapsto\; v(\varphi) \equiv \int_\Omega f.\partial^\alpha \varphi dx\,, \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)).$$

в) При $a \in R^n$ разпределението $\delta_a \equiv \delta(x - a)$, дефинирано с $(\delta_a, \varphi) = \varphi(a)$, се нарича **делта-функция (на Дирак)**, съсредоточена в точка $a$. При $a = 0$ индексът се пропуска: $\delta(\varphi) = \varphi(0)$.

г) При $\Omega = (0, 1)$ формулата $u(\varphi) = \sum_{j=1}^{\infty}\varphi^{(j)}\left(\frac{1}{j}\right)$ дефинира разпределение от $\mathcal{D}'(\Omega)$. (Проверете!)

Следната теорема дава удобна еквивалентна дефиниция на понятието разпределение.

**Теорема 2.3.5.** Линейният функционал $u$ над $C_0^\infty(\Omega)$ е разпределение тогава и и само тогава, когато за всеки компакт $K \subset \Omega$ съществува константа $C$ и неотрицателно цяло число $m$, за които

$$|u(\varphi)| \le \mathrm{C} \sum_{|\varepsilon| \le m}\sup|\partial^\alpha \varphi(x)|, \;\; \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \mathrm{supp}\, \varphi \subset K. \tag{2. 3.1}$$

**Доказателство.** Очевидно е, че условието (2.3.1) е достатъчно, за да бъде функционалът $u$ разпределение съгласно дефиницив 2.3.1. За да докажем необходимостта му, допускаме противното, т.е. ако условието (2.3.1) не е в сила например за $C = m = j \in N$, то съществува редица $\{\varphi_j\} \subset C_0^\infty(\Omega)$, supp $\varphi_j \subset K$, за която $|u(\varphi_j)| > j \sum_{|\alpha|\le j} \sup |\partial^\alpha \varphi_j|$, $j = 1, 2, \dots$ Тогава функциите $\psi_j = |u(\varphi_j)|^{-1}.\varphi_j$ имат свойствата:

1) $\operatorname{supp} \psi_j \subset K$, $\forall j \in N$;

2) $\sup |\partial^\alpha \psi_j| < \frac{1}{j}$, $\forall \alpha \in N^n$: $|\alpha| \le j$;

3) $|(u(\psi_j))| = 1$, $\forall j \in N$.

От 1) и 2) следва, че $\{\psi_j\} \to 0$ в $D(\Omega)$, което е в противоречие с 3) предвид непрекъснатостта на $u$. С това теоремата е доказана.

**Дефиниция 2.3.6.** Казваме, че разпределението $u$ има **краен ред**, ако съществува число $m$ в (2.3.1), което не зависи от компакта $K$. Най-малкото число $m$ с това свойство се нарича ред на разпределението $u$. Означаваме с $\mathscr{D}'_{\mathrm{F}}(\Omega)$ множеството от всички разпределения от краен ред в $\Omega$.

По повод на последнаата дефиниция ще отбележим, че в примери 2.3.4 а) – в) разпределенията са от краен ред (Намерете ги!), докато разпределението, посочено в г), не принадлежи на $\mathscr{D}'_{\mathrm{F}}(\Omega)$.

**Забележка 2.3.7.** (Вж. теорема 2.1.6 от [H2].) Нека с $\mathscr{D}'^k(\Omega)$ да означим множеството от разпределенията от ред, ненадминаващ $k$. Фактически всяко такова разпределение може да се продължи до линеен функционал $\tilde{u}$ над $C_0^k(\Omega)$, за който условието за непрекъснатост (2.3.1) е изпълнено за всяка функция $\varphi \in C_0^k(\Omega)$ с $m = k$ и константа $C$, зависеща от избрания компакт $K$. Функционалът $\tilde{u}$ се дефинира със стандартна процедура за **продължаване по непрекъснатост**.

Нека $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, а $\{\varphi_p\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ е редица, за която

(2.3.2) $$\sum_{|\alpha|\le k} \sup |\partial^\alpha (\varphi - \varphi_p)| \to 0 \quad \text{при} \quad p \to +\infty.$$

(Например $\varphi_p(x) = \varphi_{\varepsilon_p}(x)$, $\varphi_p > 0$, $\{\varphi_p\} \to 0$; вж. лема 2.2.2 в)).

Полагаме $u(\varphi) \equiv \lim_{p\to+\infty} u(\varphi_p)$.

Дефиницията е коректна, понеже

1) **границата съществува**, тъй като $|u(\varphi_p) - u(\varphi_q)| = |u(\varphi_p - \varphi_q)| \to 0$ за $p, q \to +\infty$, защото предвид (2.3.1) тази величина не надминава $C \sum_{\alpha\le|k|} \sup |\partial^\alpha (\varphi_p - \varphi_q)|$, което клони към нула съгласно (2.3.2);

2) **границата не зависи от избора на редицата** $\{\varphi_p\}$, защото ако $\{\varphi_p'\}$, $\{\varphi_p''\}$ са две подобни редици, то границата на

$$u(\varphi_1'), u(\varphi_1''), \dots, u(\varphi_p'), u(\varphi_p''), \dots$$

съществува и следователно

$$\lim u(\varphi_p') = \lim u(\varphi_p'').$$

Накрая, записвайки (2.3.1) за $\varphi = \varphi_p$, като извършим граничния преход при $p \to +\infty$, получаваме исканото свойство за непрекъснатост.

Имайки предвид забележка 2.3.7, ще казваме, че например $\delta$ - функцията действа върху непрекъснатите функции и т.н.

Преминаваме към дефиниране на понятието **носител на разпределение**. За тази цел е необходимо да се убедим, че въпреки невъзможността да дефинираме разпределенията в точка, те все пак се определят еднозначно от локалното си поведение.

**Дефиниция 2.3.8.** Под **рестрикция** на $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ над областта $O \subset \Omega$ ще разбираме рестрикцията на $u$ над $\mathscr{D}(O)$. Казваме, че $u_1, u_2 \in \mathscr{D}'(\Omega)$ **съвпадат** (**са равни**) в $O \subset \Omega$, ако съвпадат рестрикциите им над $O$.

**Теорема 2.3.9.** Нека $u_1, u_2 \in \mathscr{D}'(\Omega)$ съвпадат в околност на всяка точка от $\Omega$. Тогава $u_1 = u_2$.

**Доказателство.** Фиксираме $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Тъй като всяка точка от $\operatorname{supp} \varphi$ притежава околност, в която $u_1 = u_2$, като изберем (от тези околности) крайно подпокритие $O_1, \dots, O_m$ на компакта $\operatorname{supp} \varphi$, можем да построим съответно разлагане на единицата $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ (вж. теорема 2.2.4). Тогава $\varphi = \sum_{j=1}^{m} \varphi\varphi_j$ и следователно $u_1(\varphi) = \sum_{j=1}^{m} u_1(\varphi\varphi_j) = \sum_{j=1}^{m} u_2(\varphi\varphi_j) = u_2(\varphi)$, което искахме да докажем.

**Дефиниция 2.3.10.** Допълнението на отвореното множество от точки, в околност на всяка от които разпределението $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ се анулира, се нарича **носител** на $u$ и се означава $\operatorname{supp} u$.

От последната теорема веднага получаваме

**Следствие 2.3.11.** За всяко $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, за което $\operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp} \varphi = \varnothing$, е в сила $u(\varphi) = 0$.

В пространството $\mathscr{D}'(\Omega)$ ще разглеждаме винаги т.нар. **слаба сходимост**, т.е.

**Дефиниция 2.3.12.** Казваме, че редицата $\{u_p\} \subset \mathscr{D}'(\Omega)$ е **сходяща** и клони към $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, ако $\{ u_p(\varphi) \} \to u(\varphi)$, $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$.

Аналогично се дефинира и **сходимост по отношение на непрекъснат параметър**. За **кратност** ще казваме **сходимост в** $\mathscr{D}'$ **- смисъл** или $\mathscr{D}'$ **- сходимост**. (Ще запазим същия израз и за всяко друго свойство.)

**Пример 2.3.13.** Нека $u_s \in D'(R^1)$ се поражда от функцията

$$u_s(x) = \begin{cases} e^{isx}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

Тогава $\lim\limits_{s\to+\infty} u_s = 0$, защото за всяка функция $\varphi \in \mathscr{D}(R^1)$:

$$u_s(\varphi) = \int_0^{+\infty} e^{isx}\varphi(x)dx = -\frac{1}{is}\varphi(0) - \frac{1}{is}\int_0^{+\infty} e^{isx}\varphi'(x)dx \to 0,$$

тъй като последният интеграл е ограничен равномерно относно $s$.

**Задачи** (В2) **1.** Докажете, че функционалът $P\frac{1}{x}$, действащ по формулата

$$\left(P\frac{1}{x},\varphi\right) = v.p.\int\frac{\varphi(x)}{x}dx \equiv \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+\infty}\right)\frac{\varphi(x)}{x}dx, \quad \varphi \in \mathscr{D}(R^1),$$

е сингулярно разпределение от $\mathscr{D}(R^1)$.

**2. а)** Докажете, че при $\varepsilon \to 0$ редицата от разпределения $\left\{\frac{1}{x+i\varepsilon}\right\}$, $\varepsilon > 0$, клони към разпределението $-i\pi\varphi(0) + v.p.\int\frac{\varphi(x)}{x}dx$. $\varphi \in \mathscr{D}(R^1)$ (Тази релация означава съществуването на границата в $\mathscr{D}'(R^1)$, която се означава с $\frac{1}{x+i0}$.)

**б)** Докажете следните формули на Сохоцки

$$\frac{1}{x+i0} = -i\pi\delta + P\frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x-i0} = i\pi\delta + P\frac{1}{x}.$$

(Упътване: вж. [В1], стр. 98.)

**3.** Изчислете границите в $\mathscr{D}'(R^1)$ при $t \to \infty$ на

**а)** $\frac{e^{ixt}}{x-i0}$; **б)** $\frac{e^{-ixt}}{x-i0}$; **в)** $\frac{e^{ixt}}{x+i0}$; **г)** $\frac{e^{-ixt}}{x+i0}$; **д)** $t^m e^{ixt}$, където $m \ge 0$ е цяло.

**4.** Нека $\varphi \in \mathscr{D}'(R^n)$, $\psi \ge 0$, $\int\psi(x)dx = 1$. Докажете, че в $\mathscr{D}'(R^n)$

$$\frac{1}{\varepsilon^n}\psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \to \delta(x) \text{ при } \varepsilon \to \infty.$$

## 2.4. ДИФЕРЕНЦИРАНЕ И УМНОЖАВАНЕ НА РАЗПРЕДЕЛЕНИЯ С ФУНКЦИЯ

За модел при дефиниране на действия с разпределения ще ни служат разпределенията $u_f$ от пример 2.3.4, където $f$ е достатъчно гладка функция. Като отъждествим $u_f$ с $f$, $\partial_k u_f$ с $u_{\partial_k f}$, а при $a \in C^\infty(\Omega)$ съответно $u_{af}$ с $af$, да разгледаме равенствата ($\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$):

$$(u_{\partial_k f}, \varphi) = \int_\Omega \partial_k f . \varphi dx = (-1)\int_\Omega f . \partial_k \varphi dx = (-1)(u_f, \partial_k \varphi),$$

което в духа на дефиниция 2.1.1 трябва да запишем като $(\partial_k u_f, \varphi)$, и съответно

$$(u_{af}, \varphi) = \int_\Omega (af)\varphi dx = \int_\Omega f.(a\varphi)dx = (u_f, a\varphi).$$

**Дефиниция 2.4.1.** За $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ дефинираме производна $\partial_k u$ ($k = 1, ..., n$) и произведение $au$ с гладка функция $a \in C^\infty(\Omega)$ като разпределения, действащи съгласно формулите

$$(\partial_k u, \varphi) = (-1)(u, \partial_k \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega), \ k = 1, \ldots, n,$$

$$(au, \varphi) = (u, a\varphi), \ \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Ще отбележим няколко непосредствени следствия от дефиниция 2.4.1. Най-напред е ясно, че производната $\partial_k u$ е също разпределение (т.е. линеен непрекъснат функционал над $\mathscr{D}(\Omega)$) и също може да бъде диференцирано и т.н. Смесените производни са равни, защото за всяко $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$

$$(\partial_l \partial_k u, \varphi) = -(\partial_k u, \partial_l \varphi) = (u, \partial_k \partial_l \varphi) = (u, \partial_l \partial_k \varphi) = -(\partial_l u, \partial_k \varphi) = (\partial_k \partial_l u, \varphi).$$

За всеки мултииндекс $\alpha$ е валидно равенството

$$(\partial^\alpha u, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(u, \partial^\alpha \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Ако $\{u_p\}$ е редица от разпределения, клоняща към разпределението $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ при $p \to +\infty$, тогава за всяко $\alpha \in N^n$ редицата $\{\partial^\alpha u_p\}$ е сходяща в $\mathscr{D}'(\Omega)$ и клони към $\partial^\alpha u$, защото

$$(\partial^\alpha u_p, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(u_p, \partial^\alpha \varphi) \to (-1)^{|\alpha|}(u, \partial^\alpha \varphi) = (\partial^\alpha u, \varphi)$$

за всяко $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$.

Ако $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ се анулира в околност на точка $x$, то $\partial^\alpha u = 0$, $\forall \alpha \in N^n$, а в същата околност, което показва, че

(2.4.1) $$\operatorname{supp} \partial^\alpha u \subset \operatorname{supp} u.$$

За разпределението $au$, $a \in C^\infty(\Omega)$, $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ очевидно е изпълнено

(2.4.2) $$\operatorname{supp} au \subset \operatorname{supp} a \cap \operatorname{supp} u.$$

Формулата на Лайбниц за $C^1$ –функции $a$ и $u$

$$\partial_k(au) = (\partial_k a)u + u(\partial_k a) \tag{2.4.3}$$

остава в сила и за $a \in C^\infty(\Omega)$, $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ защото за всяко $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ е изпълнено

$$(\partial_k(au), \varphi) = -(au, \partial_k \varphi) = -(u, a\partial_k\varphi) = (u, (\partial_k a)\varphi - \partial_k(a\varphi)) = ((\partial_k a)u + a(\partial_k u), \varphi).$$

От (2.4.3) стандартно следва по-общата формула

$$\partial^\alpha(au) = \sum_{\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta} a . \partial^\beta u \tag{2.4.4}$$

за всеки мултииндекс $\alpha$, където $\beta \le \alpha$ означава, че за всяка компонента $\beta_i \le \alpha_i$, $i = 1, ..., n$.

**Задача.** Докажете свойство (2.4.4).

(Упътване. Приложете към $au$ оператора $\partial_{x_1}^{\alpha_1}$, за който коефициентите пред $\partial_{x_1}^{\alpha_1-\beta_1} a \partial_{x_1}^{\beta} u$ са известни. Към получения резултат приложете $\partial_{x_2}^{\alpha_2}$ и т.н. до изчерпване на $\alpha$.)

**Примери 2.4.2.** а) Нека

$$H:\ x \mapsto H(x) = \begin{cases} +1, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

е т.нар. **функция на Хевисайд**. Тогава за $\varphi \in \mathscr{D}(R^1)$

$$(H', \varphi) = -(H, \varphi') = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0),$$

т.е. $H' = \delta$.

б) По-общо, нека $f$ принадлежи на класа $C^1$ във всеки от затворените интервали $\{ x \mid x \le x_0 \}$ и $\{ x \mid x \ge x_0 \}$ и да означим с $f(x_0 \pm 0)$ границата[i] на $f$ отляво и отдясно на точка $x_0$. Тогава

$$((u_f)', \varphi) = -(u_f, \varphi') = -\int f(x).\varphi'(x)dx = [f(x_0+0) - f(x_0-0)]\varphi(x_0)) + \int f'(x)\varphi(x)dx =$$

$$([f]_{x_0}\, \delta(x - x_0) + u_{f'}, \varphi), \qquad \forall \varphi \in \mathscr{D}(R^1),$$

т.е. $$(u_f)' = f'(x) + [f]_{x_0}\, \delta(x - x_0),$$

[i] Фактически от предположението, че $f \in C^1(R^n \backslash \{x_0\})$, като $f'$ е интегруемаа в околност на $x_0$, следва тяхното съществуване; например след граничен преход в $f(x) = f(y) - \int_x^y f'(t)dt$, $x_0 < x < y$, се установява съществуването на $f(x_0 + 0)$.

където $(u_f)'$ е производната в $\mathscr{D}'$-смисъл на $f$, $f$ – производната на $f$ в класически смисъл (пресметната там, където съществува), а $[f]_{x_0}$ е скокът на в точка $x_0$.

Особено ценни са резултатите, позволяващи от $\mathscr{D}$-диференцируемост да се получи съществуване на класическа производна.

**Теорема 2.4.3.** Нека $u, f \in C_0(\Omega)$ и $\partial_j u = f$ в $\mathscr{D}'$-смисъл. Тогава частната производна $\partial_j u$ съществува в класически смисъл и е равна на $f$.

**Доказателство.** Използвайки означенията (2.2.3) за средна функция, имаме $\partial_j u_\varepsilon = f_\varepsilon$, защото

$$\partial_j u_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \int u(y) \partial_{x_j} \varphi\left(\tfrac{x-y}{\varepsilon}\right) dy = -\varepsilon^{-n} \int u(y) \partial_{y_j} \varphi\left(\tfrac{x-y}{\varepsilon}\right) dy = \varepsilon^{-n} \int f(y) \varphi\left(\tfrac{x-y}{\varepsilon}\right) dy = f_\varepsilon(x),$$

където в предпоследното равенство бе използвано условието на теоремата, а в последното – дефиницията на средна функция. Тъй като $u_\varepsilon \in C^\infty$, а $u_\varepsilon$ и $\partial_j u_\varepsilon = f_\varepsilon$ клонят равномерно съответно към $u$ и $f$ при $\varepsilon \to 0$, то границата $u$ е диференцируема и $\partial_j u = f$.

**Забележка 2.4.4.** Ограничението за компактност на носителите на $u$ и $f$ не е съществено, защото диференцируемостта е локално свойство и винаги можем да "срежем" $u \in C(\Omega)$ с подходяща функция $\chi \in \mathscr{D}(\Omega)$, която е тъждествено равна на единица в околност на интересуващата ни точка. Тогава, както $\chi u$, така и $\partial_j(\chi u) = (\partial_j \chi).u + \chi.f$ са с компактни носители.

Задачи ([B1]).

**1.** Докажете, че функционалът $P\dfrac{1}{x^2}$, дефиниран с формулата

$$\left(P\frac{1}{x^2}, \varphi\right) = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2} dx, \quad \varphi \in \mathscr{D}(R^1),$$

е сингулярна обобщена функция.

**2.** Покажете, че

**а)** $\dfrac{d}{dx} \ln |x| = P\dfrac{1}{x}$; **б)** $\dfrac{d}{dx} P\dfrac{1}{x} = -P\dfrac{1}{x^2}$.

**3.** Покажете, че

**а)** $\alpha(x)\delta = \alpha(0)\delta$, $\alpha \in C^\infty(R^n)$; **б)** $xP\dfrac{1}{x} = 1$; **в)** $x^m P\dfrac{1}{x} = x^{m-1}$, $m \geq 1$ – цяло число.

**4.** Покажете, че в $\mathscr{D}'(R^1)$

**а)** $\rho(x)\delta' = -\rho'(0)\delta + \rho(0)\delta'$, където $\rho \in C^1(R^1)$;

**б)** $x\delta^{(m)} = -m\delta^{(m-1)}$, $m = 1, 2, 3, \ldots$;

**в)** $x^m\delta^{(m)} = (-1)^m m!\, \delta$, $= 0, 1. 2, \ldots$;

**г)** $x^k\delta^{(m)} = 0$, $m = 0, 1, .., k-1$;

**д)** $x^k\delta^{(m)} = (-1)^k k!\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}.\delta^{(m-k)}$ , $m = k, k + 1, \dots$ ;

**е)** $(H(x)\rho(x))' = \delta.\rho(0) + H(x).\rho'(x)$, където $H$ е функцията на Хевисайд, а $\rho \in C^1(R^1)$;

**ж)** $|\sin x|'' + |\sin x| = 2\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(x - k\pi)$, където $(\delta(x - a), \varphi) = \varphi(a)$, $\forall\ a$;

**з)** $|\cos x|'' + |\cos x| = 2\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(x - \dfrac{2k+1}{2}\pi\right)$.

4. ([]) **а)** Покажете, че производните на

$$y = x_+^\lambda = \begin{cases} x^\lambda, & x > a, \\ 0, & x < a, \end{cases} \qquad -1 < \lambda < 0,$$

е $(\varphi \in \mathscr{D}(R^1))$

$$(y', \varphi) = \int_0^\infty \lambda x^{\lambda-1}[\varphi(x) - \varphi(0)]dx$$

.

**б)** $q$ -тата производна на $x_t^k$, $(k = 0, 1, 2, \dots)$ има вида

$$(x_+^k) = \begin{cases} k(k-1)\dots(k-q+1)x_+^{k-q}, & q \le k, \\ k!\delta^{(q-k-1)}(x), & q > k. \end{cases}$$

**в)** Покажете, че ако за фиксирани интегруеми функции $f_0(x), \dots , f_m(x)$ и всяко $\varphi \in \mathscr{D}(R^1)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[f_0(x).\varphi(x) + f_1(x).\varphi'(x) + \dots + f_m(x).\varphi^{(m)}(x)]dx = 0,$$

тогава

$$f_0(x) - f_1'(x) + \dots (-1)^{(m)} f_m^{(m)}(x) \equiv 0$$

в $\mathscr{D}'$-смисъл.

До края на параграфа ще се спрем на няколко отделни въпроса, свързани с въведените в дефиниция 2.4.1 понятия.

Третирането на линейните обикновени диференциални уравнения в $\mathscr{D}'(R^1)$ се опира на понятието примитивна (неопределен интеграл).

**Теорема 2.4.5.** Единствените решения в $\mathscr{D}'(I)$, $I \subset R^1$ - отворен интервал, на уравнението

(2.4.5) $$y' = 0$$

са константите.

**Доказателство.** Ще установим, че за $y \in \mathscr{D}'(I)$, което удовлетворява (2.4.3) съществува константа $C$ такава, че $y = C$.

От (2.4.5) следва, че $y(\varphi') = 0$, $\forall\ \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$.

За всяка функция $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$ уравнението $\varphi' = \psi$ има единствено решение

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(t)dt,$$

което се анулира вляво от supp $\psi$ и принадлежи на $\mathcal{D}(I)$ тогава и само тогава, когато $\varphi$ се анулира и вдясно от supp $\psi$, т.е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)dt = 0. \tag{2.4.6}$$

Фактически пространството на всички функции, които са производни на елементите на $\mathcal{D}(I)$, е с коразмерност единица. Действително, фиксирайки $\theta \in \mathcal{D}(I)$ със свойството $\int\theta(\varphi) = 1$, получаваме разлагането

$$\varphi(x) = [\int\varphi(t)dt]\theta(x) + \chi(x),$$

където $\chi \in \mathcal{D}(I)$ удовлетворява (2.4.6) и следователно $y(\chi) = 0$. И така

$$y(\varphi) = y(\theta).\int 1.\varphi(t)dt, \text{ т.е. } y \equiv C \ ( = y(\theta)).$$

**Следствие 2.4.6.** Всяко разпределение $u \in \mathcal{D}'(R^1)$ притежава безброй много примитивни (т.е. разпределения $v \in \mathcal{D}'(R^1)$, за които $v' = u$) и всеки две от тях се различават с константа.

**Доказателство.** Евентуалната примитивна $v$ на $u$ удовлетворява

$$(v, \varphi') = -(u, \varphi), \ \forall \varphi \in D(R^1)$$

т.е. тя е определена върху функциите $\psi$ от $\mathcal{D}(R^1)$, които удовлетворяват (2.4.6). Дефинираме $v(\theta)$ по произволен начин за функция $\theta(x)$, въведена в доказателството на теорема 2.4.5 и получаваме разпределението $\tilde{v}$

$$\tilde{v}(\varphi) = v(\theta).(1, \varphi) + v(\chi),$$

като последното събераемо е дефинирано с $v(\chi) = \tau(\psi_0') = -u(\psi_0)$, където $\psi_0 \in \mathcal{D}(R^1)$ е такова, че $\chi = \psi_0'$. Остава да проверим, че $\tilde{v}(\varphi') = -u(\varphi)$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(R^1)$, което е тривиално.

**Следствие 2.4.7.** Ако $y \in \mathcal{D}'(I)$, $I \subset R^1$ - отворен интервал, удовлетворява

$$y' + ay = f \in C(I),$$

където $a \in C^\infty(I)$, то $y \in C^1(I)$, т.е. последното равенство е изпълнено в класически смисъл.

**Доказателство.** При $a \equiv 0$ това е очевидно, защото ако $v \in C^1$ е примитивна на $f$, то $(y - v)' = y' - v' = 0$ и съгласно теорема 2.4.5 съществува константа $C$, за която $u = v + C$. В общия случай означаваме с $A(x)$ решение на уравнението $A' = Aa$, което никъде не се анулира (например $A(x) = \exp\int_0^x a(t)dt$). Тогава

$$\frac{d}{dx}(Ay) = Ay' + A'y = A(y' + ay) = Af \in (I),$$

и следователно $Ay \in C^1(I)$, както току що установихме в частния случай. Сега е очевидно, че $y = A^{-1}.Ay \in C^1(I)$.

**Забележка 2.4.8.** Резултатът от следствие 2.4.7 се обобщава лесно за произволна линейна нормална система

$$Y' = BY,\ \ Y = {}^t(y_1, \ldots, y_n) \in (\mathscr{D}'(R^1))^n,$$

където $B = \|b_{ij}(x)\|$ е $n$ x $n$ матрица с елементи от $C^\infty(R^1)$. Нека $U$ е нейна фундаментална матрица. Тя е обратима, защото детерминантата й (т.е. детерминантата на Вронски за разглежданата система) не се анулира. Имайки предвид равенството $U' = BU$ и полагайки $Y = UZ$, където $Z = {}^t(z_1, \ldots, z_n)$ е нов неизвестен вектор-стълб намираме $U'Z + UZ' = BUZ$, т.е. $UZ' = 0$ или $Z' = 0$. Тъй като, според теорема 2.4.5, последната система

$$z_1' = 0, \ldots, z_n' = 0,$$

има решение

$$z_i = C_i,\ \ i = 1, \ldots, n, \quad \text{- константи,}$$

следва, че $Y = UC$, където $C$ е вектор-стълбът от последните константи, т.е. всички решения в $(D'(R^1))^n$ на системата се оказват класически.

(III)

Ще завършим параграфа с допълнителни **сведения за разпределенията с компактен носител.** Разглеждаме $u \in \mathscr{D}'(R^n)$, чийто носител $\text{supp}\, u = K$ е компактен. Фиксираме $\psi \in \mathscr{D}(R^n)$, която е тъждествено равна на единица в околност на $K$. Тогава за всяка функция $\varphi \in C^\infty(R^n)$ можем да дефинираме

$$u(\varphi) = u(\psi\varphi). \tag{2.4.7}$$

Очевидно е, че ако $\varphi \in \mathscr{D}(R^n)$, то

$$u(\varphi) = u(\varphi\psi) + u(\varphi(1 - \psi)) = u(\varphi\psi),$$

защото $\text{supp}[\varphi(1 - \psi)] \cap K = \varnothing$ (вж. следствие 2.3.11). От друга страна дефиниция (2.4.7) не зависи от $\psi$, защото за две подобни функции $\psi_1, \psi_2$ имаме $u(\varphi\psi_1) - u(\varphi\psi_2) = u(\varphi(\psi_1 - \psi_2)) = 0$, тъй като отново $\text{supp}[\varphi(\psi_1 - \psi_2)] \cap K = \varnothing$. Следователно с (2.4.7) се дифинира линеен функционал над $C^\infty(\Omega)$, имащ следното свойство, произтичащо от (2.3.1), което изразява неговата непрекъснатост:

Съществува компакт $K_0$ и константи $C$, $m$,
за които $|\, v(\varphi)\,| \le C \sum_{|\alpha|\le m} \sup_{K_0} |\partial^\alpha \varphi|$, $\forall \varphi \in C^\infty(R^n)$

където всъщност $K_0 = \operatorname{supp} \psi$.

Обратно, нека за линейния непрекъснат функционал $v$ над $C^\infty(R^n)$ да съществуват константи $C$, $m$ и компакт $L$, за които

$$|\, v(\varphi)\,| \le C \sum_{|\alpha|\le m} \sup_{L} |\partial^\alpha \varphi|, \ \forall \varphi \in C^\infty(R^n). \tag{2.4.8}$$

Тогава рестрикцията $\tilde{v}$ на $v$ над $\mathcal{D}'(\Omega)$ е разпределение, чийто носител се съдържа в $L$, тъй като от (2.4.8) следва $\tilde{v}(\varphi) = 0$, когато $\operatorname{supp} \varphi \cap L = \varnothing$. Ако тази рестрикция продължим до линеен функционал $w$ над $C^\infty$ (със запазване на последното свойство), получаваме точно първоначалния функционал $v$. Наистина, фиксирайки $\chi \in C_0^\infty(R^n)$, която е тъждествено равна на единица в околност на $L$, имаме

$$v(\varphi) = v(\varphi\chi) = \tilde{v}(\chi\varphi), \ \forall \varphi \in C^\infty(R^n),$$

и аналогично

$$v(\varphi) = v(\varphi\chi) + v(\varphi(1-\chi)) = \tilde{v}(\varphi\chi) + v(\varphi(1-\chi) = \tilde{v}(\varphi\chi),$$

тъй като $v(\varphi(1-\chi)) = 0$ предвид $\operatorname{supp}[\varphi(1-\chi)] \cap L = \varnothing$ и предположенията за $v$.

Множеството от разпределения с компактен носител в $R^n$ се означава с $C'(R^n)$. Тази съвкупност съвпада с множеството от линейни функционали над $C^\infty(^n)$, които са **непрекъснати** по отношение на сходимост в последнното пространство, въведена по следния начин:

**Дефиниция 2.4.9.** Казваме, че редицата $\{\varphi_n\} \subset C^\infty(R^n)$, клони към $\varphi \in C^\infty(R^n)$ при $n \to +\infty$, ако за всеки мултииндекс $\alpha \in N^n$ редицата $\{\partial^\alpha(\varphi_n - \varphi)\}$ клони равномерно към нула над всеки предварително фиксиран компакт.

Пространството $C^\infty(R^n)$ с така въведената сходимост се означава с $\mathcal{E}(R^n)$. Лесно можем да се убедим, че еквивалентна дефиниция на непрекъснатостта на елементите от $\mathcal{E}'(R^n)$ е условието (2.4.8). Най-напред, очевидно е, че ако $v$ е линеен функционал над $C^\infty(R^n)$, удовлетворяващ (2.4.8), то той е непрекъснат в смисъла на дефиниция 2.4.9, г.е. ако $\{\varphi_n\} \subset C^\infty(R^n)$ и $\{\varphi_n\} \to \varphi$ в $\mathcal{E}(R^n)$, то $\{v(\varphi_n)\} \to v(\varphi)$. Обратно, ако допуснем, че (2.4.8) не е в сила, то разсъждавайки както при теорема 2.3.5 за $L_n = \{x \mid |x| \le n\}$, $C = m = n$, $n = 1, 2, \dots$, която клони към нула съгласно дефиниция 2.4.9, и едновременно с това $v|(\psi_n)| = 1$.

Очевидно $\mathcal{E}'(R^n) \subset \mathcal{D}_F'(R^n)$, но обратното не е вярно; например $\sum_{k\in Z} \delta_k \in \mathcal{D}'(R^1) \backslash \mathcal{E}'(R^1)$.

Ще разглеждаме по-подробно специалния тип **разпределения, имащи носител в една точка**. Нека например $\operatorname{supp} u = \{0\}$, $u \in \mathcal{D}'(R^n)$, и редът му не надминава числото $m \in N$ (вж. дефиниция 2.3.6). Фиксираме произволни функции $\eta \in \mathscr{D}(R^n)$ и $\psi \in \mathscr{D}(|x| < 1)$, където $\psi(x) \equiv 1$ за $|x| \le \dfrac{1}{2}$. Тогава

$$\psi(x) = \sum_{|\alpha|\le m} \tfrac{1}{\alpha!}\partial^a\eta(0)\,.x^\alpha.\psi(x) + \rho(x)$$

където $\rho \in \mathscr{D}(R^n)$ се дефинира с последното равенство. Ще докажем, че $u(\rho) = 0$. За тази цел усредняваме характеристичната функция на кълбото $K_{2\varepsilon} = \{x \mid |x| < 2\varepsilon\}$ и получаваме функцията

$$\chi_\varepsilon = \varepsilon^{-n} \int_{K_{2\varepsilon}} \omega\!\left(\tfrac{x-y}{\varepsilon}\right)dy \in C_0^\infty\ (|x| < 3\varepsilon),$$

където $\omega$ е регуляризаторът от дефиниция 2.2.1. Очевидно $\chi_\varepsilon \equiv 1$ над концетричното кълбо с радиус $\varepsilon$ и $u(\rho) = u(\rho\chi_\varepsilon)$, тъй като $u(\rho(1 - \chi_\varepsilon)) = 0$. Следователно

$$|u(\rho)| \le C \sum_{|\alpha|\le m} \sup |\,\partial^\alpha(\rho\chi_\varepsilon)\,|.$$

Тъй като използваме формулата на Маклорен за функцията $\rho(x)$ :

$$|\,\partial^\alpha\rho(x)\,| \le \text{const}\,(\alpha).|\,x\,|^{m+1-|\alpha|},$$

а след директно диференциране съответно следва:

$$|\,\partial^\alpha\chi_\varepsilon\,(x)\,| \le \text{const}\,(\alpha).\,\varepsilon^{-|\alpha|},$$

откъдето чрез формулата на Лайбниц (2.4.4) и с помощта на последните оценки, установяваме, че $|u(\rho)| \le \text{const}.\,\varepsilon$, т.е. $u(\rho) = 0$ предвид произволността на $\varepsilon$. И така

$$u(\rho) = \left(u, \sum_{|\alpha|\le m} \tfrac{1}{\alpha!} x^\alpha \psi(x)\partial^\alpha\eta(0)\right) = \sum_{|\alpha|\le m} C_\alpha \delta^{(\alpha)}(\eta)\,,$$

където $C_\alpha = \left(u, \dfrac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} x^\alpha.\psi(x)\right)$ са константи. Доказахме следната теорема

**Теорема 2.4.10.** Разпределенията с носител в една точка са линейна комбинация на $\delta$-функцията с носител в точката и (краен брой)нейни производни.

**Пример 2.4.11.** Последният резултат позволява да намерим всички решения $u$ от $\mathscr{D}'(R^1)$ на уравнението $x.u = 0$. Най напред, ако носителят на $\varphi \in \mathscr{D}(R^1)$ не съдържа началото 0, то $\dfrac{\varphi}{x} \in \mathscr{D}(R^1)$ и следователно

$$(u, \varphi) = \left(u, x\frac{\varphi}{x}\right) = \left(xu, \frac{\varphi}{x}\right) = 0,$$

т.е. $\operatorname{supp} u = \{0\}$. Така получаваме

(2.4.9) $$u = \sum_{\alpha \le m} c_\alpha \delta^{(\alpha)}, \quad m \in N.$$

Ясно е, че за всички $\alpha > 0$ е изпълнено $c_\alpha, = 0$, защото в противен случай, ако

$$\alpha_0 = \max\{\alpha \mid c_\alpha \ne 0\} > 0,$$

тогава за $\psi \in C_0^\infty(R^1)$, съвпадаща с единица в околност на началото, бихме получили

$$\left(x\delta^{(\alpha)}, x^{\alpha_0 - 1}\psi\right) = \begin{cases} \alpha_0!(-1)^{\alpha_0}, & \alpha = \alpha_0, \\ 0, & \alpha < \alpha_0, \end{cases}$$

т.е. (2.4.9) не би било решение на разглежданото уравнение.

## §2.5. Конволюция и разпределения

При дефинирането на конволюция на разпределения ще изхождаме от определението на **конволюция** $u*\varphi$ на непрекъснати функции $u$, $\varphi$, от които поне едната има компактен носител:

$$(u*\varphi)(x) = \int u(x-y)\varphi(y)dy = \int u(z)\varphi(x-z)dz = (\varphi*u)(x).$$

**Дефиниция 2.5.1.** Конволюция на $u \in \mathscr{D}'(R^n)$ и $\varphi \in \mathscr{D}(R^n)$ се нарича функцията

$$(u*\varphi)(x) = (u, \varphi(x - .)), \quad x \in R^n,$$

където последният запис означава, че $u$ действа върху $\psi(y) \equiv \varphi(x-y) \in \mathscr{D}(R_y^n)$ (т.е. точката $x$ е фиксирана).

**Забележка 2.5.2.** Векторната сума

$$A + B = \{z \in R^n, \exists x \in A, \exists y \in B: z = x + y\}$$

на две множества $A, B \subset R^n$ има следните свойства:

а) Ако $A$ е **затворено**, а $B$ - **компактно**, то $A + B$ е **затворено** множество.

б) Ако $A$ и $B$ са **компактни**, то $A + B$ е също **компактно** множество.

Да проверим верността например на първото твърдение. Нека $\{z_m\} \subset A + B$ и $\{z_m\} \to z_o$. От дефиницията следва, че $z_m = x_m + y_m$, $x_m \in A$, $y_m \in B$. Поради компактността на $B$ съществува подредица $\{y_{m_k}\}$, клоняща към $y_0 \in B$.

Следователно $x_{m_k} = z_{m_k} - y_{m_k} \to z_0 - y_0$, като граничният елемент принадлежи на $A$, тъй като е затворено. Оттук получаваме, че $z_0 = (z_0 - y_0) + y_0 \in A + B$, т.е. последното множество е затворено.

**Теорема 2.5.3.** Ако $u \in \mathcal{D}'(R^n)$, $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$, то

а) $u{*}\varphi \in C^\infty(R^n)$ и $\partial^\alpha(u{*}\varphi) = (\partial^\alpha u){*}\varphi = u{*}(\partial^\alpha\varphi)$ за всеки мултииндекс $\alpha$;

б) $\operatorname{supp}(u{*}\varphi) \subset \operatorname{supp} u + \operatorname{supp} \varphi$.

**Доказателството** на свойствата. а) се опира на следната лема, необходима и по-нататък:

**Лема 2.5.4.** Нека $\psi(x, y) \in C^\infty(X\text{x}Y)$, където $X \subset R_x^n$, $Y \subset R_y^m$ са отворени множества. Тогава, ако за всеки компакт $Q \subset X$ съществува компакт $K = K(Q) \subset Y$, за който

$$\psi(x, y) = 0, \forall x \in X, \forall y \notin K,$$

то за всяко разпределение $u \in \mathcal{D}'(Y)$ функцията

$$x \mapsto u(\psi(x, .))$$

е от класа $C^\infty$ и $\partial_x^\alpha u(\psi(x, .)) = u\partial_x^\alpha(\psi(x, .)), \forall \alpha \in N^n$.

**Доказателство** на лема 2.5.4. При фиксирани $x$ и $y$, чрез формулата на Тейлор намираме

$$\psi(x + h, y) = \psi(x, y) + \sum_{j=1}^n h_j.\partial_{x_j}\psi(x,y) + \rho(x, y, h),\ h \in R^n,$$

където $\sup_y |\partial_y^\alpha \rho(x, y, h)| = O(|h|^2)$ за $h \to 0, \forall \alpha \in N^n$.

За да се убедим в последното твърдение е достатъчно да вземем предвид, че

$$\rho(x, y, h) = \int_0^1 (1-s)\frac{d^2}{ds^2}\psi(x+sh, y)ds$$

и да мажорираме с константи $\psi$ и производните й до съответния ред над компакта $l \text{ x } K(l)$, $l = \{z \mid z = x + sh, s \in [0. 1]\}$.

Сега е очевидно, че

$$u(\psi(x+ h, .)) = u(\psi(x, .)) + \sum_{j=1}^n h_j.u(\partial_{x_j}\psi(x,.)) + O(|h|^2),$$

където е взето предвид, че $(u, \rho(x, . , h))$ е добре дефинирано, тъй като носителят по $y$ на $u$ се съдържа в $K(l)$ за всички достатъчно малки $h$, а

$$|(u, \rho)| \le C \sum_{|\alpha|\le m} \sup|\partial^\alpha \rho|$$

съгласно основните оценки от дефиницията за разпределения. Последната релация показва, че функцията

$$u \mapsto u(\psi(x, .))$$

е диференцируема и освен това

$$\partial_{x_j} u(\psi(, .)) = u(\partial_{x_j} \psi(, .)),$$

което ни дава желаното твърдение за $|\alpha| = 1$. Прилагайки този резултат последователно, се убеждаваме във верността на лемата за всички по-големи стойности на $\alpha$.

**Доказателство на теорема 2.5.3.** а) От лема 2.5.4 при $\psi(x, y) \equiv \varphi(x - y)$ следва, че $u*\varphi \in C^\infty$. Второто равенство е непосредствено следствие от дефиницията за производна на разпределение, тъй като

$$\begin{aligned}(u*\partial^\alpha\varphi)(x) &= u(\partial_x{}^\alpha\varphi(x-y)) = (-1)^{|\alpha|} u(\partial_y{}^\alpha \varphi(x-y)) \\ &= (-1)^{2|\alpha|} (\partial^\alpha u)(\varphi(x-y)) = (\partial^\alpha u)*\varphi)(x).\end{aligned}$$

б) Числото $(u*\varphi)(x)$ е евентуално различно от от нула само ако $\operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp} \eta \neq \varnothing$, където $\eta(y) \equiv \varphi(x - y)$, т.е. ако съществува $y \in \operatorname{supp} u$, за което $x - y \in \operatorname{supp} \varphi$. Следователно

$$x = y + (x - y) \in \operatorname{supp} u + \operatorname{supp} \varphi,$$

с което твърдението е доказано.

**Забележка 2.5.5.** Когато $u \in \mathscr{E}'(R^n)$, теорема 2.5.3 б) показва, че изображението $\varphi \mapsto u*\varphi$ е линейно и непрекъснато от $\mathscr{D}(R^n)$ в $\mathscr{D}(R^n)$ (вж. забележка 4.5.2 б)). Освен това, при $u \in \mathscr{E}'(R^n)$ конволюцията $u*\varphi$ е дефинирана за произволно $\varphi \in \mathscr{E}(R^n)$, задава непрекъснато изображение от $\mathscr{E}(R^n)$ в $\mathscr{E}(R^n)$, тъй като ако $\chi \in \mathscr{D}(R^n)$ е тъждествено равна на единица в околност на $\operatorname{supp} u$, то $(u*\varphi)(x) = (u, \chi(.)\varphi(x - .))$, $\varphi \in \mathscr{E}(R^n)$, е коректна дефиниция, която не зависи от $\chi$.

Въведената в дефиниция 2.5.1 конволюция е асоциативна в смисъл, че:

**Теорема 2.5.6.** Ако $u \in \mathscr{D}'(R^n)$ и $\varphi, \psi \in \mathscr{D}(R^n)$, то

$$(u*\varphi)*\psi = u*(\varphi*\psi).$$

**Доказателство.** Нека $\varepsilon > 0$. Ако $\varphi, \psi \in C_0^0(R^n)$, то римановите суми

$$\sum_{k\in Z^n} \varepsilon^n \varphi(-\varepsilon)(\varepsilon) \tag{2.5.1}$$

на интеграла $\int_{R^n} \varphi(x-y)\psi(y)dy = (\varphi*\psi)(x)$ представляват функции (от $x$) с компактен носител, съдържащ се в $\operatorname{supp} \varphi + \operatorname{supp} \psi$. Понеже

$$(x, y) \mapsto \varphi(x - y)\psi(y)$$

е равномерно непрекъсната функция, сумите (2.5.1) клонят равномерно към $(\varphi*\psi)(x)$ при $\varepsilon \to 0$. Диференцирайки(2.5.1), се убеждаваме, че при $\varphi \in \mathscr{D}(R^n)$, $\psi \in C_0^0(R^n)$, тези суми клонят в $\mathscr{D}(R^n)$ към $\varphi*\psi$. (Използва се очевидното равенство $(\partial^\alpha\varphi)*\psi = \partial^\alpha(\varphi*\psi)$, $\forall\alpha \in R^n$). Сега можем да завършим доказателството на теорема 2.5.6:

$$(u*((\varphi*\psi))(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} u\left(\sum_{k\in Z^n}\varepsilon^n\varphi(x-.-\varepsilon k)\psi(\varepsilon k)\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k\in Z^n}\varepsilon^n(u*\varphi)(x-\varepsilon k)\psi(\varepsilon k) =$$
$$\int(u*\varphi)(x-y)\psi(y)dy = ((u*\varphi)*\psi)(x).$$

**Забележка 2.5.7.** Ако предположим, че $u \in \mathcal{E}'(R^n)$, то горната теорема е валидна и в случай, че една от функциите $\varphi$ или $\psi$ е от $\mathcal{E}(R^n)$ (вж. забележка 2.5.5).

Ще се отклоним за малко от основната тема в този параграф, за да отбележим едно важно следствие от теорема 2.5.6, обобщаващо резултатите за средни функции (лема 2.2.2) в случая на разпределение. Нека най-напред $u \in \mathcal{D}'(R^n)$, а $\omega_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}\ \omega\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$, където $\omega$ е регуляризаторът от дефиниция 2.2.1. Означаваме

(2.5.2) $$\check{\psi}(x) = \psi(-x) \quad (\psi \in \mathcal{D}(R^n)).$$
Тогава $\omega_\varepsilon \equiv u*\omega_\varepsilon$ има свойството

$$(u_\varepsilon, \psi) = (u_\varepsilon*\check{\psi})(0) = (u*(\omega_\varepsilon*\check{\psi}))(0) = (u, \check{\omega}_\varepsilon*\psi) = (u, \omega_\varepsilon*\psi) \to (u, \psi),$$

т.е. $u_\varepsilon \to u$ в $\mathcal{D}'(R^n)$ при $\varepsilon \to 0$. Използвахме, че

(2.5.3) $$\varphi\check{*}\psi = \check{\varphi}*\check{\psi} \text{ и } \check{\check{\varphi}} = \varphi, \ \forall\varphi, \psi \in \mathcal{D}(R^n),$$

както и четността на $\omega_\varepsilon$. Разбира се, ако се ограничим само с функции $\psi \in \mathcal{D}(O)$, където $O \subset R^n$ е фиксирано отворено множество, то току-що установеният резултат показва, че

$$u_\varepsilon \to u \quad \text{в } \mathcal{D}'(O).$$

**Следствие 2.5.8.** Нека $\Omega \subset R^n$ е отворено множество и $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Съществува редица $\{u_j\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$, клоняща към $u$ в $\mathcal{D}'(\Omega)$.

**Доказателство.** Нека $\{K_j\}$ е редица от компакти, изчерпващи $\Omega$, т.е. $K_j \subset K_{j+1} \subset \Omega, \forall j \in N$, и $\Omega = \bigcup_{j-1}^{\infty} K_j$. Нека $\chi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\Omega)$ е тъждествено равна на единица в околност на $K_j$. Означаваме

$$u_j = (\chi_j u)*\omega_{\varepsilon_j},$$

където $\{\varepsilon_j\} \to 0$ и $\varepsilon_j > 0$ са толкова малки, че $\operatorname{supp}\chi_j + \{x|\ |x| \le \varepsilon_j\} \subset \Omega$, т.е. $u_j \in \mathcal{D}(\Omega)$. Тогава при фиксирана функция $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$(u_j, \psi) = ((\chi_j u) * \omega_{\varepsilon_j} * \check{\psi})(0) = (\chi_j u, \omega_{\varepsilon_j} * \check{\psi}) = (u, \chi_j(\omega_{\varepsilon_j} * \psi))$$

съвпада с $(u, \omega_{\varepsilon_j} * \psi)$ за всички достатъчно големи номера $j$ (а именно, за които $\operatorname{supp} \psi * \omega_{\varepsilon_j} \subset K_j$). Тъй като при $j \to \infty$ последната редица клони към $(u, \psi)$, следствието е доказано.

Сега можем да се насочим към дефиниране на понятието конволюция на разпределения. Най-напред ще направим две предварителни бележки.

а) Ако $u \in \mathscr{D}'(R^n)$ и $\{\varphi\} \subset \mathscr{D}(R^n)$ клони към нула в $\mathscr{D}(R^n)$, то $\{u*\varphi_j\}$ клони към нула в $\mathscr{E}(R^n)$. Наистина, да фиксираме компакт $K \subset R^n$. Нека $\{\varphi_j\} \to 0$ в $\mathscr{D}(R^n)$ и всички носители $\operatorname{supp} \varphi_j$ се съдържат в $K_0 \subset R^n$. Тогава от дефиницията за разпределение следва, че за подходящи константи $C, m$

$$|(u*\varphi_j)(x)| = |u(\varphi_j(x - .))| \le C \sum_{|\alpha| \le m} \sup_{y \in x - K_0} |\partial^\alpha \varphi_j(x - y)|,$$

откъдето

$$\sup_K |(u*\varphi_j)(x)| \le C \sum_{|\alpha| \le m} \sup_{\substack{x \in K \\ y \in x - K_0}} |\partial^\alpha \varphi_j(x - y)|,$$

,
(т.е. $x - y$ принадлежи на компакта $K - K_0$). Аналогично се оценяват и производните $\partial^\beta(u*\varphi_j) = u*(\partial^\beta \varphi_j)$, с което твърдението е установено.

б) За всеки вектор $h \in R^n$ дефинираме оператора $\tau_h$, осъществяващ транслация на вектор $h$:

$$(\tau_h \varphi)(x) = \varphi(x - h), \ \forall \varphi \in \mathscr{D}(R^n).$$

Очевидно

$$(u* \tau_h\varphi))(x) =(u, \varphi(x - h - .)) = \tau_h(u*\varphi)(x),$$

т.е. конволюцията с разпределението $u$ и операторът $\tau_h$ комутират.

Фактически операцията $u*$ се дефинира напълно от свойства а) и б), както показва следната

**Теорема 2.5.9.** Нека $U$: $\mathscr{D}(R^n) \to \mathscr{E}(R^n)$ е линейно и непрекъснато изображение, което комутира с всички транслации $\tau_h$,. Тогава съществува единствено разпределение $h \in R^n$, за което

$$U\varphi(x) = (u*\varphi)(x), \ \forall \varphi \in \mathscr{D}(R^n).$$

**Доказателство.** Ако такова разпределение $u$ съществува, то $u(\check{\varphi}) = U\varphi(0)$ (вж. (2.5.2)), откъдето следва твърдението за единственост и същевременно подсказва начина за дефиниране на търсеното разпределение. Ясно е, поради непрекъснатостта на $u$, че линейният функционал

$$\mathscr{D}(R^n) \ni \varphi \mapsto U\check{\varphi}(0) \in C$$

дефинира разпределение. Означаваме го с $u$, т.е. $u(\varphi) = U\check{\varphi}(0)$ и следователно $U\varphi(0) = u(\check{\varphi}) = (u*\varphi)(0)$. Предвид комутирането на $\tau_h$ с $U$ и $u*$, намираме

$$U\varphi(h) = (\tau_{-h}U\varphi)(0) = (U\tau_{-h}\varphi)(0) = (u*(\tau_{-h}\varphi))(0) = \tau_{-h}(u*\varphi)(0) = (u*\varphi)(h), \quad \forall h \in R^n,$$

с което теоремата е доказана.

След тази подготовка ще определим **конволюция на две разпределения** $u_1, u_2$, поне едно от които има компактен носител. Очевидно

$$\varphi \mapsto u_1*(u_2*\varphi) \tag{2.5.4}$$

е линейно и непрекъснато изображение от $\mathscr{D}(R^n)$ в $\mathscr{E}(R^n)$, Независимо от това дали $u_1$ или $u_2$ е с компактен носител. Освен това изображението (2.5.4) е инвариантно относно транслациите. Съгласно теорема 2.5.9 можем да дадем следната

**Дефиниция 2.5.10.** Под **конволюция на две разпределения** $u_1, u_2 \in \mathscr{D}'(R^n)$, поне едно от които има компактен носител, се разбира единственото разпределение $u \in \mathscr{D}'(R^n)$, за което

$$u_1*(u_2*\varphi) = u*\varphi, \quad \forall\varphi\in \mathscr{D}(R^n).$$

**Задача 2.5.11.** Убедете се, че дефиниция 2.5.10 води до същия резултат в частните случаи:

а) $u_1 = u \in \mathscr{D}'(R^n)$, $u_2 = \varphi \in \mathscr{D}(R^n)$;

б) $u_1 = u \in \mathscr{E}'(R^n)$, $u_2 = \psi \in \mathscr{E}'(R^n)$

(Упътване: Вж. теорема 2.5.6 и забележка 2.5.7).

**Пример 2.5.12.** Тъй като за всяка функция $\varphi \in \mathscr{D}(R^n)$

$$(\delta*\varphi)(x) = (\delta, \varphi(x - .)) = \varphi(x),$$

то за произволно разпределение $u \in \mathscr{D}'(R^n)$

$$(u*\delta)(\varphi) = ((u*\delta)*\check{\varphi}(0) = (u*(\delta*\check{\varphi}))(0) = (u*\check{\varphi})(0) = u(\varphi), \text{ т.е. } u*\delta = u.$$

Преминаваме към изучаване на свойствата на конволюцията от разпределения.

**Теорема 2.5.13.** Ако $u_1, u_2 \in \mathscr{D}'(R^n)$, като поне едно от тях е с компактен носител, то

а) $u_1*u_2 = u_2*u_1$;

б) $\operatorname{supp}(u_1*u_2) \subset \operatorname{supp} u_1 + \operatorname{supp} u_2$.

**Доказателство.** а) Най-напред да отбележим, че ако $v_i \in \mathscr{D}'(R^n)$, $i = 1, 2$, и $v_1 * \varphi = v_2 * \varphi$, $\forall \varphi \in \mathscr{D}(R^n)$, то $(v_1 * \check{\varphi})(0) = (v_1 * \check{\varphi})(0)$, т.е. $v_1(\varphi) = v_2(\varphi)$, $\forall \varphi \in \mathscr{D}(R^n)$, което означава, че $u_1 = u_2$. Разбира се, ако $v_1 * (\varphi * \psi) = v_2 * (\varphi * \psi)$, $\forall \varphi, \psi \in \mathscr{D}(R^n)$ то също $v_1 = v_2$ (вж. теорема 2.5.6).

Предвид теорема 2.5.6, забележка 2.5.7 и комутативността на конволюция на гладки функции (отбелязана в началото на този параграф), получаваме за произволни $\varphi, \psi \in \mathscr{D}(R^n)$:

$$(u_1 * u_2) * (\varphi * \psi) = u_1 * (u_2 * (\varphi * \psi)) = u_1 * ((u_2 * \varphi) * \psi) = u_1 * (\psi * (u_2 * \varphi)) = (u_1 * \psi) * (u_2 * \varphi).$$

Аналогично

$$(u_2 * u_1) * (\varphi * \psi) = (u_2 * u_1) * (\psi * \varphi) = (u_2 * \varphi) * (u_1 * \psi),$$

съгласно току-що получената верига от равенства, което от своя страна съвпада с $(u_1 * \psi) * (u_2 * \varphi)$. С това комутативността на конвулюцията е доказана.

б) Ако $\varepsilon > 0$ е произволно фиксирано, а $\omega_\varepsilon$ е регуляризаторът от дефиниция 2.2.1, то равенството

$$(u_1 * u_2) * \omega_\varepsilon = u_1 * (u_2 * \omega_\varepsilon)$$

и теорема 2.5.3. показват, че

$$\text{supp}\,(u_1 * u_2) * \omega_\varepsilon \subset \text{supp}\, u_1 + \text{supp}\, u_2 + \{x \mid |x| < \varepsilon\}. \tag{2.5.5}$$

Нека $x_0 \notin \text{supp}\, u_1 + \text{supp}\, u_2$. Ако $\varepsilon > 0$ е достатъчно малко, то $x_0$ няма да принадлежи на сумата в дясната страна на (2.5.5). Фиксираме околност $G$ на $x_0$, която не пресича тази сума и нека $\psi \in C_0^\infty(G)$ е произволна. Тогава за $u = u_1 * u_2$ е изпълнено $0 = (u * \omega_\varepsilon, \psi) \to (u, \psi)$ при $\varepsilon \to 0$. И така, рестрикцията на $u$ над $G$ се анулира, т.е. $x_0 \notin \text{supp}\,(u_1 * u_2)$, с което включването б) е установено.

От дефиницията на конволюция следва непосредствено, че тя е асоциативна, т.е. ако $u_i \in \mathscr{D}'(R^n)$, $i = 1, 2, 3$, и поне две от тях са с компактен носител, то

$$(u_1 * u_2) * u_3 = u_1 * (u_2 * u_3). \tag{2.5.6}$$

Преди да се спрем на правилото за диференциране на конволюция на разпределение, ще отбележим, че самата операция диференциране може да се запише като конволюция, а именно

$$\partial^\alpha u = (\partial^\alpha \delta) * u, \ \forall\, u \in \mathscr{D}'(R^n),$$

защото

$$(\partial^\alpha u) * \varphi = u * (\partial^\alpha \varphi) = u * (\partial^\alpha \varphi * \delta) = u * (\partial^\alpha \delta * \varphi) = u * \partial^\alpha \delta) * \varphi,$$

понеже $\varphi * \delta = \delta * \varphi = \varphi$ за всяко $\varphi \in \mathscr{E}(R^n)$. Оттук, предвид асоциативността и комутативността на конволюцията, веднага следва, че

$$\partial^\alpha (u_1 * u_2) = (\partial^\alpha u_1) * u_2 = u_1 * \partial^\alpha u_2. \tag{2.5.7}$$

Например, $\partial^\alpha(u_1 * u_2) = (u_1 * u_2) * \partial^\alpha\delta = u_1 * (u_2 * \partial^\alpha\delta) = u_1 * \partial^\alpha u_2$.

**Пример 2.5.14.** Свойство (2.5.6) е валидно само при условието за носителите, наложено там. Нека върху правата $R^1$ да разгледаме разпределенията $u = 1$, $v = \delta'(x)$ и $w = H(x)$ (вж. пример 2.4.2). Тогава

$$u * v = 0 \quad \text{и} \quad (u * v) * w = 0$$

и

$$v * w = \delta \quad \text{и} \quad u(v * w) = u,$$

т.е. асоциативността не е в сила.

**Забележка 2.5.15.** Възможно е да се обобщи понятието конволюция и за случай, когато и **двете** разпределения $u_1$, $u_2$ нямат компактни носител. Изходен пункт е следната релация, валидна когато поне едно от разпределенията $u_1, u_2 \in \mathscr{D}'(R^n)$ е с компактен носител

(2.5.8) $$(u_1 * u_2, \varphi) = (u_{1x}, (u_{2y}, \varphi(x + y)), \quad \forall\, \varphi \in \mathscr{D}(R^n)$$

където индексите $x$, $y$ показват по коя от променливите действа съответното разпределение. Доказателството на (2.5.8) следва от дефиницията на конволюция, тъй като

$$(u_2 * \check{\varphi})(x) = (u_2, \check{\varphi}(x - .)),$$

откъдето

$$(u_2 * \check{\varphi})(-x) = (u_2, \check{\varphi}(-x - .)) = (u_2, \varphi(x + .)),$$

и следователно

$$(u_1 * u_2, \varphi) = (u_1 * u_2 * \check{\varphi})(0) = (u_1, (u_2 * \check{\varphi})^{\vee}) = (u_{1x}, (u_{2y}, \varphi(x + y))).$$

**Дефиниция 2.5.16.** Казваме, че разпределенията $u_1, u_2 \in \mathscr{D}'(R^n)$ имат конволютивни носители, ако за всяко множество $G \subset R^n$ съществува константа $C$ такава, че

$$x \in \operatorname{supp} u_1,\ y \in \operatorname{supp} u_2,\ x + y \in G \quad \Rightarrow \quad |x| \le C \ \text{и} \ |y| \le C.$$

**Примери 2.5.17.** а) Ако $H(x)$ е функцията на Хейвисайд, то разпределенията $u = v = H(x)$ имат конволютивни носители, а разпределенията $u = H(x)$, $v = H(-x)$ нямат конволютивни носители. (По-общо, за всеки две разпределения върху $R^1$ с носители в $[\,0, +\infty)$, конволюцията е определена.)

б) Нека $\varGamma \subset R^n$ е затворен изпъкнал конус (т.е. затворено и изпъкнало множество със свойството: $x \in \varGamma$ и $\lambda > 0 \Rightarrow \lambda \in \varGamma$), който е собствен, т.е. не съдържа нито една права. Нека $G$ е кълбо с център началото и радиус $R$. Ще установим, че всички $x \in \varGamma$, както и всички $y \in \varGamma$, за които $x + y \in G$, представляват ограничени множества. Наистина, ако допуснем противното, то би съществувала редица $\{u_j, \varphi_j\} \in \Gamma\times\Gamma$, за която $|x_j + y_j| \leq$ и $|x_j| \to +\infty$. Понеже $\left\{\frac{x_j}{|x_j|}\right\}$ е ограничена, а $\Gamma$ - затворено, то съществува подредица $\{x_j\}$, за която $\left\{\frac{x_j}{|x_j|}\right\} \to \in \Gamma$. Тогава неравенството

$$\left|\frac{x_j}{|x_j|} + \frac{y_j}{|x_j|}\right| \leq \frac{C}{|x_j|}$$

показва, че $\left\{\frac{y_j}{|x_j|}\right\} \to -x \in \Gamma$. Следователно правата

$$\{z \in R^n \mid z = \lambda x, \lambda \in R^1\}$$

лежи изцяло в $\Gamma$, което е в противоречие с предположенията. И така, за всеки две разпределения с носители в $\Gamma$ конволюцията е определена.

**Задача 2.5.18.** Нека $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{D}(R^n)$ и $\varphi_j \equiv 1, j = 1, 2$, в околност на кълбото $\{x \| x| \leq C\}$. Докажете, че рестрикцията на $(\varphi_1 u_1)*(\varphi_2 u_2)$ над отвореното множество $G \subset R^n$ не зависи от $\varphi_1, \varphi_2$ при условие, че $u_1, u_2$ имат конволютивни носители, а $G$ и $C$ са както в дефиниция 2.5.16.

**Забележка 2.5.19.** Резултатът от горната задача позволява да се дефинира $u_1*u_2$ над $G$ именно като рестрикция над $G$ на разпределението $(\varphi_1 u_1)*(\varphi_2 u_2)$. Съгласно теорема 2.3.9, след като сме дефинирали $u_1*u_2$ **в околност на всяка точка**, то е дефинирано и **глобално**. За тази конволюция е в сила следната

**Теорема 2.5.20.** а) Ако $u, v \in \mathscr{D}'(R^n)$ и имат конволютивни носители, то

1) $u*v = v*u$,
2) $\text{supp}\,(u*v) \subset \text{supp}\, u + \text{supp}\, v$,
3) $\partial^\alpha(u*v) = (\partial^\alpha u)*v = u*\partial^\alpha v$.

б) Ако носителите на $u, v, w \in \mathscr{D}'(R^n)$ удовлетворяват условието

$x \in \text{supp}\, u$, $y \in \text{supp}\, v$, $z \in \text{supp}\, w$, $x + y + z \in G \Rightarrow \exists\, C = \text{const}: |x \leq C, |y| \leq C, |z| \leq C,$

където $G \subset R^n$ е ограничено множество, тогава

$$(u*v)*w = u*(v*w)$$

**Задача 2.5.21.** Докажете теорема 2.5.20.

## 2.6. Тензорно произведение на разпределения

Функцията

$$(u\otimes v)(x, y) = u(x)v(y),\ x \in X,\ y \in Y,$$

където $X \subset R_x^n$ и $Y \subset R_y^m$ са отворени множества, а $u \in C(x)$, $v \in C(y)$, се нарича **тензорно произведение** на функциите $u$ и $v$. Очевидно е, че за произволни $\varphi \in D(X)$, $\psi \in D(Y)$

$$\iint_{X\times Y} (u\otimes v)\,.(\varphi\otimes\psi) = \int_X u\,.\varphi dx\,.\int_Y v\,.\psi dy.$$

Разбира се, ако вместо $\varphi\otimes\psi$ вземем $\Phi(x, y) \in \mathscr{D}(X\times Y)$ **двойният** интеграл може да се запише като **повторен.** Тези наблюдения ще служат за опорна точка при обобщенията, на които е посветен този параграф.

**Теорема 2.6.1. 5.20.** За произволни разпределения $u \in \mathscr{D}'(X)$, $v \in \mathscr{D}'(Y)$, съществува единствено разпределение $w \in \mathscr{D}'(X\times Y)$, за което

$$w(\varphi\otimes\psi) = u(\varphi).v(\psi),\ \forall\varphi \in \mathscr{D}(X),\ \forall\ \psi \in \mathscr{D}(Y), \tag{2.6.1}$$

и освен това

$$w(\Phi) = u_x[v_y(\Phi(x, y))] = v_y[u_x(\Phi(x, y))], \tag{2.6.2}$$

за всяка $\Phi(x, y) \in \mathscr{D}(X\times Y)$, където индексите $x$ и $y$ показват по кои променливи действат разпределенията $u$, $v$. При $u, v \in \mathscr{E}'$ формула (2.6.2) е валидна за всяка функция $\Phi \in \mathscr{E}(X\times Y)$.

**Дефиниция 2.6.2.** Разпределението от теореме 2.6.1 се нарича **тензорно произведение** на разпределенията $u \in \mathscr{D}'(X)$ и $v \in \mathscr{D}'(Y)$ и се означава с $u\otimes v$.

**Доказателство на теорема 2.6.1.** а) **Единственост.** Ако съществуват две разпределения $w_1$, $w_2$ със свойството (2.6.1), то за разликата им $w$ е в сила

$$w(\varphi\otimes\psi) = 0,\ \forall\varphi \in \mathscr{D}(X),\ \forall\psi \in \mathscr{D}(Y)$$

Ще докажем, че $w = 0$. За тази цел фиксираме регуляризатори $\eta(x)$ и $\rho(y)$ в $R_x^n$ и $R_y^m$, аналогично на $\omega$ от дефиниция 2.2.1. Тогава, като положим

$$\Phi_\varepsilon(x, y) = \varepsilon^{-n-m}\,\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\rho\left(\frac{y}{\varepsilon}\right),$$

имаме (вж. бележките преди следствие 2.5.8)

$$w*\Phi_\varepsilon \to w \text{ в } \mathscr{D}'(Z) \text{ за } \varepsilon \to 0,$$

където $Z \subset X\times Y$ е произволно ограничено отворено множество. Обаче

$$(w*\Phi_\varepsilon)(x, y) = (w, \Phi_\varepsilon(x - ., y - .)) = 0,$$

защото $\Phi_\varepsilon$ е произведение на функции от $\mathcal{D}'(X)$ и $\mathcal{D}'(X)$ съответно. Следователно $w = 0$ в $Z$, а значи и в $X\times Y$.

б) **Съществуване**. Нека $K \subset X$ и $Q \subset Y$ са компактни множества. Тогава съществуват константи $C, L$ и неотрицателни цели числа $k, l$, за които

$$|u(\varphi)| \leq \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_K |\partial_x{}^\alpha \varphi|, \ \forall\varphi \in \mathcal{D}(X), \ \ \operatorname{supp}\varphi \subset K,$$

и

$$|v(\psi)| \leq \sum_{|\alpha|\leq l} \sup_Q |\partial_y{}^\alpha \psi|, \ \forall\psi \in \mathcal{D}(Y), \ \ \operatorname{supp}\psi \subset Q.$$

Фиксираме $\Phi \in \mathcal{D}(X\times Y)$, supp $\Phi \subset X\times Y$. Лема 2.5.4 показва, че при тези условия функцията

$$I(x) = v(\Phi(x, .))$$

е от $C_0^\infty(X)$, supp $I \subset K$ и $\partial^\alpha I(x) = v(\partial_x{}^\alpha \Phi(x, .))$.

Следователно

$$\sup_{x\in K} |\partial_x{}^\alpha I(x)| \leq L \sum_{|\beta|\leq} \sup_{\substack{x\in K\\ y\in Q}} |\partial_x{}^\alpha \partial_y{}^\beta \Phi(x, y)|.$$

Така получаваме за $u(I)$, което очевидно има смисъл, оценката

$$|u(I)| \leq CL \sum_{\substack{|\alpha|\leq k\\ |\beta|\leq l}} \sup_{(x,y)\in K\times Q} |\partial_x{}^\alpha \partial_y{}^\beta \Phi(x, y)|.$$

Следователно формулата $w(\Phi) = u(I)$ дефинира разпределение, което очевидно удовлетворява (2.6.1) и първото равенство в (2.6.2). Като разменим ролите на $u$ и $v$, получаваме разпределение $\tilde{w}$, за което е в сила (2.6.1) и са равни първият и третият член на (2.6.2). От твърдението за единственост следва, че $w = \tilde{w}$ и теоремата е доказана.

Последното твърдение от теоремата се доказва стандартно.

**Теорема 2.6.3.** При означенията на теорема 2.6.1 е вярно

$$\operatorname{supp} u\otimes v = \operatorname{supp} u \times \operatorname{supp} v. \tag{2.6.3}$$

**Доказателство.** Ако $(x_0, y_0) \notin (u\otimes v)$, можем да фиксираме околност $O \ni (x_0, y_0)$, в която $u\otimes v = 0$. Нека $O_1 \ni x_0$, $O_2 \ni y_0$ са околности, за които $O_1\times O_2 \subset O$. Тогава за $\varphi \in \mathcal{D}(O_1)$, $\psi \in \mathcal{D}(O_2)$.

$$0 = (u\otimes v, \varphi\otimes\psi) = u(\varphi).v(\psi) \tag{2.6.4}$$

и следователно поне един от последните два множителя се анулира. Ако съществува $\psi \in \mathcal{D}(O_2)$, за което $v(\psi) \neq 0$, то $u(\varphi) = 0$, $\forall\varphi \in \mathcal{D}(O_1)$ и следователно $x_0 \notin \operatorname{supp} u$, т.е. $(x_0, y_0) \notin \operatorname{supp} u \times \operatorname{supp} v$. Ако такова $\psi$ не съществува, то $y_0 \notin \operatorname{supp} v$ и заключението е същото. Следователно

$$\operatorname{supp} u \times \operatorname{supp} v \subset \operatorname{supp}(u \otimes v)$$

Нека сега $(x_0, y_0) \notin \operatorname{supp} u \times \operatorname{supp} v$ и (за определеност) $x_0 \notin \operatorname{supp} u$. Следователно съществува околност $O_1 \ni x_0$, в която $u = 0$. Фиксирайки околност $O_2 \ni y_0$, чрез равенството (2.6.4) установяваме, че $u \otimes v = 0$ в $O_1 \times O_2$, т.е. $(x_0, y_0) \notin \operatorname{supp}(u \otimes v)$, т.е.

$$\operatorname{supp}(u \otimes v) \subset \operatorname{supp} u \times \operatorname{supp} v.$$

**Теорема 2.6.4.** При означенията на теорема 2.6.1

$$\partial_x^{\alpha} \partial_y^{\beta}(u \otimes v) = \partial_x^{\alpha} u \otimes \partial_y^{\beta} v, \ \forall \alpha \in N^n, \ \forall \beta \in N^n.$$

**Доказателство.** Изхождайки от дефиниция 2.6.2 и лема 2.5.4 за произволно $\Phi(x, y) \in \mathscr{D}(X \times Y)$ имаме:

$$(\partial_x^{\alpha} \partial_y^{\beta}, \Phi) = (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \ \partial_x^{\alpha} \partial_y^{\beta} \Phi) = (-1)^{|\alpha|+|\beta|} u_x[v_y, (\partial_x^{\alpha} \partial_y^{\beta} \Phi)] =$$

$$= (-1)^{|\alpha|} u[\partial_y^{\beta} v(\partial_x^{\alpha} \Phi)] = (-1)^{|\alpha|} u\{\partial_x^{\alpha}[\partial_y^{\beta} v(\Phi(x, y))]\} = ((\partial_x^{\alpha} u \otimes \partial_y^{\beta} v), \Phi).$$

**Примери 2.6.5.** Ако $a \in X, b \in Y$, то $\delta_{(a,b)} = \delta_a \otimes \delta_b$, защото $(\delta_a \otimes \delta_b)(\varphi(x, y)) = \delta_a(\delta_b(\varphi(x, y))) = \delta_a(\varphi(x, b) = \varphi(a, b) = \delta_{(a,b)}(\varphi)$.

**Забележка 2.6.6.** Равенство (2.5.8) показва, че ако разполагаме с понятието тензорно произведение, то би могло даа се дефинира конволюция с равенството

$$(u * v)(\varphi) = (u_x \otimes v_y)(\varphi(x + y)), \forall \varphi \in \mathscr{D}(R^n),$$

където $u, v \in \mathscr{D}'(R^n)$ са разпределения с конволютивни носители.

## §2.7. Трансформация на Фурие

Сред основните идеи и технически средства на съвременната теория на частните диференциални уравнения **трансформацията на Фурие** играе ключова роля. Когато $f \in L_1(R^n)$, нейната **фуриерова трансформация** (или **фуриеров образ**) $\hat{f} = \tilde{f}(f)$ се дефинира

(2.7.1) $$\hat{f}(\xi) = \int e^{-ix.\xi\xi} f(x) dx,$$

където $x.\xi = \sum_{j=1}^{n} x_j \xi_j$ е скаларното произведение на **интеграционната** променлива $x \in R_x^n$ и **дуалната** променлива $\xi \in R_x^n$, а $i$ е имагинерната единица. Очевидно интегралът в (2.7.1) е абсолютно сходящ, ако $f \in L_1(R^n)$, но това пространство не е удобно, тъй като не съдържа фуриеровите образи на всичките си елементи.

**Задача.**

Ще построим пространство $\mathscr{S}' \subset \mathscr{D}'$ от т.нар. **разпределения с умерен ръст**, което всъщност е най-малкото подпространство на $\mathscr{D}'$, съдържащо $L_1$ и което е инвариатно относно операциите диференциране и умножаване с полином, между които съществува естествена връзка, както се виждаа по-долу.

Най-напред ще въведем пространството на Шварц $\mathscr{S}$ от **бързонамаляващи функции**, което е междинно за $\mathscr{D}(R^n)$ и $\mathscr{E}(R^n)$.

**Дефиниция 2.7.1.** а) Казваме, че $f \in \mathscr{S}$, ако $f \in C^\infty(R^n)$ и за всеки избор на мултииндексите $\alpha, \beta$

$$p_{\alpha,\beta}(\varphi_\varepsilon - \varphi)(x) = \sup_{R^n} x^\alpha |\,\partial_x^\beta f(x)| < +\infty.$$

б) Ще казваме, че редицата $\{f_n\} \subset \mathscr{S}$ клони към $f \in \mathscr{S}$, ако

$$\{p_{\alpha,\beta}(f_n - f)\} \to 0, \ \forall\, \alpha, \beta \in N^n.$$

**Дефиниция 2.7.2.** Непрекъснатите линейни функционали над $\mathscr{S}$ се наричат **умерени разпределения** (или **разпределения с умерен ръст**). Множеството от всички умерени разпределения се означава с $\mathscr{S}'$.

Очевидно

$$\mathscr{D}(R^n) \subset \mathscr{S}(R^n) \subset \mathscr{E}(R^n) \tag{2.7.2}$$

като влаганията са непрекъснати, в смисъл, че ако редицата $\{\varphi_\varepsilon\}$ се съдържа в някое пространство и клони към нула съгласно съответната дефиниция, то тя клони към нула и в по-голямото пространство. Нещо повече, в сила е твърдението

**Лема 2.7.3.** Множеството $C_0^\infty(R^n)$ е навсякъде гъсто в $\mathscr{S}$ (по отношение на сходимостта в последното пространство).

**Доказателство.** Нека $\varphi \in \mathscr{S}$. Фиксираме $\psi \in C_0^\infty(R^n)$, за която $\psi \equiv 1$ в $\{x \,|\, |x| \le 1\}$. Тогава $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(x)\psi(\varepsilon x) \in C_0^\infty(R^n)$ $(\varepsilon > 0)$ и разликата

$$\varphi_\varepsilon(x) - \varphi(x) = \varphi_\varepsilon(x)[\psi(\varepsilon x) - 1]$$

се анулира тъждествено за $|x| < \frac{1}{\varepsilon}$, а за $|x| \ge \frac{1}{\varepsilon}$, т.е. за $1 \le \varepsilon|x|$, като приложим формулата на Лайбниц, имаме

$$p_{\alpha,\beta}(\varphi_\varepsilon - \varphi) \le \varepsilon^2.\mathrm{const}\sum_{\chi\le\beta}\sup\|x|^2.x^\alpha.\partial^\gamma\psi|,$$

където константата зависи само от $\beta$ и оценка на $\psi$ и производните й $\omega$, $\partial^\mu\psi$, $\mu \le \beta$.

**Забележка 2.7.4.** а) Очевидно е, че рестрикциите на елементите на $\mathscr{S}'$ над $C_0^\infty(R^n)$ са разпределения от $\mathscr{D}'(R^n)$. Последната лема показва, че $\mathscr{S}'$ може да се отъждестви с подпространството на $\mathscr{D}'$ от тези рестрикции.

б) Нетривиален пример за елементи от $\mathscr{S}'$ дава включването $L_p \subset \mathscr{S}'$, $p > 1$, което веднага следва от неравенството на Хьолдер и очевидното включване $\mathscr{S} \subset L_q$, $\forall q > 1$. Наистина, за $f \in L_p$, $p > 1$ и $\varphi \in \mathscr{S}$ имаме $|\int f.\varphi dx| \le \|f\|_p.\|\varphi\|$, където числото $q$ се определя от равенството $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Последният множител се оценява с

$$\|\varphi\|_q = \left(\int|\varphi|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int\frac{(1+|x|^2)^{nq}\,|\varphi|^q}{(1+|x|^2)^{nq}}\right) \le C.\sup(1+|x|^2)^n.|\varphi(x)|,$$

$$C = \left(\frac{dx}{(1+|x|^2)^{nq}}\right)^{\frac{1}{q}},$$

което показва непрекъснатостта на функционала

$$\mathscr{S} \ni \varphi \;\mapsto\; \int f.\varphi dx = (u_j, \varphi).$$

в) Функцията $\varphi(x) = e^{-a|x|^2}$, $a > 0$, принадлежи на $\mathscr{S}\backslash\mathscr{D}$. (Проверете!)

Следващият резултат отбелязва някои основни свойства на трансформацията на Фурие.

**Лема 2.7.5.** Трансформацията на Фурие $\mathscr{F}$: $f \to \hat{f}$ е непрекъснато изображение от $\mathscr{S}$ в $\mathscr{S}$, а фуриеровите образи на $\partial_{x_j}f$ и $x_jf$ са съответно $i\xi_j\,\hat{f}(\xi)$ и $i\partial_{f_j}\,\hat{f}(\xi)$.

**Доказателство.** Диференцирайки (2.7.1) под знака на интеграла, получаваме

$$\partial_\xi^\alpha\,\hat{f}(\xi) = \int e^{-ix.\xi}(-ix)^\alpha.f(x))dx,$$

което е възможно, защото последният интеграл е равномерно сходящ. Следователно $\hat{f} \in C^\infty$ и $\partial_\xi^\alpha\,\hat{f} = \tilde{f}((-ix)^\alpha f)$. С интегриране по части намираме

$$\xi^\beta\partial^\alpha\,\hat{f}(\xi) = \int\partial_x^\beta(e^{-ix.\xi}).i^{|\beta|}.((-ix)^\alpha f(x))dx = \int e^{-ix.\xi}.(-i)^{|\beta|}\,\partial_x^\beta((-ix)^\alpha f(x))dx.$$

Понеже $\partial_x^{\beta}(-ix)^{\alpha} f) \in \mathscr{S} \subset L_1$, то $p_{\alpha,\beta}(\hat{f}) < +\infty$. Поради произволността на $\alpha, \beta$ следва, че $\hat{f} \in \mathscr{S}$. Непрекъснатостта на трансформацията на Фурие следва от очевидната оценка

$$p_{\alpha,\beta}(\hat{f}) \le \sup(1+|x|^2)^n|\partial_x^{\beta}(-x)^{\alpha} f)| \int \frac{dx}{(1+|x|^2)^n}.$$

**Пример 2.7.6.** Трансформацията на Фурие на функцията $\psi_n(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}|x|^2\right)$, $x \in R^n$, се пресмята лесно в едномерния случай. Тогава $y(x) = \psi_1(x)$ и нейната фуриерова трансформация $\hat{y}(\xi)$ удовлетворяват съответно $y' + x.y = 0$ и $\hat{y}' + \xi.\hat{y} = 0$, откъдето следва, че $\hat{y}(\xi) = c.y(\xi)$, $c = \text{const}$. Очевидните равенства $y(0) = 1$ и $\hat{y}(0) = \sqrt{2\pi}$ позволяват да заключим, че

$$\hat{y}(\xi) = \sqrt{2\pi}.\exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2\right).$$

Следователно в общия случай за $\psi_n(x) = \prod_{j=1}^{n} \psi_1(x_j)$ имаме

$$\hat{\psi}_n(\xi) = \prod_{j=1}^{n} \hat{\psi}_1(\xi_j) = \left(\sqrt{2\pi}\right)^n \psi(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}.e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2}.$$

**Теорема 2.7.7.** (**Формула за обръщането**) Валидна е формулаата

(2.7.3) $$f(x) = (2\pi)^{-n}.\int e^{ix.\xi}.\hat{f}(\xi_j)d\xi, \quad \forall f \in \mathscr{S}.$$

**Доказателство.** Фактически всичко се свежда до изчисляване на повторния интеграл

$$\int e^{-ix.\xi}[\int e^{-ix.\xi}.f(y))dy]d\xi = \int e^{ix.\xi}\hat{f}(\xi))d\xi.$$

Понеже съответният двоен интеграл не е абсолютно сходящ, редът на интегрирането не може да се размени. Ако въведем допълнителен множител $g(\xi) \in \mathscr{S}$, осигуряващ абсолютна сходимост, получаваме

(2.7.4) $$\int \hat{f}(\xi).g(\xi)e^{-ix.\xi}d\xi = \int f(y)[\int g(\xi)\, e^{i(x-y).\xi}\, d\xi]\, dy = \int \hat{g}(y-x)\, f(y)dy = \int \hat{g}(z).f(x+z)dz.$$

Като заменим $g(\xi)$ с функцията $g_{\varepsilon}(\xi) \equiv g(\varepsilon\xi)$, $\varepsilon > 0$, чиято трансформация на Фурие е $\varepsilon^{-n}\hat{g}\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)$, от (2.7.4) намираме

$$\int \hat{f}(\xi).e^{-ix.\xi}d\xi = \int \hat{g}(y)f(x+\varepsilon y)dy.$$

Тъй като $\hat{f}, \hat{g} \in \mathscr{S} \subset L_1$, а $f$ и $g$ са ограничени и непрекъснати, лесно извършваме граничния преход при $\varepsilon \to 0$ (чрез теоремата на Лебег), което ни дава

(2.7.5) $$g(0)\int \hat{f}(\xi).e^{ix.\xi}d\xi = f(x).\int \hat{g}(y)dy.$$

При $g(\xi) = \exp\left(-\frac{1}{2}|\xi|^2\right)$ (вж. пример 2.7.6) е изпълнено

$$\int \hat{g}(y)dy = (2\pi)^{\frac{n}{2}}.\int \exp\left(-\frac{1}{2}|y|^2\right)dy = (2\pi)^n,$$

което показва, че (2.7.5) съвпада с формулата (2.7.3).

**Забележка 2.7.8.** С означението (2.5.2) формулата за обръщане (2.7.3) добива вида

$$\hat{\hat{f}}(x) = (2\pi)^n.\breve{f}(x), \quad \forall f \in \mathscr{S}.$$

Формулата за обръщане показва, че трансформацията на Фурие осъществява взаимно еднозначно изображение на $\mathscr{S}$ върху $\mathscr{S}$.

**Теорема 2.7.9.** За произволни функции $f, g \in \mathscr{S}$ са в сила равенствата

(2.7.6) $$\int \hat{f}.g dx = \int f.\hat{g}\, dx$$

(2.7.7) $$\int f.\overline{g}\, dx = (2\pi)^{-n}.\int \hat{f}.\overline{\hat{g}}\, d\xi \quad \text{(формула на Пърсевал),}$$

(2.7.8) $$\mathscr{F}(f*g) = \hat{f}.\hat{g},$$

(2.7.9) $$\mathscr{F}(f.g) = (2\pi)^{-n}.\hat{f}*\hat{g}.$$

**Доказателство.** Първото равенство следва от (2.7.4) за $x = 0$. За да докажем (2.7.7), да отбележим, че ако $h = (2\pi)^{-n}.\overline{\hat{g}}$, то

$$\hat{h}(\xi) = (2\pi)^{-n}.\int \overline{\hat{g}}(x).e^{-ix.\xi}dx, \text{ т.е.}$$
$$\hat{h}(\xi) = (2\pi)^{-n}.\int \hat{g}(x).e^{ix.\xi}dx = g(\xi)$$

съгласно (2.7.3). Следователно (2.7.7) се получава от (2.7.6) за $f, h$ вместо $f, g$. Формула (2.7.8) се доказва с директно пресмятане, подобно на (2.7.4). Последното раавенство е следствие от формулата за обръщане и от факта, че трансформациите на Фурие и на двете странипоотделно са равни на $(2\pi)^n.\breve{f}(x)\breve{g}(x)$ (вж. забележка 2.7.8).

Изхождайки от формула (2.7.6), която – както веднага се вижда от доказателството – е валидна за произволни $f, g \in L_1(R^n)$ даваме следната

**Дефиниция 2.7.10.** Трансформацията на Фурие $\hat{u}$ на разпределението $u \in \mathscr{S}'$ е разпределение, дефинирано с формулата

$$\hat{u}(\varphi) = u(\hat{\varphi}),\ \ \forall\varphi \in \mathscr{S}.$$

Ясно е, че за $u = u_f,\ u \in \mathscr{S}'$, тази дефиниция съвпада с (2.7.1), защото тогава от една страна

$$\hat{u}_f(\varphi) = (f,\ \hat{\varphi}) = \int f.\hat{\varphi}\,dx,\ \ \ \forall\varphi \in \mathscr{S},$$

а съгласно (2.7.6)

$$\int \hat{f}\,.\varphi dx = \int f.\hat{\varphi}\,dx,\ \ \ \ \forall\ \varphi\ \in \mathscr{S}.$$

Следователно $\hat{u}_f(\varphi) = \int \hat{f}\,.\varphi dx,\ \ \forall\varphi \in \mathscr{S},$ т.е. $\hat{u}_f = \hat{f}$ съгласно приетото правило да отъждествяваме интегруемите функции с разпределения (вж. пример 2.3.4 а)).

Като друг пример ще посочим често използваното равенство $\hat{\delta} = 1$, което следва от

$$(\hat{\delta},\varphi) = (\delta,\hat{\varphi}) = \hat{\varphi}(0) = \int\varphi(x)dx = (1,\varphi),\ \ \forall\varphi \in \mathscr{S}(R^n)$$

По аналогия с (2.5.2) дефинираме $\breve{u}$ за $\forall u \in \mathscr{S}$ с формулата

$$\breve{u}(\varphi) = u(\hat{\varphi}),\ \ \ \ \forall\varphi \in \mathscr{S}.$$

**Теорема 2.7.11.** За всяко $u \in \mathscr{S}'$ е в сила формулата за обръщане

$$\hat{\hat{u}} = (2\pi)^n\ \breve{u}\,.$$

Трансформацията на Фурие изобразява $\mathscr{S}'$ върху $\mathscr{S}'$ непрекъснато и взаимно и еднозначно.

Ще отбележим две подпространства на $\mathscr{S}'$, имащи по-специални свойства.

**Теорема 2.7.12.** Ако функцията $u \in L_2(R^n)$, то нейната трансформация на Фурие $\hat{u}$ принадлежи на $L_2(R^n)$ и е изпълнено т.нар. **равенство на Пърсевал**

$$\int|\hat{u}|^2dx = (2\pi)^n\int|u|^2dx. \tag{2.7.10}$$

**Доказателство.** От дефиниция 2.7.10, неравенството на Коши и формула (2.7.7) следва, че

$$|\hat{u}(\varphi)| = |u(\hat{\varphi})| = |\int u.\hat{\varphi}\,dx| \le \|u\|_2.\|\hat{\varphi}\|_2 = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\|u\|_2.\|\varphi\|_2,\ \ \forall\varphi \in C_0^\infty(R^n)$$

Тъй като $C_0^\infty(R^n)$ е навсякъде гъсто в $L_2(R^n)$, то линейният функционал $\hat{u}$ над $L_2$ е непрекъснат и следователно (по теоремата на Рис за представяне на линейни функционали в хилбертово пространство) се поражда от елемент на $L_2$, който отъждествяваме с $\hat{u}$. За него горната оценка ни дава

(2.7.11) $$\|\hat{u}\|_2 \leq (2\pi)^{\frac{n}{2}} \|u\|_2.$$

От теорема 2.7.11 и като приложим последната оценка два пъти, установяваме

$$(2\pi)^n \|u\|_2 = \|\hat{\hat{u}}\|_2 \leq (2\pi)^{\frac{n}{2}} \|\hat{u}\|_2 \leq (2\pi)^n \|u\|_2,$$

откъдето (2.7.10) веднага следва.

**Теорема 2.7.13.** Трансформацията на Фурие на $u \in \mathscr{E}'(R^n)$ е $C^\infty$ -функция, за която

(2.7.12) $$\hat{u}(\xi) = u_x(e^{-ix.\xi}).$$

**Доказателство.** Дясната страна на (2.7.12) е $C^\infty$-функция от $\xi$, което се установява аналогично на лема 2.5.4. За произволно $\varphi \in \mathscr{D}(R^n)$ е в сила

$$\hat{u}(\varphi) = u(\hat{\varphi}) = (u_x, \varphi_\xi(e^{-ix.\xi})) = (u_x \otimes \varphi_\xi)(e^{-ix.\xi}) = (\varphi_\xi, u_x(e^{-ix.\xi})) = \int \varphi(\xi).u_x(e^{-ix.\xi})d\xi$$

и съгласно правилото за отъждествяване на разпределенията с пораждаща ги локално интегруема функция, получаваме (2.7.12).

**Теорема 2.7.14.** Ако $u_1 \in \mathscr{E}'$, $u_2 \in \mathscr{S}'$, то конволюцията $u_1 * u_2 \in \mathscr{S}'$ и нейната трансформация на Фурие е равна на $\hat{u}_1.\hat{u}_2$.

**Доказателство.** Най-напред да отбележим, че последното произведение е добре дефинирано, защото $\hat{u}_1 \in C^\infty$ съгласно теорема 2.7.13.

За $\varphi \in C_0^\infty(R_x^n)$ е в сила

(2.7.13) $$(u_1 * u_2)(\varphi) = (u_2 * u_1 * \check{\varphi})(0) = u_2(\check{u}_1 * \varphi).$$

Когато $\varphi \in \mathscr{S}$, конволюцията $\check{u}_1 * \varphi$ е също от $\mathscr{S}$ и изображението

$$\mathscr{S} \ni \varphi \mapsto \check{u}_1 * \varphi \in \mathscr{S}$$

е непрекъснато, както следва от оценката

$$\begin{aligned} p_{\alpha,\beta}(\check{u}_1 * \varphi) &= \sup |x^\alpha.\partial^\beta(\check{u}_1 * \varphi)| = \sup |x^\alpha.(\check{u}_1 * \partial^\beta \varphi)| = \\ &= \sup |x^\alpha.(\check{u}_1, \partial^\beta \varphi(x - .))| \leq \text{const.} \sum_{|\gamma| \leq k} \sup |x^\alpha.\partial^{\beta+\gamma}\varphi| \end{aligned}$$

където $k$ е редът на $\breve{u}_1 \in \mathscr{D}_F'$. Следователно последният израз в (2.7.13) е линеен непрекъснат функционал над $\mathscr{S}$, с което $u_1 * u_2 \in \mathscr{S}'$ е установено.

За да пресметнем $\mathscr{F}(u_1 * u_2)$, най-напред разглеждаме частния случай, когато $u_1 \in C_0^\infty(R^n)$. Нека $\psi \in \mathscr{S}$ е такава, че $\hat{\psi} \in C_0^\infty(R^n)$. Тогава $\mathscr{F}(\hat{u}_1\psi) = (2\pi)^{-n}.\hat{\hat{u}}_1\hat{\psi} = \breve{u} * \hat{\psi}$ съгласно (2.7.9), откъдето

$$(u_1 * u_2)(\hat{\psi}) = (u_1 * u_2 * \hat{\psi})(0) = (u_1, (u_2 * \breve{\hat{\psi}})^{\vee}) = u_2(\hat{u}_1 * \hat{\psi}) = u_2(\mathscr{F}(\hat{u}_1\psi))$$
$$= \hat{u}_2(\hat{u}_1\psi) = \hat{u}_1\hat{u}_2(\psi).$$

Тъй като $C_0^\infty(R^n) \subset \mathscr{S}$ е навсякъде гъсто в $\mathscr{S}$, то в частния случай равенството

$$(u_1 * u_2)^\wedge = \hat{u}_1.\hat{u}_2$$

е доказано.

В общия случай, когато $u_1 \in \mathscr{E}'$ е произволно, фиксираме $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$ и тръгвайки от тъждеството

$$\varphi * (u_1 * u_2) = (\varphi * u_1) * u_2$$

намираме

$$\hat{\varphi}.(u_1 * u_2)^\wedge = (\varphi * u_1)^\wedge.\hat{u}_2 = \hat{\varphi}.\hat{u}_1.\hat{u}_2.$$

Тъй като можем да изберем $\varphi$ така, че $\hat{\varphi} \neq 0$ във всяка предварително избрана точка, това ни дава желаното твърдение. (Ако $\alpha \in C_0^\infty$ и $\int \alpha(x)dx > 0$, то за $\varphi(x) = e^{ix.\xi_0}.\alpha(x)$ е в сила $\hat{\varphi}(\xi_0)$ 0.

**Теорема 2.7.15.** За $u \in \mathscr{S}'$ имаме

$$(\partial_{x_j} u)^\wedge = i\xi_j.\hat{u}, \quad (x_j u)^\wedge = i\partial_{\xi_j} \hat{u}.$$

**Доказателство.** За $\varphi \in \mathscr{S}$ имаме

1) $((\partial_{x_j} u)^\wedge, \varphi) = (\partial_{x_j} u, \hat{\varphi}(x)) = -(u, \partial_{x_j} \hat{\varphi}(x)) = -(u, -i(\xi_j\varphi)^\wedge) = (i\xi_j\hat{u}, \varphi)$;

2) $((x_j u)^\wedge, \varphi(\xi)) = (x_j u_x, \hat{\varphi}(x)) = (u, x_j\hat{\varphi}(x)) = (u, -i.ix_j.\hat{\varphi} = (u, -i(\partial_{\xi_j} \varphi)^\wedge) =$

$= (i\partial_{\xi_j} \hat{u}_\xi, \varphi(\xi))$.

**Забележка 2.7.16.** Често се налага използването на т.нар. **частична трансформация на Фурие**, при която част от променливите се разглеждат като параметри. Нека за определеност да се спрем на подпространството

$$\mathscr{S}(\overline{R_n^+}) = \{ \varphi \mid \varphi \in \mathscr{S}, \operatorname{supp} \varphi \subset \overline{R_n^+} \},$$

където $\overline{R_n^+}$ е затворената обвивка на $R_n^+ = \{x \in R^n \mid x_n > 0\}$. Пространството $C_0^\infty(R_n^+)$ е **навсякъде гъсто** подмножество на $\mathscr{S}(\overline{R_n^+})$. За да се убедим в това е достатъчно да отбележим, че ако $\varphi \in \mathscr{S}(\overline{R_n^+})$, то функциите $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi((x_1, \dots, x_{n-1}, x_n-\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, се анулират близо до границаата на $R_n^+$ и клонят в $\mathscr{S}$ към $\varphi$ при $\varepsilon \to 0$. От своя страна $\varphi_\varepsilon$ се апроксимират с функции от $C_0^\infty(R_n^+)$, с което твърдението е установено. Този резултат позволява да отъждествим линейните непрекъснати функционали над $\mathscr{S}(\overline{R_n^+})$ с елементи от $\mathscr{D}'(R_n^+)$, тъй като те се определят еднозначно от рестрикциите си над $C_0^\infty(R_n^+)$. Наричат се разпределения с умерен ръст в $R_n^+$ и съвкупността им се означава с $\mathscr{S}'(\overline{R_n^+})$. Частичната трансформация на Фурие се дефинира с формулата

$$\tilde{\varphi}(\xi', x_n) = \int e^{-ix'\cdot\xi'} \varphi(x', x_n) dx'$$

при $\varphi \in \mathscr{S}(\overline{R_n^+})$, където $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$, и за нея е в сила следната формула за обръщане

$$\varphi(x', x_n) = (2\pi)^{1-n} \int e^{ix'\cdot\xi'} . \tilde{\varphi}(\xi', x_n) d\xi'.$$

За $u \in \mathscr{S}'(\overline{R_n^+})$ частичната трансформацията на Фурие се дефинира с

$$\tilde{u}(\varphi) = u(\tilde{\varphi}), \ \forall \varphi \in \mathscr{S}(\overline{R_n^+}),$$

и по отношение на диференцирането по първите $(n-1)$ променливи свойствата й са аналогични на пълната трансформация на Фурие.