

ПРЕДГОВОР

Без съмнение теорията на частните диференциални уравнения е един от синтетичните клонове на анализа, в който се преплитат и използват идеи и методи от различни дялове на математиката — от функционалния и хармоничния анализ до диференциалната геометрия и топология. Това обстоятелство поставя изучаващите този предмет пред специфични затруднения. Макар и фактите, които се използват, да не са особено дълбоки, техният обем заедно с неизбежния баласт от дефиниции представлява сериозна бариера, която им пречи да влязат в съприкосновение със самия предмет. Целта на тази книга е да направи това съприкосновение по-лесно, като запълни по този начин една очевидна празнина в нашата учебна литература.

Както и трябва да се очаква, в процеса на този толкова продължителен труд намеренията на автора претърпяха сериозни изменения. Книгата е краен резултат от работата върху няколко спекулативни, четени по различно време пред различни слушатели, но за съжаление съдържа едва половината от традиционно застъпвания материал. Това се дължи на постоянно засилващото се желание на автора да направи книгата независима от други /обикновено трудно достъпни/ помагала и да не остави без доказателство никакви сериозни факти, които така или иначе се използват. Този стремеж, заедно с оскъдността на българската учебна литература и с все пак фиксирания обем на книгата остави незасегнати всички геометрични понятия и факти, свързани с частните диференциални уравнения.

Книгата съдържа много задачи — от банални до твърде сериозни, които имат за цел да подтикнат читателя към активно мислене. Потрудните от тях са придружени с упътване, към което би трябвало да се прибегне едвам след едно първоначално самостоятелно обмисляне. Част от задачите не са свързани съвсем директно с основния

текст и загатват или резюмират важни теми, които авторът със съжаление е оставил без подробно разглеждане.

Този обемист труд в никакъв случай не би могъл да бъде завършен без безкористната помощ на много от моите млади сътрудници. Както отбелязах, той е резултат от различни спецкурсове, които съм планирал и осъществявал, подпомогнат от съответния асистент, най-често от гл.ас. Й.Иорданов. Неговото дългогодишно сътрудничество придаде определен отпечатък върху цялата книга. Полазвам се от случая да му изкажа своята признателност.

Липсата на коректури – този неизбежен спътник на офсетното книгоиздаване, доведе до допълнителни трудности, които в никакъв случай не бих могъл да преодолея без постоянната помощ на другарите Н.Кутев и Я.Маджарова, които прочетоха критично няколко варианта на ръкописа и отстраниха много грешки от различно естество. Предметният указател също е дело на Н.Кутев.

Ще завърша този твърде дълъг предговор с благодарност към доц.В. Петков, който любезно ми предостави някои трудно достъпни източници и към др. М.Теодорова, която с присъщия ѝ висок професионализъм превърна в приятна за окото книга купчините нечетливо изписани листове.

Авторът

София, 20.II.1982 г.

Глава първа

ЕЛЕМЕНТИ ОТ ФУНКЦИОНАЛНИЯ АНАЛИЗ

§ 1. Топологични пространства

1.1. Точкови множества в топологично пространство

Понятието топологично пространство е плод на дълга еволюция. Топологичните пространства са най-общите множества, в които можем да разглеждаме непрекъснати функции и сходящи редици.

В този параграф са събрани основните факти и дефиниции, които се използват в тази книга. Той е предназначен главно за справки и за уточняване на терминологията.

Д е ф и н и ц и я 1.1. Едно множество X се нарича топологично пространство, ако е зададена фамилия τ от негови подмножества, която удовлетворява следните изисквания:

Топ.1. X и празното множество $\emptyset$ се съдържат в τ .

Топ.2. Обединението на произволна подфамилия на τ се съдържа в τ .

Топ.3. Сечението на всяка крайна подфамилия на τ се съдържа в τ .

Всяка фамилия τ с изброените свойства се нарича **т о п о л о г и я**. Ако множеството X не е празно, в него могат да се дефинират различни топологии. Когато искаме да подчертаем, че топологията, която разглеждаме в X , е именно τ , ще пишем (X, τ) . Елементите на τ се наричат отворени множества в (X, τ) .

П р и м е р 1. Нека X е множество, съдържащо поне един елемент. Нека τ се състои от всички негови подмножества, включително празното множество $\emptyset$ и самото X . Очевидно е, че аксиомите топ.1, топ.3 са удовлетворени. В този случай казваме, че в X е дефини-

рана дискретната топология. Така полученото топологично пространство (X, τ) се нарича дискретно.

Пример 2. Нека сега τ се състои само от самото X и $\emptyset$. Тази топология се нарича тривиална.

Дефиниция 1, 2. Нека τ_1 и τ_2 са две топологии в X . Казваме, че τ_2 е по-силна от τ_1 или че τ_1 е по-слаба от τ_2 , ако всеки елемент на τ_1 се съдържа в τ_2 .

Очевидно дискретната топология в дадено множество X е най-силната измежду всички топологии в X , а тривиалната - най-слабата. Ако $X = \emptyset$ двете топологии съвпадат.

Пример 3. Нека X е множество и нека в $X \times X$ е дефинирана реална функция ρ , която притежава следните свойства:

1. За произволна двойка $(x, y) \in X \times X$ е в сила неравенството $\rho(x, y) \geq 0$, като равенство се достига само, когато $x = y$.
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ /симетрия/.
3. За произволни елементи x, y и z от X е в сила неравенството на триъгълника:

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

В такъв случай казваме, че в X е дефинирана метрика ρ . Множествата

$$B_\tau(x_0) = \{x \in X, \rho(x, x_0) < \tau\},$$

$$\overline{B}_\tau(x_0) = \{x \in X, \rho(x, x_0) \leq \tau\}$$

се наричат съответно отворено и затворено кълбо с център в точка x_0 и радиус τ . Множеството X с метрика ρ се превръща в топологично пространство, ако обявим за отворени онези негови подмножества, които заедно с всяка своя точка съдържат и поне едно отворено кълбо с център в тази точка. Веднага се вижда, че фамилията τ , която се дефинира по този начин, удовлетворява аксиомите топ.1-топ.3. Полученото топологично пространство се нарича метрично.

Най-простите примери на метрични пространства са, разбира се, $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$.

Във всяко непразно множество могат да се дефинират различни метрики, но те не винаги заслужават внимание.

Дефиниция 1.3. Околност на дадена точка $x \in (X, \tau)$ се нарича всяко множество, което заедно с x съдържа и някакво отворено множество, съдържащо тази точка. Дефиницията на околност на произволно подмножество на X е аналогична.

Упражнение 1. Докажете, че едно подмножество на X е отворено тогава и само тогава, когато заедно с всяка своя точка съдържа и някаква нейна околност.

Дефиниция 1.4. Една фамилия $\mathcal{U}$ от околности на дадена точка x от (X, τ) се нарича фундаментална, ако всяка околност на x съдържа като подмножество някакъв елемент на $\mathcal{U}$.

Дефиниция 1.5. Едно подмножество F на (X, τ) се нарича затворено, ако неговото допълнение $X \setminus F$ е отворено /т.е. принадлежи на τ /.

Теорема 1.1. Нека X е топологично пространство. Сечението на произволна фамилия от затворени множества е затворено. Обединението на краен брой затворени множества е също затворено.

Доказателството следва веднага от аксиомите топ.2 и топ.3 с помощта на формулите на Де Морган

$$X \setminus \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcap_{i \in I} (X \setminus U_i),$$

$$X \setminus \bigcap_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} (X \setminus U_i),$$

които се проверяват непосредствено. В тях I е произволно множество от индекси.

Дефиниция 1.6. Нека A е множество в (X, τ) . Една точка x се нарича вътрешна /външна/ за A , ако съ-

существува околност на x , която се съдържа изцяло в A (в $X \setminus A$). Точките от A , които не са нито вътрешни, нито външни за A , се наричат гранични точки на A и образуват границата на A . Една точка е гранична за A , тогава и само тогава, когато всяка нейна околност има общи точки както с A , така и с $X \setminus A$.

Да означим за момент $\beta(x)$ множеството от всички околности на дадена точка $x \in (X, \tau)$. Непосредствено от дефиницията на околност се вижда, че фамилията $\beta(x)$ притежава следните свойства:

01. Точката x се съдържа във всеки елемент на $\beta(x)$.
02. Ако $A \in \beta(x)$ и $B \supset A$, то и $B \in \beta(x)$.
03. Ако A и B са елементи от $\beta(x)$, то $A \cap B \in \beta(x)$.
04. Ако $A \in \beta(x)$ съществува подмножество $0 \subset A$, $0 \in \beta(x)$ такова, че $A \in \beta(y)$ за всяко $y \in 0$.

За да се убедим, че 04 е в сила, достатъчно е да означим с 0 някаква отворена околност на x , която се съдържа в A .

Ще отбележим изрично, че според 02 за да възстановим $\beta(x)$, достатъчно е да познаваме една фундаментална система от околности на x .

много случаи е по-лесно в дадено множество да се въведе топология, като понятието околност се вземе за първично.

Теорема 1.2. Нека на всяка точка $x \in X$ е съпоставена фамилия $\beta(x)$ от подмножества, удовлетворяваща 01-04. Тогава в X съществува единствена топология τ , за която $\beta(x)$ е точно множеството от околностите на x .

Доказателство. Да наречем отворени онези подмножества на X , които заедно с всяка своя точка y съдържат и някакъв елемент от $\beta(y)$. Веднага се вижда, че така въведените отворени множества удовлетворяват топ.1-топ.3.

Единствеността също се установява непосредствено.

Пример 4. Нека X и Y са топологични пространства. Да въведем топология в тяхното Декартово произведение /като множеств-

ва $X \times Y$ по следния начин: под околност на точката $(x, y) \in X \times Y$ ще разбираме произволно подмножество на $X \times Y$, което заедно с (x, y) съдържа и множество от вида $\beta(x) \times \gamma(y)$, където $\beta(x)$ и $\gamma(y)$ са околности на точките x и y , съответно в X и Y .

Топологичното пространство, което се получава по този начин, се нарича Декартово произведение на топологичните пространства X и Y .

Дефиниция 1.7. Нека A е подмножество на (X, τ) . Най-малкото затворено множество, което го съдържа, се нарича затворена обвивка на A и се бележи с $\bar{A}$. ($\bar{A}$ съществува, защото сечението на затворените множества, които съдържат A е затворено.)

Упражнение 2.

1. Докажете, че за произволни подмножества A и B на топологичното пространство X са в сила релациите

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}.$$

Намерете множества A и B върху реалната ос $\mathbb{R}^1$, за които

$$\overline{A \cap B} = \emptyset, \quad \bar{A} \cap \bar{B} = \mathbb{R}^1.$$

2. Докажете, че една точка принадлежи на $\bar{A}$ тогава и само тогава, когато всяка нейна околност пресича A .

Дефиниция 1.8. Казваме, че топологичното пространство X има изброима база, когато съществува изброима фамилия $\mathcal{M}$ от отворени множества такава, че всяко отворено множество в X е сума на елементи от $\mathcal{M}$.

Например $\mathbb{R}^n$ има изброима база, защото всяко отворено множество в него е обединение на кълба с рационални радиуси и центрове с рационални координати.

Както отбелязахме в началото, наличието на топология в дадено множество ни позволява да говорим за сходящи редици от негови елементи. Дефиницията е очевидна.

Дефиниция 1.9. Казваме, че редицата $\{x_n\}$ от елементи на топологичното пространство X клони към x_0 /има граница x_0 /,

аме за всяка околност O на x_0 съществува число N , евентуално зависещо от O , такова, че от $n > N$ следва $x_n \in O$.

За съвпадение в топологичните пространства, удовлетворяващи само аксиомите топ.1 - топ.3 не може да се докаже, че споделят редици имат само една граница. За тази цел са необходими нови предположения. Най-често се налага следното изискване:

Тем. 4. Каквито и да бъдат точките x и y , $x \neq y$, от топологичното пространство X , съществуват околности O_x и O_y , които ги съдържат, за които $O_x \cap O_y = \emptyset$.

Топологичните пространства, които удовлетворяват топ.4, се наричат отделни или Хаусдорфови.

Важни топологични пространства, които са важни за анализа, са отделни.

Дефиниция 1.10. Нека A е подмножество на топологичното пространство X . Множествата от вида $O \cap A$, където O е отворено в X , удовлетворяват аксиомите топ.1-топ.3 и превръщат A в ново топологично пространство. Тази топология в A се нарича индуцирана от X .

Упражнение 3. Нека $A \subset X$ и X е топологично пространство. Докажете, че множествата, които са отворени /затворени/ в индуцираната топология са отворени /затворени/ и в самото X , тогава и само тогава, когато A е отворено /затворено/.

1.2. Непрекъснатост

След като разполагаме с понятието околност на точка, дефиницията на Непек за непрекъснатост се пренася дословно и за изображения¹ между топологични пространства.

Дефиниция 1.11. Нека X и Y са топологични пространства и $f: X \rightarrow Y$ е функция, дефинирана в X , чиито стойности принадлежат на Y . Казваме, че f е непрекъсната в

точката $x_0 \in X$, ако на всяка околност V на $f(x_0) \in Y$ може да се съпостави околност U на x_0 в X такава, че от $x \in U$ да следва $f(x) \in V$, т.е. $f(U) \subset V$.

Функциите /изображенията/, които са непрекъснати във всяка точка от X се наричат непрекъснати.

Веднага се вижда, че множеството от непрекъснатите изображения на X в Y се мени, когато топологиите в X и Y се менят. Следващите примери илюстрират това положение.

Пример 1. Ако X е дискретно топологично пространство, а Y произволно топологично пространство, всяка функция $f: X \rightarrow Y$ е непрекъсната.

Пример 2. Ако X е произволно топологично пространство, а Y е пространство с тривиална топология, всички функции $f: X \rightarrow Y$ са непрекъснати.

Пример 3. Нека (X, τ_1) и (X, τ_2) са две топологични пространства, получени чрез въвеждането на различни топологии в едно и също множество. Идентитетът $i: X_{\tau_1} \rightarrow X_{\tau_2}$ е непрекъснат тогава и само тогава, когато топологията τ_2 е по-силна от τ_1 .

Пример 4. Нека (X, ρ_1) и (Y, ρ_2) са метрични пространства с метрики ρ_1 и ρ_2 . Една функция $f: X \rightarrow Y$ е непрекъсната в точката $x_0 \in X$, когато за всяко $\epsilon > 0$ може да се намери $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ такова, че от $\rho_1(x, x_0) < \delta$ да следва $\rho_2(f(x), f(x_0)) < \epsilon$.

В случаите $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$ стигаме до обичайната дефиниция за непрекъснатост.

Упражнение 1. Нека (X, ρ) е метрично пространство. В Декартовото произведение $X \times X$ да въведем топология по обичайния начин /пример 4 от 1.1/. Докажете, че функцията

$$\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^1$$

е непрекъсната.

Следващата теорема ни дава твърде полезен критерий за непрекъснатост.

Т е о р е м а 1.3. Нека X и Y са топологични пространства и f е изображение на X в Y . Тогава следните три твърдения са еквивалентни:

а/ f е непрекъснато.

б/ Пробразът $f^{-1}(O)$ на всяко отворено в Y множество O е отворено множество в X .

в/ Пробразът $f^{-1}(F)$ на всяко затворено (в Y) множество F е затворен (в X).

Д о к а з а т е л с т в о: а/ $\rightarrow$ б/. Нека O е отворено множество в Y и нека $x_0 \in f^{-1}(O)$. Понеже f е непрекъснатата в точката x_0 , съществува околност U_{x_0} на тази точка, такава, че от $x \in U_{x_0}$ следва $f(x) \in O$. Това означава, че цялата околност U_{x_0} се съдържа в $f^{-1}(O)$. Излезе, че $f^{-1}(O)$ заедно с всяка своя точка съдържа и подходяща нейна околност, т.е. то е отворено.

Обратно, ако б/ е в сила, f е непрекъснатата, защото ако V е околност на $f(x_0)$ и O е отворено множество, което тя съдържа, можем да вземем $f^{-1}(O)$ за търсената околност U .

Еквивалентността на б/ и в/ се доказва чрез преминаване към допълнение, т.е. с помощта на равенството

$$1/ \quad f^{-1}(Y \setminus O) = X \setminus f^{-1}(O),$$

приложено за произволно отворено множество $O \subset Y$.

З а б е л е ж к а. Читателят не бива да забравя, че доказаната теорема се отнася за изображения, дефинирани в цялото пространство X . Ако разглеждаме функции, дефинирани само в някакво подмножество $\Omega \subset X$, стигаме до правилните формулировки, разглеждайки Ω като топологично пространство с индуцираната от X топология.

У п р а ж н е н и е 2

1. Докажете равенство 1/.

2. Нека X и Y са две топологични пространства, като Y е Хаусдорфово.

Нека $f: X \rightarrow Y$ и $g: X \rightarrow Y$ са две непрекъснати изображения.

Докажете, че множеството от точки в X , за които $g(x) = f(x)$ е затворено.

Д е ф и н и ц и я 1.12. Нека A е подмножество на топологичното пространство X . A се нарича навсякъде гъсто в X , ако $\bar{A} = X$.

От зад.2 на упражнение 2 следва, че ако непрекъснатите функции

$$f: X \rightarrow Y, \quad g: X \rightarrow Y$$

съвпадат върху едно навсякъде гъсто подмножество на X и Y е отделимо, те съвпадат в цялото X . /Принцип за продължаване на тъждествата./

Д е ф и н и ц и я 1.13. Нека X и Y са топологични пространства и непрекъснатата функция $f: X \rightarrow Y$ изобразява X еднозначно-обратимо върху цялото Y . Ако освен това и функцията $f^{-1}: Y \rightarrow X$ е непрекъснатата, f се нарича хомеоморфизъм, а пространствата X и Y - хомеоморфни.

От топологично гледище хомеоморфните пространства не се различават.

Д е ф и н и ц и я 1.14. Нека X е топологично пространство и нека A е негово подмножество. A се нарича компактно, ако от всяка фамилия $\{U_i\}$, $i \in I$ от отворени множества, които покрива A (т.е. такава, че $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$) може да се избере крайна подфамилия със същото свойство.

За читателите, които не са familiari с общата топология, естествено възниква следният въпрос: не бихме ли могли да изучаваме непрекъснатите функции като си служим с дефиницията на Хайне както в диференциалното смятане. Ако се ограничим с разглеждането само на обикновени редици, отговорът е отрицателен. Редиците са подходящ инструмент само в пространствата, чиито точки притежават изброими фундаментални системи от околности. За такива пространства се казва, че удовлетворяват първато

аксиома за изброимост. Целесъобразната модификация на дефиницията на Хайне изисква въвеждането на по-общи обекти — обобщени редици [1] или филтри [2], които остават извън рамките на тази книга.

Следващият пример илюстрира трудностите, които възникват при разглеждането на пространства, неудовлетворяващи първата аксиома за изброимост.

Пример 5. Нека X е множеството на всевъзможните реални функции, дефинирани в интервала $[-1, 1]$. Нека $F = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ $|t_v| \leq 1, v = 1, 2, \dots, n$ е крайно множество, а $\varepsilon > 0$ е фиксирано. $(F, \varepsilon)_{f_0}$ околност на елемента $f_0 \in X$ ще наречем всяко подмножество на X , което съдържа функциите, за които

$$|f(t_v) - f_0(t_v)| < \varepsilon, \quad \forall t_v \in F.$$

Когато F и ε се менят, получаваме всевъзможните околности на f_0 . Не е трудно да се провери, че аксиомите $O_1 - O_4$ са удовлетворени, т.е. по този начин X наистина се превръща в топологично пространство.

Да проверим например O_4 . Нека Ω е околност на $f_0 \in X$ и нека $(F, \varepsilon)_{f_0} \subset \Omega$. Ще покажем, че Ω е околност на всеки елемент от околността $(F, \frac{\varepsilon}{2})_{f_0}$. Наистина каквото и да бъде $g \in (F, \frac{\varepsilon}{2})_{f_0}$, за всеки елемент $h \in (F, \frac{\varepsilon}{2})_g$ и $t_v \in F$ имаме

$$|f_0(t_v) - h(t_v)| \leq |f_0(t_v) - g(t_v)| + |g(t_v) - h(t_v)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

което показва, че $(F, \frac{\varepsilon}{2})_g \subset \Omega$, т.е. Ω е околност и на g . С това проверката на O_4 е завършена.

Нека сега множеството $A, A \subset X$ се състои от онези функции, които са равни на 1 в множество от вида $[-1, 1] \setminus G$, където G се състои от краен брой точки на $[-1, 1]$. За различни елементи от A , множеството G може да бъде различно. Очевидно е, че елементът $f \equiv 0$ се съдържа в A , защото всяка околност на нулата съдържа елементи от A . Въпреки това не съществува редица от елементи на A ,

която да клони към $f \equiv 0$. Наистина, каквато и редица $\{f_v\}_1^\infty \subset A$ да вземем, винаги може да се намери число $\tilde{v} \in [-1, 1]$, такова, че $f_v(\tilde{v}) = 1$ за всяко v . Следователно нито един член от редицата не принадлежи на околността $(\{ \tilde{v} \}, \frac{1}{2})$ на началото.

1.3. Два метода за въвеждане на топология

Нека X е произволно множество, а Y е топологично пространство. Преди да въведем топология в X самият въпрос дали дадено изображение $f: X \rightarrow Y$ е непрекъснато е безсмислен. Ясно е, че колкото по-силна топология дефинираме в X , толкова повече непрекъснати изображения получаваме. Тривиалният екстремен случай възниква, когато в X въведем дискретната топология, при която всички изображения на X в Y са непрекъснати. От този бегъл коментар става ясно, че най-слабата топология в X , спрямо която даденото изображение $f: X \rightarrow Y$ е непрекъснато, заслужава най-голямо внимание. За да се убедим, че такава съществува, а също и за да можем да поставим въпроса по-общо, ще припомним няколко съотношения от теорията на множествата.

Ако A и B са произволни множества и $f: A \rightarrow B$ е изображение на A в B за всяка система $\{B_i\}, i \in I$ от подмножества на B са в сила релациите

$$12/ \quad f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$$

и

$$13/ \quad f^{-1}(\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i),$$

които се проверяват непосредствено. Ако $A_j \subset A$ за $j \in J$, в сила са аналогичните съотношения

$$12'/ \quad f(\bigcup_{j \in J} A_j) = \bigcup_{j \in J} f(A_j)$$

и

$$/3'/ \quad f\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) \subset \bigcap_{j \in J} f(A_j),$$

които се използват по-рядко поради недостатъчната сила на /3'/.

Сега сме готови да отговорим на въпроса, който ни интересува.

Т е о р е м а 1.4. Нека $f: X \rightarrow Y$ е изображение на множеството X в топологичното пространство Y . Най-слабата топология в X , която превръща f в непрекъснатата функция, се получава, като обявим всички множества от вида $f^{-1}(V)$, където $V \subset Y$ е отворено (в Y) за отворени.

Доказателството следва веднага от /2/ и /3/.

Т е о р е м а 1.5. Нека X е множество, Y_i , $i \in I$ са топологични пространства и $f_i: X \rightarrow Y_i$ са дадени изображения. Измежду всички топологии в X , спрямо които всяка от функциите $\{f_i\}$ е непрекъсната, има една най-слаба. Тя се нарича **слаба топология** в X , породена от фамилията $\{f_i\}$.

Д о к а з а т е л с т в о . Нека τ_i (i е фиксирано) е най-слабата топология в X , спрямо която f_i е непрекъсната. Слабата топология τ , която търсим, се състои от обединенията на всевъзможните крайни сечения на елементи от τ_i , $i \in I$.

Трябва да се убедим, че така действително се получава топология. Нека $\{V^j\}$, $j \in J$ е фамилия от елементи на τ . По дефиниция имаме

$$V^j = \bigcup_k A_k^j,$$

където k пробягва произволно множество от индекси¹ и всяко A_k^j има вида

$$A_k^j = \bigcap_{i \in \Omega_{k,j}} U_i, \quad U_i \in \tau_i \text{ и } \Omega_{k,j} \subset I$$

е крайно подмножество на I . Очевидно имаме

¹Без ограничение на общността можем да си мислим, че това множество не зависи от j .

$$\bigcup_{j \in J} V^j = \bigcup_{j \in J} \left(\bigcup_k A_k^j \right) = \bigcup_{j,k} A_k^j$$

$$\bigcap_{j \in \omega} V^j = \bigcap_{j \in \omega} \left(\bigcup_k A_k^j \right) = \bigcup_k \left(\bigcap_{j \in \omega} A_k^j \right),$$

където $\omega \subset J$ е крайно множество от индекси. Понеже сечението на краен брой елементи от вида на A_k^j има същия вид, τ е наистина топология. Нейната минималност е очевидна.

Сега да разгледаме обратната ситуация $f: X \rightarrow Y$ е изображение на топологичното пространство X в множеството Y . Ясно е, че в Y съществува една **най-силна** топология, спрямо която f е непрекъсната /когато топологията в Y се усилва, множеството от непрекъснатите функции $X \rightarrow Y$ намалява/.

Т е о р е м а 1.6. Най-силната топология в Y , спрямо която $f: X \rightarrow Y$ е непрекъсната, се състои от онези множества $\{V\}$ в Y , за които $f^{-1}(V)$ е отворено в X .

Доказателството следва веднага от твърденията /2/ и /3/.

Важен частен случай, който често възниква, е следният: в топологичното пространство X е дадена някаква релация на еквивалентност R . Тогава в множеството X/R от класове на еквивалентност се въвежда **най-силната** топология, спрямо която каноничното изображение

$$k: X \rightarrow X/R,$$

съпоставящо на всеки елемент $x \in R$ онзи елемент от X/R , който го съдържа, е непрекъснато. С други думи едно множество $O \subset X/R$ считаме за отворено, когато множеството от точки на X , влизаци в класовете на еквивалентност, принадлежащи на O , е отворено в X .

Така полученото топологично пространство X/R се нарича **фактор пространство** на X спрямо R .

У п р а ж н е н и е 3. Ако A е подмножество на X , да означим с $R(A)$ множеството от всички точки от X , които са еквивалентни с някоя точка от A спрямо релацията R . Докажете, че ка-

ненично изображение $k(x)$ е отворено /т.е. изобразява отворено множество в отворено множество/ тогава и само тогава, когато от обстоятелството, че A е отворено следва, че и $R(A)$ е отворено.

Естествено обобщение на теорема 6 ни дава следната

Теорема 7. Нека са ни дадени изображенията $f_i: X_i \rightarrow Y$, $i \in I$, където X_i са топологични пространства, а Y е множество. Съществува една най-силна топология в Y , спрямо която всяко от изображенията $\{f_i\}$ е непрекъснато.

Търсената топология се състои от онези подмножества V на Y , за които $f_i^{-1}(V) \subset X_i$ е отворено за всяко i .

§ 2. Линеен топологичен пространство

2.1. Множество от точки в ЛТН

Нека E е множество, а Q - поле. Елементите на E ще наричаме вектори, а тези на Q - скалари. Нека са дефинирани двете операции:

$$E \times E \rightarrow E, (x, y) \rightarrow x + y$$

- събиране и

$$Q \times E \rightarrow E, (\lambda, x) \rightarrow \lambda x$$

- умножение на вектор със скалар, които се подчиняват на обичайните правила. В такъв случай E се нарича векторно /или линейно/ пространство над Q . В тази книга Q ще бъде или полето $\mathbb{R}$ на реалните, или полето $\mathbb{C}$ на комплексните числа. В зависимост от това кой от двата случая се разглежда, ще говорим за реално или комплексно векторно пространство.

Следващите няколко дефиниции са основни.

Дефиниция 2.1. Едно подмножество K на векторното пространство E се нарича изпъкнало, уравновесено или поглътящо в зависимост от това, кое от следващите изисквания е налице.

а/ Ако $x \in K$, $y \in K$, то и $\lambda x + \mu y \in K$ за произволни числа $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$, за които $\lambda + \mu = 1$. С други думи, K е изпъкнало, когато заедно с всеки две точки съдържа и отсечката, която ги свързва.

б/ Ако $x \in K$, а $\lambda \in Q$ удовлетворява неравенството $|\lambda| \leq 1$, то $\lambda x \in K$ /с $|\lambda|$ сме означили абсолютната стойност на λ в случая $Q = \mathbb{R}$ и модула на λ в случая $Q = \mathbb{C}$ /.

в/ За всяко $x \in E$ съществува $\lambda > 0$ такова, че $\lambda x \in K$.
Понякога множествата, които са едновременно изпъкнали и уравновесени, се наричат абсолютно изпъкнали.

Упражнение 1. Опишете всички уравновесени множества в $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$.

Упражнение 2. Докажете, че K е абсолютно изпъкнало тогава и само тогава, когато от $x \in K$, $y \in K$ следва, че и $\lambda x + \mu y \in K$ каквито и да бъдат числата λ и μ , за които $|\lambda| + |\mu| \leq 1$.

Дефиниция 2.2. Изпъкнала обвивка на едно множество $A \subset E$ се нарича сечението на изпъкналите множества, които го съдържат.

Понятието абсолютно изпъкнала обвивка се дефинира аналогично.

Упражнение 3. Докажете, че един елемент x принадлежи на изпъкналата /абсолютно изпъкналата/ обвивка на A тогава и само тогава, когато може да се представи като крайна линейна комбинация $\sum \lambda_i x_i$, където $x_i \in A$ и $\lambda_i \geq 0$, $\sum \lambda_i = 1$ (съответно $\sum |\lambda_i| \leq 1$).

Дефиниция 2.3. Ако A и B са подмножества на E , а α и β са скалари, с $\alpha A + \beta B$ ще означаваме множеството от

всевъзможните елементи $\alpha x + \beta y$, където $x \in A$, $y \in B$.

Дефиниция 2.4. Векторно пространство в което е дефинирана топология, спрямо която събирането и умножението на вектор със скалар са непрекъснати функции, се нарича линейно топологично пространство /ЛТП/. В такъв случай често се казва, че линейните операции и топологията в E се съгласуват.

По-подробно изискването за непрекъснатост на събирането (което е изображение на топологичното пространство $E \times E$ в E) в точката $(x_0, y_0) \in E \times E$ означава следното: на всяка околност на точката $x_0 + y_0$ могат да се съпоставят околности $U \ni x_0$ и $V \ni y_0$ в E такива, че от $x \in U$, $y \in V$ да следва, че $x + y \in W$.

Аналогично, непрекъснатостта на умножението $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$ в точката λ_0, x_0 означава, че на всяка околност W на точката $\lambda_0 x_0$ /в E / отговарят околности $U \ni \lambda_0$ /в Q / и $V \ni x_0$ /в E / такива, че от $\lambda \in U$ и $x \in V$ следва $\lambda x \in W$.

Пример 1. Векторните пространства R^n и C^n , в които топологията се въвежда по обичайния начин чрез метриката

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

са ЛТП.

Пример 2. Линейното пространство $C[a, b]$ на непрекъснатите функции, дефинирани в интервала $[a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, в което топология се въвежда чрез коя да е от метриките

$$\rho_1(f, g) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|, \quad \rho_2(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx,$$

са ЛТП.

Пример 3. Топологичното пространство, разгледано в пример 5 от т.1.2, е ЛТП.

Теорема 2.1. Изображенията

$$E \xrightarrow{f} E, \quad E \xrightarrow{g} E,$$

дефинирани чрез равенствата

$$f(x) = x + a, \quad g(x) = \lambda x, \quad \lambda \neq 0,$$

където $a \in E$ и $\lambda \in Q$ са фиксирани, са хомеоморфизми.

Доказателство. Функциите f и g са очевидно непрекъснати. Техните обратни $f^{-1}(y) = y - a$, $g^{-1}(y) = \frac{y}{\lambda}$ имат същия вид и следователно също са непрекъснати.

Следствие 1. Всяка фундаментална система на точката $a \in E$ има вида $a + \{U\}$, където $\{U\}$ е фундаментална система от околности на началото.

Следствие 2. U е околност на началото тогава и само тогава, когато λU , $\lambda \neq 0$ има това свойство.

Следствие 1 заедно с теорема 1.2 показва, че топологията в E може да се възстанови еднозначно, ако познаваме една фундаментална система от околности на началото. Този факт подсказва най-удобния и най-често използван начин за въвеждане на топология в линейните пространства - чрез задаване на фундаментална система /казва се още **база**/ от околности на началото. Този метод става особено ефективен, след като веднъж завинаги характеризираме системите от подмножества в E , които могат да служат за околности на началото при някаква топология, съвместима с линейните операции.

Следващата теорема е стъпка в това направление.

Теорема 2.2. Нека E е ЛТП и нека U е околност на началото. Тогава са в сила следните твърдения:

1/ U е поглъщащо подмножество.

2/ Съществува уравновесена околност на началото W такава, че $W + W \subset U$.

3/ Съществува затворена околност на началото, която се съдържа в $\mathcal{U}$.

Доказателство. 1/ Нека $x \in E$ е фиксирана. Понеже функцията $g(\lambda) = \lambda x$ е непрекъсната и $g(0) = 0$, съществува такова $\delta > 0$, че за $|\lambda| < \delta$ имаме $g(\lambda) \in \mathcal{U}$ ($\mathcal{U}$ е околност на началото!).

Доказателството на 2/ ще проведем на два етапа. Най-напред ще покажем, че съществува такава околност V на началото, че $V + V \subset \mathcal{U}$. Наистина от непрекъснатостта на събирането в точката $(0, 0)$ следва съществуването на околности V_1 и V_2 на началото, за които от $x \in V_1$, $y \in V_2$ следва $x + y \in \mathcal{U}$. Сега е ясно, че $V = V_1 \cap V_2$ има желаното свойство.

За да завършим доказателството на теоремата, достатъчно е да установим съществуването на уравновесена околност W на началото, която се съдържа във V .

Понеже функцията $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$ е непрекъсната в точката $(0, 0)$, съществува околност Ω на началото и число $\delta > 0$ такава, че от $x \in \Omega$ и $|\lambda| < \delta$ следва, че $\lambda x \in V$. Да положим $W = \bigcup_{|\mu| < \delta} \mu \Omega$. Тъй като за всяко фиксирано μ , за което

$|\mu| < \delta$ имаме $\mu \Omega \subset V$, то и $W \subset V$. От друга страна, W е околност на началото, защото съдържа околността $\frac{\delta}{2} \Omega$ например. Накрая ако $|\lambda| \leq 1$, имаме $\lambda W = \bigcup_{|\mu| \leq \delta} (\lambda \mu) \Omega \subset \frac{\delta}{2} \Omega \subset W$, с което

всичко е доказано, защото е ясно, че $W + W \subset V + V \subset \mathcal{U}$.

Предупреждение. Множеството $W + W$ може да не бъде изпъкнало. Постройте такъв пример в $\mathbb{R}^2$.

Доказателство на 3/. Нека W е построената при доказателството на 2/ околност. Ще покажем, че $\overline{W} \subset \mathcal{U}$. Наистина, нека $x_0 \in \overline{W}$. Това означава, че всяка околност на x пресича W . В частност и $x_0 - W$ има това свойство. Следователно съществуват елементи $x, y \in W$ такива, че $x = x_0 - y$, т.е. $x_0 = x + y \in W + W \subset \mathcal{U}$, с което 3/ е установена.

Следствие. Във всяко ЛТП съществува фундаментална система от затворени околности на началото.

Следващите прости, но полезни теореми илюстрират начините, по които теорема 2.1 и 2.2 обикновено се използват.

Теорема 2.3. Нека K е изпъкнало множество в ЛТП E . Тогава неговата вътрешност $\overset{\circ}{K}$ и неговата затворена обвивка $\overline{K}$ са също изпъкнали.

Доказателство. Най-напред ще докажем, че $\overset{\circ}{K}$ е изпъкнало. Нека $x, y \in \overset{\circ}{K}$ и нека $t \in [0, 1]$. Трябва да докажем, че точката $z = tx + (1-t)y$ се съдържа в K заедно с цяла своя околност. Понеже $\overset{\circ}{K}$ е отворено, съществуват околности $\mathcal{U}_1 \ni x$, $\mathcal{U}_2 \ni y$, които се съдържат изцяло в K . Според следствие 1 от теорема 2.1 имаме $\mathcal{U}_1 = x + V_1$, $\mathcal{U}_2 = y + V_2$, където V_1 и V_2 са околности на началото. Да положим $V = V_1 \cap V_2$. Тогава от $x + V \subset K$, $y + V \subset K$ следва $t(x + V) + (1-t)(y + V) \subset K$, т.е.

$$z + tV + (1-t)V \subset K,$$

защото K е изпъкнало. Понеже според следствие 2 от теорема 2.1 $tV + (1-t)V$ е околност на началото, изпъкналостта на $\overset{\circ}{K}$ е установена.

Нека сега x и y са две точки от $\overline{K}$ и $t \in [0, 1]$ е фиксирано. Нека $\mathcal{U}$ е произволна околност на началото и W е уравновесена околност на същата точка такава, че $W + W \subset \mathcal{U}$. Пом $x, y \in \overline{K}$, имаме $(x + W) \cap K \neq \emptyset$, $(y + W) \cap K \neq \emptyset$. Нека $a \in (x + W) \cap K$, $b \in (y + W) \cap K$. Тогава

$$p \stackrel{\text{def}}{=} ta + (1-t)b \in K \text{ и освен това}$$

$$p - z = t(a - x) + (1-t)(b - y) \subset tW + (1-t)W \subset W + W \subset \mathcal{U}$$

благодарение на избора на W . Припомняме, че $z = tx + (1-t)y$ по дефиниция. Излезе, че в произволна околност $z + \mathcal{U}$ на точката z се намери точка $p \in K$. Това показва, че $z \in \overline{K}$, с което теоремата е доказана.

У п р а ж н е н и е 4. Докажете, че ако A е уравновесено, то и $\bar{A}$ е уравновесено. Ако $x = 0 \in \bar{A}$, то и вътрешността $\bar{A}$ на A е уравновесена.

Т е о р е м а 2.4. Едно ЛТП е отделимо тогава и само тогава, когато едноточковото множество, състоящо се от точката нула, е затворено.

З а б е л е ж к а. Понеже трансляцията $x \rightarrow x + a$ е хомеоморфизъм, условието в теоремата е равносилно с изискването всички едноточкови множества да бъдат затворени.

Д о к а з а т е л с т в о. Н е о б х о д и м о с т. Нека E е Хаусдорфово ЛТП и U_x е отворена околност на точката $x \neq 0$, която не съдържа началото. Понеже $E \setminus \{0\} = \bigcup_{x \neq 0} U_x$ очевидно е отворено, необходимостта на условието е доказана.

Д о с т а т ъ ч н о с т. Нека множеството $E_0 = \{0\}$ е затворено и точките x, y са различни точки от E . Да положим $a = x - y$ и да вземем околност U на точката $-a$, която не съдържа E_0 /например $E \setminus E_0$. Тогава $a + U = V$ е околност на началото. Да означим с W някаква уравновесена околност на точката 0 , за която $W + W \subset V$. В такъв случай ще имаме и $W - W \subset V$, защото вклучването $-W \subset W$ следва от изискването W да бъде уравновесена.

Ще докажем, че $(x + W) \cap (y + W) = \emptyset$, с което отделимостта на E ще бъде установена. Наистина да допуснем противното - че съществуват $w_1 \in W, w_2 \in W$ такива, че $x + w_1 = y + w_2$. В такъв случай получаваме

$$a = x - y = w_2 - w_1 \in W - W \subset V,$$

откъдето следва, че $U = V - a$ съдържа началото, противно на направеното предположение.

С това теоремата е доказана.

2.2. Линейни факторпространства

Нека E е ЛТП и $N \subset E$ е негово линейно подпространство. Да наречем два елемента x и y от E еквивалентни точно когато $x - y \in N$. Като е известно, линейните операции в множеството E/N от еквивалентни класове се дефинират по следния начин: нека

$$k : E \rightarrow E/N$$

е каноничното изображение, което на всеки елемент $x \in E$ съпоставя класа $x + N$, който го съдържа. Полагайки по дефиниция

$$k(x) + k(y) = k(x + y), \quad \alpha k(x) = k(\alpha x),$$

превръщаме E/N в линейно пространство. /Лесно се проверява, че линейните операции в E/N са дефинирани коректно, макар че съответствието $x \rightarrow k(x)$ не е еднозначно-обратимо. Според общите разглеждания от т.1.3 /стр.13/ в E/N ще въведем най-силната топология, спрямо която изображението $k : E \rightarrow E/N$ е непрекъснато. С други думи, едно множество $U \subset E/N$ ще наречем отворено тогава и само тогава, когато неговият прообраз $k^{-1}(U)$ е отворен в E .

В нашия конкретен случай е налице едно свойство, което заслужава изрично отбелязване.

Т е о р е м а 2.5. Каноничното изображение $k : E \rightarrow E/N$ е отворено.

Д о к а з а т е л с т в о. Нека V е отворено множество в E . Трябва да докажем, че $k(V)$ е отворено в E/N , т.е. че $k^{-1}(k(V)) = W$ е отворено в E . Очевидно е, че $W \supset V$, но изобщо двете множества са различни. W се състои от всички елементи на E , които са еквивалентни с някои елементи на V , т.е. то има вида $W = V + N$. От това представяне вече се вижда, че W е отворено каквото и да бъде линейното подпространство N , защото очевидно имаме $W = V + N = \bigcup_{y \in N} (y + V)$ и всяко от множествата $y + V$ е отворено.

Т е о р е м а 2.6. E/N е ЛТП.

Д о к а з а т е л с т в о. Трябва да проверим, че линейните операции в E/N са непрекъснати. Нека $x_0, y_0 \in E/N$ и W е околност на нулата в E/N . Търсим околности V_1 и V_2 на нулата в същото пространство, за които от $x - x_0 \in V_1, y - y_0 \in V_2$ да следва, че $x + y - x_0 - y_0 \in W$. Нека $\Omega \subset E$ е такава околност на нулата в E , че $\Omega + \Omega \subset k^{-1}(W)$. Да положим $V_1 = V_2 = k(\Omega)$. Сега е ясно, че за $x - x_0 \in k(\Omega), y - y_0 \in k(\Omega)$ имаме

$$x + y - x_0 - y_0 = (x - x_0) + (y - y_0) \in k(\Omega) + k(\Omega) = k(\Omega + \Omega) \subset W,$$

с което непрекъснатостта на събирането е установена.

Доказателството, че и изображението $(\alpha, x) \rightarrow \alpha x$ е непрекъснато, е аналогично. Нека точката $(\alpha_0, x_0) \in Q \times E/N$ е произволна и W е околност на началото в E/N . Трябва да намерим околност U на x_0 в E/N и $\delta > 0$ такива, че от $x \in U$ и $|\alpha - \alpha_0| < \delta$ да следва $\alpha x - \alpha_0 x_0 \in W$.

Нека $z_0 \in E$ е фиксиран прообраз на x_0 и нека Ω отворена околност на z_0 и $\delta > 0$ са така избрани, че да имаме $\alpha \Omega - \alpha_0 z_0 \subset k^{-1}(W)$. Това е възможно, защото изображението $(\alpha, z) \rightarrow \alpha z$ е непрекъснато в точката (α_0, z_0) .

Да положим $U = k(\Omega)$. За $x \in U, |\alpha - \alpha_0| < \delta$ очевидно имаме

$$\alpha x - \alpha_0 x_0 \in \alpha k(\Omega) - \alpha_0 x_0 = k(\alpha \Omega - \alpha_0 z_0) \subset W,$$

с което всичко е доказано.

З а б е л е ж к а. В това доказателство обстоятелството, че изображението k е отворено, играеше основна роля.

Полезно е да се съпостави този факт със следния общ резултат, чието доказателство предоставяме на читателя.

Т е о р е м а 2.7. Нека $f: E \rightarrow F$ е линейно изображение на векторното пространство E в ЛТП F . Тогава най-слабата топология в E , спрямо която f е непрекъсната, се съгласува с линейните операции в E .

Забележете, че посоките на изображенията k и f са различни.

Отделимостта на топологията в E/N се изследва почти автоматично с помощта на теорема 2.4.

Т е о р е м а 2.8. Линейното топологично пространство E/N е отделимо тогава и само тогава, когато N е затворено подмножество на E .

Д о к а з а т е л с т в о. Според теорема 2.4 E/N е отделимо тогава и само тогава, когато едноточковото множество $E_0 = \{0\}$ в E/N е затворено. Тъй като според дефиницията на топологията в E/N , E_0 и $k^{-1}(E_0) = N$ са затворени едновременно теоремата е доказана.

Всички ЛТП, които ще разглеждаме оттук нататък, ще бъдат Хаусдорфови.

2.3. Ограничени множества

Д е ф и н и ц и я 2.5. Нека E е ЛТП. Едно множество $B \subset E$ се нарича ограничено, ако за всяка околност U на началото съществува число $\lambda > 0$, за което $\lambda B \subset U$.

С други думи, едно множество е ограничено, когато се поглъща от всяка околност на началото.

У п р а ж н е н и е 5

1. Докажете, че ако B е ограничено за всяка околност U съществува $\lambda_0 > 0$ такава, че от $|\lambda| \leq \lambda_0$ следва $\lambda B \subset U$.

2. Нека $B_1 \subset E$ и $B_2 \subset E$ са ограничени. Докажете, че $B_1 \cup B_2$ е ограничено.

3. Ако X и Y са ЛТП и $T: X \rightarrow Y$ е линейно и непрекъснато, докажете, че T трансформира ограничените множества в ограничени.

Т е о р е м а 2.9. Всяко компактно множество в E е ограничено.

Д о к а з а т е л с т в о. Нека Ω е компактно и $U \subset E$ е околност на началото. Нека $W \subset U$ е отворена и уравновесена

околност на същата точка. Понеже W е поглъщащо множество /теорема 2.2, стр.17/, за всяко $x \in E$ съществува $\lambda = \lambda_x$ такова, че $0x \in \lambda_x W$. Следователно имаме

$$E = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda W \quad \text{и в частност} \quad \Omega \subset \bigcup_{\lambda > 0} \lambda W.$$

Понеже Ω е компактно, съществува краен брой множества $\lambda_j W$, които все още покриват Ω , т.е. $\Omega \subset \bigcup_j \lambda_j W$.

Тъй като W е уравновесено, имаме

$$\bigcup_j \lambda_j W \subset (\max_j \lambda_j) W \subset (\max_j \lambda_j) U,$$

с което теоремата е доказана.

Т е о р е м а 2.10. Ако B е ограничено, то и $\bar{B}$ е ограничено.

Нека U е произволна околност на началото и нека $V \subset U$ е затворена околност на същата точка /теорема 2.2 стр.17/. Понеже B е ограничено, имаме $\lambda B \subset V$ за някакво $\lambda > 0$. От това включване получаваме $\lambda \bar{B} = \overline{\lambda B} \subset \overline{V} = V \subset U$, с което теоремата е доказана.

П р и м е р 1. Всяка сходяща редица е ограничена. Наистина ако $\{x_n\} \rightarrow x_0$, то множеството $\{x_n\} \cup x_0$ е компактно. Впрочем, резултатът следва и директно от дефиницията.

2.4. Локално изпъкнали пространства

Без съмнение най-важните за приложенията линейни пространства са локално изпъкналите.

Д е ф и н и ц и я 2.6. Едно ЛТП се нарича локално изпъкнало /ЛИП/, ако притежава фундаментална система от изпъкнали околности на началото.

Спомянали си, че затворената обвивка на едно изпъкнало и уравновесено множество е изпъкнала и уравновесена /теорема 2.3, стр.19 и упражнение 4 стр.20/, можем да произнесем следната

Т е о р е м а 2.11. Всяко ЛИП притежава фундаментална система от изпъкнали, уравновесени и затворени околности на началото.

Доказателството следва от теорема 2.2, стр. 17 и от дефиницията.

Дойде време да опишем аксиоматично системата от околностите на началото в едно ЛИП.

Т е о р е м а 2.12. Нека E е векторно пространство и нека е дадена някаква /не празна/ система $\{U\}$ от подмножества, която има следните свойства:

- A₁. Всяко $U \in \{U\}$ е изпъкнало, поглъщащо и уравновесено.
/Следователно всяко множество от $\{U\}$ съдържа началото./
- A₂. Ако $U_1 \in \{U\}$, $U_2 \in \{U\}$, то $U_1 \cap U_2 \in \{U\}$.
- A₃. Ако $U \in \{U\}$ и $\alpha \neq 0$ е скалар, то и $\alpha U \in \{U\}$.

В такъв случай в E съществува единствена топология, която превръща E в ЛИП и за която $\{U\}$ е фундаментална система от околности на началото.

Или по-кратко: Всяка фамилия от абсолютно изпъкнали /т.е. изпъкнали и уравновесени/ поглъщащи множества, която е затворена относно крайни сечения и комутетии, поражда единствена локално изпъкнала топология.

Д о к а з а т е л с т в о. Да означим с $\mathcal{M}$ фамилията от подмножества на E , която има следното свойство: Всеки елемент $V \in \mathcal{M}$ съдържа множество от системата $\{U\}$. По-нататък, ако a е произволна точка от E да наречем множествата от вида $a + V$, където $V \in \mathcal{M}$, околности на a . Остава да проверим, че аксиомите O₁ - O₄ от 1.1 са удовлетворени и че така дефинираната топология се съгласува с алгебричните операции. Понеже O₁ - O₃ са очевидно налице, ще проверим O₄.

Нека $a + V$ е околност на a и нека $U \subset V$ е елемент от $\{U\}$. Тогава и $\frac{1}{2}U \in \{U\}$. Ще покажем, че $a + V$ е околност на всяка точка от $a + \frac{1}{2}U$. Наистина, нека $x \in a + \frac{1}{2}U$. Тогава $x + \frac{1}{2}U$

се съдържа в $a + V$, защото имаме

$$x + \frac{1}{2}u \subset a + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u \subset a + u \subset a + V.$$

/Включването $\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u \subset u$ следва от изпъкналостта на u .

Да докажем непрекъснатостта на събирането. Нека $a + b + V$ е околност на $a + b$ и нека $u \subset V$ е елемент на $\mathcal{U}$. За

$x \in a + \frac{1}{2}u$ $y \in b + \frac{1}{2}u$ имаме

$$x + y \subset a + b + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u \subset a + b + u \subset a + b + V,$$

к.т.д.д.

Нека сега $(\lambda_0, a) \in Q \times E$ и нека $\lambda_0 a + V$ е околност на $\lambda_0 a$. Да вземем $u \subset V$, $u \in \mathcal{U}$ и да въведем множеството $W = (|\lambda_0| + 2\eta)^{-1}u$, което също се съдържа в $\{u\}$. Тук $\eta > 0$ е произволно, но фиксирано. След това да вземем $\delta = \delta(\eta)$, $0 < \delta < \eta$, толкова малко, че за $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ да имаме $(\lambda - \lambda_0)a \in \eta W$. Това е възможно, защото $\eta W \subset \{u\}$ и следователно е поглъщащо и уравновесено. Сега за $x \in a + W$, $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ получаваме

$$\begin{aligned} \lambda x - \lambda_0 a &= \lambda(x - a) + (\lambda - \lambda_0)a \subset \lambda W + \eta W \\ &\subset (|\lambda_0| + \delta)W + \eta W \\ &= (\lambda_0 + \delta + \eta) \left(\frac{|\lambda_0| + \delta}{|\lambda_0| + \delta + \eta} W + \frac{\eta}{|\lambda_0| + \delta + \eta} W \right) \\ &\subset (|\lambda_0| + \delta + \eta) W \subset (|\lambda_0| + 2\eta) W = u \subset V; \end{aligned}$$

с което всичко е доказано.

/Предпоследното включване следва от изпъкналостта на W , а последното от неговата уравновесеност./

С л е д с т в и е. Нека E е векторно пространство и нека $\mathcal{U}$ е фамилия от уравновесени, изпъкнали и поглъщащи множества, всяко от които съдържа началото. Тогава съществува една най-слаба локално изпъкнала топология, спрямо която всеки елемент на $\mathcal{U}$ е околност на началото и алгебричните операции са непрекъснати.

Наистина веднага се вижда, че фамилията $\{\mathcal{U}\}$, която се състои от всевъзможните крайни сечения от вида

$$\lambda \bigcap_{j=1}^n V_j, \quad V_j \in \mathcal{U}, \quad \lambda \in Q,$$

удовлетворява аксиомите $A_1 - A_3$.

У п р а ж н е н и е 6

1. Докажете, че ако E е ЛИП, то и E/N , където N е затворено подпространство на E , е ЛИП.

2. Нека E е произволно векторно пространство над Q . Докажете, че в E може да се въведе отделима локално изпъкнала топология.

У п ъ т в а н е. Такава е най-силната локално изпъкнала топология, в която всички абсолютно изпъкнали поглъщащи множества служат за околности на началото. /Ясно е, че в този случай аксиомите $A_1 - A_3$ са удовлетворени./ За да се убедите, че тази топология е отделима, вземете произволен елемент $x \neq 0$ и постройте окръжност на Хамел /вж. упр. 10 към 2.6/ в E , която съдържа $\frac{x}{2}$. След това разгледайте множеството Ω на всевъзможните крайни линейни комбинации от вида $\sum \lambda_j x_j$, където x_j са елементите от окръжността, а $\sum |\lambda_j| \leq 1$. Докажете, че Ω е абсолютно изпъкнато и поглъщащо, но не съдържа x .

2.5. Полунорми

Линейните изпъкнали пространства се появяват в анализа най-често като пространства, в които естествено възниква някаква фамилия от полунорми. Тяхната важност до голяма степен се дължи на обстоятелството, че с полунормите се работи просто и удобно.

Д е ф и н и ц и я 2.7. Нека E е векторно пространство. Една функция $p: E \rightarrow \mathbb{R}$ се нарича полунорма, ако удовлетворява следните условия:

$$1/ \quad p(x) \geq 0,$$

$$2/ \quad p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \quad (\lambda \text{ е скалар}),$$

$$3/ \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \text{неравенство на триъгълника.}$$

Полунорма, която се анулира само за $x = 0$, се нарича норма.

Следващият прост факт се използва постоянно.

Лема 2.1. В сила е неравенството

$$1/ \quad |p(x) - p(y)| \leq p(x-y).$$

Доказателство. От 3/ получаваме

$$p(x) = p(x-y+y) \leq p(x-y) + p(y),$$

т.е.

$$1/ \quad p(x) - p(y) \leq p(x-y).$$

Като разменим местата на x и y и вземем пред вид, че според 2/ p е четна функция, получаваме

$$3/ \quad p(y) - p(x) \leq p(y-x) = p(x-y),$$

което заедно с 1/ дава 1/.

Упражнение 7. Докажете, че множеството

$$\text{Ker } p = \{x \in E, p(x) = 0\}$$

е линейно подпространство на E .

Връзката между абсолютно изпъкналите, поглъщащи множества и полунормите се дава от следната основна

Теорема 2.13. а) Ако p е полунорма и λ е положително число, множествата

$$U_\lambda(p) = \{x: p(x) < \lambda\}$$

и

$$\overline{U}_\lambda(p) = \{x: p(x) \leq \lambda\}$$

са уравновесени, изпъкнали и поглъщащи.

б) Ако A е уравновесено, изпъкнало и поглъщащо множество в E , функцията, дефинирана чрез равенството

$$1/4/ \quad p_A(x) = \inf \{ \lambda: \lambda > 0, x \in \lambda A \}$$

е полунорма. Нещо повече, в сила са релациите

$$U_1(p_A) \subset A \subset \overline{U}_1(p_A).$$

Полунормата, дефинирана чрез 1/4/, се нарича функционал на Минковски на множеството A .

Доказателство. Да проверим а) например за $U_\lambda(p)$. Ако x е произволен /фиксиран/ елемент от E за всяко достатъчно малко $\varepsilon > 0$ имаме $p(\varepsilon x) = \varepsilon p(x) < \lambda$, т.е. $U_\lambda(p)$ е поглъщащо.

Нека сега $x, y \in U_\lambda(p)$ и $\mu, \nu \in \mathbb{Q}$ са такива, че $|\mu| + |\nu| \leq 1$. Имаме

$$p(\mu x + \nu y) \leq p(\mu x) + p(\nu y) \\ = |\mu| p(x) + |\nu| p(y) \leq (|\mu| + |\nu|) \lambda \leq \lambda,$$

с което абсолютната изпъкналост на $U_\lambda(p)$ е установена.

Доказателството на втората част от теоремата е малко по-дълго. Понеже A е поглъщащо, за всяко $x \in E$ имаме $p_A(x) < +\infty$.

Да проверим неравенството на триъгълника. Дефиницията на p_A ни дава

$$\frac{x}{p_A(x) + \varepsilon} \in A, \quad \frac{y}{p_A(y) + \varepsilon} \in A, \quad \varepsilon > 0,$$

откъдето, понеже A е изпъкнало, получаваме

$$x + y = \left(\frac{p_A(x) + \varepsilon}{p_A(x) + p_A(y) + 2\varepsilon} \right) \left(\frac{x}{p_A(x) + \varepsilon} + \frac{y}{p_A(y) + \varepsilon} \right) \in \left(\frac{p_A(x) + p_A(y) + 2\varepsilon}{p_A(x) + p_A(y) + 2\varepsilon} \right) A,$$

т.е.

$$p_A(x + y) \leq p_A(x) + p_A(y) + 2\varepsilon.$$

Тъй като числото $\varepsilon > 0$ беше произволно, неравенството на триъгълника е установено.

Проверката на равенството $p_A(\mu x) = |\mu| p_A(x)$ е непосредствена и ние я предоставяме на читателя.

Понеже включванията

$$15/ \{x: P_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x: P_A(x) \leq 1\}$$

следват веднага от дефиницията на P_A , теоремата е доказана.

Не е трудно да се установи, че всяко поглъщащо абсолютно изпъкнало множество определя еднозначно своя функционал на Минковски. За удобство ще започнем с една лема, която е полезна в много случаи.

Лема 2.2. Нека p и q са две полунорми в E и нека от $p(x) < 1$ следва $q(x) \leq 1$. Тогава $q(x) \leq p(x)$ за всяко $x \in E$.

Доказателство. Да допуснем противното - че съществува $x_0 \in E$ такава, че

$$q(x_0) > p(x_0)$$

и да вземем $\lambda > 0$, за което $q(x_0) > \lambda > p(x_0)$. Тогава имаме

$$p\left(\frac{x_0}{\lambda}\right) < 1, q\left(\frac{x_0}{\lambda}\right) > 1, \text{ което противоречи на условието.}$$

Сега вече можем да установим единствеността на функционала на Минковски.

Теорема 2.14. Ако A е поглъщащо и абсолютно изпъкнало множество в E , а q е полунорма, за която

$$16/ \{x \in E, q(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in E, q(x) \leq 1\},$$

то $q(x) = P_A(x)$, $x \in E$.

Доказателство. Нека $P_A(x) < 1$. Тогава според 15/ $x \in A$ и 16/ ни дава $q(x) \leq 1$. Прилагайки лема 2.2, заключаваме, че $q(x) \leq p(x)$. Обратното неравенство се доказва аналогично.

Упражнение 8. Нека A и B са абсолютно изпъкнали и поглъщащи множества. Изразете $P_{A \cap B}$ чрез P_A и P_B .

Теорема 2.15. Нека E е ЛТП и p е полунорма в него. Ако p е непрекъсната в началото, тя е непрекъсната в цялото E .

Доказателство. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно и нека U е такава околност на началото, в която $p(x) = \{p(x) - p(0)\} < \varepsilon$.

Ако x_0 е произволна точка от E и $V = x_0 + U$, за $y \in V$ получаваме $|p(y) - p(x_0)| \leq p(y - x_0) < \varepsilon$, защото $y - x_0 \in U$.

Теорема 2.16. Нека E е ЛТП и U е абсолютно изпъкнало и поглъщащо множество. Тогава неговият функционал на Минковски P_U е непрекъсната функция тогава и само тогава, когато U е околност на началото. В такъв случай за вътрешността $\overset{\circ}{U}$ и за затворената обвивка $\bar{U}$ на U имаме

$$17/ \overset{\circ}{U} = \{x: P_U(x) < 1\}, \bar{U} = \{x: P_U(x) \leq 1\}.$$

Доказателство. Ако U е околност на началото, то и εU , $\varepsilon > 0$ има това свойство и за $x \in \varepsilon U$ имаме $P_U(x) \leq \varepsilon$, т.е. P_U е непрекъсната в началото и следователно в E . Обратно, ако P_U е непрекъсната в точката $x = 0$, тя е непрекъсната в E и следователно $U \supset P_U^{-1}(-1, 1) = \{x: P_U(x) < 1\}$ е околност на $x = 0$, защото $P_U^{-1}(-1, 1)$ е отворено като прообраз на $(-1, 1) \subset \mathbb{R}$.

Остава да докажем релациите 17/ при предположение, че U е околност на $x = 0$. Понеже според вече доказаното P_U е непрекъсната, множествата $V_1 = \{x: P_U(x) < 1\}$ и $V_2 = \{x: P_U(x) \leq 1\}$ са съответно отворено и затворено, така че включването

$$V_1 \subset U \subset V_2 \quad \text{вж. 15/}$$

ни дава $V_1 \subset \overset{\circ}{U}$, $\bar{U} \subset V_2$.

Нека сега $x_0 \in \bar{U}$. Трябва да докажем, че $x_0 \in V_2$, т.е. $P_U(x_0) \leq 1$. Ако допуснем, че $P_U(x_0) = 1$, можем да намерим $\lambda > 1$ такава, че все още $\lambda x_0 \in \bar{U}$, защото $\bar{U}$ е затворено, а изображението $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$ е непрекъснато в точката $(1, x_0)$. В такъв случай обаче получаваме

$$P_U(\lambda x_0) = \lambda P_U(x_0) = \lambda > 1,$$

което противоречи на включванията $\bar{U} \subset U \subset V_2$. С това равенството $\bar{U} = V_2$ е установено.

Остава да докажем, че $\overset{\circ}{U} = V_1$. Нека $x_0 \in V_2$, т.е. $P_U(x_0) \leq 1$ и Ω е произволна околност на x_0 . Както по-горе, се убеждаваме, че съществува $\lambda \in (0, 1)$ такава, че $\lambda x_0 \in \Omega$. Сега очевидното

равенство $P_u(\lambda x_0) = \lambda P_u(x_0) \leq \lambda < 1$ показва, че $\lambda x_0 \in \bar{U}$. Излезе, че във всяка околност на x_0 се съдържат точки от $\bar{U}$, т.е. $x_0 \in \bar{U}$, с което всичко е доказано.

Вече стигнахме до теоремата, която на практика най-често се използва.

Т е о р е м а 2.16. Нека във векторното пространство E е дадена фамилия от полунорми $\{p_j\}$, $j \in J$. Тогава в E съществува една най-слаба локално изпъкнала топология, спрямо която всякаполунорма от фамилията е непрекъсната. Тази топология се съгласува с алгебричните операции в E и се нарича топология, породена от полунормите $\{p_j\}$.

Д о к а з а т е л с т в о. Да положим $V_j = \{x : p_j(x) < 1\}$. Според теорема 2.15 за непрекъснатостта на p_j е необходимо и достатъчно множествата

$$p_j^{-1}(-\varepsilon, \varepsilon) = \{x : p_j(x) < \varepsilon\} = \varepsilon V_j$$

да бъдат отворени. Знаем, че V_j , $j \in J$ е абсолютно изпъкнало и поглъщащо. Очевидно фамилията

$$18/ \quad U_{\varepsilon, \omega} = \varepsilon \bigcap_{j \in \omega} V_j, \quad \varepsilon > 0,$$

която се получава, когато $\varepsilon > 0$ описва интервала $(0, +\infty)$, а $\omega \subset J$ пробягва всевъзможните крайни подмножества на J , съдържа всички V_j , $j \in J$ и е затворена относно хомотетии и крайни сечения. Следователно според теорема 2.12 съществува локално изпъкнала топология, в която множествата $U_{\varepsilon, \omega}$ образуват фундаментална система от околности на началото и спрямо която алгебричните операции са непрекъснати. Очевидно тя е най-слабата топология, която търсим. /Обърнете внимание, че множествата $U_{\varepsilon, \omega}$ от фундаменталната система могат да се представят и във вида

$$19/ \quad U_{\varepsilon, \omega} = \{x : p_j(x) < \varepsilon, j \in \omega\} = \{x : \max_{j \in \omega} p_j(x) < \varepsilon\}$$

Това обстоятелство обяснява появата на полунормите $\max_{j \in \omega} p_j$, които се използват постоянно.

С л е д с т в и е. Нека E е произволно локално изпъкнало пространство. Тогава съществува фамилия от полунорми, която породи изходната топология.

Наистина, ако $\{U\}$ е фундаментална система от абсолютно изпъкнали околности на началото и $\{p_u\}$, $u \in \{U\}$ е фамилията от функционали на Минковски, веднага се вижда, че $\{p_u\}$ породи тъкмо оригиналната топология в E .

Това следствие показва, че полунормите представляват универсално средство за въвеждане на локално изпъкнали топологии в нейните пространства и обяснява важната роля на полунормите анализа.

Т е о р е м а 2.17. Нека E е ЛИП с топология, породена от фамилията $\{p_j\}$, $j \in J$. E е отделимо тогава и само тогава, когато от равенството $p_j(x) = 0$ за всяко $j \in J$ следва $x = 0$.

Д о к а з а т е л с т в о. Ако допуснем, че съществува точка $x_0 \neq 0$, за която $p_j(x_0) = 0$, за всяко $j \in J$, точката x_0 ще съдържа във всяка околност на началото и E няма да бъде отделимо. Обратно, ако за всяко $x_0 \neq 0$ съществува полунорма p_j , за която $p_j(x_0) \neq 0$, може да се намери околност U_{x_0} , в която $p_j > 0$, т.е. точката $x = 0 \notin U_{x_0}$. Следователно

$$E \setminus \{0\} = \bigcup_{x_0} U_{x_0},$$

което показва, че множеството $\{0\}$ е затворено и E е Хаусдорфово.

Л е м а 2.3. Нека q е полунорма в ЛИП E с топология, дефинирана от полунормите $\{p_j\}$, $j \in J$. В такъв случай q е непрекъсната тогава и само тогава, когато съществуват константа $C > 0$ и крайно множество от индекси $\omega \in J$ такива, че да имаме

$$10/ \quad q(x) \leq C \max_{j \in \omega} p_j \leq C \sum_{j \in \omega} p_j.$$

Д о к а з а т е л с т в о. Неравенството 10/ е очевидно достатъчно. За да установим неговата необходимост да допуснем, че q е

непрекъсната, т.е. че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува околност $U_{\delta, \omega}$ от вида /9/ такава, че от $x \in U_{\delta, \omega}$ да следва $q(x) < \varepsilon$. Прилагайки лема 2.2 към полунормите $\frac{1}{\delta} \max_{j \in \omega} p_j$ и $\frac{q}{\varepsilon}$, получаваме

$$\frac{q}{\varepsilon} \leq \frac{1}{\delta} \max_{j \in \omega} p_j \quad \omega - \text{крайно},$$

т.е.

$$q(x) \leq \varepsilon \max_{j \in \omega} p_j(x),$$

с което лемата е доказана.

От този резултат произтича веднага следният критерий за идентичност на две топологии, породени в едно и също линейно пространство от две системи $\{p_j\}$ и $\{q_i\}$ от полунорми.

Т е о р е м а 2.18. Топологията τ , породена от $\{p_j\}$ съвпада с топологията σ , породена от $\{q_i\}$ тогава и само тогава, когато всяко q_i е непрекъснато спрямо τ и всяко p_j е непрекъснато спрямо σ .

С други думи, $\sigma = \tau$ тогава и само тогава, когато всяко q_i се мажорира от линейна комбинация на краен брой полунорми p_j и обратно.

Разбира се, теоремата се доказва лесно и чрез директното прилагане на основните дефиниции, но именно неравенствата от вида /10/ са основният инструмент, който се използва. Теоремата показва, че ако към дефиниращата топологията система прибавяме нови, непрекъснати полунорми, топологията не се изменя.

Две системи от полунорми, пораждащи една и съща топология, се наричат **еквивалентни**.

Т е о р е м а 2.19. Нека X и Y са Л И П над едно и също поле Q с топологии, дефинирани съответно от семействата $\{p_j\}$, $j \in J$, $\{q_i\}$, $i \in I$ от полунорми. (Както винаги Q съвпада с R или с C). Нека $f: X \rightarrow Y$ е линейно изображение или, както често се казва, линейен оператор. Това означава, че за $x_1, x_2 \in X$, $\alpha, \beta \in Q$ имаме

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2).$$

В такъв случай f е непрекъснато тогава и само тогава, когато за всяко q_i , $i \in I$ съществуват константа $c > 0$ и крайно множество $\omega \subset J$ от индекси, за които е в сила неравенството

$$/11/ \quad q_i(f(x)) \leq c \max_{j \in \omega} p_j(x) \leq c \sum_{j \in \omega} p_j(x).$$

Д о к а з а т е л с т в о. Ако операторът f е непрекъснат, то полунормата $q_i(f(x))$ е непрекъсната, така че според лема 2.2 условието е необходимо. За да се убедим, че то е достатъчно, трябва да се обърнем отново към дефиницията за непрекъснатост. Понеже е достатъчно да установим непрекъснатостта на f в началото, трябва да покажем, че на всяка околност от вида

$$V_{\varepsilon, \Omega} = \{y \in Y, q_i(y) < \varepsilon, i \in \Omega\}$$

($\Omega \subset I$ е крайно множество)

отговаря околност

$$U_{\delta, \omega} = \{x \in X, p_j(x) < \delta, j \in \omega\}$$

($\omega \subset J$ е крайно множество)

такава, че от $x \in U_{\delta, \omega}$ да следва $f(x) \in V_{\varepsilon, \Omega}$. С други думи, трябва да извлечем неравенството

$$/12/ \quad \max_{i \in \Omega} q_i(f(x)) < \varepsilon$$

от неравенството

$$/13/ \quad \max_{j \in \omega} p_j(x) < \delta$$

Понеже при подходящ избор на $\delta > 0$ и $\omega \in J$ /12/ очевидно се получава от /13/ чрез няколкократно прилагане на /11/, доказателството е завършено.

Следващата теорема характеризира ограничените множества в локално изпъкналите пространства.

Теорема 2.20. Нека E е ЛИП с топология, дефинирана от полунормите $\{p_j\}$, $j \in J$. Едно множество $B \subset E$ е ограничено тогава и само тогава, когато за всяко $j \in J$ съществува константа M_j такава, че от $x \in B$ следва неравенството

$$/14/ \quad p_j(x) \leq M_j.$$

Забелжка. Лема 2.2 показва, че теоремата може да се формулира и по следния начин: Едно множество $B \subset E$ е ограничено тогава и само тогава, когато за всяка непрекъсната полунорма p съществува константа M_p такава, че

$$p(x) \leq M_p, \text{ за всяко } x \in B.$$

Доказателство. Нека $B \subset E$ е ограничено и $U_j = \{x : p_j(x) < 1\}$ е фиксирана околност на началото. Тогава съществува $\lambda_j > 0$ такава, че $\lambda_j B \subset U_j$, т.е. $p_j(\lambda_j x) < 1$ за $x \in B$, с което необходимостта на /14/ е доказана.

Нека сега B е множество, за което /14/ е в сила и $V \subset E$ е произволна околност на началото. Понеже множествата

$$U_{\varepsilon, \omega} = \{x : p_j(x) < \varepsilon, j \in \omega\} \quad \omega - \text{крайно}$$

образуват фундаментална система от околности, можем да изберем $\varepsilon > 0$ и $\omega \subset J$ по такъв начин, че да имаме $U_{\varepsilon, \omega} \subset V$. След този избор да положим

$$\lambda = \frac{\varepsilon}{2} (\max_{j \in \omega} M_j)^{-1}.$$

Сега за $x \in B$ /14/ ни дава $p_j(\lambda x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, $j \in \omega$, което означава, че $\lambda B \subset U_{\varepsilon, \omega} \subset V$ и теоремата е доказана.

Теорема 2.21. Нека E е ЛИП. За да съществува една единствена полунорма, която да поражда в E изходната топология, е необходимо и достатъчно в E да съществува ограничена околност на началото.

Доказателство. Нека U е ограничена, а $W \subset U$ абсолютно изпъкнала ^{отворена} околност на началото в E . Очевидно е, че и W е ограничена. Ако V е произволна околност на началото, съществу-

ва $\lambda > 0$ такава, че $\lambda W \subset V$, което показва, че множествата $\{\lambda W\}$, $\lambda > 0$ образуват фундаментална система от околности на началото. Да означим с p_W функционала на Минковски на W . Понеже

$$\lambda W = \{x : p_W(x) < \lambda\}, \text{ т.е. } p_{\lambda W} = \frac{1}{\lambda} p_W.$$

Топологията в E се поражда от p_W . Обратно, ако топологията в E се поражда от някаква /единствена/ полунорма p според теорема 2.20, околността $\{x : p(x) < 1\}$ е ограничена.

С това доказателството е завършено.

Естествено възниква въпросът как да намираме единствената полунорма p , ако такава съществува.

Ако p и $\{p_j\}$, $j \in J$ дефинират една и съща топология в E , според теорема 2.18 p трябва да бъде непрекъсната, т.е. /лема 2.2/ трябва да имаме

$$p(x) \leq C \sum_{j \in \omega} p_j(x), \quad x \in E$$

за някакво $C > 0$ и подходящо крайно множество $\omega \in J$. По същия начин всяка p_j трябва да бъде непрекъсната спрямо топологията, породена от p , откъдето следва

$$p_j \leq C_j p$$

с някаква константа $C_j > 0$.

Това разискване показва, че трябва да търсим p измежду крайните линейни комбинации $\sum_{j \in \omega} p_j$, които се получават, когато ω пробягва крайните подмножества на J .

У п р а ж н е н и е 9

1. Нека E е отделимо ЛИП, с топология, дефинирана от фамилията $\{p_j\}$, $j \in J$ от полунорми. Докажете, че $\{x_n\} \rightarrow x_0$ тогава и само тогава, когато $p_j(x_n - x_0) \rightarrow 0$ за всяко $j \in J$.

2.6. Линейни функционали. Теорема на Хан-Банах

Линейните функционали - най-простите функции в линейните пространства, доминират в редица дялове на функционалния анализ и неговите приложения. Теоремата на Хан-Банах показва, че локално изпъкналите пространства притежават богат запас от непрекъснати линейни функционали - обстоятелство, което позволява да се построи съдържателна теория.

Дефиниция 2.8. Нека X е векторно пространство над $\mathbb{Q}$. Линейните изображения

$$f: X \rightarrow \mathbb{Q}$$

се наричат **линейни функционали**. Полагайки

$$(\lambda f + \mu g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f(x) + \mu g(x), \quad x \in X, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{Q},$$

превръщаме множеството от линейните функционали, дефинирани в X в ново векторно пространство.

Следният резултат играе основна роля в целия функционален анализ.

Теорема на Хан-Банах /реална форма/. Нека X е линейно пространство над $\mathbb{R}$ и нека $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ е функция, притежаваща следните свойства:

$$1/ p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad x, y \in X$$

и

$$2/ p(\alpha x) = \alpha p(x), \quad \alpha \geq 0.$$

Накрая нека в линейното подпространство $N \subset X$ е дефиниран линеен функционал, удовлетворяващ неравенството

$$15/ \quad f(x) \leq p(x), \quad x \in N.$$

Тогаво съществува /реален/ линеен функционал F , дефиниран в цялото X , удовлетворяващ следните изисквания:

$$A/ f(x) = F(x), \quad \text{за } x \in N$$

и

$$B/ F(x) \leq p(x), \quad \text{за } x \in X.$$

С други думи, f може да бъде продължен в цялото X без да се наруши /15/.

Забележка. Обърнете внимание на обстоятелството, че всяка **полунорма**, дефинирана в X , удовлетворява изискванията 1/ и 2/, наложени на функцията p .

Преди да започнем доказателството, трябва да кажем няколко думи за лемата на Цорн.

Дефиниция 2.9. Нека $\mathcal{H}$ е произволно множество. Казваме, че в $\mathcal{H}$ е дефинирана **частична наредба**, когато между някои елементи на $\mathcal{H}$ е дефинирана релацията $\leq$, удовлетворяваща следните условия:

$$1/ x \leq x \quad \text{за всяко } x \in \mathcal{H},$$

$$2/ \text{ако } x \leq y \text{ и } y \leq z, \text{ то } x \leq z.$$

Дефиниция 2.10. Едно подмножество на $\mathcal{H}$ се нарича **линейно наредено** или **верига**, ако за всеки два негови елемента x и y е налице поне една от релациите

$$x \leq y \text{ и } y \leq x.$$

Дефиниция 2.11. Елементът $x \in \mathcal{H}$ се нарича **максимален**, ако от $x \leq y$ следва $y \leq x$, т.е. ако x мажорира всички елементи на $\mathcal{H}$, с които е сравним.

Следното твърдение е най-често използваният еквивалент на принципа за трансфинитната индукция:

Лема на Цорн. Ако всяка верига в едно частично наредено множество $\mathcal{H}$ притежава горна граница, то в $\mathcal{H}$ съществува максимален елемент.

Това твърдение не говори много на интуицията, макар че е твърде удобно за работа. Следващият еквивалент има ясен интуитивен смисъл.

Нека $\mathcal{H}$ е частично наредено. Една верига в $\mathcal{H}$ се нарича **максимална**, когато не е истинска част от никоя друга верига в $\mathcal{H}$.

Принцип за максималност на Хаусдорф. Всяка верига може да се продължи до максимална верига.

Лемата на Цорн е очевидно следствие от този принцип. Наистина, нека $\mathcal{S}$ е максимална верига в $\mathcal{N}$ и $x \in \mathcal{N}$ е нейна мажоранта. Очевидно е, че елементът x е максимален.

В същност принципът на Хаусдорф и лемата на Цорн са еквивалентни. За нас лемата на Цорн ще бъде аксиома. Читателите, които се интересуват от засегнатия въпрос, могат да се обърнат към уводната глава на [1].

Доказателството на теоремата на Хан-Банак естествено се разпада на две части. В първата част чрез конкретна конструкция размерността на дефиниционната област на f се увеличава с единица. След това доказателството се завършва с лемата на Цорн.

Доказателство. Нека $x_0 \in \mathcal{N}$. Да означим с L_0 линейното пространство, породено от $\mathcal{N}$ и x_0 . С други думи, L_0 се състои от елементите на X , които могат да се представят във вида

$$/16/ \quad z = x + \lambda x_0,$$

където $x \in \mathcal{N}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Числото λ в представянето е еднозначно определено. Наистина, ако допуснем, че $x_2 + \lambda x_0 = x_2 + \mu x_0$, $x_1, x_2 \in \mathcal{N}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq \mu$, получаваме

$$x_0 = \frac{x_1 - x_2}{\mu - \lambda} \in \mathcal{N}, \text{ което е невъзможно.}$$

Полагайки

$$F(z) = F(x + \lambda x_0) = f(x) + \lambda l,$$

където $l \in \mathbb{R}$, получаваме линейен функционал, дефиниран в L_0 , който съпада с f за $x \in \mathcal{N}$. Ще покажем, че при подходящ избор на l можем да си осигурим и неравенството $F(z) \leq p(z)$. Наистина, нека x и y са произволни елементи от $\mathcal{N}$. Имаме

$$f(x) - f(y) = f(x-y) \leq p(x-y) \leq p(x+x_0) + p(-y-x_0)$$

или

$$-p(-y-x_0) - f(y) \leq p(x+x_0) - f(x).$$

Понеже x и y са произволни елементи от $\mathcal{N}$, съществува константа l , която разделя

$$-p(-x-x_0) - f(x) \quad \text{и} \quad p(x+x_0) - f(x) \text{ за } x \in \mathcal{N}.$$

С други думи, l удовлетворява неравенствата

$$a/ \quad p(x+x_0) - f(x) \geq l, \quad x \in \mathcal{N}$$

и

$$b/ \quad -p(-x-x_0) - f(x) \leq l, \quad x \in \mathcal{N}.$$

Числото l има необходимите свойства. Нека най-напред λ е положително. Използвайки

$$a/ \text{ в точката } \frac{x}{\lambda} \in \mathcal{N}, \text{ получаваме}$$

$$\begin{aligned} F(z) &= F(x + \lambda x_0) = f(x) + \lambda l \leq f(x) + \lambda \left[p\left(\frac{x}{\lambda} + x_0\right) - f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right] \\ &= f(x) + p(x + \lambda x_0) - f(x) = p(x + \lambda x_0) = p(z), \end{aligned}$$

с което неравенството

$$/17/ \quad F(z) \leq p(z), \quad z \in L_0$$

е установено за $\lambda > 0$. Случаят $\lambda < 0$ се разглежда аналогично с помощта на б/.

С това първата част от доказателството е завършена.

За да завършим доказателството да разгледаме множеството Ω от всевъзможните двойки (F, L) , където F е продължение на f , удовлетворяващо неравенство от вида /17/ в L , а $L, \mathcal{N} \subset L \subset X$, е подпространството, в което линейният функционал F е дефиниран. В Ω ще въведем частична наредба по следния начин: ще казваме, че $(F_1, L_1) \leq (F_2, L_2)$, ако $L_1 \subset L_2$ и $F_1 = F_2$ за $x \in L_1$.

За да можем да приложим лемата на Цорн, трябва да покажем, че всяка верига

$$/18/ \quad (F_1, L_1) \leq (F_2, L_2) \leq (F_3, L_3) \leq \dots$$

от елементи на Ω има мажоранта. Нека $\tilde{L} = \bigcup_j L_j$ е обединението на всички подпространства, които се срещат в /18/. $\tilde{L}$ е очевидно линейно пространство. Нека сега $x \in \tilde{L}$ е фиксиран елемент. Тогава $x \in L_j$ за някакво j . Да положим $\tilde{F}(x) = F_j(x)$. Въпреки че L_j не се определя еднозначно, веднага се вижда, че функционалът $\tilde{F}$ е коректно дефиниран и удовлетворява неравенството $\tilde{F}(x) \leq p(x)$, за $x \in \tilde{L}$. Очевидно $(\tilde{F}, \tilde{L})$ мажорира всички елементи от веригата /18/. Следователно според лемата на Цорн в Ω съществуват максимални елементи. Нека (F^*, L^*) е един такъв елемент. Ако L^* не съвпада с X , бихме могли да продължим F^* върху по-широко пространство, използвайки конструкцията от първата част на доказателството - нещо, което би противоречало на максималността на (F^*, L^*) . Следователно $L^* = X$ и доказателството е завършено.

За комплексни линейни пространства теоремата се обобщава чрез прости алгебрични манипулации.

И така, нека сега X е векторно пространство над полето $\mathbb{C}$ и f е линейен функционал, дефиниран в някакво подпространство $N \subset X$. Имаме $f(x) = \operatorname{Re} f(x) + i \operatorname{Im} f(x)$. Да положим $\operatorname{Re} f(x) = \lambda(x)$, $\operatorname{Im} f(x) = \mu(x)$. Очевидно е, че ако разгледаме X като линейно пространство над $\mathbb{R}$, функционалите λ и μ ще бъдат реално-линейни. Тъждеството $f(ix) = if(x)$ ни дава $\mu(x) = -\lambda(ix)$ за $x \in N$, т.е. $f(x) = \lambda(x) - i\lambda(ix)$. Това равенство показва, че е достатъчно да продължим функционала λ .

Теорема. /Комплексна форма на теоремата на Хан-Банах/. Нека X е комплексно линейно пространство и p е полунорма, дефинирана в X . Нека f е линейен функционал, дефиниран в линейното пространство $N \subset X$ и нека

$$/19/ \quad |f(x)| \leq p(x), \quad \text{за } x \in N.$$

Тогава f може да се продължи до функционал в цялото X , без /19/ да се наруши.

Доказателство. Да разгледаме X като векторно пространство над $\mathbb{R}$. Да продължим функционала λ , въведен по-горе така, че за $x \in X$ да имаме

$$/20/ \quad \lambda(x) \leq p(x), \quad x \in X.$$

Накрая да си образуваме

$$F(x) = \lambda(x) - i\lambda(ix), \quad x \in X.$$

Очевидно функционалът F е реално линейен, защото λ има това свойство, обаче равенствата

$$F(ix) = \lambda(ix) - i(\lambda(-x)) = \lambda(ix) + i\lambda(x) = iF(x)$$

показват, че в същност имаме $F(ix) = iF(x)$, т.е. F е и комплексно линейен. Остава да докажем неравенството

$$/21/ \quad |F(x)| \leq p(x) \quad \text{за } x \in X.$$

Да запишем $F(x)$ при фиксирано x в тригонометричен вид. Нека $F(x) = e^{i\theta} |F(x)|$. Тогава $|F(x)| = F(x)e^{-i\theta} = F(xe^{-i\theta}) = \operatorname{Re} F(xe^{-i\theta}) = \lambda(xe^{-i\theta}) \leq p(xe^{-i\theta}) = p(x)$,

с което доказателството е завършено.

Забележка. Обърнете внимание на обстоятелството, че в теоремата не се говори за никаква единственост.

Следствие 1. Ако X е линейно пространство над $\mathbb{Q}$ и $f: N \rightarrow \mathbb{Q}$, $N \subset X$, е произволен линейен функционал, то f може да се продължи до функционал, дефиниран в X .

Наистина, това е по-прост вариант на теоремата и използваният метод е приложим.

Следствие 2. Нека X е ЛИП и $N \subset X$ е линейно подпространство на X , което разглеждаме като ЛИП с индуцираната от X топология. Тогава всеки непрекъснат функционал, дефиниран в N може да се продължи до непрекъснат функционал в X .

Доказателство. Понеже f е непрекъснат в N , цялата топология е индуцирана от X , съществува непрекъснатата полунорма

ма q , дефинирана в X такава, че

$$/22/ \quad |f(x)| \leq q(x), \text{ за } x \in N.$$

Ако X е комплексно, продължавайки f в X така, че /22/ да не се наруши, стигаме до желани резултат. Ако X е реално да продължим f така, че да имаме

$$/23/ \quad f(x) \leq q(x), \text{ за } x \in N.$$

В такъв случай получаваме и

$$-f(x) = f(-x) \leq q(-x) = q(x),$$

т.е.

$$|f(x)| \leq q(x), \quad x \in X.$$

защото q , като всяка полуорма, е четна.

Упражнение 10

1. Нека X е отделимо ЛП и N е линейно подпространство на X , разположено навсякъде гъсто в X . Ако $f: N \rightarrow Q$ е нулевият линейен функционал, очевидно е, че единственото непрекъснато продължение на f в цялото пространство е нулевият функционал в X . Не противоречи ли това на теоремата на Хан-Банах? Какво пречи на пример да вземем $x_0 \in N$ и, вземайки непрекъснатата полуорма p такава, че $p(x_0) \neq 0$, да продължим функционала

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{за } x \in N \\ \lambda p(x_0), & \text{за } x = \lambda x_0. \end{cases}$$

до функционал, удовлетворяващ неравенството $|f(x)| \leq p(x)$ в цялото X ?

Покажете, че конструкцията върви, когато $N \neq X$ и $x_0 \in N$.

2. Едно множество Ω от реални числа се нарича база на Хамел в R , когато притежава следните свойства:

1. Произволно крайно подмножество на Ω е рационално независимо.

2. Всяко реално число е крайна линейна комбинация от елементи на Ω с рационални коефициенти.

Използвайки лемата на Цорн, постройте база на Хамел в R и с нейна помощ конструирайте прекъснато решение на уравнението

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

У п ъ т в а н е. Нека $\{\Omega_\alpha\}$ е фамилията от всевъзможните крайни подмножества на R , всяко от които се състои от рационално независими числа. Въведете частична наредба в тази фамилия, като считате, че $\Omega_\alpha \leq \Omega_\beta$ точно, когато $\Omega_\alpha \subset \Omega_\beta$. След това с лемата на Цорн докажете, че в $\{\Omega_\alpha\}$ съществува максимален елемент.

За да конструирате прекъснато решение на функционалното уравнение за $x = \sum c_j x_j$, c_j - рационални, $x_j \in \Omega$ и положете

$$/24/ \quad f(x) = \sum c_j f(x_j) \quad /сумата е крайна! /$$

Понеже числата $f(x_j)$ са на ваше разположение, изберете ги по такъв начин, че да получите прекъснато решение. Например, ако $f(\sqrt{2}) \neq \sqrt{2}f(1)$ това ще бъде постигнато. За да можете да оцените силата на получения резултат, покажете, че всяко решение на /24/, което е ограничено около точката $x = 0$ е непрекъснато.

3. Нека E е произволно линейно пространство. С помощта на лемата на Цорн конструирайте подмножество H на E такава, че всеки елемент на E да може да се представи по единствен начин като крайна линейна комбинация на елементи от H . Множеството H с наредената база на Хамел в E .

4. Нека X е отделимо ЛП. Докажете, че линейният функционал $f: X \rightarrow Q$ е непрекъснат тогава и само тогава, когато неговото ядро $\text{Ker } f = \{x: f(x) = 0\}$ е затворено.

У п ъ т в а н е. Условието е очевидно необходимо. За да установите неговата достатъчност, когато $\text{Ker } f \neq X$ вземете една точка x_0 , $f(x_0) = 1$ и означете с U такава уравновесена околност на началото, че $(x_0 + U) \cap \text{Ker } f = \emptyset$.

Понеже, от една страна, множеството $f(U)$ не бива да съдържа числото -1 , а от друга страна, заедно с всеки свой елемент $f(x)$

съдържа и кръга /отсечката/ $|\lambda| \leq |f(x)|$, $\lambda \in Q$, заключете, че $|f(x)| \leq 1$, за $x \in U$.

Допълнение към § 2:

Една теорема за отделяне

Нека X е реално линейно пространство и $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ е ненулев линеен функционал. По аналогия с крайно-мерния случай множествата от вида

$$H = \{x: f(x) = c\}, c = \text{const}$$

се наричат хиперравнини. Хиперравнината H дели X на две полупространства

$$\pi_+ = \{x: f(x) \geq c\} \quad \text{и} \quad \pi_- = \{x: f(x) \leq c\}$$

Когато неравенствата са строги, говорим за отворени полупространства.

Дефиниция 1. Казваме, че хиперравнината H разделя изпъкналите подмножества A и B , ако те лежат в различните полупространства с граница H . Ако освен това $A \cap H = \emptyset$, $B \cap H = \emptyset$, казваме, че H строго разделя A и B .

От теоремата на Хан-Банах леко следват няколко твърде полезни теореми за отделимост. В същност тези твърдения са еквивалентни на самата теорема [3], [16].

Теорема 1. Нека X е Хаусдорфово локално изпъкнало пространство над $\mathbb{R}$, а A и B са непразни изпъкнали множества без общи точки и нека е в сила някое от следните предположения:

- а/ A е отворено,
- б/ A и B са отворени,
- в/ A е компактно, а B е затворено.

В такъв случай съществува хиперравнина, която разделя A и B . В случаите б/ и в/ разделянето е строго.

Преди да се заемем с доказателството, ще установим една почти очевидна лема, която е валидна и в комплексния случай.

Лема 1. Ако $f: X \rightarrow Q$ е ненулев непрекъснат функционал в отделимото ЛП X и $A \subset X$ е отворено, то и $f(A) \subset Q$ е отворено.

Доказателство. Нека $x_0 \in A$. Понеже A е отворено, съществува уравнинена околност U на началото такава, че $x_0 + U \subset A$. Нека $y_0 \in U$ е такъв, че $f(y_0) \neq 0$. Такъв елемент съществува, защото в противен случай бихме имали $f \equiv 0$. Понеже всички точки от вида $y = \lambda y_0$, $|\lambda| < 1$ се съдържат в U , числата $f(x_0 + \lambda y_0) = f(x_0) + \lambda f(y_0)$ се съдържат в $f(x_0 + U)$ и следователно в $f(A)$. Когато λ описва кръга $|\lambda| < 1$ в Q (интервал, ако $Q = \mathbb{R}$) точката $f(x_0) + \lambda f(y_0)$ описва отворен кръг (интервал, ако $Q = \mathbb{R}$) с център в $f(x_0)$. Следователно $f(A)$ е отворено и лемата е доказана.

Сега можем да докажем теорема 1.

Доказателство. а/ Понеже A и B са изпъкнали, множеството $A - B$ е изпъкнало и отворено, защото A е отворено (имаме $A - B = \bigcup_{y \in B} (-y + A)$). По-нататък, точката $x = 0$ не се съдържа в $A - B$, защото $A \cap B = \emptyset$ по предположение. Да вземем $x_0 \in B - A$ и да въведем множеството

$$C = A - B + \{x_0\},$$

което очевидно е отворено, изпъкнало, съдържа началото и не съдържа x_0 . Да означим с p функционала на Минковски на C . Очевидно p притежава следните свойства:

- 1/ $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$,
- 2/ $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, за $\lambda \geq 0$ и
- 3/ $C \subset \{x: p(x) < 1\}$.

Върху правата $x = \lambda x_0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ да дефинираме линейния функционал f с помощта на равенството $f(\lambda x_0) = \lambda$. Понеже $x_0 \in C$ имаме $p(x_0) \geq 1$, т.е. $f(x_0) = 1 \leq p(x_0)$. Сега линейността на

f и 2/ ни дават

$$/24/ \quad f(x) \leq p(x), \text{ за } x = \lambda x_0, \lambda \geq 0,$$

което е очевидно вярно и за $x = \lambda x_0, \lambda < 0$, защото тогава $f(x) = \lambda f(x_0) < 0$, докато $p(x) \geq 0$ по дефиниция.

Благодарение на свойствата 1/ и 2/ на p теоремата на Хан-Банах е приложима и следователно можем да продължим f в цялото X така, че /24/ да не се наруши. Не е трудно да се види, че полученият линейсен функционал - да го означим отново с f , е непрекъснат. Наместна от

$$f(x) \leq p(x), \quad x \in X$$

следва

$$-f(x) \leq p(-x),$$

т.е.

$$/25/ \quad |f(x)| \leq \max(p(x), p(-x)).$$

Да означим за краткост $q(x) = \max(p(x), p(-x))$ и да отбележим, че за всяко $\varepsilon > 0$ множеството $\Omega_\varepsilon = \varepsilon C \cap (\varepsilon C)$ е отворено, защото множеството C е такова. Понеже непосредствено от дефиницията на p следва включването

$$C \cap (-C) \subset \{x : q(x) \leq 1\}$$

и функционалът q е хомогенен, заключаваме, че

$$/26/ \quad \varepsilon C \cap (-\varepsilon C) \subset \{x : q(x) \leq \varepsilon\}.$$

Следователно на всяко $\varepsilon > 0$ успяхме да съпоставим околност на $x = 0$ (именно Ω_ε) такава, че от $x \in \Omega_\varepsilon$ да следва

$$|f(x)| \leq \varepsilon$$

/вж. /25/ и /26/.

С това непрекъснатостта на f в точката $x = 0$, а следователно в X е установена.

З а б е л е ж к а. В реалния случай, който разглеждаме, q не е нищо друго освен функционала на Минковски за изпъкналото и /реал-

но/ уравновесено множество $C \cap (-C)$, така че q е непрекъснато и непрекъснатостта на f следва веднага от /25/. В комплексния случай обаче от обстоятелството, че C е изпъкнало и съдържа началото не следва, че $C \cap (-C)$ е /комплексно/ уравновесено и това по-кратко доказателство би било неприложимо при доказателството на теорема 2, която следва.

Сега вече сме съвсем близо до целта. Нека $a \in A, b \in B$, тогава $x = a - b + x_0 \in C$ и неравенствата

$$f(x) \leq p(x) \text{ и } p(x) \leq 1 \text{ ни дават}$$

$$f(a) - f(b) + f(x_0) \leq 1, \text{ т.е. } f(a) \leq f(b)$$

защото по дефиниция $f(x_0) = 1$.

Така доказахме неравенството

$$/27/ \quad \sup_{x \in A} f(x) \leq \inf_{y \in B} f(y),$$

тъй като елементите $a \in A$ и $b \in B$ бяха произволни. За да завършим доказателството в случая а/, остава да положим

$$H = \{x : f(x) = p\}, \text{ където } p = \sup_{x \in A} f(x).$$

Нека сега е в сила б/. Понеже според лема 1 $f(A)$ и $f(B)$ са отворени, то /27/ показва, че H строго разделя A и B .

Накрая нека е в сила в/. За всяко $x \in A$ можем да намерим отворена уравновесена околност U_x такава, че $(x + U_x) \cap B = \emptyset$, защото B е затворено. Понеже A е компактно, можем да изберем крайно покритие на A от вида $\bigcup_{i=1}^n (x_i + \frac{1}{2} U_{x_i})$. Да положим

$$U = \bigcap_{i=1}^n U_{x_i}. \text{ Ясно е, че множествата } A + \frac{1}{2} U \text{ и } B \text{ не се пресичат, откъдето следва, че и отворените множества } A + \frac{1}{4} U, B - \frac{1}{4} U$$

не се пресичат. Следователно стигнахме до вече разглеждания случай б/, защото

$$A \subset A + \frac{1}{4} U, \quad B \subset B - \frac{1}{4} U.$$

С това доказателството е завършено.

Т е о р е м а 1 има аналог и в случая, когато X е комплексно ЛИП. Ще се задоволим само с аналога на теорема 1, а/, от който в последствие ще имаме нужда.

Т е о р е м а 2. Нека X е Хаусдорфово комплексно ЛИП и нека A и B са непразни изпъкнали множества в X без общи точки и A е отворено. Тогава съществува ненулев линейен функционал $g: X \rightarrow \mathbb{C}$ и реално чисто γ такива, че

$$g(A) \subset \{Re z \leq \gamma\}, \quad g(B) \subset \{Re z \geq \gamma\}.$$

т.е. образите на $f(A)$ и $f(B)$ лежат в две различни полуравнини в $\mathbb{C}$.

Д о к а з а т е л с т в о. Най-напред, разглеждайки X като реално линейно пространство, с помощта на теорема 1, а/, да конструираме реално-линейен функционал $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ такъв, че

$$\sup_{a \in A} f(a) \leq \gamma \leq \inf_{b \in B} f(b)$$

за подходящо γ . След това остава да забележим, че

$$g(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - if(ix)$$

има всички необходими свойства.

С л е д с т в и е. Нека X е Хаусдорфово ЛИП над $\mathbb{Q}$ и нека $A \subset X$ е изпъкнало. Ако $x_0 \in A$, съществува непрекъснат линейен функционал

$$f: X \rightarrow \mathbb{Q} \quad \text{такъв, че } f(x_0) \in \overline{f(A)}.$$

Д о к а з а т е л с т в о. Нека U е уравновесена, изпъкнала и отворена околност на началото такава, че $(x_0 + U) \cap A = \emptyset$. Нека f е функционал, за който

$$f(x_0 + U) \subset \{Re z \leq \gamma\}, \quad f(A) \subset \{Re z \geq \gamma\}$$

за подходящо γ . Понеже $f(x_0 + U) = f(x_0) + f(U)$ и според лема 1 $f(U)$ е отворено, то $Re f(x_0) < \gamma$ и следствието е доказано.

З а б е л е ж к а. Ако X е комплексно ЛИП и $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ е непрекъснат линейен функционал, да наречем полупространства множества от вида

$$\pi_1 = \{x: Re f(x) \geq a\} \quad \text{и} \quad \pi_2 = \{x: Re f(x) \leq a\}, \quad a = const$$

Сега можем да кажем, че фактически установихме съществуването на непрекъснат линейен функционал, който разделя x_0 и $\bar{A}$. С други думи, докажахме следната

Т е о р е м а 3. Ако A е изпъкнало множество в Хаусдорфово ЛИП X , то $\bar{A}$ съвпада със сечението на всички затворени полупространства, които съдържат A .

§ 3. Пространства на Фреше (Фпространства)

3.1. Дефиниция и основни примери

В повечето от действително важните теореми в анализа в явна и иззавоалирана форма присъствува и понятието пълнота - понятие, което умишлено не беше обсъждано досега, понеже средствата, необходими даже за постановката на въпроса в цялата му общност остават извън рамките на тази книга. За частие съществува една категория от линейни пространства, която е достатъчно широка за повечето приложения и в която може да се работи с привичните за всеки аналитич средства. Става дума за локално изпъкналите пространства, чиято топология е съвместима с някаква инвариантна метрика.

Д е ф и н и ц и я 3.1. Нека E е линейно пространство и $\rho: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ е някаква метрика. Казваме, че ρ е инвариантна, когато за всяко двойка $(x, y) \in E \times E$ имаме

$$\rho(x, y) = \rho(x - y, 0).$$

Дефиниция 3.2. Едно линейно топологично пространство се нарича пространство на Фреше /или F пространство/, когато:

1/ Неговата топология е съвместима с някаква инвариантна метрика и

2/ E е пълно относно тази метрика /т.е. всяка редица на Коши е сходяща/.

Естествено е да се отдели класът от локално изпъкналите пространства, които допускат инвариантна метрика. Удобно е да започнем обсъждането на въпроса с една проста лема.

Лема 3.1. Ако E е ЛИП с топология, дефинирана от изброимата фамилия $\{p_j\}$, $j = 1, 2, 3 \dots$ от полунорми, съществува монотонна редица от полунорми

$$q_1 \leq q_2 \leq q_3 \leq \dots$$

която дефинира същата топология.

Наистина достатъчно е да положим $q_n(x) = \max_{j \leq n} p_j(x)$

Обърнете внимание, че изискването редицата $\{q_j\}$ да е монотонно растяща е равносилно с изискването множествата

$$U_j = \{x : q_j(x) < 1\} \text{ да намаляват.}$$

Теорема 3.1. В едно Хаусдорфово локално изпъкнало топологично пространство E може да се дефинира инвариантна метрика, съвместима с изходната топология, тогава и само тогава, когато началото в E притежава изброима фундаментална система от околности.

Доказателство. Ако ρ е някаква метрика /не непременно инвариантна/, съвместима с топологията в E , кълбата

$$B_n(x) = \{x : \rho(x, 0) < \frac{1}{n}\}$$

очевидно образуват изброима фундаментална система от околности на началото. Обратно, нека $\{U_j\}$, $j = 1, 2, 3 \dots$ е изброима фундаментална система от околности на началото. Без ограничение на

общността можем да предполагаем, че $\{U_j\}$ са абсолютно изпъкнали (E е ЛИП) и монотонно намаляват, т.е.

$$U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \dots \supset U_j \supset U_{j+1} \dots$$

(в противен случай ще разглеждаме околностите $V_n = \bigcap_{j \leq n} U_j$). Не-

ка p_j е функционалът на Миновски на U_j . Ясно е, че редицата $\{p_j\}$ расте монотонно.

Ще покажем, че функцията

$$1/ \quad \rho(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{p_j(x-y)}{1 + p_j(x-y)}$$

е търсената метрика. ... еже нейната инвариантност е очевидна, трябва да проверим две неща:

а/ Че ρ е наистина метрика.

б/ Че изходната топология в E , дефинирана от полунормите

$\{p_j\}$ съвпада с топологията, дефинирана от ρ .

Да проверим а/. От $\rho(x, y) = 0$ следва $p_j(x-y) = 0$, $j = 1, 2, \dots$, т.е. $x = y$, защото E е отделимо по предположение. Остава да се убедим, че е в сила неравенството на триъгълника. Понеже имаме

$$p_j(x+y) \leq p_j(x) + p_j(y), \quad j = 1, 2, \dots$$

достатъчно е да покажем, че за $a \geq 0$, $b \geq 0$ е в сила неравенството

$$\frac{a+b}{1+a+b} \leq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b},$$

чието проверка е съвсем елементарна и ние я предоставяме на читателя.

Да докажем б/. Трябва да установим, че във всяко кълбо $B_n(x)$ се съдържа околност U_j и обратно - във всяка такава околност се съдържа кълбо с център в началото и достатъчно малък радиус.

Нека ни е дадено кълбото $B_n(x) = \{x : \rho(x, 0) < \frac{1}{n}\}$ и нека $\varepsilon > 0$ е такова малко, че да имаме $\varepsilon < \frac{1}{n}$. Да вземем

$j_0 = j_0(\epsilon)$ толкова голямо, че да имаме

$$\sum_{j_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} < \frac{\epsilon}{2}$$

и да го фиксираме. След това да вземем $j_1 > j_0$ толкова голямо, че от $x \in U_{j_1}$ да следва $\rho_{j_0}(x) < \frac{\epsilon}{4}$. Това може да се направи, защото полунормата ρ_{j_0} е непрекъсната, а системата $\{U_j\}$ е фундаментална. След тази подготовка, използвайки, че редицата $\{\rho_j\}$ е монотонно растяща, за $x \in U_{j_1}$ получаваме

$$\begin{aligned} \varphi(x, 0) &= \sum_{j=0}^{j_0} \frac{1}{2^j} \frac{\rho_j(x)}{1 + \rho_j(x)} + \sum_{j_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{\rho_j(x)}{1 + \rho_j(x)} \\ &< \sum_{j=0}^{j_0} \frac{\rho_{j_0}(x)}{2^j} + \sum_{j_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} < \frac{\epsilon}{4} \sum_{j=0}^{j_0} \frac{1}{2^j} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon < \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

което показва, че U_{j_1} се съдържа в кълбото B_n . Обратно, нека U_j е произволна околност от фундаменталната система. За $x \in B_{2^{-j-1}}(0)$ получаваме

$$\frac{1}{2^j} \frac{\rho_j(x)}{1 + \rho_j(x)} \leq \varphi(x, 0) < \frac{1}{2^{j+1}},$$

т.е. $\rho_j(x) < \frac{1}{2}(1 + \rho_j(x))$ или $\rho_j(x) < 1$,

което показва, че кълбото $B_{2^{-j-1}}(0)$ се съдържа в U_j .

С това теоремата е доказана.

Забележка 1. Някои автори наричат пространства на Фреше ЛИП с изброима фундаментална система на началото, които са пълни относно метриката.

Забележка 2. Теоремата показва, че една редица $\{x_n\}$ е фундаментална (т.е. $\varphi(x_n, x_m) \rightarrow 0$ при $n, m \rightarrow \infty$) тогава и само тогава, когато $\rho_j(x_n - x_m) \rightarrow 0$ при $n, m \rightarrow \infty$ каквато и да бъде полунормата ρ_j , а оттам и за всяка непрекъснатата полунорма в E . Следователно в ЛИП с изброима база можем да говорим за пълнота, без да си служим с метрика. Първото нещо, кое-

то ни идва на ум, е да постъпим така и в общия случай. Линеинно изпъкналите пространства, в които от условието " $\rho(x_n - x_m) \rightarrow 0$ при $n, m \rightarrow \infty$ за всяка непрекъсната полунорма ρ " следва, че $\{x_n\}$ е сходяща, се наричат с ек в е н ц и я л н о п ъ л н и. Истинската дефиниция на пълнота обаче изисква разглеждането на филтри или обобщени редици на Коши [3], [4], [5].

Оставяйки разглеждането на Банаховите и Хилбертовите пространства за следващите точки, тук ще въведем няколко важни пространства от безкрайно гладки функции, някои от които са основни за цялата книга.

Дефиниция 3.3. Нека Ω е област в $\mathbb{R}^n$. Казваме, че една монотонно растяща се редица от компакти

$$K_1 \subset K_2 \subset K_3 \dots$$

изчерпва Ω , когато $\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j = \Omega$ и всяко K_j се съдържа във вътрешността на K_{j+1} .

Лесно се вижда, че такива редици съществуват. Преди да докажем това, да въведем едно означение: ако $A \subset \mathbb{R}^n$ и $B \subset \mathbb{R}^n$ са две множества в $\mathbb{R}^n$, да означим с $\varphi(A, B)$ разстоянието между тях, т.е. да положим

$$\varphi(A, B) = \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} \varphi(x, y).$$

След това да въведем множествата

$$\tilde{K}_j = \left\{ x: x \in \Omega, \varphi(x, \partial\Omega) \geq \frac{1}{j} \right\},$$

където $\partial\Omega$ е границата на Ω . Ако Ω е ограничена област, $\tilde{K}_j$ е компактно и можем да вземем $K_j = \tilde{K}_j$. Ако Ω е неограничена, полагаме $K_j = \tilde{K}_j \cap \{x: |x| \leq j\}$ и съществуването на изчерпваща редица е установено. Същата конструкция функционира без изменения и за области в $\mathbb{C}^n$.

Пример 1. $\mathcal{H}(G)$. С първото важно ненормируемо локално изпъкнало пространство се срещаме още в елементарния комплексен анализ.

Нека G е област в комплексната равнина $\mathbb{C}$ и нека $\mathcal{H}(G)$ е линейното пространство на функциите холоморфни в G . Да въведем топология в $\mathcal{H}(G)$ с помощта на полунормите

$$/2/ \quad p_K(f) = \max_K |f(z)|,$$

където K е произволно компактно подмножество на G . Веднага се вижда, че една редица $\{f_j\}$ е сходяща в топологията, дефинирана от /2/ тогава и само тогава, когато е равномерно сходяща върху всяко компактно подмножество на G , т.е. стигаме до характерната за комплексния анализ сходимост. Според основната теорема на Вайерштрас границата на $\{f_j\}$ принадлежи на $\mathcal{H}(G)$. Ще покажем, че $\mathcal{H}(G)$ е пространство на Фреше. Нека $\{K_j\}$, $j = 1, 2, \dots$ е редица от компакти, която изчерпва G . За да покажем, че редицата от полунорми $\{p_{K_j}\}$ поражда в $\mathcal{H}(G)$ изходната топология, достатъчно е да проверим, че всяка от полунормите /2/ е непрекъсната в топологията, породена от $\{p_{K_j}\}$. Това обаче е очевидно, защото какъвто и да бъде компактът $K \subset G$, съществува $K_j \supset K$, така че имаме

$$p_K(f) \leq p_{K_j}(f), \quad f \in \mathcal{H}(G)$$

и твърдението следва от лема 2.2 и теорема 2.18. Понеже системата $\{p_{K_j}\}$ е изброима, $\mathcal{H}(G)$ е метризуемо. Сега неговата пълнота е непосредствено следствие на теоремата на Вайерштрас, за която става дума.

У п р а ж н е н и е 1

1. Докажете, че всяка от полунормите /2/ е норма.
2. Докажете, че $\mathcal{H}(G)$ не е нормируемо.

У п ъ т в а н е. Вижте коментара след теорема 2.21.

П р и м е р 2. $C^\infty(\Omega)$. Най-напред ще въведем удобни означения.

Нека $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ е вектор с целочислени неотрицателни координати. Такива вектори ще наричаме мултииндекси.

к с и. Числото $|\alpha| \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n \alpha_j$ ще наричаме дължина на α . Ако

$\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ е друг n -мерен мултииндекс, ще пишем $\beta \leq \alpha$ тогава и само тогава, когато

$$\beta_j \leq \alpha_j \quad \text{за } j = 1, 2, \dots, n.$$

Ще използваме постоянно и означенията

$$|\alpha| = \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad |z| = \left(\sum_{j=1}^n |z_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

за векторите $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ и $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$.

Ако x е вектор от $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$ и α е n -мерен мултииндекс полагаме

$$x^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

Постоянно ще използваме и краткия запис

$$\partial_x^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}$$

на операцията диференциране. Ще си позволяваме и съкращението $\partial_x^\alpha = \partial^\alpha$ стига променливата, спрямо която се диференцира да се подразбира.

Нека сега Ω е област от $\mathbb{R}^n$, а m е или цяло неотрицателно число, или символът $+\infty$. Както е общоприето, с $C^m(\Omega)$ ще означаваме линейното пространство над $\mathbb{Q}$ на функциите $f: \Omega \rightarrow \mathbb{Q}$, с непрекъснати частни производни до m -ти ред, включително ако $m < +\infty$ или от произволен ред, ако $m = +\infty$. Кой от двата сходни случая $\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{Q} = \mathbb{C}$ се разглежда, ще бъде ясно от контекста. Като правило за нас случаят $\mathbb{Q} = \mathbb{C}$ е основен. Пространството $C^\infty(\Omega)$ на непрекъснатите функции в Ω ще означаваме и с $C(\Omega)$.

Локално изпъкнала топология в $C^m(\Omega)$ ще въведем с помощта на полунормите

$$/3/ \quad p_{S,K}(f) = \max_{\substack{x \in K \\ |\alpha| \leq S}} |\partial_x^\alpha f(x)|,$$

където $0 \leq s \leq m$, съответно $s = 0, 1, 2, \dots$, а K пробягва семейството на компактните множества в Ω . От тази дефиниция е ясно, че $\{f_\nu\} \rightarrow f$ в $C^m(\Omega)$ такова и само тогава, когато за всеки фиксиран мултииндекс α , $|\alpha| \leq m$, $\partial^\alpha f_\nu \rightarrow \partial^\alpha f$ равномерно върху компактите $K \subset \Omega$.

Ще покажем, че $C^m(\Omega)$ е пространство на Фреше. Понеже случат $m = +\infty$ е най-сложен и най-важен, ще съсредоточим вниманието си върху него.

Нека $\{K_j\}$ е редица от компакти, които изчерпват Ω , т.е. $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$.

Да положим

$$1/4/ \quad p_j(f) = \max_{\substack{x \in K \\ |\alpha| \leq j}} |\partial^\alpha f(x)|.$$

Системите 1/3/ и 1/4/ дефинират една и съща топология в $C^\infty(\Omega)$. Наистина ако $p_{s,K}$ е фиксирана полуорма, за j достатъчно голямо имаме $j \geq s$, $K_j \supset K$ и следователно

$$p_{s,K}(f) \leq p_j(f), \quad f \in C^\infty(\Omega),$$

с което еквивалентността на системите 1/3/ и 1/4/ е установена /вж. лема 2.2 и теорема 2.18/.

Вече установихме, че $C^\infty(\Omega)$ е метризуемо - имаме пред вид метриката

$$\rho(f, g) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{p_j(f-g)}{1 + p_j(f-g)}.$$

Нека редицата $\{f_\nu\}$ е фундаментална, т.е. $\rho(f_\nu, f_\mu) \rightarrow 0$ при $\nu, \mu \rightarrow \infty$ или все едно $p_j(f_\nu - f_\mu) \rightarrow 0$, $\nu, \mu \rightarrow \infty$. Понеже

$$p_{s,K_j}(f_\nu - f_\mu) = \max_{x \in K_j} |f_\nu(x) - f_\mu(x)| \leq p_j(f_\nu - f_\mu),$$

редицата $\{f_\nu\}$ е сходяща към някаква непрекъсната функция f и то равномерно върху всеки компакт K_j . Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. За $\nu, \mu > N(\varepsilon, j)$ имаме

$$p_{s,K_j}(f_\nu - f_\mu) < \varepsilon,$$

откъдето, оставяйки μ да расте неограничено, получаваме

$$p_{s,K_j}(f_\nu - f) \leq \varepsilon, \quad \nu \geq N(\varepsilon, j),$$

т.е. $p_{s,K}(f_\nu - f) \rightarrow 0$ за всеки компакт $K \subset \Omega$.

Точно по същия начин се вижда, че за всяко фиксирано съществува непрекъсната функция f_α такава, че $p_{s,K}(\partial^\alpha f_\nu - f_\alpha) \rightarrow 0$, когато $\nu \rightarrow \infty$.

Остава да докажем, че $\partial^\alpha f = f_\alpha$. Понеже разсъжденията противчат индуктивно, достатъчно е да разгледаме случая $\alpha = (1, 0, 0, \dots, 0)$. Нека $x_0 \in \Omega$ и $\delta > 0$ е толкова малко, че кубът $A: |x_j - x_{0j}| \leq \delta$, $j = 1, 2, \dots, n$ да се съдържа в Ω . За $x \in A$ имаме

$$f_\nu(x) = f_\nu(x_0, x_2, \dots, x_n) + \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial f_\nu}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_n) dt,$$

откъдето с граничен преход получаваме

$$f(x) = f(x_0, x_2, \dots, x_n) + \int_{x_0}^{x_1} f_\alpha(t, x_2, \dots, x_n) dt,$$

$$\text{т.е.} \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} = f_\alpha \text{ в } A,$$

с което всичко е доказано, защото x_0 беше произволна точка от Ω .

Така доказахме, че за всеки мултииндекс α имаме

$$p_{s,K}(\partial^\alpha f_\nu - \partial^\alpha f) \rightarrow 0 \quad \text{при } \nu \rightarrow \infty,$$

откъдето следва, че $p_j(f_\nu - f) \rightarrow 0$, с което пълнотата на $C^\infty(\Omega)$ е установена.

Пример 3. $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. Линейното подпространство на $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, което се състои от функциите, за които

$$1/5/ \quad p_{\alpha,\beta}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < +\infty,$$

каквито и да бъдат мултииндексите α и β , се нарича пространство на Шварц /пространство на бързо намаляващите функции/ и се бе-

лежи с $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ или просто с $\mathcal{J}$. Очевидно е, че ако $f \in \mathcal{J}$, то за всеки мултииндекс α и $\partial^\alpha f \in \mathcal{J}$.

Типичен пример на функция от $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ е $f(x) = e^{-|x|^2}$. Веднага се вижда, че ако означим с $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ пространството от безкрайно гладките функции, всяка от които се анулира тъждествено извън някакво кълбо с достатъчно голям радиус, ще бъдат в сила релациите

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Топология в $\mathcal{J}$ въвеждаме с помощта на полунормите /5/. Непосредствено се проверява, че системите /5/ и

$$/6/ \quad q_{m,\rho}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^m |\partial^\rho f(x)|, \quad f \in \mathcal{J}$$

пораждат една и съща топология в $\mathcal{J}$. Наистина неравенството

$$|x^\alpha| \leq (1 + |x|^2)^{|\alpha|} \quad \text{ни дава}$$

$$p_{\alpha,\rho}(f) \leq q_{|\alpha|,\rho}(f),$$

а от друга страна, както лесно се вижда, всяка от полунормите /6/ се мажорира от крайна линейна комбинация на /5/.

Пространството $\mathcal{J}$ е метризуемо, защото всяка от системите /5/ и /6/ е изброима.

Т е о р е м а 3.2. $\mathcal{J}$ е пространство на Фреше.

Д о к а з а т е л с т в о. Нека $\{f_\nu\}$ е редица на Коши, т. е.

$q_{m,\alpha}(f_\nu - f_\mu) \rightarrow 0$ при $\nu, \mu \rightarrow \infty$, за произволна полунорма от системата /6/. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно и нека $N(\varepsilon, \alpha, m)$ е такова, че за $\nu, \mu > N(\varepsilon, \alpha, m)$ да бъде в сила неравенството

$$q_{m,\alpha}(f_\nu - f_\mu) < \varepsilon,$$

т. е.

$$/7/ \quad |\partial^\alpha f_\nu(x) - \partial^\alpha f_\mu(x)| < \frac{\varepsilon}{(1 + |x|^2)^m} \leq \varepsilon, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

(m и α са фиксирани).

Това неравенство показва, че редицата $\{\partial^\alpha f_\nu\}$ клони равномерно в $\mathbb{R}^n$ към някаква функция f_α . Както в пример 2 се вижда, че ако означим с f границата на $\{f_\nu\}$ ще имаме $f_\alpha = \partial^\alpha f$. След тази констатация, извършвайки в /7/ граничния преход $\mu \rightarrow \infty$ при фиксирано x , получаваме

$$|\partial^\alpha f_\nu(x) - \partial^\alpha f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{(1 + |x|^2)^m}, \quad \forall \nu \geq N(\varepsilon, m, \alpha),$$

т. е.

$$q_{m,\alpha}(f_\nu - f) \rightarrow 0 \quad \text{при } \nu \rightarrow \infty,$$

с което пълнотата на $\mathcal{J}$ е установена, защото полунормата беше произволна.

У п р а ж н е н и е 2

1. Нека α е произволен мултииндекс. Докажете, че изображенията

$$a/ \quad C^\infty(\Omega) \xrightarrow{\partial^\alpha} C^\infty(\Omega),$$

$$б/ \quad \mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\partial^\alpha} \mathcal{J}(\mathbb{R}^n),$$

$$в/ \quad \mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\partial^\alpha} C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

са непрекъснати.

Този резултат има принципно значение и илюстрира ползата от разглеждането на пространства с топология, дефинирана с безбройно много полунорми в теорията на диференциалните уравнения с частни производни.

За да оцените силата на твърдението в задачата, означете с $A_k[a, b]$ линейното пространство на безкрайно гладките функции $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ с топология, дефинирана от нормата

$$p_k(f) = \max_{\substack{x \in [a, b] \\ 0 \leq \nu \leq k}} |f^{(\nu)}(x)|$$

и докажете, че операторът на диференцирането

$$A_k[a, b] \xrightarrow{\frac{d}{dx}} A_k[a, b]$$

не е непрекъснат. Напротив, разглеждан като оператор от $A_{k+1}[a, b]$ в $A_k[a, b]$ той е непрекъснат.

Сега става ясно как желанието да получим пространство, в което диференцирането да е непрекъсната операция, води до разглеждането на безбройно много полунорми.

2. Кое от изображенията

$$\mathcal{I}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\partial^\alpha} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n),$$

$$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\partial^\alpha} \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$$

е непрекъснато?

3. Кои от функциите

$$e^{-|x|}, e^{-|x|^2} \cos |x|, e^{-|x|^2} \sin |x|, e^{-|x|^2} \cos(e^{|x|^2})$$

се съдържат в $\mathcal{I}$?

4. Ако (X, ρ) е пространство на Фреше, характеризирайте ограничените множества в X чрез метриката ρ .

5. Нека F е някое от пространствата $\mathcal{H}(\Omega)$, $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ и $\mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$. Докажете, че ако $\{f_v\}$, $v = 1, 2, 3, \dots$, е ограничена редица от елементи на F , т.е. редица, която се поглъща от всяка околност на началото, от нея може да се избере сходяща подредица.

Благодарение на това свойство изброените пространства спадат към така наречените пространства на Монтел.

У п ъ т в а н е. Теорема 2.20 ни позволява да използваме теоремата на Арцелà и Àсколи.

6. Докажете, че пространствата $\mathcal{H}(\Omega)$, $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ и $\mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$ са ненормируеми.

7. Докажете, че пространството $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^1)$ не е пълно относно нормата

$$\rho(f) = \sup_{\mathbb{R}^1} |f(x)|$$

У п ъ т в а н е. Намерете необходимо и достатъчно условие една функция да се съдържа в затворената обвивка на $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^1)$ относно нормата ρ .

8. Докажете, че за всяко k вложенията

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega) \xrightarrow{i_k} \mathcal{C}^k(\Omega)$$

са непрекъснати. Изображението i_k съпоставя на всяка функция от $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ същата функция, разглеждана като елемент от $\mathcal{C}^k(\Omega)$. Убедете се, че топологията, която дефинирахме в $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, е най-слабата локално изпъкнала топология, спрямо която всяко от изображенията i_k е непрекъснато.

3.2. Банахови пространства

Банаховите и Хилбертовите пространства са най-важните и най-добре изследваните класове от пространства на Фреше. В тази и в следващите точки е събран стандартен, добре известен материал, предназначен главно за справки.

Д е ф и н и ц и я 3.4. Нека X е линейно пространство над $\mathbb{Q}$ и изображението

$$/8/ \quad x \longrightarrow \|x\|$$

на X в $\mathbb{R}$ е норма /деф.2.7/. Ако въведем топология в X чрез нормата /8/, полученото локално изпъкнало пространство се нарича нормирано. Ако освен това X е п ъ л н о относно метриката

$$\rho(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in X,$$

то се нарича Банахово.

Следователно Банаховите пространства са частен случай от пространствата на Фреше.

Нека X и Y са нормирани пространства над едно и също поле $\mathbb{Q}$. Нормите в X и Y ще означаваме съответно с $\|\cdot\|_X$ и $\|\cdot\|_Y$, като ще пропускаме индексите, когато няма опасност от недоразумения.

Дефиниция 3.5. Линейните изображения на X в Y наричаме линейни оператори. В частния случай, когато $Y = \mathbb{Q}$, вместо за линейни оператори говорим за линейни функционали.

Линейният оператор $T: X \rightarrow Y$ се нарича ограничен, когато съществува константа $C > 0$, за която е в сила неравенството

$$/9/ \quad \|Tx\|_Y \leq C \|x\|_X, \quad x \in X.$$

/В случая, когато $Y = \mathbb{C}$ ($Y = \mathbb{R}$) под $\|Tx\|_Y$ се разбира модулет /абс.стойност/ на комплексното /реалното/ число Tx ./

Като частен случай от теорема 2.19 /стр.34/ получаваме

Теорема 3.3. Линейният оператор $T: X \rightarrow Y$ е ограничен тогава и само тогава, когато е непрекъснат.

Дефиниция 3.6. Най-малката константа $\|T\|$, за която /9/ е в сила, се нарича норма на оператора /съответно на функционала/ T .

Непосредствено се проверява, че

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|_Y = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|_Y$$

и освен това функцията $T \rightarrow \|T\|$ е наистина норма, т.е. притежава следните свойства:

1/ $\|T\| \geq 0$, като $\|T\| = 0$ е възможно само, когато $T = 0$.

2/ $\|\alpha T\| = |\alpha| \|T\|$, $\alpha \in \mathbb{Q}$.

3/ $\|T_1 + T_2\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|$.

Свойствата 1/ и 2/ са очевидни. Да проверим 3/.

Нека T_1 и T_2 са два ограничени линейни оператора от X в Y .

Имаме

$$/10/ \quad \|(T_1 + T_2)(x)\|_Y \leq \|T_1(x) + T_2(x)\|_Y \leq \|T_1 x\|_Y + \|T_2 x\|_Y$$

$$\leq \|T_1\| \|x\| + \|T_2\| \|x\| = (\|T_1\| + \|T_2\|) \|x\|.$$

Понеже $\|T_1 + T_2\|$ е най-малката константа, за която

$$\|(T_1 + T_2)(x)\| \leq \|T_1 + T_2\| \|x\|$$

е в сила, заключаваме, че

$$\|T_1 + T_2\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|, \quad \text{к.т.д.д.}$$

Теорема 3.4. Нека X е нормирано, а Y - Банахово пространство. В такъв случай множеството $L(X, Y)$ от всевъзможните ограничени линейни оператори

$$T: X \rightarrow Y$$

е Банахово пространство.

Доказателство. Чрез очевидните дефиниции

$$(\alpha T_1 + \beta T_2)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha T_1(x) + \beta T_2(x)$$

превръщаме $L(X, Y)$ в линейно пространство. Остава да проверим, че относно дефинираната по-горе норма $T \rightarrow \|T\|$, то е пълно.

И така, нека редицата $\{T_j\}$, $T_j \in L(X, Y)$ е фундаментална редица от линейни оператори, т.е. нека $\|T_n - T_m\| \rightarrow 0$, когато $n, m \rightarrow \infty$.

Трябва да докажем, че съществува линеен и ограничен оператор $T: X \rightarrow Y$ такъв, че $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказателство. Нека $x \in X$ е фиксирано. Имаме $\|T_n(x) - T_m(x)\|_Y \leq \|T_n - T_m\| \|x\|$, което показва, че редицата $\{T_n(x)\}$ от елементи на Y е фундаментална. Понеже Y е пълно, тя е сходяща. Нека

$$T(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x).$$

Веднага се вижда, че така дефинираният оператор е линеен. Остава да проверим, че той е ограничен и че $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n - T\| = 0$.

Нека $\epsilon > 0$ е произволно и $N(\epsilon)$ е толкова голямо, че за $n, m > N(\epsilon)$ да имаме $\|T_n - T_m\| < \epsilon$. Като извършим граничния преход $n \rightarrow \infty$ при фиксирано $m > N(\epsilon)$, от неравенството

$$/11/ \quad \|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \|T_n - T_m\| \|x\| \leq \varepsilon \|x\|$$

получаваме

$$/12/ \quad \|Tx - T_m x\| \leq \varepsilon \|x\|,$$

т.е.

$$\|Tx\| \leq \|T_m x\| + \varepsilon \|x\| \leq (\|T_m\| + \varepsilon) \|x\|,$$

което показва, че T е ограничен и $\|T\| \leq \|T_m\| + \varepsilon$. Сега

/12/ показва, че $\|T - T_m\| \leq \varepsilon$, с което всичко е доказано, защото $m > N(\varepsilon)$ беше произволно.

Следващият частен случай заслужава изрично отбелязване.

С л е д с т в и е. Линейното пространство $L(X, Q)$ на линейните ограничени функционали $f: X \rightarrow Q$ е Банахово. То се нарича спрегнато на X и се означава с X^* .

Изследването на X^* дава полезна информация за самото X .

У п р а ж н е н и е 3. Нека $\{T_n\} \subset L(X, Y)$, $T \in L(X, Y)$.

Докажете, че от $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ следва $\|T_n\| \rightarrow \|T\|$.

3.3. Рефлексивност. Слаба и слаба^{*} топология

Ако X е нормирано пространство, както вече се убедихме, неговото спрегнато X^* е Банахово. Следователно можем да разгледаме и $(X^*)^*$, което ще означаваме с X^{**} . Оказва се, че между X и X^{**} съществува полезна връзка. Преди да се спрем на този въпрос, ще отбележим две следствия от вече доказаната теорема на Хан-Банах.

Т е о р е м а 3.5. Нека X е нормирано пространство и f е ограничен линейен функционал, дефиниран в линейното подпространство $N \subset X$. Тогавя f може да се продължи до ограничен функционал в X , без да се увеличи неговата норма.

Д о к а з а т е л с т в о. Понеже по предположение

$$|f(x)| \leq \|f\| \|x\|, \quad x \in N,$$

достатъчно е да приложим теоремата на Хан-Банах към f и полуноормата $\rho(x) = \|f\| \|x\|$.

Т е о р е м а 3.6. Ако X е Хаусдорфово линейно изпъкнало пространство и $x_0 \neq 0$ е елемент от X , съществува непрекъснат линеен функционал f , дефиниран в X такъв, че $f(x_0) \neq 0$. Ако е нормирано с норма $x \rightarrow \|x\|$, f може да се конструира така, че да удовлетворява равенството $f(x_0) = \|x_0\|$ и да има норма единица.

Д о к а з а т е л с т в о. Нека ρ е непрекъснатата полуноорма такава, че $\rho(x_0) \neq 0$. Такава съществува, защото X е отделимо /теорема 2.17/. Да дефинираме f в линейното подпространство:

$$N: x = \lambda x_0, \quad \lambda \in Q$$

чрез равенството $f(\lambda x_0) = \lambda \rho(x_0)$.

Тази дефиниция ни осигурява равенството $|f(x)| = \rho(x)$ за $x \in N$. Прилагайки теоремата на Хан-Банах, получаваме функционал - да го означим отново с f такъв, че $|f(x)| \leq \rho(x)$ за $x \in X$ и освен това $f(x_0) = \rho(x_0) \neq 0$.

В случай, че X е нормирано, достатъчно е да вземем $\rho(x) = \|x\|$.

Сега да се върнем към въпроса за връзката между X и X^{**} (X е нормирано пространство).

Нека $x \in X$ и $x^* \in X^*$. Стремейки се към симетрия, да означим стойността на функционала x^* в точката x с $\langle x, x^* \rangle$ вмес- то с традиционното $x^*(x)$. Сега да фиксираме x и да оставим x^* да опише X^* . Не е трудно да се види, че изображението $\tilde{x}: X^* \rightarrow Q$, действащо по правилото

$$/13/ \quad x^* \rightarrow \langle x, x^* \rangle$$

е линеен функционал от X^{**} . Наистина имаме

$$\langle x, \alpha x_1^* + \beta x_2^* \rangle = \alpha \langle x, x_1^* \rangle + \beta \langle x, x_2^* \rangle,$$

с което линейността на $\tilde{x}$ е установена. От своя страна, очевидното неравенство

$$/14/ \quad |\tilde{x}(x^*)| = |\langle x, x^* \rangle| = |x^*(x)| \leq \|x^*\| \|x\|$$

показва, че $\tilde{x}$ е ограничен и неговата норма не надминава $\|x\|$.

В същност в сила е равенството

$$/15/ \quad \|\tilde{x}\|_{X^{**}} = \|x\|.$$

За да се убедим в това, използвайки теорема 3.6, да конструираме функционал $f \in X^*$ такъв, че $f(x) = \|x\|$ и $\|f\| = 1$ /припомняме, че $x \in X$ е фиксирано/. В такъв случай получаваме

$$|\tilde{x}(f)| = |f(x)| = \|x\| \leq \|\tilde{x}\| \|f\| = \|\tilde{x}\|,$$

като неравенството написахме въз основа на дефиницията на $\|\tilde{x}\|$. Така получихме $\|x\| \leq \|\tilde{x}\|$, с което /15/ е установено.

По този начин изобразихме X върху част от X^{**} . Лесно се вижда, че това съответствие е еднозначно-обратимо. Наистина, ако допуснем, че за $x \neq y$, $x, y \in X$ имаме $\tilde{x} = \tilde{y}$, т.е. $x^*(x - y) = 0$ за всяко $x^* \in X^*$ веднага стигаме да противоречие с теорема 3.6.

За да подчертаем получения резултат, ще дадем две дефиниции.

Дефиниция 3.7. Нека (X, ρ_1) и (Y, ρ_2) са метрични пространства. Едно изображение $f: X \rightarrow Y$ се нарича изометрия, ако

$$\rho_1(x_1, x_2) = \rho_2(f(x_1), f(x_2))$$

за произволна двойка $(x_1, x_2) \in X \times X$.

Ясно е, че всяка изометрия изобразява X еднозначно-обратимо върху $f(X) \subset Y$.

Сега можем да кажем, че успяхме изометрично да изобразим X върху част от X^{**} . Намерената изометрия се нарича естествена.

Дефиниция 3.8. Едно Банахово пространство X се нарича рефлексивно, ако естествената изометрия го изобразява върху цялото X^{**} . В такъв случай X и X^{**} обикновено се отъждествяват.

Вече споменахме, че структурата на X^* ни позволява да правим заключения за самото X . Това става най-често чрез използването на т.н. слаба топология.

Дефиниция 3.9. Нека X е отделимо ЛИН. Линейното пространство, образувано от всички линейни непрекъснати функционали в X , се нарича спрегнато или дуално на X и както в Банаховия случай се бележи с X^* .

Дефиниция 3.10. Ако X е отделимо ЛИН, топологията, дефинирана в него чрез фамилията от полунорми

$$/16/ \quad p_f(x) = |f(x)|, \quad f \in X^*$$

се нарича слаба. Сходящите редици $\{x_n\} \subset X$ в тази топология се наричат слабо сходящи.

Нека отбележим изрично, че според теорема 3.6 слабата топология е отделима. Очевидно е, че тя се мажорира от оригиналната топология, защото полунормите /16/ са непрекъснати.

В безкрайно мерния случай двете топологии са различни, като слабата топология не е метризуема.

Следващата теорема подчертава значението на слабата топология.

Теорема за слабата компактност. В рефлексивните Банахови пространства единичното кълбо $\|x\| \leq 1$ е слабо компактно.

За доказателство вижте например [15] стр.180.

Тази теорема, съпоставена с факта, че единичното кълбо в едно Банахово пространство е силно компактно само, когато пространството е крайно-мерно /упр.4, зад.2 и 3/, илюстрира голямата разлика между силната и слабата топология¹.

Видяхме, че когато X е Банахово пространство и X^* е Банахово. Следователно можем да говорим за слаба топология и в X^* . По-

¹Силна се нарича топологията, дефинирана от нормата.

често обаче се използва топология, която е още по-слаба и се получава, като използваме само тези функционали от X^{**} , които отговарят на елементи от X при естествената изометрия.

Дефиниция 3.11. Топологията в X^* дефинирана от полунормите

$$/17/ \quad p_x(f) = |f(x)|, \quad x \in X$$

се нарича слаба* топология.

Всичко е, че за рефлексивните пространства слабата и слабата* топология съвпадат.

Например важните пространства $L^p(\Omega)$, $p > 1$ са рефлексивни /вх.3.4/. Всички Хилбертови пространства са рефлексивни /вх. следствието от теоремата на Рис в 3.6/.

Упражнение 4

1. Докажете следната лема на Рис: ако $E_1 \subset E_2$, $E_1 \neq E_2$, са затворени линейни подпространства на Банаховото пространство X , за всяко $\delta \in (0, 1)$ може да се намери елемент $x \in E_2$, $\|x\|=1$, за който $\|x - y\| \geq \delta > 0$ какъвто и да бъде елементът $y \in E_1$.

Упътване. Вземете произволен елемент $h \in E_2 \setminus E_1$. Понеже E_1 е затворено, имаме $\inf_{y \in E_1} \|h - y\| > 0$. Означете този инфимум с d и намерете елемент $y_1 \in E_1$, за който $d \leq \|h - y_1\| \leq \frac{d}{\delta}$.

След това проверете, че елементът $x = \frac{h - y_1}{\|h - y_1\|}$ има необходимите свойства.

Дефиниция 3.12. Нека X е топологично пространство. Едно множество $K \subset X$ се нарича секвенциално компактно, ако всяка редица от елементи на K има точка на съгъстяване, която принадлежи на K .

Ако X е метрично пространство, обикновената и секвенциалната компактност съвпадат [6], стр.103.

2. Докажете, че единичното кълбо в Банаховото пространство X е компактно само, ако X е крайно-мерно.

Упътване. Допуснете, че $\dim X = \infty$ и с лемата на Рис от зад.1 покажете, че то не е секвенциално компактно.

3. Докажете, че едно отделимо ЛТП може да има компактна околност на началото само ако е крайно-мерно.

Упътване. Ще скицираме доказателството на Глисън [9].

Нека U е уравновесена компактна околност на началото в X . От покритието $\bigcup_{x \in U} (x + \frac{1}{2}U)$ на U да изберем крайно подпокритие $\bigcup_{v \in N} (x_v + \frac{1}{2}U)$, където $x_v \in U$. От релацията $U \subset \bigcup_{v \in N} (x_v + \frac{1}{2}U)$,

която получихме по този начин, следват съотношенията

$$\frac{U}{2^n} \subset \bigcup_{v \in N} \left(\frac{x_v}{2^n} + \frac{U}{2^{n+1}} \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Това обстоятелство ни позволява за всяко фиксирано $x \in U$ индуктивно да изберем такава редица $j(n)$, $j(n) \in \{1, 2, \dots, N\}$, че да имаме

$$/17/ \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x_{j(n)} \in \frac{U}{2^{m+1}}.$$

Понеже U е компактно множество, то е ограничено /теорема 2.10/ и следователно, каквато и да бъде околността V на началото, за $m > m_0$ ще имаме $\frac{U}{2^{m+1}} \subset V$. Сега /17/ показва, че

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x_{j(n)},$$

откъдето чрез групиране на членовете получаваме

$$x = \sum_{v=1}^N \lambda_v x_v,$$

защото $j(n)$ приема само краен брой различни стойности. Излезе, че елементите $x_1, x_2, \dots, x_N$ поражат U , а следователно и X , с което всичко е доказано.

4. В сила е следната важна теорема на Банах-Алаоглу [7], [8]:
Ако X е Банахово, единичното кълбо в X^* е компактно в слабата X^* топология.

Използвайки Канторовия диагонален процес, докажете, че ако X е сепарабелно, т.е. съдържа изброимо, навсякъде гъсто множество от елементи, то единичното кълбо в X^* е секвенциално компактно в слабата топология.

Това очевидно е един отслабен вариант на теоремата на Банах-Алаоглу.

3.4. Общи сведения за пространствата

$L^p(\Omega)$, $p \geq 1$. Рефлексивност

Да означим за момент с M_p линейното пространство на измеримите функции $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ (фактически дефинирани само почти навсякъде в Ω), за които

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty, \quad p \geq 1$$

/интегралът е Лебегов/. Отъждествявайки помежду им функциите, които се различават върху множество с Лебегова мярка нула /това е релация на еквивалентност!/, получаваме линейното пространство $L^p(\Omega)$.

Проверява се, че функционалът

$$\|f\|_p \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1$$

е норма в $L^p(\Omega)$, т.е. притежава следните свойства:

$$1) \|f\|_p \geq 0, \text{ като от } \|f\|_p = 0 \text{ следва } f = 0$$

/от $\|f\|_p = 0$ следва, че f се анулира почти навсякъде в Ω , т.е. принадлежи на нулевия клас в $L^p(\Omega)$. Именно за да си осигурим този резултат, преминахме от M_p към $L^p(\Omega)$.

$$2) \|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

/това свойство е очевидно/ и

$$3) \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

/неравенство на триъгълника, което в случая се нарича още неравенство на Минковски. Неговото доказателство ще бъде дадено в глава втора т.1.1.1/.

Спрямо метриката $\rho(f, g) = \|f - g\|_p$, породена от тази норма, пространството $L^p(\Omega)$ се оказва пълно, т.е. Банахово. Този важен факт се установява в класическата теорема на Рис-Фитер [6] или [10] за случай $p = 2$. В общия случай доказателството същото/. Хронологически, това е била първата действително важна теорема, демонстрираща предимствата на Лебеговия интеграл пред Римановия.

Нека сега p е число по-голямо от 1. Да въведем числото $q = 1$, свързано с p чрез равенството $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. q се нарича спрегнат показател на p .

Оказва се, че всеки линейен ограничен функционал, дефиниран в $L^p(\Omega)$ може да се представи по единствен начин във вида

$$F(f) = \int_{\Omega} f(x) g(x) dx,$$

където $g \in L^q(\Omega)$ и е определена с точност до множество с мярка нула /т.е. като елемент на $L^q(\Omega)$ еднозначно/. Нещо повече, в сила е равенството

$$\|F\|_{(L^p)^*} = \|g\|_q.$$

С други думи, пространствата $L^p(\Omega)^*$ и $L^q(\Omega)$ се оказват изометрични [11], [12]. Ето защо те обикновено се отъждествяват. Прилагайки два пъти този резултат, се убеждаваме, че за $p > 1$ пространствата $L^p(\Omega)$ са рефлексивни.

Случаят $p = 1$ е малко по-сложен. За да можем да опишем линейните ограничени функционали в $L^1(\Omega)$ трябва да въведем пространството $L^\infty(\Omega)$, тясно свързано с пространствата $L^p(\Omega)$ по много причини. /Обърнете внимание например на обстоятелството, че $q = \infty$ е спрегнато на $p = 1$!/

Да означим с M_∞ линейното пространство на измеримите функции $f: \Omega \rightarrow \mathbb{Q}$, които са дефинирани и ограничени и почти навсякъде в Ω . По-точно това означава, че за всяко $f \in M_\infty$ съществува поне една константа $A > 0$ такава, че множеството

$$\{x: x \in \Omega, |f(x)| > A\}$$

да има мярка нула. Точната долна граница на всички такива константи се означава с $\|f\|_\infty$ или с $\text{ess sup}_\Omega |f|$. Отъждествявайки

елементите от M_∞ , които се различават помежду си върху множество с мярка нула, получаваме линейното пространство $L^\infty(\Omega)$. Оказва се, че спрямо метриката, подредена от нормата $\|f\|_\infty$, то е пълно, т.е. Банахово. Накрая всеки функционал от $L^1(\Omega)^*$ се представя еднозначно във вида [11]

$$F(f) = \int_\Omega f(x)g(x)dx, \quad g \in L^\infty(\Omega)$$

и

$$\|F\|_{(L^1)^*} = \|g\|_\infty.$$

На свой ред, за всяко $f \in L^1(\Omega)$ равенството

$$\Phi(g) = \int_\Omega g(x)f(x)dx, \quad g \in L^\infty(\Omega)$$

дефинира функционал от $L^\infty(\Omega)^*$, но не всички функционали от $L^\infty(\Omega)^*$ допускат такова представяне. С други думи, $L^1(\Omega)$ не е рефлексивно.

Тясно свързано с $L^p(\Omega)$ е пространството $L^p_{loc}(\Omega)$, $p \geq 1$. То се състои от измеримите функции, за които всеки от интегралите $\int_K |f|^p dx$, $p \geq 1$, където K е компактно подмножество на Ω , е сходящ¹. По-точно $L^p_{loc}(\Omega)$ както $L^p(\Omega)$ се състои от

¹Понеже $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ е отворено множество, това означава, че K лежи във вътрешността на Ω . Когато искаме да подчертаем, че едно множество G заедно със затворената си обвивка лежи в Ω , ще пишем $G \subset \subset \Omega$.

класове на еквивалентност./ Полунормите

$$q_K(f) = \left(\int_K |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

които се получават, когато K пробягва множеството от компактните в Ω , превръщат $L^p_{loc}(\Omega)$ в пространство на Фреше. Проверете! За краткост пространството $L^1_{loc}(\Omega)$ се означава просто с $L^1_{loc}(\Omega)$.

У п р а ж н е н и е 5

1. Нека Ω е ограничена област в $\mathbb{R}^n$ и $f \in L^\infty(\Omega)$. От неравенството на Холдер /вж. глава втора т.1.1/ следва, че $f \in L^p(\Omega)$ за всяко $p \geq 1$. Докажете равенството

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

2. Нека $p \in (0, 1)$ и Ω е област в $\mathbb{R}^n$. Да означим с M_p измеримите функции $f: \Omega \rightarrow \mathbb{Q}$, за които $\int_K |f(x)|^p dx < \infty$. Отъждествявайки елементите на M_p , които се различават помежду си върху множество с мярка нула, получаваме пространството $L^p(\Omega)$, $0 < p < 1$. Покажете, че метриката

$$\rho(f, g) = \int_\Omega |f(x) - g(x)|^p dx$$

превръща $L^p(\Omega)$ в линейно топологично пространство./Оказва се, че $L^p(\Omega)$, $0 < p < 1$ не е локално изпъкнало, откъдето следва, че в него няма нито един ненулев непрекъснат функционал [8], стр.46/.

У п ъ т в а н и е. За да проверите неравенството на триъгълника и непрекъснатостта на линейните операции, вземете пред вид елементарното неравенство

$$(a+b)^p \leq a^p + b^p, \quad a \geq 0, b \geq 0, \quad 0 < p < 1,$$

което веднага следва от неравенството

$$x^p \geq x, \quad x \in (0, 1), \quad p \in (0, 1).$$

3.5. Едно приложение на теоремата на Хан-Банах: функцията на Грийн за уравнението на Лаплас

Въпреки че в тази книга многократно ще използваме теоремата на Хан-Банах, не можем да се въздържим още тук, отклонявайки се от основната линия на изложението, да направим първото приложение на тази теорема. Става дума за елегантното доказателство за съществуване на функцията на Грийн за уравнението $\Delta u = 0$, дадено от Лакс в [13].. Това доказателство изисква минимални сведения от функционалния анализ и добре илюстрира силата на функционалните методи.

Нека $D \subset \mathbb{R}^2$ е ограничена област с двукратно гладка граница Γ . Освен това нека D е крайно-свързана. Както е известно, функцията на Грийн за областта D се дефинира с равенството

$$G(z, \xi) = -\frac{1}{2\pi} \ln|z - \xi| + h(z, \xi), \quad z, \xi \in D, \quad z \neq \xi$$

където $h(z, \xi)$ притежава следните свойства:

а/ при фиксирано $\xi \in D$ като функция на z $h(z, \xi)$ е хармонична в D и непрекъсната в $\bar{D}$ и

$$b/ \left. h(z, \xi) \right|_{z \in \Gamma} = \frac{1}{2\pi} \ln|z - \xi|, \quad \xi \in D.$$

Да означим с $C(\Gamma)$ линейното пространство на функциите $\varphi: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, дефинирани и непрекъснати върху Γ . В $C(\Gamma)$ да дефинираме нормата

$$\|\varphi\| = \max_{\omega \in \Gamma} |\varphi(\omega)|,$$

която очевидно го превръща в Банахово пространство. По-нататък, нека $\mathcal{H} \subset C(\Gamma)$ е линейното подпространство на $C(\Gamma)$, състоящо се от онези функции, които допускат хармонично продължение в D , т.е. от функциите, за които задачата на Дирихле

$$\begin{aligned} \Delta u &\equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in D \\ u|_{\Gamma} &= \varphi \end{aligned} \quad /18/$$

е разрешима. Да фиксираме една точка $\xi \in D$ и да разгледаме линейния функционал f , дефиниран в $\mathcal{H}$ чрез равенството

$$f(\varphi) = u(\xi),$$

където $\varphi \in \mathcal{H}$ и u е единственото решение на задачата /18/ което съществува по предположение. Точката $\xi \in D$ е фиксирана. Тривиалната оценка

$$|f(\varphi)| = |u(\xi)| \leq \max_{\Gamma} |\varphi|,$$

която следва веднага от принципа за максимума /[14] стр.137/ показва, че f е ограничен функционал и $\|f\| \leq 1$. Понеже за $\varphi = 1$ получаваме $u = 1$, заключаваме, че $\|f\| = 1$. С помощта на теоремата на Хан-Банах да продължим f в цялото $C(\Gamma)$, без да увеличим неговата норма и получения функционал да означим с F . След това да въведем функцията

$$\varphi_z(\omega) = \frac{1}{2\pi} \ln|\omega - z|, \quad z \in \Gamma,$$

която се съдържа в $C(\Gamma)$ за $z \in \Gamma$ и да положим

$$\Phi(z) = \Phi(z, \xi) = F(\varphi_z),$$

където F действа на φ_z като на функция от ω при фиксирано $z \in \Gamma$.

Когато $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$, функцията $\varphi_z(\eta) = \frac{1}{2\pi} \ln|z - \eta|$ е хармонично продължение на φ_z в D и следователно в този случай

$$\Phi(z) = F(\varphi_z) = \frac{1}{2\pi} \ln|z - \xi|.$$

Ще докажем, че $\Phi(z)$ е хармонична функция и в D , въпреки че там не разполагаме с явния ѝ вид. Нека $z = \alpha + i\eta$. Най-напред ще установим диференцируемостта на $F(\varphi_z)$ под знака на функционала, т.е. равенствата

$$/18/ \quad \frac{\partial}{\partial x} \phi(x+iy) = F\left(\frac{\partial}{\partial x} \varphi_z\right) \quad \text{и т.н.,}$$

които ще ни позволят да заключим, че

$$\Delta_z \phi(z) = F(\Delta_z \varphi_z) = 0, \quad z \in D,$$

защото очевидно

$$\Delta_z \varphi_z(w) = \Delta_z \frac{1}{2\pi} \ln|z-w| = 0 \quad \text{за } w \in \Gamma, z \in D.$$

Да вземем $z = x+iy \in D$ и да го фиксираме. За всяко реално $h \neq 0$, за което $z+h \in D$ получаваме

$$\left| \frac{\phi(x+h+iy) - \phi(x+iy)}{h} - F\left(\frac{\partial}{\partial x} \varphi_z\right) \right|$$

$$/19/ = \left| F\left(\frac{\varphi_{z+h} - \varphi_z}{h} - \frac{\partial}{\partial x} \varphi_z\right) \right|$$

$$= \max_{w \in \Gamma} \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\ln|z+h-w| - \ln|z-w|}{h} - \frac{\partial}{\partial x} \ln|z-w| \right|,$$

защото F е ограничен с норма единица. Понеже когато $h \rightarrow 0$ изразът в дясната страна на /19/ клони към нула /това се вижда елементарно например чрез двукратно прилагане на теоремата за крайните нараствания/, /18/ е доказано.

И така, вече установихме, че

$$\phi(z) = F(\varphi_z)$$

е хармонична функция в D . Остава да изследваме нейното поведение близо до Γ . Явният вид на $\phi(z)$ в $\mathbb{R}^2 \setminus D$ ни дава

$$/20/ \quad \lim_{\substack{z \rightarrow w \\ z \in \mathbb{R}^2 \setminus D}} \phi(z) = \frac{1}{2\pi} \ln|w-z|, \quad w \in \Gamma.$$

Използвайки това равенство, ще докажем и съотношението

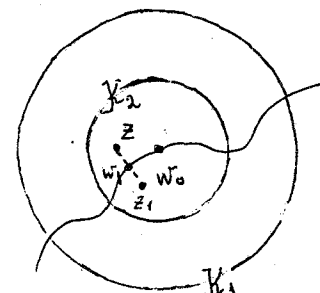
$$/21/ \quad \lim_{\substack{z \rightarrow w \\ z \in D}} \phi(z) = \frac{1}{2\pi} \ln|w-z|, \quad w \in \Gamma,$$

което ще ни позволи да твърдим, че $\phi(z)$ е търсената функция $h(z, \zeta)$. Понеже $\Gamma \in C^2$, съществува такова число $d > 0$, че във всеки кръг K с център в точка от Γ и радиус d , частта $\Gamma \cap K$ се представя в подходяща локална координатна система с уравнение от вида

$$/22/ \quad y = f(x),$$

където $|f(x)| \leq M$, $|f'(x)| \leq M$, $|f''(x)| \leq M$ за такива x , за които $(x, f(x)) \in \Gamma \cap K$, като числото M не зависи от положението на кръга K , а само от числото d , въпреки че заедно с K и уравнението /22/ се мени / [14], стр. 227/.

Нека сега K_1 е кръг с център в точката $w_0 \in \Gamma$ и радиус $\frac{d}{2}$ и нека точката z се намира в концентричния кръг K_2 с радиус $\min(\frac{d}{4}, \varepsilon)$ където числото $\varepsilon > 0$ ще изберем допълнително. При тези предположения разстоянието от z до Γ се достига в някаква точка $w_1 \in \Gamma \cap K_1$ /фиг. 1/. Да означим с z_1 симетричната точка на z спрямо допирателната към Γ в точката w_1 . Следователно z , w_1 и z_1 са върху нормалата към Γ в точката w_1 и



Фиг. 1

$$|z - z_1| = 2|z - w_1| \leq 2\varepsilon.$$

Да фиксираме $\varepsilon > 0$ и да вземем ε толкова малко, че да имаме $\frac{8\varepsilon}{d} < \varepsilon$. Тогава за $w \in \Gamma \setminus (\Gamma \cap K_1)$ получаваме

$$/23/ \quad \left| \left| \frac{z_1 - w}{z - w} \right| - 1 \right| = \left| \frac{|z_1 - w| - |z - w|}{z - w} \right| \leq \frac{|z - z_1|}{|z - w|} < \frac{2\varepsilon}{\frac{d}{4}} < \varepsilon.$$

Ще покажем, че ако $|z - w_0|$ е достатъчно малко, същото неравенство е в сила и за $w \in \Gamma \cap K_1$. Да положим $\varepsilon = |z - w_1| \leq |z - w_0|$ и да означим с K_3 кръга с център w_1 и радиус d , който очевидно съдържа K_1 . В локалната координатна система с на-

чалю в точката w_1 частта $\Gamma \cap K_3$ се представя с уравнение от вида /22/ като

$$f(0) = f'(0) = 0.$$

Спрямо тази координатна система имаме

$$z = (0, \tau), \quad z_1 = (0, -\tau), \quad w = (x, f(x)) \quad \text{и}$$

в частност $w_1 = (0, 0)$.

Сега вече сме готови да докажем /23/ и за $w \in \Gamma \cap K_1$. Ако $w = w_1$ /23/ се редуцира до тривиалното неравенство $0 < \varepsilon$. Следователно остава случаят $w \in \Gamma \cap K_1$, $w \neq w_1$, т. е.

$w = (x, f(x)) \neq (0, 0)$. За такива точки получаваме

$$\left| \left| \frac{z_1 - w}{z - w} \right|^2 - 1 \right| = \left| \frac{x^2 + (f(x) + \tau)^2}{x^2 + (f(x) - \tau)^2} - 1 \right| = \left| \frac{4\tau f(x)}{x^2 + (f(x) - \tau)^2} \right|$$

$$\leq \frac{4|\tau| |f(x)|}{x^2} = \frac{2|x^2 f''(\theta x)|}{x^2} |\tau| \leq 2M |\tau|,$$

което показва, че за $|z - w_0| < \frac{\varepsilon}{2M}$ е в сила оценката

$$\left| \left| \frac{z_1 - w}{z - w} \right| - 1 \right| \leq \left| \left| \frac{z_1 - w}{z - w} \right|^2 - 1 \right| < \varepsilon,$$

защото според дефиницията на $w_1, \tau = |z - w_1| \leq |z - w_0|$.

Окончателно получихме, че за

$$|z - w_0| < \min\left(\frac{d}{4}, \frac{\varepsilon d}{8}, \frac{\varepsilon}{2M}\right).$$

Имаме

$$\max_{w \in \Gamma} \left| \left| \frac{z_1 - w}{z - w} \right| - 1 \right| < \varepsilon,$$

$$\text{т.е.} \quad \max_{\Gamma} |\ln |z_1 - w_1| - \ln |z - w|| \rightarrow 0,$$

когато $z \rightarrow w_0$.

Сега вече /21/ моментално следва от /20/. Наистина понеже функционалът F има норма единица, имаме

$$|\phi(z) - \phi(z_1)| \leq \frac{1}{2\pi} \max |\ln |z - w| - \ln |z_1 - w|| \rightarrow 0$$

при $z \rightarrow w_0$,

$$\text{т.е.} \quad \lim_{\substack{z \rightarrow w_0 \\ z \in D}} \phi(z) = \lim_{\substack{z_1 \rightarrow w_0 \\ z_1 \in K \setminus D}} \phi(z_1) = \frac{1}{2\pi} \ln |w_0 - \xi|,$$

което показва, че

$$\phi(z) = -\frac{1}{2\pi} \ln |z - \xi|$$

е търсената функция на Грийн.

В цитираната работа на Лакс може да се намери аналогична, но малко по-сложна конструкция на функцията на Грийн за същото уравнение и в случая $n \geq 3$.

3.6. Хилбертови пространства. Общ вид на линейните функционали в тях

Безспорно в анализа най-важна роля играят Хилбертови пространства. Така се наричат Банаховите пространства, в които нормата се поражда от скалярно произведение. Хилбертовите пространства са непосредствено обобщение на евклидовите пространства R^n и C^n и естествено възникват при най-различни въпроси.

Нека X е линейно пространство над C и нека в X е дефинирано скалярно произведение. Това означава, че е дадено изображение $\langle x, y \rangle \rightarrow (x, y)$ на $X \times X$ в C , удовлетворяващо следните изисквания:

$$1/ (\alpha x + \beta y, z) = \alpha (x, z) + \beta (y, z)$$

за произволни елементи $x, y, z \in X$ и произволни числа $\alpha, \beta \in C$.

$$2/ (x, y) = \overline{(y, x)}$$

за произволни двойки $\langle x, y \rangle \in X \times X$ ($\overline{(y, x)}$ сме означа-

ли спрегнатото на комплексното число (y, x) .

3/ $(x, x) \geq 0$, като равенство се получава само за $x = 0$.

/Обърнете внимание, че според 2/ числото (x, x) е реално./

Разполагайки със скалярно произведение, можем да дефинираме норма в X чрез равенството $\|x\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(x, x)}$.

Да проверим, че $\|x\|$ е наистина норма. Релациите

a/ $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \iff x = 0$ са очевидно на лице. Остава да докажем неравенството на триъгълника.

$$c/ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Нека t е произволно комплексно число, а x и y са елементи от X . Свойствата на скалярното произведение ни дават

$$0 \leq (x + ty, x + ty) = (x, x) + t(y, x) + \bar{t}(x, y) + |t|^2(y, y),$$

т.е.

$$|t|^2(y, y) + 2 \operatorname{Re}(t(y, x)) + (x, x) \geq 0.$$

Оттук за $t = ze^{i\varphi}$, където z и φ са реални, получаваме

$$z^2(y, y) + 2z \operatorname{Re}(e^{i\varphi}(y, x)) + (x, x) \geq 0,$$

което показва, че полученият квадратен тричлен не си мени знака, когато z описва реалната ос. Следователно дискриминантата му е неположителна, т.е.

$$|\operatorname{Re}(e^{i\varphi}(y, x))|^2 \leq (x, x)(y, y).$$

Полагайки $\varphi = -\arg(y, x)$, получаваме

$$|(y, x)|^2 \leq (x, x)(y, y),$$

т.е.

$$|(y, x)| \leq \sqrt{(x, x)} \sqrt{(y, y)} = \|x\| \|y\|.$$

Установихме известното неравенство на Коши - Буняковски - Шварц.

Сега вече неравенството на триъгълника се проверява моментално.

Наистина имаме

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) = (x, x) + 2 \operatorname{Re}(x, y) + (y, y) \\ &\leq \|x\|^2 + 2|(x, y)| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2, \end{aligned}$$

с което всичко е доказано.

Пълните нормирани пространства, с норма, произхождаща от скалярно произведение, се наричат Х и л б е р т о в и.

Понятието реално Хилбертово пространство се получава с очевидни модификации. Ако X е линейно пространство над $\mathbb{R}$, едно изображение $\langle x, y \rangle \rightarrow (x, y)$ на $X \times X$ в $\mathbb{R}$ се нарича реално скалярно произведение, ако удовлетворява:

$$1/ \text{ /с реални константи/}, \quad 2o/ (x, y) = (y, x) \text{ за произволна двойка } \langle x, y \rangle \in X \times X \text{ и } 3/.$$

Всичко останало се запазва без изменения.

За нас основни ще бъдат комплексните Хилбертови пространства.

Ако X е Хилбертово и $x, y \in X$, изразявайки нормата чрез скалярното произведение, без труд проверяваме тъждеството

$$/24/ \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2,$$

което по очевидни съображения се нарича п р а в и л о н а п а р а л е л о г р а м а. Оказва се, че именно това тъждество отличава Хилбертовите пространства от Банаховите. С други думи, ако X е нормирано пространство и неговата норма удовлетворява тъждеството /24/, то се оказва Хилбертово [6], стр.160/.

Д е ф и н и ц и я 3.13. Два елемента $x, y \in X$ се наричат о р т о г о н а л н и, ако $(x, y) = 0$.

Следващата теорема описва съществения резултат, който прави геометрията на Хилбертовите пространства по-проста от тази на Банаховите.

Т е о р е м а 3.7. Нека N е затворено подпространство на Хилбертовото пространство X . Елементите на X , които са ортогонални на всички елементи от N , образуват затворено линейно под-

пространство $N^\perp \subset X$, което се нарича ортогонално допълнение на N . Нещо повече X е директна сума на N и $N^\perp$, т.е. за всяко $x \in X$ имаме

$$x = x_N + x_{N^\perp},$$

където елементите $x_N \in N$ и $x_{N^\perp} \in N^\perp$ са еднозначно определени. По-кратко този факт се записва чрез равенството

$$X = N \oplus N^\perp.$$

Доказателството на теоремата се свежда до доказателството на следната

Лема за ортогоналната проекция. Нека N е затворено подпространство на X и x е елемент на X , който не се съдържа в N . Тогава съществува единствен елемент $x_N \in N$, който се намира най-близо до x , т.е. такъв, че

$$\|x - x_N\| = \inf_{y \in N} \|y - x\|.$$

При това се оказва, че $x - x_N \in N^\perp$.

Доказателство. Пом $x \notin N$ и N е затворено, числото $d = \inf_{y \in N} \|y - x\|$ е положително. Наистина ако допуснем, че $d = 0$, можем да намерим редица $\{y_n\} \in N$ такава, че $\|y_n - x\| \rightarrow 0$. Това ни дава $x \in N$, което е невъзможно. Това противоречие показва, че $d > 0$. Нека сега $\{y_n\} \subset N$ е редица, за която $\lim \|y_n - x\| = d$. С помощта на правилото на паралелограма ще установим, че $\{y_n\}$ е редица на Коши. Наистина, прилагайки /24/ към векторите $y_n - x$, $y_m - x$, получаваме

$$\|y_n - y_m\|^2 + \|y_n + y_m - 2x\|^2 = 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2,$$

т.е.

$$\|y_n - y_m\|^2 = 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\left\|\frac{y_n + y_m}{2} - x\right\|^2$$

/25/

$$\leq 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4d^2,$$

защото $\frac{y_n + y_m}{2} \in N$. Понеже $\|y_n - x\| \rightarrow 0$, $\|y_m - x\| \rightarrow 0$

/25/ показва, че $\|y_n - y_m\| \rightarrow 0$ при $n, m \rightarrow \infty$. Тъй като X е пълно, това означава, че редицата $\{y_n\}$ е сходяща. Да означим с y нейната граница. Понеже N е затворено, $y \in N$. Ще установим, че $x - y$ е ортогонален на N , т.е. за всяко $h \in N$ имаме $(x - y, h) = 0$.

Наистина от самата дефиниция на y следва неравенството

$$\|y - x\|^2 \leq \|y + th - x\|^2,$$

каквото и да бъде комплексното число t , защото $y + th \in N$. Развивайки скаларните произведения, за $t = \tau e^{i\varphi}$, $\tau > 0$ получаваме

$$\|y - x\|^2 \leq \|y - x\|^2 + 2\operatorname{Re}(t(y - x, h)) + |t|^2 \|h\|^2,$$

т.е.

$$/26/ \quad \tau^2 \|h\|^2 + 2\tau \operatorname{Re}(e^{i\varphi}(y - x, h)) \geq 0.$$

Като разделим на τ и оставим τ да клони към нула, от /26/ получаваме

$$\operatorname{Re}(e^{i\varphi}(y - x, h)) \geq 0,$$

което за $\varphi = -\arg(y - x, h) + \pi$ ни дава

$$-|(y - x, h)| \geq 0, \text{ т.е. } (y - x, h) = 0.$$

С това доказахме, че наистина $y - x \in N^\perp$. От този резултат вече следва, че елементът y е единствен. Наистина, ако $y_1 \in N$ е друг елемент, за който $\|y_1 - x\| = d$, според вече доказаното, $(y_1 - x, h) = 0$ за всяко $h \in N$. В частност за $h = y_1 - y$ получаваме

$$(x - y_1, y_1 - y) = 0, \quad (x - y, y_1 - y) = 0,$$

откъдето чрез изваждане намираме

$$(y_1 - y, y_1 - y) = \|y_1 - y\|^2 = 0, \text{ т.е. } y_1 = y.$$

С това лемата е доказана. Остава да положим само $y = x_N$.

Елементът x_N се нарича ортогонална проекция на x върху N .

Доказателство на теорема 3. Нека $x \in X$. Разлагането

$$/26/ \quad x = (x - x_N) + x_N$$

където $x_N \in N$ е ортогонална а проекция на x е търсеното. Наистина от лемата знаем, че $x - x_N \in N^\perp$. Остава да изучим въпроса за единственост. Полагайки за краткост $x - x_N = x_{N^\perp}$ от /26/ получаваме

$$/27/ \quad x = x_N + x_{N^\perp}.$$

Да допуснем, че

$$/28/ \quad x = y + z, \quad y \in N, \quad z \in N^\perp$$

е друго такова представяне. Изваждайки /28/ от /27/, намираме

$$x_N - y = z - x_{N^\perp},$$

откъдето, умножавайки скалярно с $x_{N^\perp} - y$, получаваме

$$\|x_N - y\|^2 = (z - x_{N^\perp}, x_N - y) = 0, \text{ т.е. } x_N = y,$$

защото $z - x_{N^\perp} \in N^\perp$, а $x_N - y \in N$.

Понеже от $x_N = y$ очевидно следва $x_{N^\perp} = z$, единствеността на разлагането е установена.

За да получим доказателството на теорема 3.7 в пълния ѝ обем, остава да проверим, че $N^\perp$ е затворено подпространство на X . Нека $\{y_\nu\} \subset N^\perp$ е редица, която клони към някакъв елемент $y \in X$. Извършвайки граничния преход в равенството $(y_\nu, h) = 0$, където $h \in N$ е фиксиран, получаваме $(y, h) = 0$, т.е. $y \in N^\perp$ защото елементът h беше произволен. И така $N^\perp$ е затворено. Понеже неговата линейност е очевидна, теоремата е доказана.

¹ Скалярното произведение е непрекъсната функция на двата си аргумента. /Вх. зад.1 в упражненията./

Следващата важна теорема описва ограничените линейни функционали, дефинирани в X . Въпреки че е получена едновременно и независимо от Фреше и от Рис, тя е широко известна под името

Теорема на Рис. Всеки функционал от X^* може да се представи като скалярно произведение, т.е. за всеки функционал $f \in X^*$ съществува еднозначно определен елемент $a_f \in X$ такъв, че е в сила равенството

$$f(x) = (x, a_f), \quad x \in X.$$

$$\text{Нещо повече, } \|f\|_{X^*} = \|a_f\|_X.$$

Доказателство. В случая $f \equiv 0$ можем да вземем $a_f = 0$. Нека сега $f \neq 0$ и $N \stackrel{\text{def}}{=} \{x : x \in X, f(x) = 0\}$. Подпространството $N \subset X$ е затворено, защото f е непрекъснат. Понеже $N \neq X$ по предположение, съществува елемент $x_0 \notin N$. Без ограничение на общността можем да предположим, че $x_0 \in N^\perp$, защото в противен случай вместо него ще разглеждаме $x_0 - x_{0N}$, където x_{0N} е неговата ортогонална проекция върху N .

Нека сега x е произволен елемент от X . Да положим

$$/29/ \quad y = x - \alpha x_0,$$

където $\alpha = \frac{f(x)}{f(x_0)}$. При този избор на α очевидно имаме

$f(y) = f(x) - \alpha f(x_0) = 0$, т.е. $y \in N$. Умножавайки /29/ скалярно с x_0 , получаваме

$$0 = (x, x_0) - \alpha (x_0, x_0),$$

т.е.

$$\alpha = \left(x, \frac{x_0}{\|x_0\|^2} \right),$$

откъдето, спомняйки си дефиницията на α , намираме

$$f(x) = f(x_0) \left(x, \frac{x_0}{\|x_0\|^2} \right) = (x, a_f),$$

където

$$a_f = \frac{\overline{f(x_0)} x_0}{\|x_0\|^2}$$

$\overline{f(x_0)}$ е конюгованото на $f(x_0)$.

Веднага се вижда, че елементът a_f е еднозначно определен. Наистина, ако допуснем, че за всяко $x \in X$ имаме $(x, a_f) = (x, b)$, т.е. $(x, a_f - b) = 0$, вземайки $x = a_f - b$, получаваме $\|a_f - b\|^2 = 0$, т.е. $a_f = b$. За да завършим доказателството, остава да установим равенството $\|a_f\| = \|f\|$. Използвайки неравенството на Шварц, получаваме

$$|f(x)| = |(x, a_f)| \leq \|x\| \|a_f\|,$$

което ни дава $\|f\| \leq \|a_f\|$. От друга страна, очевидно имаме

$$f(a_f) = (a_f, a_f) = \|a_f\|^2 \leq \|f\| \|a_f\|,$$

т.е.

$$\|a_f\| \leq \|f\|, \text{ с което и равенството}$$

$$\|f\|_{X^*} = \|a_f\|_X$$

е установено.

От теоремата на Рис произтича следното важно

С л е д с т в и е. Всички Хилбертови пространства са рефлексивни. Освен това между X и X^* съществува еднозначно-обратима конюговано-линейна изометрия.

Д о к а з а т е л с т в о. На всеки функционал $f \in X^*$ да поставим елемента a_f , който му съответствува по теоремата на Рис. Изображението

$$F: X^* \rightarrow X,$$

което се получава, е очевидно еднозначно-обратимо и изометрично. Освен това от

$$f_1(x) = (x, a_{f_1}),$$

$$f_2(x) = (x, a_{f_2})$$

очевидно следва

$$(\lambda f_1 + \mu f_2)(x) = (x, \bar{\lambda} a_{f_1} + \bar{\mu} a_{f_2}),$$

т.е.

$$F(\lambda f_1 + \mu f_2) = \bar{\lambda} F(f_1) + \bar{\mu} F(f_2)$$

— свойството, което имаме пред вид по-горе, когато нарекохме изометрията между X и X^* "конюговано-линейна". Накрая, за да установим рефлексивността на X , достатъчно е да забележим, че и в X^* съществува естествено скалярно произведение. Именно за $f, g \in X^*$ можем да положим

$$(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} (a_f, a_g)$$

и по този начин да превърнем X^* в Хилбертово пространство. Очевидно $\|f\|_{X^*} = \sqrt{(f, f)}$, така че пълнотата на X^* следва от теорема 3.4 /вж. следствието към теоремата/. Следователно според вече доказаното X^* и X^{**} са конюговано-линейно изометрични. Така получаваме изображенията

$$X \xrightarrow{\varphi_1} X^* \xrightarrow{\varphi_2} X^{**}$$

и

$$\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_2 \circ \varphi_1$$

е търсената еднозначно обратима и линейна изометрия между X и X^{**} .

Следващата важна за приложенията теорема описва билинейните форми, които могат да заменят скалярното произведение в теоремата на Рис.

Л е м а на Л а к с - М и л г р а м. Нека X е /комплексно/ Хилбертово пространство и нека $B: X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ е функция, която притежава следните свойства:

$$\forall B(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha B(x_1, y) + \beta B(x_2, y)$$

за произволни елементи $x_1, x_2, y \in X$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

$$\forall B(x, y) = \overline{B(y, x)}. \text{ (Hermitian)}$$

$$\forall |B(x, y)| \leq C \|x\| \|y\|,$$

където C е константа и

$$\gamma / B(x, x) \geq m \|x\|^2, m = \text{const} > 0.$$

В такъв случай всеки функционал $f \in X^*$ може да се представи във вида

$$f(x) = B(x, y_f),$$

където елементът y_f е еднозначно определен.

Както читателят сигурно е забелязал, релациите $\alpha / - \gamma /$ показват, че формата $B(x, y)$ силно прилича на скаларното произведение. Ето защо резултатът е твърде естествен.

Д о к а з а т е л с т в о. Най-напред ще изследваме връзката между формата B и скаларното произведение. Да фиксираме $y \in X$ и да разгледаме линейния функционал

$$x \longrightarrow B(x, y).$$

Както показва $\alpha /$ той е ограничен. Следователно според теоремата на Рис имаме

$$/29/ \quad B(x, y) = (x, A(y)),$$

където елементът $A(y) \in X$ е еднозначно определен. Очевидните равенства

$$\begin{aligned} (x, A(\alpha y_1 + \beta y_2)) &= B(x, \alpha y_1 + \beta y_2) \\ &= \alpha B(x, y_1) + \beta B(x, y_2) = \alpha (x, A y_1) + \beta (x, A y_2) \\ &= (x, \alpha A y_1 + \beta A y_2) \end{aligned}$$

показват, че операторът

$$x \longrightarrow Ax,$$

изобразяващ X в X , е линеен.

/Както е общоприето, вместо $A(x)$ за краткост ще пишем Ax /. Не е трудно да се види, че той е ограничен и обратим. Наистина с помощта на $\alpha /$ и $/29/$ получаваме

$$\|Ax\|^2 = (Ax, Ax) = B(Ax, x) \leq C \|Ax\| \|x\|,$$

т.е.

$$/30/ \quad \|Ax\| \leq C \|x\|,$$

което показва, че A е ограничен. От друга страна, неравенството

$$(x, Ax) = B(x, x) \geq m \|x\|^2,$$

от което следва $m \|x\|^2 \leq \|x\| \|Ax\|,$

т.е.

$$/31/ \quad m \|x\| \leq \|Ax\|,$$

което показва, че A е обратим.

Ще установим, че A изобразява X върху цялото X . Движейки се към тази цел, най-напред ще установим, че образът на X , т.е. линейното пространство $A(X)$ е затворено. Нека y_0 е произволен елемент от $A(X)$ и нека редицата $\{Ax_n\}$ клони към y_0 . Пом $\{Ax_n\}$ е сходяща, тя е фундаментална и $/31/$ ни дава

$$m \|x_n - x_m\| \leq \|Ax_n - Ax_m\| \rightarrow 0, \text{ когато}$$

$n, m \rightarrow \infty$, т.е. и редицата $\{x_n\}$ се оказва сходяща. Да означим нейната граница с x_0 . Сега $/30/$ ни дава

$$\|Ax_n - Ax_0\| \leq C \|x_n - x_0\|,$$

т.е.

$$y_0 = \lim Ax_n = Ax_0 \in A(X).$$

Понеже y_0 беше произволен елемент от $A(X)$, заключаваме, че $A(X)$ е затворено.

Остава да докажем, че $A(X) = X$. Да допуснем противното - $A(X) \neq X$.

Тогав според лемата за ортогоналната проекция ще съществува и ненулев елемент $a \perp A(X)$, т.е. такъв, че $(a, Ax) = 0$ за всяко x и в частност $(a, Aa) = 0$. Сега обаче $/29/$ и $\gamma /$ ни дават

$$0 = (a, Aa) = B(a, a) \geq m,$$

т.е. $a = 0$, което противоречи на избора на a . С това равенството $X = A(X)$ е установено. Понеже A е обратим, и операторо-

рът A^{-1} е дефиниран и изобразява X еднозначно и обратимо върху цялото X .

Сега вече сме съвсем близо до целта. Нека $f \in X^*$. Теоремата на Рис ни дава

$$/32/ \quad f(x) = (x, a_f).$$

Да положим $y_f = A^{-1}a_f$. Тогава $Ay_f = a_f$ и от /29/ следва

$$f(x) = (x, a_f) = (x, Ay_f) = B(x, y_f),$$

което искаме да докажем. Елементът f е определен еднозначно, защото a_f има това свойство, а A^{-1} действа еднозначно-обратно.

Ще завършим нашия по необходимост кратък очерк върху Хилбертовите пространства с две полезни теореми, свързани със слабата сходимост. Допълнителен материал е даден в упражненията.

Т е о р е м а 3.8. Нека $\{x_\nu\}$, $\nu = 1, 2, 3, \dots$ е безкрайна редица от елементи на Хилбертовото пространство X , която е ограничена по норма, т.е. $\|x_\nu\| \leq A$, за $\nu = 1, 2, 3, \dots$. Тогава $\{x_\nu\}$ съдържа слабо сходяща подредица.

Д о к а з а т е л с т в о. Трябва да докажем, че съществуват елемент $x_0 \in X$ и подредица $\{x_{\nu_k}\}$ такива, че за всеки функционал $f \in X^*$ да имаме

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{\nu_k}) = f(x_0)$$

или според теоремата на Рис

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x_{\nu_k}, a) = (x_0, a), \quad \forall a \in X.$$

Д о к а з а т е л с т в о. Да означим с $\mathcal{H}$ затворената обвивка на всевъзможните крайни линейни комбинации на елементите от $\{x_\nu\}$. Понеже $\mathcal{H}$ е затворено подпространство на X , то е пълно, следователно може да се разглежда като отделно Хилбертово пространство със скаларното произведение наследено от X .

Използвайки Канторовия диагонален процес, да изберем такава подредица $\{x_{\nu_k}\}$, че всичките числови редици

$$(x_{\nu_k}, x_j), \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

където x_j е фиксиран елемент от $\{x_\nu\}$, да бъдат сходящи. Това е възможно, защото неравенството на Шварц ни дава

$$|(x_{\nu_k}, x_j)| \leq \|x_{\nu_k}\| \|x_j\| \leq A \|x_j\|,$$

т.е. всяка от тях е ограничена.

Ще докажем, че $\{x_{\nu_k}\}$ е слабо сходяща в $\mathcal{H}$. Най-напред ще установим, че за всяко $h \in \mathcal{H}$ числовата редица с общ член (x_{ν_k}, h) е сходяща. За тази цел да фиксираме $h \in \mathcal{H}$ и $\varepsilon > 0$ и да вземем такъв елемент $b = \sum \lambda_j x_j$ /сумата е крайна/, че да имаме $\|h - b\| < \frac{\varepsilon}{4A}$. Това може да се направи, защото според дефиницията на $\mathcal{H}$ линейните комбинации на елементите от $\{x_\nu\}$ са разположени навсякъде гъсто в $\mathcal{H}$. След като фиксираме b , да вземем толкова голямо $N(\varepsilon)$, че за $n, m > N(\varepsilon)$ да имаме

$$(x_{\nu_n} - x_{\nu_m}, b) < \frac{\varepsilon}{2}. \text{ Ясно е, че за такива индекси получаваме}$$

$$|(x_{\nu_n} - x_{\nu_m}, h)| \leq |(x_{\nu_n} - x_{\nu_m}, h - b)| + |(x_{\nu_n} - x_{\nu_m}, b)|$$

$$\|x_{\nu_n} - x_{\nu_m}\| \|h - b\| + \frac{\varepsilon}{2} < 2A \frac{\varepsilon}{4A} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

с което сходимостта на числовата редица (x_{ν_k}, h) е установена. Този резултат ни позволява да разглеждаме функционала

$$g(h) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} (x_{\nu_k}, h),$$

дефиниран за всяко $h \in \mathcal{H}$. Очевидните равенства $g(\lambda h) = \lambda g(h)$ и $g(h_1 + h_2) = g(h_1) + g(h_2)$ показват, че g е конюговано-линеен. Нещо повече, очевидното неравенство

$$|(x_{\nu_k}, h)| \leq \|x_{\nu_k}\| \|h\| \leq A \|h\| \text{ ни дава}$$

$$\|g(h)\| \leq A \|h\|, \quad h \in \mathcal{H},$$

което показва, че g е ограничен. Следователно $\bar{g} \in \mathcal{H}^*$ и според теоремата на Рис имаме

$$\bar{g}(h) = (h, a_g) = (\overline{a_g}, h), \quad a_g \in \mathcal{H}.$$

т.е.

$$g(h) = (a_g, h)$$

за всяко $h \in H$. По този начин установихме, че

$$(x_{v_k}, h) \rightarrow (a_g, h),$$

т.е. в H редицата x_{v_k} клони слабо към a_g . За да завършим доказателството, да вземем произволен елемент $y \in X$ и да го представим във вида

$$y = y_H + y_{H^\perp},$$

където естествено $y_H \in H$, $y_{H^\perp} \in H^\perp$. В такъв случай имаме

$$(x_{v_k}, y) = (x_{v_k}, y_H) + (x_{v_k}, y_{H^\perp}) = (x_{v_k}, y_H)$$

$$\rightarrow (a_g, y_H) = (a_g, y_H + y_{H^\perp}) = (a_g, y),$$

с което слабата сходимост на $\{x_{v_k}\}$ към a_g , а с нея и теоремата, е доказана.

Следващият резултат е полезно допълнение към теорема 3.8.

Т е о р е м а 3.9. /Теорема на Банах-Сакс/. Ако $\{x_j\}$ слабо клони към x_0 в Хилбертовото пространство X , съществува подредица $\{x_{j_k}\}$ такава, че

$$/33/ \quad \left\| \frac{x_{j_1} + x_{j_2} + \dots + x_{j_n}}{n} - x_0 \right\| \rightarrow 0,$$

т.е. подредица, средните аритметични на която клонят силно към x_0 .

Д о к а з а т е л с т в о . Да положим $u_j = x_j - x_0$, $j=1,2,3,\dots$ и да вземем $u_i = u_1$. Очевидно $u_j \xrightarrow{\text{слабо}} 0$ в X и в частност $(u_{j_1}, u_j) \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Ето защо можем да намерим толкова голям индекс j_1 , че да имаме $|(u_{j_1}, u_j)| < \frac{1}{2}$. По същите съображения и $(u_{j_1}, u_j) \rightarrow 0$, когато $j \rightarrow \infty$, следователно съществува индекс j_2 такъв, че

$$|(u_{j_1}, u_{j_2})| < \frac{1}{3}, \quad |(u_{j_2}, u_{j_3})| < \frac{1}{3}.$$

Продължавайки по този начин, индуктивно избираме подредица $\{u_{j_k}\}$ такава, че

$$|(u_{j_s}, u_{j_k})| \leq \frac{1}{k}, \quad \text{за } s = 1, 2, \dots, k-1 \quad \text{и}$$

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

/Ако u_{j_k} е дефинирано, за $u_{j_{k+1}}$ се получават краен брой условия, които се удовлетворяват както по-горе./

Избраната подредица е търсената. Ще покажем, че

$$/34/ \quad \left\| \frac{u_{j_1} + u_{j_2} + \dots + u_{j_n}}{n} \right\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

което очевидно е равносилно с /33/. За да установим /34/, достатъчно е да разкрием скобите и да вземем пред вид, че слабо сходящите подредици са ограничени - резултат, който ще бъде установен малко по-късно /вж. теорема 4.2/.

И така, нека $\|u_{j_k}\| \leq A = \text{const}$ за $k = 1, 2, \dots$. Имаме

$$/35/ \quad \left\| \sum_{k=1}^n u_{j_k} \right\|^2 = \left(\sum_{s=1}^n u_{j_s}, \sum_{k=1}^n u_{j_k} \right) = \sum_{k=1}^n \|u_{j_k}\|^2 + \sum_{\substack{k,s=1 \\ k \neq s}}^n (u_{j_s}, u_{j_k}).$$

Да подредим събираемите в последната сума в следната триъгълна таблица:

$$\begin{array}{ccccccc} (u_{j_1}, u_{j_2}), & (u_{j_1}, u_{j_3}), & (u_{j_1}, u_{j_4}), & (u_{j_1}, u_{j_5}), & \dots, & (u_{j_1}, u_{j_n}) \\ & (u_{j_2}, u_{j_3}), & (u_{j_2}, u_{j_4}), & (u_{j_2}, u_{j_5}), & \dots, & (u_{j_2}, u_{j_n}) \\ & & (u_{j_3}, u_{j_4}), & (u_{j_3}, u_{j_5}), & \dots, & (u_{j_3}, u_{j_n}) \\ & & & (u_{j_4}, u_{j_5}), & \dots, & (u_{j_4}, u_{j_n}) \\ & & & & \dots, & \dots \\ & & & & & (u_{j_{n-1}}, u_{j_n}) \end{array}$$

Като вземем пред вид, че в k -тия стълб на таблицата стоят k събираеми с модул ненадминаващ $\frac{1}{k+1}$, прилагайки неравенството на триъгълника или /35/, получаваме

$$\left\| \frac{\sum_{k=1}^n z_{jk}}{n} \right\|^2 \leq \frac{nA^2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k+1}}{n^2} \leq \frac{nA^2 + n-1}{n^2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

с което доказателството е завършено.

Примери. Пространствата $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ са Хилбертови. За всяка област $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ пространството $L^2(\Omega)$ е Хилбертово.

Първото Хилбертово пространство, въведено в науката от самия Хилберт, е било ℓ_2 - пространството на редиците от комплексни

числа $a = (a_1, a_2, \dots, a_n \dots)$ такива, че $\sum_1^\infty |a_n|^2 < \infty$.

В него скаларното произведение се дефинира чрез равенството

$$(x, y) = \sum_{j=1}^\infty x_j \overline{y_j},$$

където $x = (x_1, \dots, x_n \dots)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n \dots)$.

Упражнение 6

Навсякъде в това упражнение с X ще означаваме Хилбертово пространство.

1. Докажете, че скаларното произведение в X е непрекъсната функция на двата си аргумента, т.е. че от $\|x_n - x\| \rightarrow 0$, $\|y_m - y\| \rightarrow 0$ следва $(x_n, y_m) \rightarrow (x, y)$.

2. Нека N е подпространство на X . Докажете, че $(N^\perp)^\perp = N$.

3. Самостоятелно установете пълнотата на пространството ℓ_2 .

Едва в случай на неуспех, погледнете в някой учебник.

4. Нека N е подпространство на X и f е ограничен функцио-

нал в N . Според теоремата на Хан-Банах той може да се продължи до функционал от X^* със същата норма.

Докажете, че това продължение е единствено.

Упътване. Най-напред продължете f по непрекъснатост в $\overline{N}$. /Това е възможно, защото f е ограничен./ Понеже $\overline{N}$ е затворено, то е Хилбертово и теоремата на Рис ни дава

$$f(x) = (x, a_f), \quad x \in \overline{N},$$

където елементът $a_f \in \overline{N}$ е еднозначно определен. Нека F е едно от възможните продължения на f в X такова, че $\|F\|_X = \|f\|_N$.

Пак според теоремата на Рис имаме

$$F(x) = (x, b_F), \quad x \in X,$$

където b_F е фиксиран елемент от X . С помощта на равенствата

$$F(x) = f(x), \quad \text{за } x \in \overline{N} \text{ и}$$

$$\|a_f\| = \|f\| = \|F\| = \|b_F\|$$

установете, че $a_f = b_F$.

5. Казваме, че множеството $\{x_\alpha\} \subset X$, където $\alpha \in A$ и A е някакво множество от индекси, е Хилбертова база в X , ако то притежава следните свойства:

$$1. (x_\alpha, x_\beta) = \begin{cases} 0, & \text{ако } \alpha \neq \beta, \\ 1, & \text{ако } \alpha = \beta \end{cases} \quad \alpha, \beta \in A.$$

2. Затворената обвивка на множеството от всевъзможните крайни линейни комбинации $\sum a_\alpha x_\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{Q}$ съпада с X .

С помощта на лемата на Цорн докажете, че всяко ненулево Хилбертово пространство има Хилбертова база.

Упътване. В множеството $\mathcal{M}$ на всевъзможните системи, състоящи се от ортогонални и нормирани вектори, въведете частична наредба, като считате, че $S_1 \leq S_2$ тогава и само тогава, когато $S_1 \subset S_2$. След като установите съществуването на максимален елемент в $\mathcal{M}$, с помощта на лемата за ортогоналната проекция докажете, че той е търсената база.

6. Нека $\{x_\alpha\}$, $\alpha \in A$ е Хилбертова база в X . Докажете, че всеки елемент $x \in X$ може да се представи във вида

$$/36/ \quad x = \sum_{\alpha \in A} (x, x_\alpha) x_\alpha,$$

където само изброимо множество от скаларните произведения са различни от нула и равенството /36/ означава, че при произволна номерация на множеството от индексите, за които $(x, x_\alpha) \neq 0$ имаме

$$\|x - \sum_{j=1}^n (x, x_{\alpha_j}) x_{\alpha_j}\| \rightarrow 0, \text{ когато } j \rightarrow \infty.$$

У п ъ т в а н е. Разгледайте вектора $\sum_{\alpha \in \Omega} (x, x_\alpha) x_\alpha$, където $\Omega \subset A$ е крайно множество, и установете неравенството на Бесел

$$\sum_{\alpha \in \Omega} |(x, x_\alpha)|^2 \leq \|x\|^2,$$

което ще ви позволи да заключите, че само изброимо много от числата (x, x_α) са различни от нула. Всяко множество от реални числа, което има само една точка на съгъстяване, е изброимо. / После, използвайки критерия на Коши, докажете, че редът $\sum_{j=1}^{\infty} (x, x_{\alpha_j}) x_{\alpha_j}$ е сходящ в X и накрая, че неговата сума съвпада с елемента x .

7. Докажете, че ако две Хилбертови пространства притежават бази с еднаква мощност, между тях съществува линейна изометрия.

8. Нека N е затворено изпъкнало множество в X и нека $x \in N$. Докажете, че съществува единствен елемент $x_N \in N$ такъв, че

$$\|x - x_N\| = \inf_{y \in N} \|x - y\|.$$

У п ъ т в а н е. Проверете, че доказателството на лемата за ортогоналната проекция е приложимо. За да докажете единствеността на x_N допуснете, че има поне два такива елемента x'_N и x''_N и приложете правилото на паралелограма към векторите $x - x'_N$ и $x - x''_N$.

3.7. Факторпространства на Фреше

Тази кратка точка има чисто технически характер. В нея се доказва следната

Т е о р е м а 3.10. Факторпространство на локално изпъкнало пространство на Фреше по затворено линейно подпространство е локално изпъкнало пространство на Фреше.

Нека X е Хаусдорфово ЛИП и $N \subset X$ е линейно и затворено. Знаем, че топологията в X/N е отделима и има фундаментална система от околности на началото, която се състои от $k(U)$, $U \in \{U\}$, където

$$k: X \rightarrow X/N$$

е каноничното изображение, а $\{U\}$ е фундаментална система от абсолютно изпъкнали околности на началото в X .

Очевидните релации

$$\lambda k(x) + \mu k(y) = k(\lambda x + \mu y) \subset k(U), \quad |\lambda| + |\mu| \leq 1$$

показват, че $k(U)$ е също абсолютно изпъкнало. Следователно, ако X е метризуемо, то и X/N има това свойство. Преди да намерим връзката между функционалите на Минковски p_U и $q_{k(U)}$ на множествата U и $k(U)$ ще припомним, че p_U се дефинира чрез равенството

$$p_U(x) = \inf_{\lambda} \{\lambda \geq 0, x \in \lambda U\}$$

Следователно според тази дефиниция имаме

$$q_{k(U)}(\tilde{x}) = \inf_{\lambda} \{\lambda \geq 0, \tilde{x} \in \lambda k(U)\}, \quad \tilde{x} \in X/N.$$

Релацията $\tilde{x} \in \lambda k(U) = k(\lambda U)$ означава, че в $k^{-1}(\tilde{x})$ съществува елемент x , който се съдържа в λU . Такива елементи обаче може да има много. Да фиксираме един от тях и да означим с λ_x инфимума на λ при това фиксирано x . Получаваме

$$\lambda_x = \inf_{\lambda} \{\lambda \geq 0, x \in \lambda U\} = p_U(x).$$

От друга страна, очевидно имаме

$$/37/ \quad q_{k(U)}(\tilde{x}) = \inf_{x \in k^{-1}(\tilde{x})} \lambda_x = \inf_{x \in k^{-1}(U)} p_U(x),$$

равенство, което ни дава търсената връзка между p_U и $q_{k(U)}$.

Преди да се заемем с доказателството на теоремата ще направим още няколко забележки.

Нека X е метризуемо ЛИП и

$$/38/ \quad U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \dots$$

е изброима фундаментална система от абсолютно изпъкнали околности на началото. Нека

$$/39/ \quad k(U_1) \supset k(U_2) \supset k(U_3) \dots$$

е съответната ф.с. на началото в X/N . По-нататък нека p_v и q_v са функционалите на Минковски на U_v и $k(U_v)$. Според 3.1 топологията в $X(X/N)$ се съгласува с метриката

$$/40/ \quad p(x, y) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{2^v} \frac{p_v(\tilde{x} - \tilde{y})}{1 + p_v(\tilde{x} - \tilde{y})}$$

съответно с

$$/41/ \quad \tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{2^v} \frac{q_v(\tilde{x} - \tilde{y})}{1 + q_v(\tilde{x} - \tilde{y})}.$$

/Обърнете внимание, че от /38/ и /39/ следват неравенствата

$$/42/ \quad p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq \dots \leq p_n \leq p_{n+1} \dots$$

и

$$/43/ \quad q_1 \leq q_2 \leq q_3 \leq \dots \leq q_n \leq q_{n+1} \dots$$

Метриката /41/ обаче не е твърде удобна за нашите цели. Ще докажем, че метриката

$$/44/ \quad \sigma(\tilde{x}, \tilde{y}) = \inf_{\substack{x \in k^{-1}(\tilde{x}) \\ y \in k^{-1}(\tilde{y})}} p(x, y) = \inf_{x-y \in k^{-1}(\tilde{x}-\tilde{y})} p(x-y, 0),$$

която често е за предпочитане, е еквивалентна с /41/, т.е. де-

финира в X/N същата топология. За тази цел най-напред ще забележим, че

$$\frac{q_v(\tilde{x})}{1 + q_v(\tilde{x})} = \frac{\inf_{x \in k^{-1}(\tilde{x})} p_v(x)}{1 + \inf_{x \in k^{-1}(\tilde{x})} p_v(x)} \leq \inf_{x \in k^{-1}(\tilde{x})} \frac{p_v(x)}{1 + p_v(x)},$$

защото функцията $f(t) = \frac{t}{1+t}$, $t \in [0, +\infty)$ е монотонно растяща. От установеното неравенство веднага следва, че

$$\tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq \inf_{x-y \in k^{-1}(\tilde{x}-\tilde{y})} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{2^v} \frac{p_v(x-y)}{1 + p_v(x-y)} = \sigma(\tilde{x}, \tilde{y})$$

и следователно за всяко $\varepsilon > 0$ кълбото $\sigma(\tilde{x}, 0) < \varepsilon$ се съдържа в кълбото $\tilde{p}(\tilde{x}, 0) < \varepsilon$. За да установим желаната еквивалентност на двете метрики, остава да докажем, че на всяко $\varepsilon > 0$ отговаря $\delta(\varepsilon) > 0$ такова, че от $\tilde{p}(\tilde{x}, 0) < \delta(\varepsilon)$ да следва $\sigma(\tilde{x}, 0) < \varepsilon$. И така, нека $\varepsilon \in (0, 1)$ е произволно, но фиксирано. Нека $n_0 = n_0(\varepsilon)$ е толкова голямо, че да имаме

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Да вземем $\delta = \frac{1}{2^{n_0}} \frac{\varepsilon}{4}$. В такъв случай неравенството

$$\tilde{p}(\tilde{x}, 0) < \delta$$

ни дава

$$\frac{1}{2^{n_0}} \frac{\inf_{x \in k^{-1}(\tilde{x})} p_{n_0}(x)}{1 + \inf_{x \in k^{-1}(\tilde{x})} p_{n_0}(x)} \leq \tilde{p}(\tilde{x}, 0) < \delta = \frac{\varepsilon}{4 \cdot 2^{n_0}},$$

$$\text{т.е.} \quad \inf_{x \in k^{-1}(\tilde{x})} p_{n_0}(x) < \frac{\varepsilon}{2},$$

откъдето на свой ред следва оценката

$$\begin{aligned}\sigma(\tilde{x}, 0) &= \inf_{x \in k^{-1}(\tilde{x})} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{2^v} \frac{P_v(x)}{1+P_v(x)} \\ &\leq \inf_{x \in k^{-1}(\tilde{x})} \sum_{v=1}^{n_0} \frac{1}{2^v} \frac{P_v(x)}{1+P_v(x)} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \inf_{x \in k^{-1}(\tilde{x})} \left(\sum_{v=1}^{n_0} \frac{1}{2^v} \right) P_{n_0}(x) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,\end{aligned}$$

с което еквивалентността на метриките σ и ρ е установена.

Сега вече можем да докажем теорема 3.10.

Д о к а з а т е л с т в о. След казаното дотук е ясно, че теоремата ще бъде доказана, ако установим, че X/N е пълно /разбира се, при предположение, че X е такова/.

Да положим за краткост $\sigma(Z, 0) = |Z|$, $Z \in X/N$. Функционалът $Z \rightarrow |Z|$ се нарича квазинорма. Той удовлетворява неравенството на триъгълника и очевидно се анулира само за $Z = 0$, но не е хомогенен, т.е. не е норма.

Да докажем неравенството на триъгълника. Понеже σ е инвариантна метрика, имаме

$$\begin{aligned}|Z_1 + Z_2| &= \sigma(Z_1 + Z_2, 0) = \sigma(Z_1, -Z_2) \leq \sigma(Z_1, 0) + \sigma(0, -Z_2) \\ &= |Z_1| + |Z_2|.\end{aligned}$$

Нека сега $\{Z_n\}$ е фундаментална редица в X/N , т.е.

$$\sigma(Z_n, Z_m) = \sigma(Z_n - Z_m, 0) = |Z_n - Z_m| \rightarrow 0,$$

когато $n, m \rightarrow \infty$.

Да вземем $\varepsilon > 0$ и да го фиксираме. Нека $N(\varepsilon)$ е толкова голямо, че от $n, m > N(\varepsilon)$ да следва $|Z_n - Z_m| < \varepsilon$. В частност, за $n_1 > N(\frac{1}{2})$, $n_2 > N(\frac{1}{4})$ получаваме $|Z_{n_1} - Z_{n_2}| < \frac{1}{2}$. Из-

бирайки $n_3 > N(\frac{1}{2^3})$, намираме $|Z_{n_2} - Z_{n_3}| < \frac{1}{2^2}$, защото $n_3, n_2 > N(\frac{1}{4})$.

Продължавайки по този начин, индуктивно конструираме подредица $\{Z_{n_k}\}$ ($n_{k+1} > n_k$, $n_k > N(\frac{1}{2^k})$) такава, че

$$|Z_{n_k} - Z_{n_{k+1}}| < \frac{1}{2^k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$\begin{aligned}\text{Понеже } |Z_{n_k} - Z_{n_{k+1}}| &= \sigma(Z_{n_k} - Z_{n_{k+1}}, 0) \\ &= \inf_{\substack{x \in k^{-1}(Z_{n_k}) \\ y \in k^{-1}(Z_{n_{k+1}})}} \rho(x - y, 0)\end{aligned}$$

можем да изберем елементи $x_{n_k} \in k^{-1}(Z_{n_k})$ такива, че да имаме $\rho(x_{n_k} - x_{n_{k+1}}, 0) < \frac{1}{2^k}$. Сега не е трудно да се види, че

редицата $\{x_{n_k}\} \subset X$ е фундаментална, следователно — сходяща.

Наистина полагайки $|x| = \rho(x, 0)$, $x \in X$, получаваме

$$\begin{aligned}|x_{n_{k+p}} - x_{n_k}| &\leq |x_{n_k} - x_{n_{k+1}}| + |x_{n_{k+1}} - x_{n_{k+2}}| + \dots \\ &+ |x_{n_{k+p}} - x_{n_{k+p-1}}| \leq \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \dots + \frac{1}{2^{k+p-1}} < \frac{1}{2^{k-1}},\end{aligned}$$

с което сходимостта на $\{x_{n_k}\}$ е доказана, защото X е пълно. Не-

ка x_0 е нейната граница. Да положим $z_0 = k(x_0)$. Сега дефиницията на метриката σ ни дава

$$|Z_{n_k} - z_0| = \sigma(Z_{n_k} - z_0, 0) \leq \rho(x_{n_k} - x_0, 0) = |x_{n_k} - x_0|,$$

неравенство, което показва, че $\{Z_{n_k}\}$ е сходяща. Понеже Z_n е фундаментална и тя самата клони към z_0 . Това веднага следва от неравенството

$$|Z_n - z_0| \leq |Z_n - Z_{n_k}| + |Z_{n_k} - z_0|.$$

С това доказателството на теорема 3.10 е завършено.

С л е д с т в и е 1. Ако X е Банахово и $N \subset X$ е линейно и затворено, то и X/N е Банахово с норма

$$/45/ \quad \|z\| = \inf_{x \in k^{-1}(z)} \|x\|, \quad z \in X/N, \quad x \in X.$$

Наистина Банаховите пространства са пространства на Фреше с една единствена полунорма. Според разискванията, които направихме при доказателството на теоремата, полунормата /45/ дефинира топологията в X/N . Тя е норма, защото според теор. 28 X/N е отделимо пространство. Впрочем, ние съветваме читателя непосредствено да установи, че от $\|z\| = 0$ следва $z = 0$.

С л е д с т в и е 2. Ако X е Хилбертово пространство, а $N \subset X$ е линейно и затворено, то и X/N е Хилбертово със скалярно произведение

$$/46/ \quad (\tilde{x}, \tilde{y}) \stackrel{\text{def}}{=} (x_{N^\perp}, y_{N^\perp}),$$

където $x_{N^\perp} \in N^\perp$, $y_{N^\perp} \in N^\perp$ са компонентите на два произволни вектора $x \in k^{-1}(\tilde{x})$, $y \in k^{-1}(\tilde{y})$ в разлагането

$$X = N \oplus N^\perp.$$

Д о к а з а т е л с т в о. Ако u и v са еквивалентни вектори, то $u - v \in N$, т.е. $u_{N^\perp} = v_{N^\perp}$, което показва, че когато x описва множеството $k^{-1}(\tilde{x})$ величината $x_{N^\perp}$ е постоянна. Следователно дефиницията /46/ е смислена.

От следствие 1 знаем, че X/N е Банахово пространство с норма

$$\|\tilde{x}\| = \inf_{x \in k^{-1}(\tilde{x})} \|x\| = \inf_{y \in N} \|x_{N^\perp} + y\|,$$

където $x_{N^\perp}$ е компонентата от $N^\perp$ на който да е вектор от $k^{-1}(\tilde{x})$. Сега вече очевидно е равенството

$$\|x_{N^\perp} + y\|^2 = \|x_{N^\perp}\|^2 + \|y\|^2, \quad (y \in N),$$

което се получава с просто разкриване на скалярното произведение, ни дава

$$\inf_{y \in N} \|x_{N^\perp} + y\| = \inf_{y \in N} \sqrt{\|x_{N^\perp}\|^2 + \|y\|^2} = \|x_{N^\perp}\|,$$

т.е.

$$\|\tilde{x}\| = \|x_{N^\perp}\| = \sqrt{(x_{N^\perp}, x_{N^\perp})} = \sqrt{(\tilde{x}, \tilde{x})_{X/N}},$$

което показва, че нормата в X/N произхожда от скалярното произведение /46/. Тривиалната проверка, че /46/ е наистина скалярно произведение предоставяме на читателя.

У п р а ж н е н и е 7

Нека $X = \mathbb{R}^3$ и нека N е равнината $x_3 = 0$. Интерпретирайте $\mathbb{R}^3/N$ геометрично и пресметнете скалярното произведение, което се порождат от скалярното произведение в $\mathbb{R}^3$.

§ 4. Основни свойства на пространствата на Фреше

4.1. Теорема на Бер за категориите

Дефиниция 4.1. Нека X е топологично пространство и $A \subset X$ е негово подмножество. A се нарича **ни к ъ д е н е п л ъ т н о**, ако неговата затворена обвивка $\bar{A}$ не съдържа нито едно отворено множество /т.е. има празна вътрешност/. A се нарича **н а в с я к ъ д е г ъ с т о**, ако $\bar{A} = X$. Казваме, че едно множество $Y \subset X$ е от **п ъ р в а к а т е г о р и я**, когато може да се представи като изброима сума от никъде непълни множества. В противен случай Y се нарича множество от **в т о р а к а т е г о р и я**.

Следващата теорема играе основна роля в теорията на метричните пространства.

Теорема 4.1. /Теорема на Бер за категориите./ Нека (X, ρ) е пълно /не непременно линейно! метрично пространство. Тогава то е от втора категория.

Доказателство. Трябва да докажем, че X не може да се представи във вида

$$/1/ \quad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n,$$

където множествата $\overline{X_n} \subset X$ нямат вътрешни точки.

Да допуснем, че това е възможно.

Очевидните съотношения

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{X_n} \subset X$$

показват, че без ограничение на общността можем да предполагаем, че X_n са затворени. В такъв случай множествата $A_n = X \setminus X_n$ ще бъдат отворени.

Нека сега $S_0(x_0, \delta_0) = \{x : \rho(x, x_0) < \delta_0\}$ е отвореното кълбо с център x_0 и радиус δ_0 . Понеже X_1 е никъде неплътно, $S_0(x_0, \delta_0)$ не се съдържа в X_1 и следователно съществува точка $x_1 \in S_0(x_0, \delta_0) \cap (X \setminus X_1)$. Тъй като $A_1 = X \setminus X_1$ е отворено и $S_0(x_0, \delta_0) \cap A_1$ е отворено. Следователно можем да намерим кълбо $S_1(x_1, \delta_1)$, което се съдържа в $S_0(x_0, \delta_0) \cap A_1$. Намалявайки δ_1 , ако е необходимо, можем да си осигурим неравенството $\delta_1 \leq \frac{\delta_0}{2}$ и включването

$$S_1(x_1, \delta_1) \subset S_0(x_0, \delta_0) \cap A_1.$$

Понеже $S_1(x_1, \delta_1)$ е отворено, то не се съдържа в X_2 и ние можем да намерим точка x_2 ,

$$x_2 \in S_1(x_1, \delta_1) \cap (X \setminus X_2) = S_1(x_1, \delta_1) \cap A_2.$$

Тъй като последното множество е отворено, можем да намерим кълбо $S_2(x_2, \delta_2)$ такова, че

$$S_2(x_2, \delta_2) \subset S_1(x_1, \delta_1) \cap A_2 \text{ и } \delta_2 \leq \frac{\delta_1}{2}.$$

Продължавайки по този начин, индуктивно построяваме редица от отворени кълба $S_n(x_n, \delta_n)$, $\delta_n \leq \frac{\delta_{n-1}}{2}$ такова, че

$$S_n(x_n, \delta_n) \cap X_n = \emptyset \text{ и освен това } S_0(x_0, \delta_0) \supset S_1(x_1, \delta_1) \supset \dots \supset S_n(x_n, \delta_n) \supset \dots$$

Да разгледаме редицата $\{x_n\}$ от центровете на кълбата. Понеже за $m > n$ имаме $x_m \in S_n(x_n, \delta_n)$, т. е.

$\rho(x_n, x_m) < \delta_n \leq \frac{\delta_0}{2^n}$, $\{x_n\}$ се оказва редица на Коши. Тъй като X е пълно, тя клони към някаква точка ξ .

Като извършим граничния преход $m \rightarrow \infty$ при фиксирано n , от неравенството $\rho(x_n, x_m) < \delta_n$ получаваме $\rho(x_n, \xi) \leq \delta_n$, т. е. $\xi \in S_n(x_n, \delta_n)$ и следователно $\xi \in X_n$. Понеже n е произволно, заключаваме, че $\xi \in \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, което противоречи на /1/. С това теоремата на Бер е доказана.

Съществуват и други варианти на теоремата на Бер/[18], стр. 53/, обаче доказаният вариант се използва най-често.

Ще направим две ефектни приложения, които илюстрират силата на теоремата.

Т е о р е м а . Съществува непрекъсната функция $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, която не е диференцируема в нито една точка от дефиниционния си интервал.

Както е известно, този резултат, предизвикал на времето смаяване сред математическия свят, се дължи на Вайерштрас. Недиференцируемата функция, която самият той е построил, може да се намери в [10].

Доказателство. В $C[0, 2]$ да въведем метриката

$$\rho(f, g) = \max_{x \in [0, 2]} |f(x) - g(x)|$$

Да дефинираме множествата $C_m \subset C[0, 2]$ по следния начин: ще казваме, че една функция f от $C[0, 2]$ принадлежи на C_m , ако съществува поне едно число $t_0 \in [0, 1]$ такова, че да имаме

12/ $\Delta_f(t_0, h) = \left| \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} \right| \leq m$, за всяко $h \in (0, 1]$ m е естествено число/.

Веднага се вижда, че C_m е затворено. Наистина, нека $\{f_n\} \subset C_m$ е равномерно сходяща редица в $C[0, 2]$ и f е нейната граница. Нека $t_0 \in [0, 1]$ е точката, за която имаме $\Delta_{f_n}(t_0, h) \leq m$, за всяко $h \in (0, 1]$. Нека $\{t_k\}$ е сходяща подредица и нека $t_0 \in [0, 1]$ е нейната граница. Като извършим граничния преход $n_k \rightarrow \infty$ в неравенството

$$\left| \frac{f_{n_k}(t_0 + h) - f_{n_k}(t_0)}{h} \right| \leq m$$

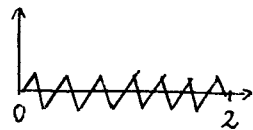
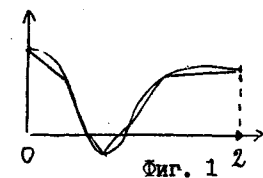
при фиксирано h , получаваме 12/, което показва, че $f \in C_m$, т.е. C_m е затворено.

Ще докажем, че C_m няма вътрешни точки. Нека $f_0 \in C_m$. Трябва да се убедим, че във всяка околност $\rho(f, f_0) < \varepsilon$ на f_0 , съществува функция $f \in C[0, 2]$, за която 12/ се нарушава за всяко $t_0 \in [0, 1]$. Най-напред, използвайки равномерната непрекъснатост на f_0 в $[0, 2]$, ще построим частично линейна функция f_1

13/, за която

$$\max_{[0, 2]} |f_0(x) - f_1(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Понеже f_1 е частично линейна диференциално частно $\Delta_{f_1}(t, h)$ приема краен брой стойности и следователно е ограничено, т.е. $\Delta_{f_1}(t_0, h) \leq M$ за всяко $t_0 \in [0, 1]$ и за всяко $h \in (0, 1]$. След това да вземем нова частично линейна функция f_2 , чиято графика е изобразена на фиг. 2. Трион с достатъчно остри зъби, такава, че $\max_{[0, 2]} |f_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ и за всяко



13/ $t_0 \in [0, 2]$ да имаме

$$\Delta_{f_2}(t_0, h) \geq 2m + M,$$

за всяко $h \in (0, 1]$, което е достатъчно малко.

При този избор на f_2 , за $f_3 = f_1 + f_2$ имаме

$$\max_{[0, 2]} |f_0(x) - f_3(x)| \leq \max_{[0, 2]} |f_0(x) - f_1(x)| + \max_{[0, 2]} |f_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

а от друга страна очевидното неравенство

$$\Delta_{f_3}(t_0, h) \geq \Delta_{f_1}(t_0, h) - \Delta_{f_2}(t_0, h) \geq 2m + M - M = 2m,$$

валидно за всяко $t_0 \in [0, 1]$ и достатъчно малко $h > 0$, показва, че $f_3 \notin C_m$ и следователно това множество няма вътрешни точки.

Понеже $C[0, 2]$ е пълно метрично пространство, теоремата на Бер ни дава

$$C[0, 2] \neq \bigcup_{m=1}^{\infty} C_m \subset C[0, 2].$$

Следователно съществува функция $f \in C[0, 2] \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} C_m$. Ще

покажем, че тя не е диференцируема в нито една точка от $[0, 1]$.

Нека $t_0 \in [0, 1]$ е произволно. Понеже $f \notin \bigcup_{m=1}^{\infty} C_m$, за всяко m съществува $h = h_m \in (0, 1]$ такава, че

$$13/ \Delta_f(t_0, h_m) = \left| \frac{f(t_0 + h_m) - f(t_0)}{h_m} \right| > m.$$

Да положим $A = \max_{[0, 2]} |f(x)|$. От неравенствата

$$m < \Delta_f(t_0, h_m) \leq \frac{2A}{h_m}$$

следва, че $0 < h_m < \frac{2A}{m}$, т.е. че $h_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$.

Това ни дава

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} \right| = +\infty,$$

което показва, че f не е диференцируема в точката t_0 . Понеже $t_0 \in [0, 1]$ беше произволно, теоремата е доказана.

Следващата теорема по-скоро любопитна, отколкото важна, демонстрира добре силата на "категорния" метод.

Т е о р е м а /Агмон и др./. Нека $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ е безкрайно гладка функция. Ако за всяко $x_0 \in [0, 1]$ съществува $n = n(x_0)$ такова, че $f^{(n)}(x_0) = 0$, то f е полином.

Д о к а з а т е л с т в о. Първото нещо, което ни идва на ум, е да въведем множествата

$$E_n = \{x : x \in [0, 1], f^{(n)}(x) = 0\},$$

които са очевидно затворени. Направените предположения ни дават

$$[0, 1] = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$$

и прилагайки теоремата на Бер, заключаваме, че поне едно от множествата E_n има вътрешни точки. Ако помислим малко, ще установим, че f съвпада с някакъв полином във всеки интервал на едно отворено множество $G = [0, 1] \setminus F$, където F е затворено множество без вътрешни точки – нещо като Канторовото съвършено множество. Директните опити да се установи, че F е празно, се натъкват на затруднения. За да се достигне до крайния резултат, е необходимо да се приложи още веднъж теоремата на Бер – този път към самото множество F , разглеждано като отделно метрично пространство.

Сега да реализираме тази програма. Оказва се, че първият от скицираните етапи е несъществен.

Д о к а з а т е л с т в о. Да разгледаме $[0, 1]$ като отделно метрично пространство с индуцираната от $\mathbb{R}$ топология. В това пространство освен обичайните отворени подинтервали на $[0, 1]$ и интервалите $[0, a]$, $(b, 1]$, ще бъдат отворени.

Да означим с G най-голямото отворено подмножество на $[0, 1]$, което притежава следното свойство: всяка точка от G има околност, в която f съвпада с някакъв полином – т.е. в тази околност всички производни от известно място нататък се анулират. А priori

не е ясно дали G не е празно. Във всеки случай можем да твърдим, че G е сума от изброимо много отворени интервали, във всеки от които f съвпада с някакъв полином.

Да разгледаме затвореното множество $F = [0, 1] \setminus G$. Лесно се вижда, че F няма изолирани точки. Наистина да допуснем, че $x_0 \in F$ е такава точка. Имаме три възможности:

$$1/ x_0 = 0; \quad 2/ 0 < x_0 < 1 \quad \text{и} \quad 3/ x_0 = 1.$$

Да започнем с първия случай. Щом $x_0 = 0$ е изолирана точка на F , съществува интервал от вида $J = (0, a)$, $0 < a < 1$, който съдържа в G . Следователно в J ще имаме $f(x) = p(x)$, където p е някакъв полином. Ако n_0 е степента на p , за $n > n_0$ ще имаме $f^{(n)}(x) = p^{(n)}(x) \equiv 0$ в J и следователно

$$f^{(n)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0, x \in J} f^{(n)}(x) = 0$$

за $n > n_0$. Излезе, че целият интервал $[0, a]$ се съдържа в G , което противоречи на предположението, че $x_0 = 0 \in F$. Нека сег $x_0 \in (0, 1)$. Понеже x_0 е изолирана точка на F , съществуват интервали (a, x_0) и (x_0, b) , които се съдържат в G . Следователно $f(x) \equiv p(x)$, за $x \in (a, x_0)$, $f(x) \equiv q(x)$ за $x \in (x_0, b)$, където p и q са полиноми. Нека $\nu-1$ е по-голямата от степените на p и q . Тогава имаме $f^{(\nu)}(x) \equiv 0$ в интервалите (a, x_0) и (x_0, b) . Понеже $f^{(\nu)}$ е непрекъсната функция, получаваме и $f^{(\nu)}(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ a < x < x_0}} f^{(\nu)}(x) = 0$, което показва, че целият интервал (a, b) се съдържа в G .

Случаят $x_0 = 1$ не се различава от вече разгледания случай $x_0 = 0$.

И така установихме, че F няма изолирани точки. Понеже F е затворено подмножество на $\mathbb{R}$, то е пълно метрично пространство спрямо наследената от $\mathbb{R}$ метрика $\rho(x, y) = |x - y|$, $x \in F$, $y \in F$. Въвеждайки затворените множества

$$E_n = \{x : x \in F, f^{(n)}(x) = 0\},$$

получаваме

$$F = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n,$$

откъдето с помощта на теоремата на Бер заключаваме, че поне едно от множествата $\{E_n\}$, да кажем E_{n_0} , има вътрешни точки. Нека x_0 е такава точка. Това означава, че съществува отворен интервал I , който съдържа x_0 и такъв, че $I \cap F \subset E_{n_0}$. Вече видяхме, че F , а следователно и $F \cap I$, няма изолирани точки. Релацията $F \cap I \subset E_{n_0}$ показва, че $f^{(n_0)}(x) \equiv 0$ в $F \cap I$. Нека $\xi \in F \cap I$ и нека $\{\xi_v\} \rightarrow \xi$, $\{\xi_v\} \subset F \cap I$, $\xi_v \neq \xi$ /точката ξ не е изолирана!/. Имаме

$$f^{(n_0+1)}(\xi) = \lim_{\xi_v \rightarrow \xi} \frac{f^{(n_0)}(\xi_v) - f^{(n_0)}(\xi)}{\xi_v - \xi} = 0.$$

Понеже $\xi \in F \cap I$ беше произволна, излезе, че $f^{(n_0+1)}(x) \equiv 0$ в $F \cap I$. По същия начин се убеждаваме, че $f^{(v)}(x) \equiv 0$ в $F \cap I$, за $v \geq n_0$. От друга страна, е ясно, че целият интервал не може да се съдържа в F , защото бихме имали $F \cap I = I$ и тогава равенството $f^{(v)}(x) \equiv 0$, $x \in I$, $v \geq n_0$, би ни позволило да заключим, че $I \subset G$, което е невъзможно, защото $G \cap F = \emptyset$. И така I не се съдържа изцяло в F . Ето защо съществува подинтервал (a, b) на I , който принадлежи на G , т.е. $f(x) \equiv p(x)$ в (a, b) . Очевидно точките a и b се съдържат в $I \cap F \subset E_{n_0}$. Представяйки p чрез формулата на Тейлър, с помощта на равенствата $f^{(v)}(a) = p^{(v)}(a) = 0$, $v \geq n_0$, се убеждаваме, че степента на p не надминава n_0 и следователно $f^{(v)}(x) = p^{(v)}(x) \equiv 0$ в (a, b) за $v \geq n_0$. Излезе, че във всеки интервал на $G \cap I$ имаме $f^{(v)}(x) \equiv 0$, $v \geq n_0$. Сега вече равенството

$$I = (F \cup G) \cap I = (F \cap I) \cup (G \cap I)$$

ни дава $f^{(v)}(x) \equiv 0$, в I за $v \geq n_0$, т.е. $I \subset G$, което е невъзможно, защото $x_0 \in F \cap I$.

Полученото противоречие доказва теоремата.

Следващата задача дава възможност на читателя да изпробва силите си, като установи самостоятелно един подобен, но малко по-прост резултат:

Нека $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ е функция, която при фиксирано x е полином на y и обратно – при фиксирано y е полином на x . Докажете, че f е полином на две променливи.

4.2. Принципи за равномерната ограниченост

Прототип на теоремата, за което ще стане дума, е следният резултат на Осгуд:

Т е о р е м а. Нека $f_j: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ са непрекъснати функции и нека за всяко $x \in [a, b]$ съществува константа $M(x)$ такава, че

$$|f_j(x)| \leq M(x), \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Тогаво съществува подинтервал $[c, d]$, в който редицата е равномерно ограничена.

Доказателството се получава лесно или чрез допускане на противното, или с помощта на теоремата на Бер.

Следващата теорема е една от кулминационните точки в целия функционален анализ.

Т е о р е м а на Банах-Щайнхауз. Принципи за равномерната ограниченост/

Нека X е пространство на Фреше и нека $\{p_j\}$, $j \in J$ е произволна фамилия от непрекъснати полунорми такава, че за всяко фиксирано $x \in X$ имаме

$$1/4 \quad p_j(x) \leq M(x), \quad j \in J.$$

Тогаво съществуват константа M и околност $\mathcal{U}$ на началото в X такива, че да имаме

$$1/5 \quad p_j(x) \leq M, \quad \text{за } x \in \mathcal{U}, \quad j \in J.$$

¹ J може да не бъде изброимо.

Доказателство. Да разгледаме множествата $X_n = \{x : x \in X, p_j(x) \leq n, \text{ за всяко } j \in J\}$. Понеже $\{p_j\}$ са непрекъснати, множествата X_n са затворени. От друга страна, $1/4$ ни дава

$$1/6/ \quad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \quad 1/n \text{ е естествено число.}$$

Следователно според теоремата на Бер поне едно от събираемите в $1/6$ - да го означим X_{n_0} , съдържа вътрешни точки. Нека x_0 е такава точка и нека $S(x_0, \varepsilon) = \{x : \rho(x, x_0) < \varepsilon\}$ се съдържа в X_{n_0} . Да вземем $U = S(0, \varepsilon)$. За произволно $x \in S(0, \varepsilon)$ получаваме

$$\begin{aligned} p_j(x) &= p_j(x + x_0 - x_0) \leq p_j(x + x_0) + p_j(x_0) \\ &\leq n_0 + M(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} M, \quad j \in J, \end{aligned}$$

понеже от $x \in U = S(0, \varepsilon)$ следва, че $x + x_0 \in S(x_0, \varepsilon)$.

С това теоремата е доказана. От нея произтичат редица важни следствия.

С л е д с т в и е 1. Нека X е ЛИ пространство на Треше, а Y е произволно ЛИП. Нека $\{T_\alpha\}, \alpha \in A$ е произволна фамилия от линейни и непрекъснати оператори, действащи от X в Y . Нека освен това за всяко фиксирано x множеството $\{T_\alpha(x), \alpha \in A\}$ е ограничено в Y . Тогава за всяка непрекъсната полунорма q в Y може да се намери непрекъсната полунорма ρ в X , за която да бъде в сила

$$1/7/ \quad q(T_\alpha(x)) \leq C \rho(x), \quad \forall \alpha \in A,$$

с подходяща константа C .

Доказателство. Да разгледаме фамилията $\rho_\alpha(x) \stackrel{\text{def}}{=} q(T_\alpha(x))$ от непрекъснати полунорми в X . Понеже при всяко фиксирано x множеството $\{\rho_\alpha(x), \alpha \in A\}$ е ограничено, според теорема 2.20 /стр.36/ имаме $q(T_\alpha(x)) \leq M(x), \alpha \in A$. Следователно теоремата на Банах-Шайнхауз е приложима и ние намираме околност U на началото $\downarrow$ и константа C такива, че да имаме

$$q(T_\alpha(x)) \leq C, \text{ за всяко } \alpha \in A \text{ и } x \in U.$$

Без ограничение на общността можем да предполагаме, че U е изпъкнала и уравновесена. Нека ρ е нейният функционал на Минковски. Понеже множеството $\{x : \rho(x) < 1\}$ се съдържа в U , прилагайки лема 2.2 стр.30, заключаваме, че

$$q(T_\alpha(x)) \leq C \rho(x), \quad \forall \alpha \in A, x \in X,$$

с което всичко е доказано.

Доказаното следствие съдържа два частни случая, които заслужават изрично отбелязване.

С л е д с т в и е 2. Нека X е Банахово, а Y — нормирано пространство и нека $T_\alpha : X \rightarrow Y$, където $\alpha \in A$ е фамилия от ограничени линейни оператори. Нека за всяко $x \in X$ имаме

$$\|T_\alpha(x)\|_Y \leq M(x), \quad \forall \alpha \in A.$$

Тогава

$$\|T_\alpha\| \leq C = \text{const}, \quad \forall \alpha \in A.$$

Доказателство. Да вземем $q(y) = \|y\|_Y$ и да приложим следствие 1. Получаваме

$$1/8/ \quad \|T_\alpha(x)\|_Y \leq C \|x\|_X, \quad C = \text{const}, \alpha \in A,$$

с което всичко е доказано.

С л е д с т в и е 3. Нека отново X е Банахово и нека $\{f_\alpha\}, f_\alpha : X \rightarrow \mathbb{Q}$ е произволна фамилия от линейни непрекъснати функционали. Нека освен това за всяко $x \in X$ имаме

$$|f_\alpha(x)| \leq M(x), \quad \forall \alpha \in A.$$

$$\text{Тогава } \|f_\alpha\| \leq C = \text{const}, \quad \forall \alpha \in A.$$

Доказателство. Достатъчно е да приложим следствие 2 към частния случай $Y = \mathbb{Q}$ /припомняме, че или $\mathbb{Q} = \mathbb{C}$, или $\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ в зависимост от това дали X е комплексно или реално векторно пространство/.

Това следствие незабавно води до още един важен резултат.

Т е о р е м а 4.2. Нека X е Банахово пространство и $\{x_v\} \subset X$ е слабо сходяща редица. Тогава тя е ограничена по норма.

Д о к а з а т е л с т в о. Нека $\tilde{x}_v$ е образът на x_v в X^{**} при естествената изометрия /вж. 3.3, стр.68/. За всеки елемент $x^* \in X^*$ имаме

$$|\tilde{x}_v(x^*)| = |x^*(x_v)| \leq M(x^*),$$

защото числовата редица $\{x^*(x_v)\}$ е сходяща по предположение. Следователно можем да приложим следствие 3 и да получим

$$\|\tilde{x}_v\|_{X^{**}} \leq C = \text{const},$$

с което доказателството завършва, защото според /45/ от 3.3 имаме

$$\|x_v\|_X = \|\tilde{x}_v\|_{X^{**}}.$$

Ще завършим обсъждането на принципа за равномерната ограниченост с една теорема, която често се използва.

Т е о р е м а 4.3. Нека X и Y са линейни метрични пространства над полето Q , поне едно от които е п ъ л н о. Нека

$$B : X \times Y \rightarrow Q$$

е билинейна форма, непрекъсната спрямо x при фиксирано y и обратно - непрекъсната спрямо y при всяко фиксирано x ¹. Тогава тя е непрекъсната.

Д о к а з а т е л с т в о. Тъждеството

$$B(x, y) - B(x_0, y_0) = B(x - x_0, y - y_0) + B(x - x_0, y_0) + B(x_0, y - y_0)$$

показва, че е достатъчно да установим непрекъснатостта на B в точката $(0, 0)$.

¹Такива изображения ще наричаме разделно непрекъснати.

Да вземем $\varepsilon > 0$ и да предположим за определеност, че X е п ъ л н о. Да разгледаме множествата

$$X_n = \{x : x \in X, |B(x, y)| \leq \varepsilon, \text{ за } \rho(y, 0) < \frac{1}{n}\},$$

където ρ е разстоянието в Y .

Очевидно е, че X_n е затворено, изпъкнало и уравновесено множество. Нещо повече, всеки елемент $x \in X$ се съдържа в някое X_n , защото $B(x, y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow 0$ и фиксирано x . Следователно

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n.$$

Прилагайки теоремата на Бер, заключаваме, че поне едно от множествата X_n - да кажем X_{n_0} съдържа вътрешни точки. Нека за определеност отвореното кълбо $S(x_0, \varepsilon) = \{x : \sigma(x, x_0) < \varepsilon\}$ / σ е метриката в X / се съдържа в X_{n_0} . Понеже всеки елемент от $S(0, \frac{\varepsilon}{2})$ може да се представи във вида

$$x = \frac{1}{2}(2x + x_0) + \frac{1}{2}(-x_0),$$

където $x_0 + 2x \in S(x_0, \varepsilon) \subset X_{n_0}$, $-x_0 \in X_{n_0}$,

от изпъкналостта на X_{n_0} заключаваме, че $S(0, \frac{\varepsilon}{2}) \subset X_{n_0}$.

Следователно за $x \in S(0, \frac{\varepsilon}{2})$, $y \in \{\rho(y, 0) < \frac{1}{n}\}$

получим

$$|B(x, y)| \leq \varepsilon.$$

с което непрекъснатостта на B в точката $(0, 0)$ е установена.

Изискването поне едно от пространствата X и Y да е п ъ л н о, е съществено /вж. зад.1 в упр.1/.

У п р а ж н е н и е 1

1. Нека X е линейното пространство, образувано от всички полиноми на реалната променлива t . Да въведем топология в X с помощта на нормата

$$\|f\| = \int_0^1 |f(t)| dt.$$

а/ Докажете, че полученото нормирано пространство не е пълно.

б/ Разгледайте билинейната форма $B : X \times X \rightarrow Q$, дефинирана чрез равенството

$$B(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t) dt$$

и докажете, че тя е непрекъсната спрямо всяка от променливите, когато другата е фиксирана, но не е непрекъсната.

У п ъ т в а н е к ъ м б/. Редицата $\{\sqrt{n} t^n\}$ може да бъде полезна.

2. Нека $\ell_q, q > 1$ е линейното пространство образувано от всевъзможните редици

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$$

от комплексни числа, за които редът

$$\sum_{v=1}^{\infty} |x_v|^q$$

е сходящ. Норма в ℓ_q се дефинира с равенството

$$\|x\| = \left(\sum_{v=1}^{\infty} |x_v|^q \right)^{1/q}$$

Докажете, че /9/ действително е норма и че ℓ_q е пълно спрямо тази норма.

3. Нека $\{a_v\}, v = 1, 2, 3, \dots$ е редица от комплексни числа такава, че за всяка редица $\{x_v\} \in \ell_2$ /вж. зад.2/ редът

$$\sum_{v=1}^{\infty} \bar{a}_v x_v$$

е сходящ. Докажете, че и $\{a_v\} \in \ell_2$.

У п ъ т в а н е. Приложете принципа за равномерната ограниченост към линейните функционали

$$f_n(x) = \sum_{v=1}^n \bar{a}_v x_v$$

от ℓ_2^* и си спомнете, че познавате всички ограничени функционали в ℓ_2 .

3. Нека X, Y и Z са линейни пространства над едно и също поле Q и нека

$$B : X \times Y \rightarrow Z$$

е билинейно и разделно непрекъснато изображение. Ако X и Y са метризуеми, като поне едно от тях е пълно, а Z е локално изпъкнало, то B е непрекъснато.

У п ъ т в а н е. Подражайте на доказателството на теорема 4.3.

4.3. Принцип за отвореното изображение

Под това название се подразбира едно от най-важните приложения на теоремата на Бер.

Основният резултат е следният:

Т е о р е м а 4.4. Нека X и Y са пространства на Фреше и нека $T : X \rightarrow Y$ е линеен и непрекъснат оператор такъв, че $T(X)$ е множество от втора категория в Y .

Тогава са в сила следните твърдения:

$$а/ T(X) = Y$$

б/ T трансформира отворените подмножества на X в отворени подмножества на Y , т.е. T е отворено изображение.

Преди да започнем доказателството ще въведем удобни означения.

Ако X е пространство на Фреше с метрика ρ , числото $|x| = \rho(x, 0)$ се нарича квазинорма на x , породена от ρ . Функцията $x \rightarrow |x|$ е непрекъсната и има следните свойства:

$$1/ |x + y| \leq |x| + |y|$$

$$2/ |x| = |-x|$$

$$3/ |x| = 0 \text{ тогава и само тогава, когато } x = 0.$$

Свойство 1/ беше доказано в 3.7, а 2/ и 3/ са очевидни.

Понеже X и Y са пространства на Фреше, при доказателството на теоремата можем да си служим с квазинормите $|\cdot|_X$ и $|\cdot|_Y$, дефинирани съответно в X и Y . При това ще пропускаме индексите, когато няма опасност от недоразумения.

Доказателството на теоремата за отвореното изображение се опира на следната

Л е м а. Нека U е околност на нулата в X . При условията на теоремата съществува такава околност V на нулата в Y , че

$$V \subset T U$$

Д о к а з а т е л с т в о. Нека $W \subset X$ е околност на началото, за която $W - W \subset U$. Такава околност съществува, защото изображението $(x_1, x_2) \rightarrow x_1 - x_2$ е непрекъснато. /Сравнете с разсъжденията на стр. 18./ Понеже W , като всяка околност на началото, е поглътящо множество, можем да твърдим, че

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nW,$$

откъдето следва равенството

$$T(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} n T(W)$$

Тъй като по предположение множеството $T(X)$ е от втора категория, поне едно от събираемите $n T(W)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ ще бъде от същата категория /веднага се вижда, че изброимата сума на множества от първа категория е множество от първа категория/. Нека за определеност $n T(W)$ е от втора категория. Понеже изображението $y \rightarrow n_0 y$ е хомеоморфизъм на Y върху Y и свойството едно множество да бъде от втора категория е инвариантно относно хомеоморфизмите, веднага заключаваме, че $T(W)$ е от втора категория, откъдето пак следва, че $T(W)$ съдържа някакво отворено множество $\Omega \neq \emptyset$ /иначе $T(W)$ би било никъде неплътнo в Y , т.е. от първа категория/. Използвайки очевидното включване

$$\bar{A} \subset \overline{A - A} + A, \text{ т.е. } \bar{A} - \bar{A} \subset \overline{A - A},$$

валидно за произволно подмножество A на Y , получаваме

$$\Omega - \Omega \subset \overline{T(W) - T(W)} \subset \overline{T(W) - T(W)} \subset \overline{T(U)}.$$

Накрая остава да отбележим, че $\Omega - \Omega$ непременно съдържа някаква околност V на началото. Наистина нека $y_0 \in \Omega$ и V е околност на началото в Y такава, че $y_0 + V \subset \Omega$. Такава околност е например $\Omega - y_0$. Очевидно имаме $\Omega - \Omega \supset y_0 + V - y_0 = V$, с което лемата е доказана.

Д о к а з а т е л с т в о н а т е о р е м а т а. Да вземем произволна редица $\{\varepsilon_v\}$, $v = 0, 1, 2, \dots$ от положителни числа такива, че $\varepsilon_0 > \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j$. Да въведем отворените кълба

$$X_\varepsilon = \{x : x \in X, |x| < \varepsilon\}, \quad Y_\eta = \{y : y \in Y, |y| < \eta\}$$

съответно в X и Y . Според доказаната лема съществува редица $\{\eta_v\}$, $\eta_v > 0$, за която

$$Y_{\eta_v} \subset \overline{T(X_{\varepsilon_v})}, \quad v = 0, 1, 2, \dots$$

Очевидно можем допълнително да предположим, че $\eta_v \rightarrow 0$ при $v \rightarrow \infty$.

Сега ще установим, че $Y_{\eta_0} \subset T(X_{\varepsilon_0})$. Да вземем $y \in Y_{\eta_0}$ и да го фиксираме. Понеже

$$Y_{\eta_0} \subset \overline{T(X_{\varepsilon_0})}, \text{ съществува } x_0 \in X_{\varepsilon_0}$$

такова, че $|y - T(x_0)| < \eta_1$. Това означава, че

$$y - T(x_0) \in Y_{\eta_1} \subset \overline{T(X_{\varepsilon_1})}.$$

Ето защо може да се намери елемент $x_1 \in X_{\varepsilon_1}$, за който

$$|y - T(x_0) - T(x_1)| < \eta_2,$$

което показва, че $y - T(x_0) - T(x_1) \in Y_{\eta_2} \subset \overline{T(X_{\varepsilon_2})}$ и т.н.

Продължавайки по този начин, конструираме безкрайна редица от елементи на X такава, че $x_n \in X_{\varepsilon_n}$

$$и \left| y - T\left(\sum_{k=0}^n x_k\right) \right| < \eta_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Веднага се вижда, че редицата $Z_k = \sum_0^k x_v$ е сходяща. Наистина имаме

$$|Z_{k+p} - Z_k| = \left| \sum_{k+1}^{k+p} x_k \right| \leq \sum_{k+1}^{k+p} |x_k| \leq \sum_{k+1}^{k+p} \varepsilon_k \rightarrow 0$$

при $k, p \rightarrow \infty$, с което сходимостта на $\{Z_k\}$ е доказана,

защото X е пълно. Да положим $x = \sum_0^\infty x_v$. Тривиалната оценка

$$\left| \sum_0^n x_v \right| \leq \sum_0^n |x_v| \leq \sum_0^\infty \varepsilon_v < 2\varepsilon_0$$

показва, че $x \in X_{2\varepsilon_0}$. От друга страна, понеже T е непрекъснат, от неравенството

$$\left| y - T\left(\sum_0^n x_v\right) \right| < \eta_{n+1},$$

с граничен преход получаваме

$$y = T(x).$$

Понеже $y \in Y_{\eta_0}$ беше произволно, установихме, че

$$Y_{\eta_0} \subset T(X_{2\varepsilon_0}) \subset T(X).$$

Излезе, че линейното подпространство $T(X)$ на Y съдържа околността Y_{η_0} на началото. Оттук веднага следва, че $T(X) = Y$.

Наистина, ако $y \in Y$ е фиксирано и $\lambda > 0$ е достатъчно малко, имаме

$$\lambda y \in Y_{\eta_0} \subset T(X),$$

защото Y_{η_0} е поглъщащо множество. Но от $\lambda y \in T(X)$ следва

$y \in T(X)$, защото $T(X)$ е линейно подпространство.

С това равенството $Y = T(X)$ е установено.

За да докажем, че T е отворено изображение, да вземем произволно отворено множество $H \subset X$ и един произволен елемент $x_0 \in H$. Да означим с U една околност на началото, за която $x_0 + U \subset H$. В такъв случай имаме

$$T(x_0) + T(U) \subset T(H).$$

Според лемата $T(U)$ е околност на точката $y = 0$ в Y , т.е. $T(x_0) + T(U)$ е околност на точката $T(x_0)$.

Следователно $T(H)$ заедно с произволна своя точка съдържа и нейна околност, което означава, че $T(H)$ е отворено.

Теорема на Банах. Нека T е линейно, непрекъснато и взаимно-еднозначно изображение на F -пространството X върху F -пространството Y . Тогава обратното изображение

$$T^{-1}: Y \rightarrow X$$

е също линейно и непрекъснато.

Доказателство. Проверката, че операторът T^{-1} е линейен е тривиална и ние я предоставяме на читателя. Основното твърдение в теоремата е, че T^{-1} е непрекъснат. За да установим този факт, трябва да докажем, че за всяко отворено множество $H \subset X$, $(T^{-1})^{-1}(H) = T(H)$ е отворено в Y /вж.1.2/. Но това вече е доказано в теоремата за отвореното изображение.

4.4. Теорема за затворената графика

Нека X и Y са пространства на Фреше над едно и също числово поле Q , с квазинорми $|\cdot|_X$ и $|\cdot|_Y$. Да разгледаме тяхното Декартово произведение $Z = X \times Y$. С помощта на стандартните дефиниции

$$\alpha z_1 + \beta z_2 = \alpha \langle x_1, y_1 \rangle + \beta \langle x_2, y_2 \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle \alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2 \rangle$$

$$|z|_Z = |\langle x, y \rangle|_Z \stackrel{\text{def}}{=} |x|_X + |y|_Y$$

превръщаме Z в ново пространство на Фреше.

Нека T е линеен оператор, дефиниран в линейното подпространство $D(T) \subset X$ и нека образът на $D(T)$ чрез T е линейното подпространство $R(T) \subset Y$. Линейното подпространство

$\Gamma(T) \stackrel{\text{def}}{=} \langle x, Tx \rangle, x \in D(T)$, на $X \times Y$ се нарича г р а ф и к а на оператора T . Веднага се вижда, че ако $D(T) = X$ и T е непрекъснат, неговата графика е затворено подпространство на $X \times Y$.

Наистина нека точката $z = \langle x, y \rangle \in X \times Y$ е граница на редицата $z_n = \langle x_n, Tx_n \rangle$ от точки, лежащи в $\Gamma(T)$, т.е. нека

$$|z_n - z|_Z = |x_n - x|_X + |Tx_n - y|_Y \rightarrow 0.$$

Понеже T е непрекъснат и дефиниран в точката x , от това условие веднага следва, че $y = Tx$, което показва, че $\langle x, y \rangle = \langle x, Tx \rangle$ лежи върху $\Gamma(T)$, т.е. $\Gamma(T)$ е затворено подмножество на $X \times Y$. Оказва се, че и обратното твърдение е вярно. Тази важна теорема дължим на Банах.

Теорема за затворената графика. Нека X и Y са пространства на Фреше и нека

$$T: X \rightarrow Y$$

е линеен оператор, чиято графика $\Gamma(T)$ е затворена. Тогава T е непрекъснат.

Доказателство. Понеже $\Gamma(T) = \langle x, Tx \rangle, x \in X$ е линейно и затворено подпространство на $X \times Y$, то самото е пространство на Фреше с индуцираната от $X \times Y$ метрика.

Да разгледаме двете проекции

$$p_1: \Gamma(T) \rightarrow X \quad \text{и} \quad p_2: \Gamma(T) \rightarrow Y,$$

дефинирани чрез равенствата

$$p_1 \langle x, Tx \rangle = x, \quad p_2 \langle x, Tx \rangle = Tx.$$

И двата оператора p_1 и p_2 са линейни и непрекъснати. Понеже тяхната линейност е съвсем очевидна, достатъчно е да установим не-

прекъснатостта им в точката $(0, 0)$. Трябва да докажем, че за всяко $\varepsilon > 0$ може да се намери $\delta > 0$ такава, че от $|x|_X + |Tx|_Y < \delta$ да следва $|p_1 \langle x, Tx \rangle| = |x|_X < \varepsilon$ (съответно $|p_2 \langle x, Tx \rangle|_Y = |Tx|_Y < \varepsilon$).

За тази цел обаче е достатъчно да вземем $\delta = \varepsilon$. За да завършим доказателството, достатъчно е да забележим, че операторът $p_1: \Gamma(T) \rightarrow X$ е обратим и следователно по вече доказаната теорема на Банах неговият обратен $p_1^{-1}: x \rightarrow \langle x, Tx \rangle$ е също непрекъснат.

Понеже очевидно $Tx = (p_2 \circ p_1^{-1})(x)$, теоремата е доказана.

Очевидно е, че тази теорема облекчава задачата за изследването на линейните оператори $T: X \rightarrow Y$.

Наистина, за да докажем, че T е непрекъснат, трябва да докажем, че от $x_n \rightarrow x$ следва $Tx_n \rightarrow Tx$. За да установим, че неговата графика е затворена, достатъчно е да се убедим, че от $x_n \rightarrow x$ и $Tx_n \rightarrow y$ следва $y = Tx$, което очевидно е по-проста задача.

Следващият елементарен пример показва, че за линейни оператори, дефинирани само в някакво подпространство $D(T) \subset X$, теоремата е невярна.

Нека $X = Y = C[0, 1]$ и нека $D(T) = C^1[0, 1] \subset X$. Да разгледаме линейния оператор $T: C^1[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, който действа по правилото

$$(Tx)(t) = x'(t),$$

т.е. операцията диференциране. Разглеждайки например редицата $x_n(t) = t^n$, веднага се убеждаваме, че T не е непрекъснат. Очевидно е обаче, че той е затворен. Наистина нека $x_n \xrightarrow{X} x$, $Tx_n \xrightarrow{Y} y$. Това означава, че двете редици $x_n(t)$ и $x'_n(t)$ клонят равномерно в $[0, 1]$ съответно към някакви непрекъснати функции $x(t)$ и $y(t)$. Както се знае от диференциалното смятане обаче, това е достатъчно, за да можем да заключим, че

$x(t) \in C^1[0, 1]$ и $x'(t) = y'(t)$, т.е. че $Tx = y$. С това покажем, че операторът $x \rightarrow Tx$ е затворен, без да бъде непрекъснат.

Естествено възниква въпросът кога даден оператор може да се продължи до затворен или, както се казва, кога допуска затворено разширение. По-точно ние се интересуваме кога може да се намери оператор S с по-широка дефиниционна област, чиято графика $\Gamma(S)$ съвпада със затворената обвивка $\overline{\Gamma(T)}$ на $\Gamma(T)$. Очевидно е, че $\overline{\Gamma(T)}$ не бива да съдържа точки от вида $\langle 0, y \rangle$, където $y \neq 0$. Това условие се оказва и достатъчно.

Т е о р е м а. Нека линейният оператор $T: D(T) \rightarrow Y$, $D(T) \subset X$, има следното свойство: щом $x_n \in D$, $x_n \xrightarrow{X} 0$, и $Tx_n \rightarrow y$, то $y = 0$. Тогава T допуска затворено разширение.

Д о к а з а т е л с т в о. Нека $\langle x, y \rangle \in \overline{\Gamma(T)}$ и $x_n \rightarrow x$, $x_n \in D(T)$, $T(x_n) \rightarrow y$. Естествено е да положим $Sx = y$. Остава да се убедим, че дефиницията е коректна. Нека $x'_n \xrightarrow{X} x$ е друга редица от елементи на $D(T)$ за която $\lim_{n \rightarrow \infty} Tx'_n = z$ съществува. Трябва да установим, че $z = y$.

Това обаче е очевидно, защото по условие от равенството $x'_n - x_n \rightarrow 0$ следва $T(x'_n - x_n) = Tx'_n - Tx_n \rightarrow 0$.

Тъй като за точките от $D(T)$ очевидно имаме $Sx = Tx$, S е разширение на T . Веднага се проверява, че графиката $\Gamma(S)$ е затворена. Нещо повече $\Gamma(S) = \overline{\Gamma(T)}$.

У п р а ж н е н и е 2

Нека $T: D(T) \rightarrow Y$ е линеен, непрекъснат и затворен оператор, $D(T) \subset X$, а X и Y са пространства на Фреше. Покажете, че $D(T)$ е затворено подпространство на X .

5. Строги индуктивни граници

5.1. В теорията на разпределенията, с която ще се занимаваме в следващата глава, ще имаме нужда от топология, спрямо която пространствата $C_0^\infty(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ от безкрайно гладки функции с компактен носител да бъдат пълни. Такава топология се получава най-естествено с помощта на една обща конструкция.

Нека

$$1/ \quad E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \dots \subset E_n \subset E_{n+1} \dots$$

е редица от ЛИП и нека за всяко естествено n топологията τ_n на E_n индуцира върху E_{n-1} изходната топология τ_{n-1} .

Да разгледаме векторното пространство

$$1/2 \quad E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

и да въведем в него локално изпъкнала топология, като дефинираме една фундаментална система от околности на началото по следния начин: едно уравновесено и изпъкнало множество $U \subset E$ ще причисляваме към ф.с. $\{U\}$ тогава и само тогава, когато всяко от множествата

$$U_n = U \cap E_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

е околност на началото в съответното E_n .

От тази дефиниция и от 1/2 веднага следва, че всяко $U \in \{U\}$ е поглъщащо. Понеже очевидно фамилията $\{U\}$ е затворена относно хомотетии и крайни сечения, по този начин в E наистина се дефинира локално изпъкнала топология, спрямо която линейните операции са непрекъснати /теорема 2.12, стр.25/.

Линейното пространство E , снабдено с току-що дефинираната топология τ , се нарича строг индуктивна граница на $\{E_n\}$ и се бележи

$$E = \varinjlim_{n \rightarrow \infty} E_n.$$

Веднага се вижда, че τ е най-силната локално изпъкнала топология в E , спрямо което вложенията

$$E_n \xrightarrow{i_n} E, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

са непрекъснати.

Следващата теорема описва едно от характерните свойства на индуктивните граници.

Теорема 5.1. Нека F е ЛИП и нека $E \xrightarrow{g} F$ е линейно изображение. Операторът g е непрекъснат тогава и само тогава, когато рестрикциите $g_n = g|_{E_n}$ $n = 1, 2, 3, \dots$ са непрекъснати.

Доказателство. Нека g е непрекъснатото изображение. Понеже очевидно $g_n = g \circ i_n$ и вложенията $i_n: E_n \rightarrow E$ е непрекъснати, то и g_n е непрекъснати. Обратно, нека всяко от изображенията g_n е непрекъснати и $V \subset F$ е абсолютно изпъкнала околност на началото. Трябва да установим, че абсолютно изпъкналото множество $g^{-1}(V)$ е околност на началото в E . Да разгледаме сеченията $g^{-1}(V) \cap E_n = i_n^{-1} \circ g^{-1}(V) = g_n^{-1}(V)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ Понеже g_n е непрекъснати, $g_n^{-1}(V)$ е околност на началото в E_n . Тъй като i_n е произволно, по самата дефиниция на индуктивната топология $g^{-1}(V)$ е околност на началото в E .

С това теоремата е доказана.

Теорема 5.2. Индуктивната топология τ индуцира върху E_n изходната топология.

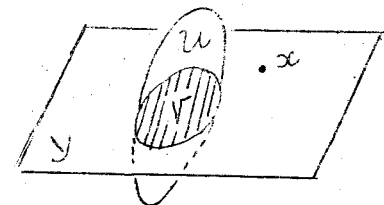
План на доказателството. Нека U_n е абсолютно изпъкнала околност на началото в E_n . Ще построим абсолютно изпъкнала околност U на началото в E , за която $E_n \cap U = U_n$. С това ще бъде доказано, че индуцираната топология $\tau|_{E_n}$ мажорира τ_n . Понеже според самата дефиниция на τ имаме $\tau|_{E_n} \subset \tau_n$, доказателството ще бъде завършено. Конструкцията на U е предмет на следната

Лема 5.1. Нека X е Хаусдорфово/ ЛИП и $Y \subset X$ е линейно подпространство на X , снабдено с индуцирана топология. В такъв случай за всяка абсолютно изпъкнала околност V на началото в Y съществува абсолютно изпъкнала околност U на началото в X такава, че

$$U \cap Y = V.$$

Освен това, ако x е точка от $X \setminus \bar{Y}$, U може да се избере по такъв начин, че $x \notin U$.

Доказателство. Понеже V е околност в индуцираната топология, можем да намерим околност U_1 на началото в X такава, че $U_1 \cap Y = V$. Да вземем абсолютно изпъкнала околност $U_2 \subset U_1$ на началото в X (X е ЛИП!) и да образуваме абсолютно изпъкналата обвивка $\Gamma(V \cup U_2)$ на V и U_2 . Имаме



Фиг. 3

$$U = \Gamma(V \cup U_2) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \alpha x + \beta y, |\alpha| + |\beta| \leq 1,$$

$x \in U_2, y \in V \}$. Очевидно $U \cap Y \supset V$. За да докажем обратното включване да вземем произволен елемент $z \in U \cap Y$. Имаме $z = \alpha x + \beta y \in Y$, $y \in V$, $x \in U_2$, $|\alpha| + |\beta| \leq 1$, откъдето при $\alpha \neq 0$ следва $x = \frac{z - \beta y}{\alpha} \in Y$, т.е. $x \in U_2 \cap Y \subset V$. Понеже V е абсолютно изпъкнато, получим, че $z \in V$. Ако $\alpha = 0$, няма нищо за доказване.

За да завършим доказателството на лемата, да вземем произволна точка x_0 от $X \setminus \bar{Y}$. След това да изберем околност G на началото в X , за която $(G + x_0) \cap Y = \emptyset$. Например $X \setminus \bar{Y} - x_0$ е такава околност/ и да впишем в нея абсолютно из-

пъкнала околност G_1 на същата точка. Накрая да положим

$$U_3 = U_2 \cap G_1$$

и да проведем същата конструкция с U_3 вместо с U_2 . Веднага се вижда, че $x_0 \in \Gamma(U_3 \cup V)$. Наистина, ако допуснем противното, получаваме

$$x_0 = \alpha x + \beta y, |\alpha| + |\beta| \leq 1, x \in U_3, y \in V,$$

$$\text{т.е. } x_0 - \alpha x = \beta y \quad \text{или} \quad (x_0 + U_3) \cap V \neq \emptyset,$$

което е невъзможно.

С това лемата е доказана.

Д о п љ н е н и е. Ако V е отворена в Y , U може да се избере отворена в X . Наистина, ако U_2 е абсолютно изпъкнала и отворена в X , множеството

$$U \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma(U_2 \cup V) = \bigcup_{|\alpha|+|\beta| \leq 1} (\alpha U_2 + \beta V)$$

е отворено в X . За да се убедим в това да вземем произволна точка $\alpha_0 x_0 + \beta_0 y_0 \in U$. Ако $\alpha_0 \neq 0$, всичко е ясно, защото множеството $\beta_0 y_0 + \alpha_0 U_2$ е отворено и се съдържа в U . В по-интересния случай $\alpha_0 = 0$ да фиксираме $\rho > 1$ толкова близо до 1, че да имаме $z_0 = \rho \beta_0 y_0 \in V$. Това е възможно, защото $\beta_0 y_0 \in V$ и V е отворено. Сега става ясно, че отвореното множество

$$\frac{1}{\rho} z_0 + \left(1 - \frac{1}{\rho}\right) U_2 = \beta_0 y_0 + \left(1 - \frac{1}{\rho}\right) U_2$$

се съдържа в U и доказателството е завършено.

Д о к а з а т е л с т в о на теорема 5.2. Нека $U_n \subset E_n$ е абсолютно изпъкнала околност на началото. С помощта на доказаната лема индуктивно построяваме абсолютно изпъкнали околности

$$U_{n+k} \subset E_{n+k}, k = 0, 1, 2, \dots$$

на началото в съответните пространства такива, че

$$U_n \subset U_{n+1} \subset U_{n+2} \subset \dots$$

и освен това

$$U_{n+k} \cap E_{n+k-1} = U_{n+k-1}, k = 1, 2, \dots$$

Остава да проверим, че

$$U \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{k=0}^{\infty} U_{n+k} \subset E$$

е околност, за която $U|_{E_n} = U_n$.

Най-напред да се убедим, че U е абсолютно изпъкнато множество. Да вземем произволна /крайна/ линейна комбинация

$$\sum \lambda_j x_j, \sum |\lambda_j| \leq 1, x_j \in U_j.$$

Нека N е най-големият индекс в тази сума. Тогава за всеки елемент x_j от сумата имаме $x_j \in U_j \subset U_N$ и понеже U_N е абсолютно изпъкнато, заключаваме, че $\sum \lambda_j x_j \in U_N \subset U$.

с което абсолютната изпъкналост на U е установена.

Сега ще докажем, че $U \cap E_v = U_v$, за $v \geq n$ и $U \cap E_m = U_n \cap E_m$ за $m \leq n$, откъдето ще следва, че U наистина е търсената околност на началото в E .

Най-напред индуктивно се убеждаваме, че

$$U_{n+k} \cap E_{s+n} = U_{n+s}, k \geq s.$$

Наистина за $k = s+1$ няма какво да се доказва. Да допуснем, че за някое $k > s+1$ твърдението е вярно. В такъв случай

$$\begin{aligned} U_{n+k+1} \cap E_{n+s} &= (U_{n+k+1} \cap E_{n+k}) \cap E_{n+s} \\ &= U_{n+k} \cap E_{n+s} = U_{n+s}. \end{aligned}$$

Сега вече доказателството завършва моментално. Имаме

$$\begin{aligned} U \cap E_{n+s} &= \bigcup_{k=0}^{\infty} (U_{n+k} \cap E_{n+s}) = \\ &= \bigcup_{k=0}^s (U_{n+k} \cap E_{n+s}) \cup \bigcup_{k=s+1}^{\infty} (U_{n+k} \cap E_{n+s}) \\ &= U_{n+s} \cup U_{n+s} = U_{n+s}. \end{aligned}$$

Накрая за $m \leq n$ получаваме

$$U \cap E_m = (U \cap E_n) \cap E_m = U_n \cap E_m$$

- множество, което е /абсолютно изпъкнала/ околност на началото в E_m , защото E_n индуцира в E_m изходната топология τ_m .

С това теорема 2 е доказана.

С л е д с т в и е. Индуктивната топология τ е отделима.

Д о к а з а т е л с т в о. Нека $x \neq 0$ е точка от E . Да вземем някое E_n , което съдържа x и да означим с U_n някаква абсолютно изпъкнала околност на началото в E_n , която не съдържа x . U_n е отделимо!/. Най-после да построим околност U на началото в E , за която $U \cap E_n = U_n$. Понеже очевидно $x \notin U$, доказателството е завършено.

В специалния и за нас най-важен случай, когато E_n е затворено в E_{n+1} за всяко n , са в сила значително по-силни твърдения.

Л е м а 5.2. Ако за всяко естествено n E_n е затворено подмножество на E_{n+1} , то E_n е затворено и в E .

Д о к а з а т е л с т в о. Най-напред ще отбележим, че E_n е затворено подмножество на всяко от пространствата E_{n+s} ,

$s = 1, 2, 3, \dots$. За образец ще установим това за $s = 2$. Понеже E_n е затворено в E_{n+1} , чиято топология съвпада с индуцираната от E_{n+2} , имаме

$$/3/ \quad E_n = F \cap E_{n+1},$$

където F е затворено в E_{n+2} . Понеже и самото E_{n+1} е затворено в E_{n+2} , /3/ показва, че и E_n има същото свойство. Общият случай се третира индуктивно.

Нека сега n_0 е произволно. Трябва да установим, че $E \setminus E_{n_0}$ е отворено. Ако за произволна точка $x_0 \in E \setminus E_{n_0}$ успеем да построим околност $x_0 + U \subset E \setminus E_{n_0}$, лемата ще бъде доказана.

Нека E_{n_1} , $n_1 > n_0$, е пространството с най-малък номер, което съдържа x_0 . Нека V_{n_1} е околност на x_0 в E_{n_1} такава, че $V_{n_1} \subset E_{n_1} \setminus E_{n_0}$ /можем да вземем например $V_{n_1} = E_{n_1} \setminus E_{n_0}$ /. След

това да означим с U_{n_1} абсолютно изпъкнала околност на началото в E_{n_1} , за която $x_0 + U_{n_1} \subset V_{n_1}$ и, както в доказателството на теорема 5.2, да построим абсолютно изпъкнала околност U на началото в E такава, че $U|_{E_{n_1}} = U_{n_1}$. Сега вече е ясно, че имаме

$$(x_0 + U) \cap E_{n_0} = (x_0 + U) \cap E_{n_1} \cap E_{n_0} = (x_0 + U_{n_1}) \cap E_{n_0} = \emptyset,$$

т.е.

$$x_0 + U \subset E \setminus E_{n_0}$$

и лемата е доказана.

При условие, че всяко E_n е затворено в E ограничените множества в E допускат с осем просто описание.

Т е о р е м а 5.3. Нека $E = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n$ и всяко E_n е за-

творено в E_{n+1} . В такъв случай едно множество $B \subset E$ е ограничено тогава и само тогава, когато съществува E_{n_0} , което съдържа B и B е ограничено в E_{n_0} .

Д о к а з а т е л с т в о. Да допуснем, че B е ограничено, но не се съдържа в нито едно E_n . Понеже $B \not\subset E_1$, съществува $x_1 \in B$, $x_1 \notin E_1$. Нека E_{n_1} е пространството с най-малък номер, което съдържа x_1 . Понеже $B \not\subset E_{n_1}$, съществува елемент $x_2 \in B$, $x_2 \notin E_{n_1}$. Нека E_{n_2} е първото от пространствата $\{E_n\}$, което съдържа x_2 и т.н. Така конструираме редица от елементи $\{x_\nu\} \subset B$ и редица от подпространства $\{E_{n_\nu}\}$, такива, че

$$/4/ \quad x_\nu \in E_{n_\nu} \setminus E_{n_{\nu-1}}, \quad \nu = 1, 2, \dots$$

Нека U_1 е абсолютно изпъкнала околност на началото в E_{n_1} , която не съдържа x_1 /очевидно $x_1 \neq 0$ /. Понеже E_{n_1} е затворено в E_{n_2} , с помощта на лема 5.1 можем да построим абсолютно изпъкнала околност U_2 на началото в E_{n_2} , която не съдържа $\frac{x_2}{2}$ и за която имаме

$$U_k \cap E_{n_1} = U_1.$$

Разсъждавайки индуктивно по същия начин, построяваме редица от абсолютно изпъкнали околности $U_k \subset E_{n_k}$ на началото в съответното пространство, която притежава следните свойства:

$$a/ \frac{x_k}{k} \in U_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

$$b/ U_k \cap E_{n_{k-1}} = U_{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots.$$

Сега вече сме близо до целта. Понеже B е ограничено множество в E , то се поглъща от всяка околност на началото. Следователно съществува $\lambda > 0$ такова, че да имаме

$$\lambda B \subset U = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$$

(U очевидно е абсолютно изпъкнала околност на началото в E . /Сравнете с доказателството на теорема 5.2.) В частност

$$\lambda x_k \in \lambda B \cap E_{n_k} \subset U_k, \text{ откъдето за } k > \frac{1}{\lambda} \text{ получаваме}$$

$$\frac{x_k}{k} = \frac{1}{k\lambda} (\lambda x_k) \in U_k,$$

защото $0 < \frac{1}{k\lambda} < 1$, а U_k е абсолютно изпъкнало. Стигнахме до противоречие с а/, което доказва теоремата.

Следващото твърдение следва веднага от тази теорема, но поради своята важност, заслужава изрично отбелязване.

Т е о р е м а 5.4. При предположенията на теорема 5.3 една редица $\{x_v\} \subset E$ е сходяща тогава и само тогава, когато се съдържа в някое от пространствата $\{E_m\}$ и е сходяща в това пространство.

Д о к а з а т е л с т в о. Точките на всяка сходяща редица образуват ограничено множество /пример 1, стр. 24/ и теорема 5.3 е приложима.

Т е о р е м а 5.5. Нека $E = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n$, като всяко E_n е пространство на Фреше. Тогава E е секвенциално пълно.

Д о к а з а т е л с т в о. Понеже по предположение топологията в E_n съвпада с топологията, индуцирана от E_{n+1} , то е затворено подпространство на E_{n+1} , защото е пълно. По предположение E_n е пространство на Фреше. /Следователно предположенията на теорема 5.3 са на лице.

Нека сега $\{x_v\} \subset E$ е редица на Коши. Ще докажем, че съществува такова n_0 , че $\{x_v\} \subset E_{n_0}$.

Според теорема 5.3 това ще бъде установено, ако успеем да докажем, че $\{x_v\}$ е ограничена.

Нека сега $U \subset E$ е произволна околност на началото и нека $V \subset U$ е уравновесена околност на същата точка такава, че $V - V \subset U$. Понеже $\{x_v\}$ е редица на Коши, съществува $N = N(V)$, за което от $n, m > N$ следва $x_n - x_m \in V^1$. Да вземем $\lambda \in (0, 1)$ толкова малко, че за $n = 1, 2, \dots, N, N+1$ да имаме $\lambda x_n \subset V$. Такова λ съществува, защото V е поглъщащо множество, а елементите, за които става дума, са краен брой. При този избор на λ за всяко $m > N+1$ получаваме

$$\begin{aligned} \lambda x_m &= \lambda (x_m - x_{N+1}) + \lambda x_{N+1} \subset \lambda V + \lambda V \\ &\subset V + V \subset U, \end{aligned}$$

което заедно с релацията $\lambda x_m \in V$, $m = 1, 2, \dots, N+1$, която си осигурихме с избора на λ , показва, че редицата $\{x_v\}$ е ограничена и следователно /теорема 5.3/ се съдържа в някое от пространствата $\{E_m\}$ - да кажем в E_{n_0} . Понеже топологията на E индуцира в E_{n_0} оригиналната топология τ_{n_0} /теорема 5.2/, $\{x_v\}$ е редица на Коши и в E_{n_0} , т.е. клони към някакъв елемент $x_0 \in E_{n_0}$, защото E_{n_0} е пълно по предположение. Пак според теорема 5.2 $\{x_v\} \rightarrow x_0$ и в E .

С това теоремата е доказана.

З а б е л е ж к а 1. В сила е и по-обща теорема - E е не само секвенциално пълно, но и пълно. За дефиницията на

¹Точно такъв е смисълът на думите " $\{x_v\}$ е редица на Коши".

понятието пълнота в общия случай и за доказателство на теоремата вж. например [3] или [4].

З а б е л е ж к а 2. Често за пространствата, които са строги индуктивни граници на пространства на Фреше, се казва, че са от класата LF .

Ще завършим обсъждането на свойствата на строгите индуктивни граници с една теорема, която показва, че пространствата с индуктивни топологии не се вменват в рамките на пространствата на Фреше.

Т е о р е м а 5.6. Нека отново $E = \varinjlim E_n$, като E_n е истинско затворено подпространство на E_{n+1} за всяко n . Тогава E не е метризуемо.

Д о к а з а т е л с т в о. Да допуснем противното. В такъв случай E притежава изброима фундаментална система от околности на началото. Нека

$$/5/ \quad U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \dots \supset U_n \supset U_{n+1} \dots$$

е такава система, която се състои от абсолютно изпитнати множества. Нека за всяко n да изберем по една точка $x_n \in U_n \setminus E_n$. Такива точки съществуват, защото $E_n \neq E$ и следователно $U_n \not\subset E_n$. От една страна, редицата $\{x_n\}$ не се съдържа в нито едно E_n и според теорема 5.3 не е ограничена. От друга страна обаче, каквато и да бъде околността V на началото в E , съществува околност U_{n_0} такава, че $U_{n_0} \subset V$. Системата /5/ е фундаментална. Понее самата конструкция на $\{x_n\}$ ни дава включванията $x_n \in U_n \subset U_{n_0} \subset V$, за $n \geq n_0$, само краен брой членове от $\{x_n\}$ остават извън V , т.е. редицата се оказва ограничена. Полученото противоречие доказва теоремата.

С л е д с т в и е. Нека $E = \varinjlim E_n$, където E_n са пространства на Фреше. Тогава E е метризуемо само, когато за $n > n_0$ имаме

$$E_n = E_{n+1} = E_{n+2} = \dots = E.$$

Цялата следваща точка е посветена на най-важния за нас пример на пространство с индуктивна топология.

У п р а ж н е н и е 1

1. $E = \varinjlim_{n \rightarrow \infty} E_n$, докажете, че за всяка подредица $\{E_{n_k}\}$

строгата индуктивна граница $\varinjlim_{n \rightarrow \infty} E_{n_k}$ съществува и съвпада с E .

2. Ако $\{E_n\}$ и $E = \varinjlim_{n \rightarrow \infty} E_n$ са пространства на Фреше, покажете с теоремата на Бер, че пространствата $\{E_n\}$ съвпадат от известно място нататък. Естествено този резултат е по-слаб от твърдението в теорема 5.6 /защо?/, но в замяна на това се получава ментално.

5.2. Дефиниция на пространствата

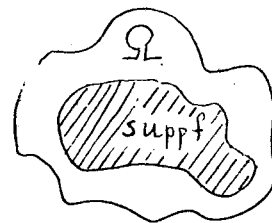
$$D(\Omega), D'(\Omega) \text{ и } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

Д е ф и н и ц и я 5.1. Нека Ω е област в $\mathbb{R}^n$. Линейното пространство на безкрайно гладките функции $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, които се анулират тъждествено около границата на Ω , се означава с $C_0^\infty(\Omega)$.

Д е ф и н и ц и я 5.2. Ако f е непрекъсната функция в Ω , затворената обвивка на множеството от точките, в които f е различно от нула, се нарича н о с и т е л на f и се означава чрез $\text{supp } f$.

Сега можем да кажем, че всяка функция от $C_0^\infty(\Omega)$ има носител, който е компактно подмножество на Ω , т.е. ограничено и затворено подмножество на $\mathbb{R}^n$, лежащо в Ω /фиг. 4/.

Различните елементи на $C_0^\infty(\Omega)$ могат да имат различни носители. Ако



Фиг. 4

се опитаме да въведем топология в $C_0^\infty(\Omega)$ чрез полунормите

$$P_{\Omega, m}(f) = \sup_{\substack{x \in \Omega \\ |\alpha| \leq m}} |\partial^\alpha f|$$

(за означенията вж. стр. 57) ще се натъкнем на неприятния факт, че не се получава пълно пространство /упр.2, зад.7, стр.62/. Оказва се, че до подходяща за теорията на разпределенията топология се стига, като разглеждаме $C_0^\infty(\Omega)$ като строга индуктивна граница на пространствата $C_0^\infty(K_j)$, където $\{K_j\}$ е редица от компакти, които "изчерпват" Ω .

И така, нека

$$/6/ \quad K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \dots \subset K_n \subset K_{n+1} \dots, \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega$$

е редица от компактни множества такива, че K_n се съдържа във вътрешността на K_{n+1} , $n = 1, 2, \dots$. Именно такива редици нарекохме изчерпващи. Не е трудно да се установи, че изчерпващи редици действително съществуват /стр.55/. Да означим с $C_0^\infty(K_n)$ подмножеството на $C_0^\infty(\Omega)$, състоящо се от функции с носители в K_n и чрез полунормите

$$/7/ \quad P_{K_n, m}(f) = \max_{\substack{x \in K_n \\ |\alpha| \leq m}} |\partial^\alpha f(x)|, \quad f \in C_0^\infty(K_n),$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

да въведем в K_n локално изпъкнала топология. Лесно се съобразява, че по този начин $C_0^\infty(K_n)$ се превръща в пространство на Фреше /т.е. пълно метризуемо локално изпъкнало пространство/. Наистина представяйки полунормите /7/ във вида

$$/7/ \quad P_{K_n, m}(f) = \sup_{\substack{x \in \Omega \\ |\alpha| \leq m}} |\partial^\alpha f(x)|, \quad f \in C_0^\infty(K_n),$$

веднага се убеждаваме, че $C_0^\infty(K_n)$ е затворено подпространство на $C_0^\infty(\Omega)$, за което установихме /стр.58-59/, че

е пространство на Фреше. Следователно и самото $C_0^\infty(K_n)$ е такова. Непосредствено се проверява, че $C_0^\infty(K_n)$ е затворено подмножество в $C_0^\infty(K_{n+1})$ и че последното индуцира върху $C_0^\infty(K_n)$ изходната топология. Всичко това, заедно с очевидното равенство

$$C_0^\infty(\Omega) = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_0^\infty(K_n)$$

показва, че са на лице необходимите предпоставки, за да можем да разглеждаме $C_0^\infty(\Omega)$ като строга индуктивна граница на $\{C_0^\infty(K_n)\}$.

Д е ф и н и ц и я 5.3. Строгата индуктивна граница

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_0^\infty(K_n)$$

ще означаваме с $D(\Omega)$.

Строгата индуктивна топология в $D(\Omega)$ се нарича още естествена топология в $C_0^\infty(\Omega)$.

Веднага се вижда, че топологията в $D(\Omega)$ не зависи от избора на изчерпващата редица $\{K_n\}$ /зад.1 от упр. 1, стр.137/.

Д е ф и н и ц и я 5.4. Линейните непрекъснати функционали

$$f : D(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$$

се наричат разпределения. Линейното пространство, образувано от тях, традиционно се означава с $D'(\Omega)$.

Тук е мястото за още една важна дефиниция.

Д е ф и н и ц и я 5.5. Линейните непрекъснати функционали

$$f : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}^1$$

се наричат разпределения с умерен ръст. Линейното пространство, образувано от тях, се означава с $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (или по-кратко с $\mathcal{S}'$).

Теорията на разпределенията заема централно място в тази книга. Най-важните за нас пространства от разпределения ще бъдат $D'(\Omega)$ и $\mathcal{S}'$.

Дефиницията на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ е дадена на стр. 59.

Ще завършим нашите предварителни бележки върху пространствата $D'(\Omega)$ и $\mathcal{Y}'$ с една важна теорема за секвенциална пълнота.

Т е о р е м а 5.7. Нека $\{u_\nu\}$, $\nu = 1, 2, 3, \dots$ е редица от елементи на $D'(\Omega) (\mathcal{Y}')$, която има следното свойство: Какъвто и да бъде елементът $\varphi \in D(\Omega) (\varphi \in \mathcal{Y})$ числовата редица $\{u_\nu(\varphi)\}$ е сходяща. В такъв случай съществува единствено разпределение $u \in D'(\Omega) (u \in \mathcal{Y}')$ такова, че

$$u_\nu(\varphi) \longrightarrow u(\varphi)$$

за всяко $\varphi \in D(\Omega) (\varphi \in \mathcal{Y})$.

Д о к а з а т е л с т в о. Нека най-напред разгледаме въпроса за разпределения от $D'(\Omega)$. Понеже за всяко $\varphi \in D(\Omega)$ редицата $\{u_\nu(\varphi)\}$ е сходяща, можем да дефинираме функционала

$$u(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\nu \rightarrow \infty} u_\nu(\varphi),$$

който очевидно е линеен. Остава да докажем, че u е непрекъснат в $D(\Omega)$. Според теорема 5.1 достатъчно е да установим, че всяка от рестрикциите

$$u|_{C_0^\infty(K_j)}, \quad j = 1, 2, 3, \dots,$$

където $\{K_j\}$ е една изчерпваща Ω редица от компакти, е непрекъсната.

И така, да фиксираме един компакт K_j . Понеже рестрикциите на $\{u_\nu\}$ в $C_0^\infty(K_j)$ /което е пространство на Фреше/ са непрекъснати и за всяко фиксирано $\varphi \in C_0^\infty(K_j)$ числовата редица е сходяща и следователно ограничена, теоремата на Банах-Щайнхауз ни дава /следствие 1, стр.114/

$$/8/ \quad |u_\nu(\varphi)| \leq C p(\varphi), \quad \nu = 1, 2, 3, \dots,$$

където p е непрекъснатата полунорма в $C_0^\infty(K_j)$. Извършвайки граничния преход $\nu \longrightarrow \infty$ в /8/, получаваме

$$/9/ \quad |u(\varphi)| \leq C p(\varphi),$$

което показва, че функционалът u е непрекъснат в $C_0^\infty(K_j)$ /теорема 2.19, стр.34/.

Случаят, когато $\{u_\nu\} \subset \mathcal{Y}'$ е аналогичен, но по-прост и ние го предоставяме на читателя.

У п р а ж н е н и е 2

1. Нека Ω е област в $\mathbb{R}^n$ и k е естествено число. Да означим с $C_0^k(\Omega)$ линейното пространство, образувано от онези елементи на $C^k(\Omega)$, които имат компактен носител. Покажете, че ако въведем топология в $C_0^k(\Omega)$ с полунормата

$$/10/ \quad p_k(\varphi) = \sup_{\substack{x \in \Omega \\ |\alpha| \leq k}} |\partial^\alpha \varphi(x)|,$$

не се получава пълно пространство. За простота разгледайте на пример случая, когато Ω е единичното кълбо в $\mathbb{R}^n$.

Естествената топология в $C_0^k(\Omega)$ се получава като разгледаме това пространство като строга индуктивна граница на $\{C_0^k(K_j)\}$, където $\{K_j\}$ образуват изчерпваща Ω редица от компакти, а в $C_0^k(K_j)$ въведем топология с нормата /10/.

2. Нека $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ е произволен мултииндекс. Докажете, че диференциалните оператори

$$a/ \quad D(\Omega) \xrightarrow{\partial^\alpha} D(\Omega),$$

$$б/ \quad D(\Omega) \xrightarrow{\partial^\alpha} C^\infty(\Omega)$$

и

$$в/ \quad D(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\partial^\alpha} \mathcal{Y}(\mathbb{R}^n)$$

са непрекъснати. В случая $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$, ∂^α се редуцира до идентитета и тогава б/ и в/ показват, че топологията в $D(\Omega)$ ($D(\mathbb{R}^n)$) мажорира топологията, индуцирана от $C^\infty(\Omega)$ ($\mathcal{Y}(\mathbb{R}^n)$).

У п ъ т в а н е. В случая а/ използвайте теорема 5.1 и теорема 5.2. В случаите б/ и в/ теорема 5.1 е достатъчна.

3. Нека $a(x) \in C^\infty(\Omega)$. Докажете, че операторът $\varphi \rightarrow a\varphi$, който изобразява $D(\Omega)$ в $D(\Omega)$ е непрекъснат.

4. Нека $P(\partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha$, където $a_\alpha(x) \in C^\infty(\Omega)$ е диференциален оператор. Докажете, че изображението

$$D(\Omega) \xrightarrow{P(\partial)} D(\Omega)$$

е непрекъснато.

§ 6. Дуални двойки. Топологии, които се съгласуват с дуалността

6.1. Дефиниция 6.1. Нека X е Хаусдорфово локално изпъкнало пространство и X^* е неговото спрегнато, т.е. състои се от всички линейни непрекъснати функционали, дефинирани в X . В такъв случай се казва, че X и X^* образуват дуална двойка.

В самото X^* да въведем локално изпъкнала топология с помощта на фамилията от полунорми

$$p_x(f) = |f(x)|, \quad f \in X^*,$$

която се получава, когато елементът x пробягва X .

По този начин X^* се превръща в отделимо ЛИН /теорема 3.6/ и нищо не ни пречи да говорим за неговото спрегнато $(X^*)^*$, което за краткост се означава X^{**} . Аналогията с Банаховия случай ни навежда на мисълта, че е вярна следната

Т е о р е м а 6.1. Между X и част от X^{**} съществува линейно еднозначно-обратно съответствие.

Доказателство. Като в Банаховия случай, на елемента $x \in X$ да съпоставим функционала

$$F_x(f) = f(x),$$

която се получава, когато f описва X^* . Функционалът F_x е очевидно линейен /спрямо f / и от $F_x = F_y$ следва $x = y$. Наистина равенството $F_x = F_y$ означава, че $f(x) = f(y)$, за всяко $f \in X^*$ и теорема 3.6 ни дава $x = y$. Накрая оценката

$$|F_x(f)| = |f(x)| \leq p_x(f)$$

показва, че $F_x \in X^{**}$.

Понеже очевидно съответствието $x \rightarrow F_x$ е линейно, доказателството е завършено.

Имайки пред вид този резултат, обикновено отъждествяваме X онази част от X^{**} , която му съответствува.

Естествено възниква въпросът съществува ли топология в X^{**} такава, че X да бъде изоморфно с цялото X^{**} при описания по-горе естествен изоморфизъм. Отговорът на този въпрос се оказва утвърдителен. Целесъобразно е обаче да се постави въпросът малко по-общо.

Нека X е отделимо ЛИН и Y е линейно пространство от линейни функционали, дефинирани в X , които разделят точките на последното. Това означава, че ако x и y са две различни точки от X , съществува функционал f от Y такъв, че $f(x) \neq f(y)$. Както вече видяхме, например за $Y = X^*$ това свойство е налице. Да се върнем обаче към общия случай. Да означим с $\sigma(X, Y)$ най-слабата локално изпъкнала топология в X , спрямо която функционалите от Y са непрекъснати. Очевидно $\sigma(X, Y)$ се дефинира от фамилията полунорми

$$p_f(x) = |f(x)|,$$

която се получава, когато f описва Y . Понякога топологията $\sigma(X, Y)$ се нарича Y -слаба топология в X , а в частния случай $Y = X^*$ — просто слаба топология.

Теорема 6.2. Елементите на $\mathcal{Y}$ са единствените линейни функционали в X , които са непрекъснати спрямо топологията $\sigma(X, \mathcal{Y})$.

Доказателство. Нека $\ell \in \sigma(X, \mathcal{Y})$ — непрекъснат функционал. Ще докажем, че и той е линейна комбинация на функционали от $\mathcal{Y}$. Тъй като ℓ е непрекъснат, съществува околност

$$\mathcal{U} = \{x : \max_{1 \leq j \leq n} |y_j(x)| < \varepsilon\}^1$$

на началото в X , такава, че от $x \in \mathcal{U}$ да следва

$$|\ell(x)| < 1.$$

Да означим с N множеството от решенията на системата $y_j(x) = 0$, $j = 1, 2, \dots, n$ и да вземем произволно $\delta > 0$. Понеже очевидно $N \subset \mathcal{U}$ и от $x \in N$ следва, че $\frac{x}{\delta} \in N$ за всяко $x \in N$ получаваме

$$\left| \ell\left(\frac{x}{\delta}\right) \right| < 1, \text{ т.е. } |\ell(x)| < \delta.$$

Понеже числото $\delta > 0$ е произволно, това означава, че ℓ се анулира в цялото N . От този резултат лесно следва, че ℓ е линейна комбинация на $y_1, \dots, y_n$. За тази цел да означим с $\mathcal{H}$ линейното подпространство на Q^n , което се описва от вектора

$$y(x) \stackrel{\text{def}}{=} (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)),$$

когато x описва X^2 . Да разгледаме уравнението

$$/1/ \quad y(x) = Z,$$

където $Z \in \mathcal{H}$. Съпоставяйки на Z множеството от решенията на

¹ Според теорема 2.16 околностите от този вид образуват фундаментална система /вж. равенство /9/, стр.32/.

² Припомняме, че X е линейно пространство над Q , така че функционалите от $\mathcal{Y}$ са функции от вида

$$f : X \rightarrow Q.$$

/1/, получаваме еднозначно-обратимо линейно съответствие

$$/2/ \quad h : \mathcal{H} \rightarrow X/N.$$

Предоставяйки тривиалната проверка на читателя, ще отбележим, че и функционалът ℓ приема една и съща стойност, когато x описва някой от класовете на еквивалентност, от които се състои X/N . Това ни позволява да дефинираме линейния функционал

$$/3/ \quad \tilde{\ell} : X/N \rightarrow Q,$$

като положим $\tilde{\ell}(h(x)) = \ell(x)$, където $h : X \rightarrow X/N$ е каноничното изображение. Тази дефиниция е коректна, защото h изобразява X върху цялото X/N . Сега да разгледаме линейния функционал

$$/4/ \quad \mathcal{H} \xrightarrow{g} Q,$$

който действа по правилото $g(z) = \tilde{\ell}(h(z))$, където h е изображението /2/ и с помощта на теоремата на Хан-Банах да го продължим до функционал, дефиниран в Q^n , запазвайки старото му означение. Получаваме

$$g(z) = \sum_{v=1}^n a_v z_v, \quad a_v \in Q, \quad z = (z_1, \dots, z_n)$$

защото Q^n е крайно-мерно. В частност за $Z = y(x)$ получаваме

$$g(y(x)) = \tilde{\ell}(h(y(x))) = \sum_{v=1}^n a_v y_v(x).$$

т.е.

$$\ell(x) = \sum_{v=1}^n a_v y_v(x),$$

защото очевидно $h(y(x)) = x + N$ и $\tilde{\ell}(x + N) = \ell(x)$.

С това теоремата е доказана.

И така установихме, че единствените $\sigma(X, \mathcal{Y})$ -непрекъснати функционали са елементите на $\mathcal{Y}$. В частност, $\sigma(X, X^*)$ -непрекъснатите функционали в X са точно елементите от X^* .

Да приложим този резултат към линейното пространство X^* с топологията $\sigma(X^*, X)$, дефинирана чрез фамилията полунорми

$$p_f(f) = |f(x)|, \quad f \in X^*,$$

която се получава, когато X проявява X . Имайки пред вид естественото вляване $X \longrightarrow X^{**}$, което установихме в теорема 6.1, можем да кажем, че според теорема 6.2 елементите на X са единствените непрекъснати функционали в

$$(X^*, \sigma(X^*, X)).$$

т.е. изборът на топологията $\sigma(X^*, X)$ ни осигурява равенството $X = X^{**}$.

Попълно се натъкнахме на следния интересен факт: Ако τ е изходната топология в X , то по дефиниция (X, τ) и X^* образуват дуална двойка. Според теорема 6.2 обаче същото важи и за $(X, \sigma(X, X^*))$ и X^* . Следователно, ако са ни дадени две линейни пространства X и Y , като Y се състои от линейни функционали, които разделят точките на X , изборът на топологията в X , спрямо която те образуват дуална двойка, не е еднозначно определен. /Например, ако X е Банахово пространство, силната и слабата топология в него са различни, но пораждат едно и също пространство от линейни функционали./

Дефиниция 6.2. Всяка локално изпъкнала топология в X , при която $X^* = Y$ се нарича топология, съгласувана с дуалността между X и Y .

Очевидно $\sigma(X, Y)$ е най-слабата топология, съгласувана с дуалността между X и Y , и понеже тя е отделима, всички такива топологии са отделими.

Има свойства, които зависят само от дуалната двойка, но не и от избора на топологията, която създава дуалността между тях. Изследването на тези свойства може да се проведе в най-удобната топология - например в слабата.

Едно такова свойство ни дава следната

Теорема 6.3. Нека (X, Y) образуват дуална двойка и A е изпъкнало подмножество на X . Тогава неговата затворена обвивка $\bar{A}$ е една и съща във всички топологии, които се съгласуват с дуалността между X и Y .

Доказателство. Щом при всяка от топологиите, които разглеждаме, линейните непрекъснати функционали са едни и същи и затворените полупространства в X ще бъдат едни и същи, и твърдението следва веднага от теорема 3 в допълнения към § 2.

Друг важен пример на свойство, което зависи само от дуалната двойка ни дава

Теорема 6.4. Нека X е Хаусдорфово ЛИП и X, Y образуват дуална двойка. Тогава едно множество $B \subset X$ е ограничено тогава и само тогава, когато

$$\sup_{x \in B} |y(x)| < +\infty,$$

за всеки функционал $y \in Y$.

С други думи, ограничените множества в X остават едни и същи при всички топологии, които се съгласуват с дуалността между X и Y .

Доказателство. Условието е очевидно необходимо, защото всяка от полунормите

$$p_y(x) \stackrel{\text{def}}{=} |y(x)|$$

е непрекъсната /теорема 2.20, стр.36/.

Същественото твърдение в теоремата е неговата достатъчност. Ние ще установим, че за всяка непрекъсната полунорма p , дефинирана в X , имаме

$$\sup_{x \in B} p(x) < +\infty$$

и тогава теоремата ще следва от теорема 2.20.

Нека сега p е една такава полунорма и нека $N = \{x: p(x) = 0\}$ е множеството от нейните нули. Веднага се вижда, че N е затворено линейно подпространство на X /проверете!/.

Следователно факторпространството X/N е отделимо. Почти очевидно е, че ако Z е елемент от X/N , за всяко $x \in Z$ стойността на p ще бъде една и съща. Наистина, нека $x_1 \in Z$, $x_2 \in Z$. Тогава $x_2 - x_1 \in N$ и неравенството на триъгълника ни дава

$$|p(x_1) - p(x_2)| \leq p(x_2 - x_1) = 0, \text{ т.е. } p(x_1) = p(x_2).$$

Този резултат ни позволява да твърдим, че когато x описва $B \subset X$, а $Z = k(B) \subset X/N$, където, както винаги

$k: X \rightarrow X/N$ е каноничното изображение, полунормите p и

$$q(z) = \inf_{x \in k^{-1}(z)} p(x)$$

ще опишат едни и същи множества върху реалната ос. /В същност $q(z) = p(x)$, където x е кой да е елемент от $k^{-1}(z)$./ Следователно нашата задача се сведе до установяването на неравенството

$$\sup_{z \in k(B)} q(z) < +\infty.$$

По-нататък, ясно е, че q е норма в X/N . За да се убедим в това, остава да проверим, че от $q(z) = 0$ следва $z = 0$. Това обаче е очевидно, защото равенството $q(z) = 0$ показва, че $p(x) = 0$ за всеки елемент $x \in k^{-1}(z)$, т.е. $k^{-1}(z) = N$, което и означава, че Z е нулевият елемент в X/N .

Да означим със Z нормираното пространство $(X/N, q)$ и нека $l \in Z^*$. В такъв случай $|l(z)| \leq q(z)$, което показва, че $l \in (X/N)^*$, защото полунормата q е непрекъсната. (Според 3.7 тя е една от полунормите, които дефинират топологията в X/N). Понеже каноничното изображение $k: X \rightarrow X/N$ е непрекъснато и функционалът

$$\tilde{l}(x) \stackrel{\text{def}}{=} l(k(x))$$

ще бъде непрекъснат, т.е. $\tilde{l} \in X^* = Y$.

Следователно

$$\sup_{z \in k(B)} |l(z)| = \sup_{x \in B} |l(k(x))| = \sup_{x \in B} |\tilde{l}(x)| < +\infty.$$

Оказа се, че за всеки функционал от Z^* имаме

$$/5/ \quad \sup_{z \in k(B)} |l(z)| < +\infty.$$

Остава да интерпретираме правилно получения резултат. На всеки елемент $z \in k(B)$ да съпоставим функционала F_z , който му отговаря при естествената изометрия $Z \rightarrow Z^*$. Понеже F_z действувa по правилото

$$F_z(l) = l(z), \quad l \in Z^*$$

можем да запишем /5/ във вида

$$/6/ \quad \sup_{z \in k(B)} |F_z(l)| < +\infty$$

за всяко фиксирано l от Z^* . Пространството Z^* обаче е Банахово /теорема 3.4 или следствието от нея/ и теоремата на Банах-Щайнхауз ни дава

$$\sup_{z \in k(B)} \|F_z\|_{Z^{**}} \leq A = \text{const.}$$

Тъй като съответствието $Z \rightarrow F_z$ е изометрия /вж. /15/ от 3.3/, имаме

$$\|F_z\|_{Z^{**}} = \|z\|_Z = q(z),$$

т.е.

$$\sup_{z \in k(B)} q(z) \leq A = \text{const.},$$

с което доказателството на теоремата е завършено.

6.2. Теорема на Маки-Аренс

Нека X е отделимо Л И П и нека (X, Y) е дуална двойка. Описанието на всички локално изпъкнали топологии в X , които се съгласуват с дуалността между X и Y се дава от следната важна

Т е о р е м а на М а к и - А р е н с. Една локално изпъкнала топология $\mathcal{F}$, дефинирана в X , се съгласува с дуалността между X и Y тогава и само тогава, когато

$$\sigma(X, Y) \subseteq \mathcal{F} \subseteq \tau(X, Y),$$

където топологията $\tau(X, Y)$ се дефинира от фамилията полунорми

$$p_K(x) = \sup_{y \in K} |y(x)|,$$

която се получава, когато K пробягва всички абсолютно изпъкнали компактни подмножества на Y в топологията $\sigma(Y, X)$.

Доказателството на теоремата остава извън рамките на тази книга /вж. [3], [7] или [4] /.

Топологията $\tau(X, Y)$ се нарича т о п о л о г и я на М а к и. С други думи, $\tau(X, Y)$ е топологията на равномерната сходимост върху компактните ^{абсолютно} изпъкнали множества от $(Y, \sigma(Y, X))$.

Локално изпъкналите пространства, чиято топология съвпада с тази на Маки, се наричат б о р н о л о г и ч н и или пространства на Маки.

Естествено възниква въпросът какво представлява топологията на Маки, ако X е Банахово пространство и $Y = X^*$. И въобще, как да разпознаваме тази топология?

Удобен, макар и не винаги използваем критерий ни дава следната

Т е о р е м а 6.5. Нека (X, ξ) е метризуемо локално изпъкнало пространство и X^* е неговото спрегнато. Тогава съвпада с $\tau(X, X^*)$.

Д о к а з а т е л с т в о. Нека $\{U_n\}, U_{n+1} \subset U_n$, е фундаментална система от околности на началото в (X, ξ) и нека V е

околност на началото в $(X, \tau(X, X^*))$. Ако V не е околност на нулата в (X, ξ) , тя не съдържа нито една от околностите $\frac{1}{n} U_n$. В такъв случай съществува елемент $x_n \in U_n$ такъв, че $\frac{x_n}{n} \notin V$, т.е. $x_n \in nV$. Получената безкрайна редица $\{x_n\}$ е очевидно ограничена в (X, ξ) и неограничена в $(X, \tau(X, X^*))$ което е невъзможно, защото според теорема 6.4 ограничените множества в двете топологии са едни и същи. Това противоречие доказва, че V е околност на нулата и в (X, ξ) , т.е. $\xi \geq \tau(X, X^*)$. Понеже теоремата на Маки-Аренс ни дава обратното включване, доказателството е завършено.

С л е д с т в и е. Всички пространства на Фреше са пространства на Маки. В частност, всички Банахови пространства са пространства на Маки.

6.3. Три важни топологии в X^*

Нека отново X е отделимо, локално изпъкнало пространство и X^* е неговото спрегнато. Ако X е нормируемо, X^* е също такава и нормата поражда т.н. с и л н а топология. Какъв е аналогът на тази топология в общия случай? Ясно е, че топологията, която търсим, не е $\tau(X^*, X)$, защото спрегнатото пространство на $(X^*, \tau(X^*, X))$ винаги съвпада с X , докато в Банаховия случай силната топология в X^* води само до $X^{**} \supset X$, като двете пространства могат и да се различават. Включването $X^{**} \supset X$, което установихме в теорема 6.1, показва, че топологията, която търсим, трябва да бъде по-силна от $\tau(X^*, X)$.

За частие въпросът, който ни интересува, има съвсем прост отговор, ако X е нормирано: веднага се вижда, че силната топология в X^* освен с нормата $x^* \rightarrow \|x^*\|_{X^*}$ се описва и от фамилията полунорми

$$p_B(x^*) = \sup_{x \in B} |x^*(x)|,$$

която се получава, когато B пробягва всички ограничени множества в X . /Проверете!/ Оказва се, че и в общия случай фамилията /7/ води до правилната топология.

Сега вече можем да резюмираме:

Ако X е отделимо ЛИП със спрегнато X^* , в последното дефинираме три различни топологии:

1/ Слабата^{*} топология $\sigma(X^*, X)$, която се дефинира от фамилията

$$\rho_x(x^*) = |x^*(x)|,$$

която се получава, когато x описва X .

2/ Топологията на Маки $\tau(X^*, X)$, дефинирана от фамилията

$$\rho_K(x^*) = \sup_{x \in K} |x^*(x)|,$$

получаваща се, когато K пробягва абсолютно изпъкналите компакти на X в $\sigma(X, X^*)$ топологията. Очевидно това е топологията на равномерната сходимост върху абсолютно изпъкналите $\sigma(X, X^*)$ -компакти в X .

3/ Силната топология $\beta(X^*, X)$, дефинирана от полунормите

$$\rho_B(x^*) = \sup_{x \in B} |x^*(x)|,$$

които се получават, когато B описва ограничените подмножества на X спрямо коя да е топология, съгласувана с дуалността между X и X^* . С други думи, това е топологията на равномерната сходимост върху ограничените множества в X .

Обърнете внимание, че според теорема 6.4 неравенството

$\rho_B(x^*) < +\infty$ е в сила за всяко $x^* \in X^*$, каквото и да бъде ограниченото множество $B \subset X$, т.е. дефиницията на силната топология е коректна. Понеже всяко компактно множество в $\sigma(X, X^*)$

е ограничено в същата топология, силната топология е по-силна от тази на Маки.

Разполагайки със силната топология в X^* , можем да дефинираме понятието рефлексивност и в общия случай.

Дефиниция 6.3. Нека (X, γ) е отделимо ЛИП и в неговото спрегнато X^* е въведена силната топология. Нека X^{**} е спрегнатото на така топологизираното X . Топологичното пространство $(X^{**}, \beta(X^{**}, X^*))$ се нарича второ спрегнато на X .

Казваме, че (X, γ) е рефлексивно, ако:

$$a/ (X, \gamma) = (X, \beta(X, X^*)) \text{ и}$$

$$b/ (X, \gamma) \text{ и } (X^{**}, \beta(X^{**}, X^*))$$

са линейно хомеоморфни при естественото изображение

$$X \xrightarrow{F} X^{**},$$

установено в теорема 6.1. Припомняме, че на $x \in X$, F съпоставяше функционала F_x , действащ на правилото $F_x(x^*) = x^*(x)$, за всяко $x^* \in X^*$.

Оказва се, че някои от най-важните пространства като $D(\Omega)$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и $H(\Omega)$ са рефлексивни [3], [7]. Това обстоятелство обаче не играе роля в теорията на разпределенията.

Важно е обаче да се знае, че те спадат към така наречените пространства на Монтел.

Дефиниция 6.4. Отделимите ЛИП, в които всяко абсолютно изпъкнало затворено и поглъщащо множество е околност на началото, се наричат бъчвени¹.

Дефиниция 6.5. Бъчвените пространства, в които всяко ограничено и затворено множество е компактно, се наричат пространства на Монтел.

¹На английски "barreled" на руски "бочечные". Терминологията на български не е установена.

Оказва се, че пространствата $\mathcal{H}(\Omega)$, $\mathcal{D}(\Omega)$ и $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ са Монтелеви. За $\mathcal{H}(\Omega)$ това е известната теорема на Монтел от комплексния анализ / [17], стр.293/, откъдето произлиза използваният в дефиницията термин. Всички Монтелеви пространства са рефлексивни [3], [15].

Понеже обстоятелството, че $\mathcal{D}(\Omega)$ и $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ са Монтелеви, има едно твърде полезно следствие в теорията на разпределенията, ще скицираме доказателството на това твърдение.

Теорема 6.6. Всяко локално изпъкнало пространство на Фреше е бъчвено.

Доказателство. Нека X е такова и A е абсолютно изпъкнало, затворено и поглъщащо множество в X . Понеже A е поглъщащо, имаме

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nA$$

и следователно теоремата на Бер показва, че поне едно от множествата $\{nA\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, да кажем $n_0 A$, има вътрешна точка. Понеже изображението $x \rightarrow n_0 x$ е хомеоморфизъм и A трябва да има вътрешни точки. Нека x_0 е такава и U е уравновесена и изпъкнала околност на началото такава, че $x_0 + U \subset A$. Понеже A е също уравновесено и изпъкнало, имаме

$$\frac{1}{2} U = \frac{1}{2} (x_0 + U) + \frac{1}{2} (-x_0) \subset \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} A \subset A.$$

и теоремата е доказана.

С л е д с т в и е 1. Строгите индуктивни граници на Л И П на Фреше са бъчвени.

Доказателството се получава веднага чрез непосредствено прилагане на дефиницията на строгата индуктивна топология.

С л е д с т в и е 2. Пространствата $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{D}(\Omega)$ са бъчвени.

Наистина $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ е Л И П на Фреше, а $\mathcal{D}(\Omega)$ е строга индуктивна граница на такива пространства.

Сега вече можем да се заемем с доказателството на

Теорема 6.7. Пространствата $\mathcal{D}(\Omega)$ и $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ са Монтелеви.

Доказателство. Да започнем с разглеждането на $\mathcal{D}(\Omega)$, където Ω е произволна област от $\mathbb{R}^n$.

Нека B е ограничено и затворено множество в $\mathcal{D}(\Omega)$. Според теорема 5.3 и 5.2 съществува компакт $K \subset \Omega$ такъв, че B се съдържа в $C_0^\infty(K)$ и е ограничено и затворено в него. Следователно според теорема 2.20, стр.36 за всяко естествено m съществува константа C_m , за която е в сила оценката

$$|1| \quad p_m(\varphi) = \sup_{\substack{|\alpha| \leq m \\ x \in K}} |\partial^\alpha \varphi(x)| < C_m, \quad \forall \varphi \in B$$

Понеже $C_0^\infty(K)$ е пространство на Фреше, достатъчно е да установим секвенциалната компактност на B / [6], стр.103/.

И така, нека $\{\varphi_j\}$ е безкрайна редица от елементи на B . Ако B се състои от краен брой елементи, твърдението ни е очевидно.

Неравенствата |1| показват, че за всеки мултииндекс α , редиците

$$\{\partial^\alpha \varphi_j\} \quad \text{и} \quad \{\partial^{\alpha+\beta} \varphi_j\},$$

където $|\beta| = 1$, са равномерно ограничени. Следователно, прилагайки теоремата на Арцелà и Асколи, можем да изберем подредица

$$\{\partial^\alpha \varphi_{n_k}\},$$

която е равномерно сходяща в компакта K . След тази констатация да се възползваме от Канторовия диагонален процес и да изберем такава подредица $\{\varphi_{n_k}\}$, че всяка от редиците $\{\partial^\alpha \varphi_{n_k}\}$

да бъде равномерно сходяща в K . Тази редица е търсената. Наистина да означим с ψ равномерната граница на φ_{n_k} и да фиксираме

едно $\varepsilon > 0$. За всяко естествено m съществува $N(\varepsilon, m)$ такава, че от S , $k > N(\varepsilon, m)$ следва неравенството

$$p_m(\varphi_{n_k} - \psi) = \sup_{\substack{|\alpha| \leq m \\ x \in K}} |\partial^\alpha \varphi_{n_k}(x) - \partial^\alpha \psi(x)| < \varepsilon$$

Извършвайки граничния преход $k \rightarrow \infty$ в това неравенство при фиксирано m , получаваме

$$\rho_m(\varphi_{m_k} - \psi) \leq \varepsilon,$$

с което доказателството е завършено, защото очевидно $\psi \in C_0^\infty(K)$.

Случаят $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ е подобен, но технически малко по-сложен.

$B \subset \mathcal{S}$ е ограничено, за всяко $\varphi \in B$ са в сила неравенствата

$$/8/ \quad \rho_{m,\beta}(\varphi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^m |\partial^\alpha \varphi(x)| \leq C_{m,\beta}$$

с подходящи константи $C_{m,\beta}$. Като по-горе, да вземем произволна редица $\{\varphi_j\} \subset B$ и с помощта на Канторовия диагонален

процес и теоремата на Арцела-Асколи да изберем подредица $\{\varphi_{j_s}\}$ такава, че всяка от редиците $\{\partial^\alpha \varphi_{j_s}\}$ да бъде равномерно сходяща върху компактните подмножества в $\mathbb{R}^n$. След това да вземем $\varepsilon > 0$

и една фиксирана полунорма $\rho_{m,\beta}$ от фамилията /8/. Сега е време да забележим, че за всяко достатъчно голямо R имаме

$$/9/ \quad \sup_{|x| \geq R} (1 + |x|^2)^m |\partial^\alpha \varphi(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall \varphi \in B,$$

защото от неравенството $\rho_{m+1,\beta}(\varphi) \leq C_{m+1,\beta}$ веднага следва оценката

$$\sup_{|x| \geq R} (1 + |x|^2)^m |\partial^\alpha \varphi| \leq \frac{C_{m+1,\beta}}{1 + R^2},$$

и /9/ става очевидно. По-нататък, понеже кълбото $|x| \leq R$ е компактно за $s, k > N(\varepsilon, m)$ имаме

$$\sup_{|x| \leq R} (1 + |x|^2) |\partial^\beta \varphi_{j_s} - \partial^\beta \varphi_{j_k}| < \varepsilon,$$

което заедно с /9/ ни дава $\rho_{m,\beta}(\varphi_{j_s} - \varphi_{j_k}) < 3\varepsilon$.

Последното неравенство показва, че $\{\varphi_{j_s}\}$ клони в $\mathcal{S}$ към някакъв елемент от B .

С това доказателството е завършено.

Ние ще използваме доказаната теорема, за да установим едно важно съпадение на различните видове сходимост в $D'(\Omega)$ и $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Целесъобразно е обаче да започнем с един по-общ резултат.

Теорема 6.8. Нека X е ЛИП на Фреше, в което всяко ограничено и затворено множество е компактно. В частност X може да бъде пространство на Монтел. Тогава една редица $\{f_j\} \subset X^*$ е сходяща в $\beta(X^*, X)$ тогава и само тогава, когато е сходяща в $\sigma(X^*, X)$.

С други думи, при предположенията на теоремата силната и слабата^{*} сходимост съвпадат. Оттук обаче не следва съпадението на двете топологии, понеже резултатът се отнася само за обикновени редици.

Доказателство. Нека $\{f_j\}$, $j = 1, 2, 3, \dots$ е слабо^{*} сходяща редица от X^* . Трябва да докажем, че тя е равномерно сходяща върху ограничените множества в X . Нека B е едно такова множество. Тогава $\bar{B}$ е ограничено /теорема 2.10, стр. 24/ и според предположенията на теоремата - компактно. Понеже редицата $\{f_j(x)\}$ е сходяща и следователно ограничена при всяко фиксирано $x \in X$, според теоремата на Банах - Шайнхауз /вж. следствие 1/ съществува такава непрекъсната полунорма ρ , че да имаме

$$|f_j(x)| \leq C \rho(x), \quad C = \text{const}, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

за всяко $x \in X$. Да вземем $\varepsilon > 0$ и на всяко $x \in \bar{B}$ да съпоставим такава околност U_x на началото, че за $y - x \in U_x$ да имаме

$$\rho(x - y) < \frac{\varepsilon}{3C}.$$

След това да изберем крайно покритие на $\bar{B}$ от вида $\bigcup_{j \in J_0} (x_j + U_{x_0})$, $x_j \in \bar{B}$, $\bar{B}$ е компактно! и да

вземем толкова голям номер $N(\varepsilon)$, че за $m, n > N(\varepsilon)$ да имаме

$$|f_m(x_j) - f_n(x_j)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{за всяко } j \in J_0.$$

Накрая нека x е произволен елемент от $\bar{B}$ и нека $x_{j_1} + U_{x_{j_1}}$ е околността, която го съдържа. Тогава за $m, n > N(\varepsilon)$ имаме

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| &\leq |f_m(x) - f_m(x_{j_1})| + |f_m(x_{j_1}) - f_n(x_{j_1})| \\ &+ |f_n(x_{j_1}) - f_n(x)| \leq C \rho(x - x_{j_1}) + \frac{\varepsilon}{3} + C \rho(x_{j_1} - x) < \varepsilon, \end{aligned}$$

с което доказателството е завършено.

С л е д с т в и е. Слабата и силната сходимост на редиците в пространствата $D'(\Omega)$ и $\mathcal{F}'(\mathbb{R}^n)$ съвпадат.

З а б е л е ж к а. Понеже $D(\Omega)$ и $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ са рефлексивни, слабата и слабата^{*} сходимост в $D'(\Omega)$ и $\mathcal{F}'$ съвпадат. Ето защо вместо за слаба^{*} говорим за слаба сходимост. По същество обаче рефлексивността не се използва.

6.4. Д о п ъ л н е н и е. Три топологии в множеството на линейните оператори. Още един вариант на теоремата на Банах - Щайнхауз

Нека X и Y са отделими ЛИП над едно и също поле $\mathbb{Q}$. Да означим с $L(X, Y)$ линейното пространство, образувано от непрекъснатите линейни оператори

$$L : X \longrightarrow Y.$$

Точно както в точка 6.3, където е разгледан частният случай $Y = \mathbb{Q}$, в $L(X, Y)$ можем да въведем няколко различни топологии.

Нека $\mathcal{M}$ е някаква фамилия от ограничени подмножества на X . Нека $A \in \mathcal{M}$, а V е абсолютно изпъкнала околност на началото в Y . Да означим с $W_{A,V}$ подмножеството на $L(X, Y)$, което се състои от онези изображения T , за които $T(A) \subset V$. Почти очевидно е, че $W_{A,V}$ е абсолютно изпъкнало и поглътящо. За да проверим последното, ще установим следната

Л е м а 6.1. Ако $A \subset X$ е ограничено в X , а $T \in L(X, Y)$, то множеството $T(A)$ е ограничено в Y .

Д о к а з а т е л с т в о. Нека $V \subset Y$ е околност на началото в Y , а U е такава околност на началото в X , че да имаме $T(U) \subset V$. Понеже A е ограничено, съществува такова $\lambda > 0$, че $\lambda A \subset U$. За това λ получаваме

$$\lambda T(A) = T(\lambda A) \subset T(U) \subset V$$

и лемата е доказана.

Сега вече е ясно, че $W_{A,V}$ е поглътящо. Наистина, нека $T \in L(X, Y)$ е произволен оператор. Да вземем такова $\lambda > 0$, че да имаме $\lambda T(A) \subset V$. Това означава обаче, че $\lambda T \in W_{A,V}$.

И така, констатирахме, че $W_{A,V}$ е абсолютно изпъкнало и поглътящо. Да разгледаме фамилията $\{W_{A,V}\}$, която се получава, когато A пробягва $\mathcal{M}$, а V - абсолютно изпъкналите околности на началото. Според следствието от теорема 2.12 /стр.25/ съществува една най-слаба топология, която превръща $L(X, Y)$ в локално изпъкнало пространство и в която всяко от множествата $\{W_{A,V}\}$ е околност на началото. Тази топология ще наричаме за краткост $\mathcal{M}$ -топология, а линейното топологично пространство, което се получава след нейното въвеждане, ще бележим с $L_{\mathcal{M}}(X, Y)$. Понеже Y е отделимо по предположение, $L_{\mathcal{M}}(X, Y)$ е отделимо например, ако $\mathcal{M}$ съдържа всичките едноточкови подмножества на X .

По очевидни съображения $\mathcal{M}$ -топологията се нарича още топология на равномерната сходимост върху подмножествата на $\mathcal{M}$. Следните случаи представляват особен интерес:

1/ $\mathcal{M}$ съвпада с фамилията от крайните подмножества на X . В този случай се получава топологията на обикновената сходимост, т.е. $\{T_v\} \rightarrow T$ в $L_{\mathcal{M}}(X, Y)$ тогава и само тогава, когато $\{T_v(x)\} \rightarrow T(x)$ за всяко фиксирано $x \in X$.

2/ $\mathcal{M}$ съвпада с фамилията на компактните подмножества на X . Сега $\mathcal{M}$ -топологията се нарича топология на компактната сходимост.

3/ $\mathcal{M}$ съвпада с фамилията на ограничените подмножества на X . Това е най-силната от възможните $\mathcal{M}$ топологии. Тя се нарича топология на ограничената сходимост.

Следващата теорема дължим на Бурбаки. Тя представлява усилен вариант на теоремата на Банах-Щайнхауз и е най-важният резултат, свързан с бърчените пространства.

Т е о р е м а 6.9. Нека X е отделимо и бърчено ЛИП, а Y е отделимо ЛИП. Нека $\mathcal{H}$ е фамилия от елементи на $L(X, Y)$. Следващите твърдения са еквивалентни:

а/ За всяко фиксирано $x \in X$ множеството $\bigcup_{T \in \mathcal{H}} T(x)$ е ограничено в Y .

б/ Фамилията $\mathcal{H}$ е равностепенно непрекъсната.

в/ За всяко ограничено множество $A \subset X$ множеството $\bigcup_{T \in \mathcal{H}} T(A)$ е ограничено в Y .

Преди да започнем доказателството ще припомним, че една фамилия $\Phi \subset L(X, Y)$ се нарича равностепенно непрекъсната, ако на всяка околност V на началото в Y отговаря околност $\mathcal{U}$ на началото в X такава, че $T(\mathcal{U}) \subset V$ за всяко $T \in \Phi$.

Д о к а з а т е л с т в о. 1/ а/ $\rightarrow$ б/. Нека V е затворена, абсолютно изпъкнала околност на началото в Y . Да разгледаме множеството $\mathcal{U} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{T \in \mathcal{H}} T^{-1}(V)$. Очевидно е, че $\mathcal{U}$ е затворено и абсолютно изпъкнало. Ще покажем, че то е поглъщащо.

Наистина, нека x е фиксиран елемент от X . Понеже $\bigcup_{T \in \mathcal{H}} T(x)$ е ограничено, съществува $\lambda > 0$ такава, че $\bigcup_{T \in \mathcal{H}} T(\lambda x) = \lambda \bigcup_{T \in \mathcal{H}} T(x) \subset V$, т.е. $\lambda x \in T^{-1}(V)$ за всяко $T \in \mathcal{H}$. Това означава обаче, че $\lambda x \in \mathcal{U}$, т.е. $\mathcal{U}$ е бърча. Понеже X е бърчено, $\mathcal{U}$ се оказва околност на началото в X и самата дефиниция на $\mathcal{U}$ ни дава $T(\mathcal{U}) \subset V$ за всяко $T \in \mathcal{H}$.

С това равностепенната непрекъснатост на $\mathcal{H}$ е установена.

2/ б/ $\rightarrow$ в/. Нека $A \subset X$ е ограничено, а V е произволна околност на началото в Y . Понеже $\mathcal{H}$ е равностепенно непрекъсната, съществува околност $\mathcal{U}$ на началото в X такава, че $T(\mathcal{U}) \subset V$ за всяко $T \in \mathcal{H}$. Да вземем $\lambda > 0$ такава, че да имаме $\lambda A \subset \mathcal{U}$ (A е ограничено!). В такъв случай имаме

$$\lambda T(A) = T(\lambda A) \subset T(\mathcal{U}) \subset V$$

за всяко $T \in \mathcal{H}$, т.е. $\lambda \bigcup_{T \in \mathcal{H}} T(A) \subset V$ и ограничеността на

$\bigcup_{T \in \mathcal{H}} T(A)$ е доказана.

Твърдението в/ $\rightarrow$ а/ е очевидно вярно.

С л е д с т в и е. Нека $\{T_\nu\} \subset L(X, Y)$ и за всяко $x \in X$ $\lim_{\nu \rightarrow \infty} T_\nu(x)$ съществува. Тогава

$$T(x) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} T_\nu(x) \in L(X, Y), \quad \nu = 1, 2, 3, \dots$$

и сходимостта на редицата $\{T_\nu\}$ е равномерна върху компактните подмножества на X .

Д о к а з а т е л с т в о. Операторът

$$T(x) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} T_\nu(x)$$

е очевидно линеен. Остава да се докаже, че той е непрекъснат. Нека V е произволна затворена околност на началото в Y . Понеже за всяко фиксирано x редицата $\{T_\nu(x)\}$ е сходяща и следователно ограничена, доказаната теорема показва, че фамилията $T_\nu(x)$ е равностепенно непрекъсната. Ето защо съществува околност $\mathcal{U}$ на началото в X такава, че $T_\nu(\mathcal{U}) \subset V$ за всяко ν . Оттук с граничен преход (при фиксирано $x \in \mathcal{U}$) получаваме $T(\mathcal{U}) \subset \bar{V} = V$ и непрекъснатостта на T е установена.

Проверката, че $\{T_\nu\}$ клони равномерно към T върху компактните подмножества на X е стандартна и ние я предоставяме на читателя.

§ 1. Помощни сведения

Смело може да се каже, че теорията на разпределенията лежи в основата на съвременната теория на диференциалните уравнения с частни производни. Именно тя направи възможно свободното използване на трансформацията на Фурие и, разтваряйки широко вратите за функционалния анализ, бързо доведе до резултати, които мъчно можеха да се предвидят преди 1951 г., когато се появи знаменитото днес съчинение на Лоран Шварц [18].

Главната цел, която преследвахме в първа глава, беше да подготвим почвата за едно достатъчно широко и естествено изложение на теорията на разпределенията в духа на Шварц, каквото все още липсва на български език. Въпреки това логическите връзки между това, което следва, и материала от първа глава са минимални. Този стил на изложение е възприет главно, за да могат да извлекат известна полза и читателите, които гледат прагматично на теорията на разпределенията и на първо време биха се задоволили с един работен минимум. Разбира се, те трябва да приемат някои основни факти за дефиниции.

1.1. Помощни сведения от реалния анализ

Неравенствата между различните L^p норми са между най-често използваните средства в теорията на частните диференциални уравнения. В този параграф, който е предназначен главно за справки, са събрани някои от най-често използваните неравенства от този тип.

1.1. Неравенство на Хьолдер

Нека Ω е област в $\mathbb{R}^n$ и $p \geq 1$, $q \geq 1$ са две числа, свързани с равенството $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. В такъв случай q се нарича спрегнат показател на p . Важното неравенство на Хьолдер гласи следното: ако $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$, то fg е сумируема в Ω и нещо повече

$$1/ \quad \left| \int_{\Omega} fg \, dx \right| \leq \|f\|_p \|g\|_q,$$

където, разбира се,

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|g\|_q = \left(\int_{\Omega} |g(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

Доказателство. Нека $a \geq 0$, $b \geq 0$. Тогава за $p > 1$, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ е в сила неравенството

$$2/ \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Наистина функцията $t \rightarrow e^t$ е изпъкнала. Следователно, каквито и да бъдат реалните числа x и y , за $p > 0$, $q > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ имаме

$$e^{\frac{1}{p}x} e^{\frac{1}{q}y} = e^{\frac{x}{p} + \frac{y}{q}} \leq \frac{1}{p} e^x + \frac{1}{q} e^y.$$

Полагайки $x = p \ln a$, $y = q \ln a$, получаваме 2/. Непосредствено се вижда, че 2/ е вярно и когато a или b е нула.

Нека сега $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$. Ако $\|f\|_p = 0$ или $\|g\|_q = 0$, неравенството на Хьолдер е очевидно вярно. Да допуснем, че $\|f\|_p > 0$, $\|g\|_q > 0$ и да въведем функциите

¹ По дефиниция за спрегнат показател на числото p се приема символът $+$.

$$f_1 = \frac{f}{\|f\|_p}, \quad g_1 = \frac{g}{\|g\|_q}.$$

Трябва да докажем, че

$$\left| \int_{\Omega} f_1(x) g_1(x) dx \right| \leq 1.$$

За тази цел трябва да използваме /2/. С негова помощ получаваме

$$|f_1(x) g_1(x)| \leq \frac{|f_1(x)|^p}{p} + \frac{|g_1(x)|^q}{q},$$

откъдето, интегрирайки върху Ω , намираме

$$\left| \int_{\Omega} f_1(x) g_1(x) dx \right| \leq \frac{1}{p} \int_{\Omega} |f_1(x)|^p dx + \frac{1}{q} \int_{\Omega} |g_1(x)|^q dx = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

с което неравенството на Хьолдер е доказано за $p > 1$, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Случаят, когато някое от числата p и q е единица, е съвсем тривиален и ние го предоставяме на читателя.

1.2. Неравенство на триъгълника

/неравенство на Минковски/

Нека $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^p(\Omega)$, $p \geq 1$. В сила е неравенството

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Доказателство. Най-напред ще покажем, че

$f + g \in L^p(\Omega)$. Непосредствено получаваме

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq 2 \max[|f(x)|, |g(x)|],$$

$$|f(x) + g(x)|^p \leq 2^p (\max[|f(x)|, |g(x)|])^p$$

$$= 2^p \max[|f(x)|^p, |g(x)|^p] \leq 2^p (|f(x)|^p + |g(x)|^p),$$

т.е. наистина $f + g \in L^p(\Omega)$.

Сега вече неравенството на Хьолдер ни дава

$$\int_{\Omega} |f(x) + g(x)|^p dx$$

$$\leq \int_{\Omega} |f(x) + g(x)|^{p-1} |f(x)| dx + \int_{\Omega} |f(x) + g(x)|^{p-1} |g(x)| dx$$

$$\leq \left(\int_{\Omega} |f+g|^{(p-1)q} dx \right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_p + \left(\int_{\Omega} |f+g|^{(p-1)q} dx \right)^{\frac{1}{q}} \|g\|_p,$$

където q е спрегнатият показател на p .

Понеже $(p-1)q = p$, /3/ не е нищо друго освен

$$\|f + g\|_p^p \leq \|f + g\|_p^{\frac{p}{q}} (\|f\|_p + \|g\|_p),$$

откъдето пак следва

$$\|f + g\|_p = \|f + g\|_p^{p(1-\frac{1}{q})} \leq \|f\|_p + \|g\|_p,$$

с което неравенството на Минковски е установено.

У п р а ж н е н и е 1

1. Нека $p > 2$, $q > 2$, $2 > 0$ са три числа, свързани с равенството $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$. Докажете, че ако $f \in L^p(\Omega)$,

$g \in L^q(\Omega)$, то $f g \in L^2(\Omega)$ и е в сила неравенството

$$\|fg\|_2 \leq \|f\|_p \|g\|_q,$$

което е очевидно едно непосредствено обобщение на неравенството на Хьолдер.

У п ъ т в а н е. Забележете, че $\frac{1}{\frac{p}{2}} + \frac{1}{\frac{q}{2}} = 1$ и приложете

равенството на Хьолдер към функциите $f_i = |f|^{\frac{1}{p_i}}$, $g_i = |g|^{\frac{1}{p_i}}$.

2. Нека $p_i \geq 1$, $i = 1, 2, 3$, са три числа свързани с равенството $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 1$.

Ако $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $i = 1, 2, 3$, докажете, че

$$/1"/ \int_{\Omega} |f_1 f_2 f_3| dx \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \|f_3\|_{p_3}.$$

У п ъ т в а н е. Положете $\frac{1}{q} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}$ и с помощта на неравенството 1' докажете, че $f_2 f_3 \in L^q(\Omega)$. След това отново приложете неравенството на Хьолдер към функциите $f_1 \in L^{p_1}(\Omega)$ и $g = f_2 f_3 \in L^q(\Omega)$.

3. Докажете неравенството

$$\int_{\Omega} \left| \prod_{i=1}^k f_i \right| dx \leq \prod_{i=1}^k \|f_i\|_{p_i},$$

където $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $\sum_{i=1}^k \frac{1}{p_i} = 1$, $p_i \geq 1$.

1.3. К о н в о л ю ц и я на две функции

Нека f и g са измерими функции, дефинирани почти навсякъде в $\mathbb{R}^n$. При някои допълнителни предположения интегралът

$$(f * g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy$$

се оказва сходящ за почти всички стойности на x в $\mathbb{R}^n$. В такъв случай получената функция се нарича к о н в о л ю ц и я на f и g . С проста смяна на променливите се убеждаваме, че конволюцията е комутативна операция, т.е.

$$/5/ \quad f * g = g * f,$$

стига поне една от конволюциите в /5/ да има смисъл.

Следващата важна теорема ни дава достатъчни условия, при които конволюция съществува.

Т е о р е м а 1.1. /Неравенство на Йънг./ Нека $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \geq 1$, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. В такъв случай $f * g$ е дефинирана почти навсякъде и е в сила неравенството

$$/6/ \quad \|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1.$$

Д о к а з а т е л с т в о. Нека най-напред $p = 1$. Да разгледаме "двойния" /т.е. $2n$ -мерния/ интеграл

$$/7/ \quad I = \iint_{\mathbb{R}^{2n}} |f(x-y)| |g(y)| dx dy.$$

Интегрирайки най-напред по x , получаваме

$$/8/ \quad I = \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| dx \right) dy = \|f\|_1 \|g\|_1$$

резултат, който показва, че /7/ е сходящ / [19], стр.176/. Сега вече с помощта на теоремата на Фубини заключаваме, че интегралът

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| |g(y)| dy$$

е сходящ за почти всяко x / [19], стр.174, [6], стр.313/, т.е. конволюцията

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy$$

е дефинирана за почти всяко x . Понеже очевидно $\|f * g\|_1 \leq I$, /8/ ни дава

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1,$$

с което случаят $p = 1$ е изчерпан.

Нека сега $p > 1$ и $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$. Прилагайки неравенството на Хьолдер, получаваме

$$\begin{aligned} |(f * g)(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| |g(y)|^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} dy \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p |g(y)| dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| dy \right)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

което показва, че $f * g$ е дефинирана почти навсякъде. Интегрирайки спрямо x ($f * g$ очевидно е измерима!), получаваме

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} |(f * g)(x)|^p dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p |g(y)| dy \right) dx \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| dy \right)^{\frac{p}{q}} \\ &= \|g\|_1^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p dx \right) dy = \|g\|_1^{1 + \frac{p}{q}} \|f\|_p^p, \\ \text{т.е.} \quad &\|f * g\|_p \leq \|g\|_1^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} \|f\|_p = \|g\|_1 \|f\|_p, \end{aligned}$$

с което неравенството на Йънг е доказано.

Забележка. Ако $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, то очевидно $f * g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ и неравенството на Йънг запазва своята валидност. С други думи теоремата е вярна и за $p = \infty$.

Едно твърде полезно обобщение на доказаното неравенство може да се намери в упражненията.

Упражнение 2

1. Ако f е непрекъсната и ограничена в $\mathbb{R}^n$, а $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, докажете, че $f * g$ съществува и е непрекъсната в $\mathbb{R}^n$.

2. Ако $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, докажете, че $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и освен това

$$\partial^\alpha (f * g) = \partial^\alpha f * g$$

за произволен мултииндекс α .

3. Докажете, че ако f и g са функции от $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, то и $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Проверете, че билинейното изображение $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$, действащо по правилото $\langle f, g \rangle \rightarrow f * g$ е непрекъснато.

4. В сила е следната теорема на Йънг: Ако $p, q, r \geq 1$ са три числа, свързани с равенството $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 = \frac{1}{r}$ и $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, то $f * g$ съществува и принадлежи на $L^r(\mathbb{R}^n)$, като при това е в сила неравенството

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Понеже теоремата се доказва чрез триково прилагане на обобщеното неравенство на Хьолдер /вж. /11/ стр. 166/, даваме подробно доказателство.

Най-напред ще забележим, че случаят $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ се свежда до неравенството на Хьолдер. Следователно интересен е само случаят $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$, т.е. $r < +\infty$. Да положим $h(x) = (f * g)(x)$ /след малко ще стане ясно, че тази конволюция съществува/. Имаме

$$|h(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)| |f(y)| dy.$$

Да вземем три положителни числа λ, μ, ν такива, че

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} = 1, \quad \mu > p, \quad \nu > q \quad \text{и да представим /10/ във вида}$$

$$|h(x)| \leq$$

/11/

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{\lambda(\frac{1}{p}-\frac{1}{\mu})} |g(x-y)|^{q(\frac{1}{q}-\frac{1}{\nu})} |f(y)|^{\frac{p}{\mu}} |g(x-y)|^{\frac{q}{\nu}} dy.$$

Прилагайки /1/ с показатели λ, μ, ν , получаваме

$$|h(x)| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{\lambda p(\frac{1}{p}-\frac{1}{\mu})} |g(x-y)|^{\lambda q(\frac{1}{q}-\frac{1}{\nu})} dy \right)^{\frac{1}{\lambda}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p dy \right)^{\frac{1}{\mu}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|^q dx \right)^{\frac{1}{\nu}},$$

т.е.

$$|h(x)| \leq$$

/12/

$$\leq \|f\|_p^{\frac{p}{\mu}} \|g\|_q^{\frac{q}{\nu}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{\lambda p(\frac{1}{p}-\frac{1}{\mu})} |g(x-y)|^{\lambda q(\frac{1}{q}-\frac{1}{\nu})} dy \right)^{\frac{1}{\lambda}}.$$

С цел да получим $|f(y)|^p$ и $|g(x-y)|^q$ под знака на интеграла, дефинираме λ, μ и ν чрез равенствата

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{p} - \frac{1}{\mu}, \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{q} - \frac{1}{\nu}, \quad \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} = 1,$$

т.е.

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{p}, \quad \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\nu} = \frac{1}{q}, \quad \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} = 1.$$

/13/

Като съберем първите две уравнения и от резултата извадим трето, получаваме

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1, \quad \text{т.е. } \lambda = \nu.$$

След като намерихме λ, μ и ν се определят от първите две уравнения на /13/, като при това излиза, че $\mu > p, \nu > q$.

Повдигайки /12/ в ν -та степен, като вземем пред вид, че $\lambda = \nu$, с едно интегриране получаваме

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |h(x)|^{\nu} dx &\leq \|f\|_p^{\frac{p\nu}{\mu}} \|g\|_q^{\frac{q\nu}{\nu}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p |g(x-y)|^q dy \right) dx \\ &= \|f\|_p^{\frac{p\nu}{\mu}} \|g\|_q^{\frac{q\nu}{\nu}} \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|^q dx \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p dy \\ &= \|f\|_p^{\frac{p\nu}{\mu} + p} \|g\|_q^{\frac{\nu q}{\nu} + q}, \end{aligned}$$

откъдето изваждайки ν -ти корен, стигаме до окончателния резултат.

5. Нека $K(x, y) \in L^1(\Omega \times \Omega)$, $f \in L^p(\Omega)$, където $p \geq 1$ и Ω е област в $\mathbb{R}^n$. Докажете, че ако

$$\int_{\Omega} |K(x, y)| dx \leq A, \quad \int_{\Omega} |K(x, y)| dy \leq A,$$

където A е константа, то

$$g(x) = \int_{\Omega} K(x, y) f(y) dy \in L^p(\Omega)$$

и

$$\|g\|_p \leq A \|f\|_p.$$

У п ъ т в а н е. Приложете неравенството на Хьолдер към неравенството

$$|g(x)| \leq \int_{\Omega} |K(x, y)|^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} |f(y)| dy, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

и интегрирайте.

6. Векторен вариант на неравенството на Минковски.

Нека Ω е област в $\mathbb{R}^n$, X е Банахово пространство и $f: \Omega \rightarrow X$ е непрекъсната функция с компактен носител. Да разложим Ω на краен брой измерими подмножества Δ_i , с мерки съответно $\mu(\Delta_i)$ така, че да имаме $\mu(\Delta_i \cap \Delta_j) = 0$ при $i \neq j$ и да образуваме Римановите суми

$$/14/ \quad \sum_i f(\xi_i) \mu(\Delta_i), \quad \xi_i \in \Delta_i.$$

Докажете, че когато диаметрите на областите Δ_i клонят към нула, сумите /14/ клонят към определен елемент от X , който се бележи със знака

$$\int_{\Omega} f(x) dx$$

и се нарича Риманов интеграл на f върху Ω . Докажете и неравенството

$$/15/ \quad \left\| \int_{\Omega} f(x) dx \right\| \leq \int_{\Omega} \|f(x)\| dx,$$

където с $\|\cdot\|$ сме означили нормата в X .

У п ъ т в а н е. Приложете неравенството на триъгълника към сумите /14/. След това извършете граничен преход.

Неравенството /15/ е полезно обобщение на неравенството на Минковски.

7. Нека Ω отново е област в $\mathbb{R}^n$ и нека $K: \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ е непрекъсната функция с компактен носител. Докажете, че как-

вато и да бъде сумируемата функция $f \in L^1(\Omega)$, в сила е неравенството

$$/16/ \quad \left\| \int_{\Omega} K(x, y) f(y) dy \right\|_{L_x^p(\Omega)} \leq \int_{\Omega} \|K(x, y)\|_{L_x^p(\Omega)} |f(y)| dy.$$

У п ъ т в а н е. Разгледайте функцията

$$y \rightarrow K(x, y) f(y),$$

като изображение на Ω в $L_x^p(\Omega)$. За да си осигурите непрекъснатостта на това изображение най-напред допуснете, че f е непрекъсната. После се освободете от това предположение.

8. Извlecете неравенството на Йънг

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$$

като следствие от /16/.

1.4. Съществуване на нетривиални функции в $C_0^\infty(\Omega)$. Усредняване. Разлагане на единицата

В теорията на разпределенията многократно се използва фактът, че пространството $C_0^\infty(\Omega)$ на безкрайно гладките функции с компактен носител е разположено навсякъде гъсто в пространствата $C_0(\Omega)$ и $L^p(\Omega)$, $p \geq 1$. В тази точка между другото ще установим и тези резултати.

Нека функцията $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ притежава следните свойства:

$$1/ \quad \chi(x) \geq 0,$$

$$2/ \quad \chi(x) \equiv 0 \text{ за } |x| \geq 1.$$

$$\left(\text{Припомняме, че } |x| = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right).$$

$$3/ \int_{\mathbb{R}^n} \chi(x) dx = 1.$$

Такива функции очевидно съществуват. Можем да вземем например функцията, дефинирана по следния начин:

$$/17/ \quad \chi(x) = \begin{cases} C e^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & \text{за } |x| < 1 \\ 0, & \text{за } |x| \geq 1, \end{cases}$$

където константата C избираме така, че да бъде в сила 3/. Нека сега u е произволна функция от $L^1(\Omega)$. Да продължим u като нула извън Ω и за получената функция да запазим старото означение. Накрая да фиксираме едно $\varepsilon > 0$ и да образуваме конволюцията

$$/18/ \quad u_\varepsilon(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} u(y) \chi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} u(x-\varepsilon z) \chi(z) dz = \int_{|z| \leq 1} u(x-\varepsilon z) \chi(z) dz.$$

Понякога се казва, че u_ε е получена от u чрез усредняване. Оказва се, че при $\varepsilon \rightarrow 0$ u_ε добре апроксимира u в различни функционални пространства.

Т е о р е м а 1.2. В сила са следните твърдения:

а/ Ако u се анулира почти навсякъде извън компакта $K \subset \Omega$ и $\varepsilon > 0$ е по-малко от разстоянието $\rho(K, \partial\Omega)$ между K и границата на Ω , то $u_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$.

б/ Ако $u \in C_b(\Omega)$, при $\varepsilon \rightarrow 0$ разността $u_\varepsilon - u$ ни равномерно към u в Ω .

в/ Ако $u \in L^p(\Omega)$, $p \geq 1$, $\{u_\varepsilon\} \rightarrow u$ в $L^p(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Д о к а з а т е л с т в о. а/ Ако u се анулира почти навсякъде извън K , един поглед върху /17/ показва, че u_ε се анулира тъждествено за всички x , за които $\rho(x, K) \geq \varepsilon$. Диференцирайки под знака на интеграла получаваме

$$\partial^\alpha u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_K u(y) \partial_x^\alpha \chi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy,$$

което показва, че за $\varepsilon < \rho(K, \partial\Omega)$, u_ε наистина принадлежи на $C_0^\infty(\Omega)$.

б/ Нека $u \in C_b(\Omega)$ и нека $\text{supp } u = K \subset \Omega$. Имаме

$$u_\varepsilon(x) - u(x) = \int_{|y| \leq 1} (u(x-\varepsilon y) - u(x)) \chi(y) dy.$$

Като вземем пред вид, че в компакта

$$K_\eta = \{x \in \mathbb{R}^n, \rho(x, K) \leq \frac{1}{2} \rho(K, \partial\Omega)\}$$

функцията u е равномерно непрекъсната, за всяко $\eta > 0$ можем да намерим такова $\varepsilon_0 > 0$, че от $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и $|y| \leq 1$ да следва $|u(x-\varepsilon y) - u(x)| < \eta$, за всяко $x \in K$. Следователно

$$|u_\varepsilon(x) - u(x)| \leq \int_{|y| \leq 1} |u(x-\varepsilon y) - u(x)| \chi(y) dy \leq \eta \int_{|y| \leq 1} \chi(y) dy$$

$$= \eta,$$

с което и б/ е доказано.

в/ Нека сега $u \in L^p(\Omega)$, $p \geq 1$. Както отбелязахме, ще продължим u като нула извън Ω и ще запазим старото означение. Най-напред, прилагайки неравенството на Йънг към конволюцията

$$u_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(y) \frac{1}{\varepsilon^n} \chi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy = (u * \chi_\varepsilon)(x),$$

където

$$\chi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

получаваме

$$/19/ \quad \|u_\varepsilon\|_p \leq \|u\|_p \|\chi_\varepsilon\|_1 = \|u\|_p,$$

защото очевидно $\|\chi_\varepsilon\|_1 = 1$. Сега вече не е трудно да покажем, че $\|u_\varepsilon - u\|_p \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Нека $\delta > 0$ е фиксирано. Да изберем функцията $v \in C_0(\Omega)$ по такъв начин, че да имаме $\|u - v\|_p < \frac{\delta}{3}$ /че такова v съществува, следва лесно от дефиницията на $L^p(\Omega)$ /. След това да вземем $\varepsilon_0 > 0$ толкова малко, че за $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ да имаме $\|v_\varepsilon - v\|_p < \frac{\delta}{3}$. Това може да се направи, защото според а/ v_ε клони равномерно към v и носители на v_ε се съдържат в един и същ компактен. След всичко това /19/ и неравенството на триъгълника ни дават

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon - u\|_p &\leq \|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_p + \|v_\varepsilon - v\|_p + \|v - u\|_p \\ &\leq \|u - v\|_p + \frac{2\delta}{3} < \delta, \text{ за } \varepsilon < \varepsilon_0, \end{aligned}$$

с което доказателството е завършено.

С л е д с т в и е. Множеството $C_0^\infty(\Omega)$ на безкрайно гладките функции с компактен носител е навсякъде гъсто в $L^p(\Omega)$.

Д о к а з а т е л с т в о. Нека $u \in L^p(\Omega)$ и v е непрекъснатата функция с компактен носител такава, че $\|u - v\|_p < \delta$. Понеже за достатъчно малко $\varepsilon > 0$ $v_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ и

$$\|v - v_\varepsilon\|_p < \frac{\delta}{3}, \text{ получаваме}$$

$$\|u - v_\varepsilon\|_p \leq \|u - v\|_p + \|v - v_\varepsilon\|_p < 2\delta$$

и твърдението е доказано.

От доказаната теорема произтича и следният важен резултат:

Т е о р е м а 1.3. Нека K е произволно компактно подмножество на Ω . Съществува функция $u \in C_0^\infty(\Omega)$, която е тъждествено равна на единица в достатъчно малка околност на K .

Д о к а з а т е л с т в о. Нека $\delta < \frac{1}{2} \rho(K, \partial\Omega)$ и $K_\delta = \{x, x \in \Omega, \rho(x, K) \leq \delta\}$. Да положим

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x \in K_\delta \\ 0, & x \notin K_\delta \end{cases}$$

и да образуваме конволюцията

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{K_\delta} \chi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy = u * \chi_\varepsilon,$$

където χ е камбановидната функция, дефинирана чрез /17/. Очевидно е, че ако $\varepsilon < \delta$, то u_ε притежава необходимите свойства.

Сега сме готови да докажем една теорема за разлагане на единицата. Макар и частен случай от по-общ резултат, тя на първо време ще бъде достатъчна за нашите цели.

Т е о р е м а 1.4. Нека $\{\Omega_j\}$, $j = 1, \dots, k$ са области в $\mathbb{R}^n$, които покриват компакта K , т.е.

$$K \subset \bigcup_{j=1}^k \Omega_j.$$

В такъв случай съществуват функции $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega_j)$, $0 \leq \varphi_j \leq 1$, такива, че

$$\sum_{j=1}^k \varphi_j(x) \leq 1 \text{ в } \mathbb{R}^n$$

и, което е по-важно,

$$\sum_{j=1}^k \varphi_j(x) = 1$$

в достатъчно малка околност на компакта K . За функциите $\{\varphi_j\}$ казваме, че образуват разлагане на единицата около K , подчинено на покритието $\{\Omega_j\}$.

Доказателство. За всяко $x \in K$ съществува $j \leq k$ такова, че $x \in \Omega_j$. Да вземем толкова малко $\varepsilon = \varepsilon(x) > 0$, че не само кълбото $S_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n, |y - x| < \varepsilon\}$, но и кълбото $S_{2\varepsilon}(x)$ с два пъти по-голям радиус да се съдържа в Ω_j . По този начин получаваме отворено покритие $\bigcup_{x \in K} S_\varepsilon(x)$ на K .

Да изберем крайно подпокритие $\bigcup_\rho S_{\varepsilon_\rho}(x_\rho)$ и да положим

$$K_j = \bigcup_{x_\rho \in \Omega_j} \overline{S_{\varepsilon_\rho}(x_\rho)}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Множеството K_j е компактно и очевидно се съдържа в Ω_j . Следователно, прилагайки теорема 1.3, можем да построим функция

$\psi_j \in C_0^\infty(\Omega_j)$, $j = 1, 2, \dots, k$, тъждествено равна на единица около K_j . Да положим

$$\varphi_1 = \psi_1, \quad \varphi_2 = \psi_2(1 - \psi_1), \dots, \quad \varphi_j = \psi_j \prod_{s=1}^{j-1} (1 - \psi_s) \dots$$

Очевидно имаме

$$\begin{aligned} \varphi_1 + \varphi_2 &= \psi_1 + \psi_2(1 - \psi_1) = 1 - (1 - \psi_1) + \psi_2(1 - \psi_1) \\ &= 1 - (1 - \psi_1)(1 - \psi_2) \end{aligned}$$

и изобщо

$$\sum_{j=1}^k \varphi_j = 1 - \prod_{j=1}^k (1 - \psi_j),$$

както можем да се убедим индуктивно.

Понеже $1 - \psi_j$ се анулира тъждествено около K_j и $\{K_j\}$ е покритие на K , теоремата е доказана.

§ 2. Основни операции с разпределенията

2.1. Общи бележки и примери

Нека Ω е област в $\mathbb{R}^n$ и

$$K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \dots \subset \Omega, \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j = \Omega,$$

е редица от компакти, които изчерпват Ω . В 5.2 означиме строгата индуктивна граница $\lim_{j \rightarrow \infty} C_0^\infty(K_j)$ с $D(\Omega)$, а ли-

нейното пространство, образувано от непрекъснатите линейни функционали $u: D(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ с $D'(\Omega)$. Елементите на $D'(\Omega)$ нарекохме разпределения, а тези от $\mathcal{F}'$ - разпределения с умерен ръст /Дефиниция 5.1 - 5.5/. В съветската литература разпределенията се наричат обобщени функции.

Оттук нататък, за разлика от 5.3, стойността на разпределението u върху елемента $\varphi \in D(\Omega)$ (соответно $\varphi' \in D'$) ще означаваме с (u, φ) .

Следващата теорема е непосредствено следствие от дефиницията. Читателите, които не искат да изучават първа глава, могат да я схващат като дефиниция.

Т е о р е м а 2.1. Един линеен функционал $u : D(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ е непрекъснат /т.е. е разпределение/ тогава и само тогава, когато притежава някое от следните свойства:

а/ За всеки компакт $K \subset \Omega$ съществува константа C_K и естествено число m такива, че е в сила неравенството

$$1/ |(u, \varphi)| \leq C_K \sum_{|\alpha| \leq m} \max_K |\partial^\alpha \varphi(x)|, \quad \varphi \in C_0^\infty(K).$$

б/ За всяка редица $\{\varphi_n\} \subset D(\Omega)$, която клони към нула в $D(\Omega)$, имаме

$$(u, \varphi_n) \rightarrow 0.$$

Д о к а з а т е л с т в о на а/. Нека $u \in D'(\Omega)$. Тогава рестрикциите $u|_{C_0^\infty(K_n)}$, $n = 1, 2, \dots$ са непрекъснати

/теорема 5.1, стр. 128/. Това означава, че за всяко n съществува полунорма $p_{K_n, m(K_n)}$, за която имаме

$$2/ |(u, \varphi)| \leq C_n p_{K_n, m(K_n)}(\varphi), \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(K_n).$$

Нека сега $K \subset \Omega$ е произволен компакт и нека n_0 е толкова голямо, че $K \subset K_{n_0}$. Тогава $C_0^\infty(K) \subset C_0^\infty(K_{n_0})$ и 2/ е в сила за всяко $\varphi \in C_0^\infty(K)$. Вземайки $C_K = C_{n_0}$ и $m(K) = m(K_{n_0})$, получаваме а/.

Обратното е очевидно. Ако а/ е в сила, рестрикциите $u|_{C_0^\infty(K_n)}$ са непрекъснати и според теорема 5.1 $u \in D'(\Omega)$.

Д а д о к а ж е м б/. От $u \in D'(\Omega)$ очевидно следва, че $(u, \varphi_n) \rightarrow 0$ за всяка редица, която клони към нула

в $D(\Omega)$. Трябва да докажем, че това условие е и достатъчно - твърдение, което става очевидно като вземем пред вид теорема 5.1 и обстоятелството, че пространствата $C_0^\infty(K_n)$ са метризуеми. Стремейки се обаче към изложение максимално независимо от глава първа, ние ще докажем директно, че от б/ следва а/.

И така, нека $\{\varphi_n\} \rightarrow 0$ в $D(\Omega)$. Това означава следното:

1/ Носителите на φ_n , $n = 1, 2, \dots$ се съдържат в един и същи компакт $K \subset \Omega$ /срав. с теорема 5.4, стр. 134/ и

2/ Всяка от редиците $\{\partial^\alpha \varphi_n\}$,

които се получават, когато мултииндексът α се мени, е равномерно сходяща в Ω .

Да допуснем сега, че б/ е на лице, но въпреки това а/ не е вярно. Това означава, че съществува поне един компакт $K_0 \subset \Omega$, за който константи C_{K_0} и $m(K_0)$ не съществуват. В частност, за $C_{K_0} = N$, $m(K_0) = N$ оценката б/ няма да бъде вярна, т.е. ще съществува поне една функция $\varphi_N \in C_0^\infty(K_0)$ такава, че

$$|(u, \varphi_N)| > N \sum_{|\alpha| \leq N} \max_{K_0} |\partial^\alpha \varphi_N(x)|.$$

Да вземем $N = 1, 2, 3, \dots$ и да разгледаме редицата общ член

$$\psi_N = \frac{1}{N} \frac{\varphi_N}{\sum_{|\alpha| \leq N} \max_{K_0} |\partial^\alpha \varphi_N(x)|}.$$

Очевидно имаме $\{\psi_N\} \rightarrow 0$ в $D(\Omega)$ /обърнете внимание, че $\psi_N \in C_0^\infty(K_0)$, но въпреки това $|(u, \psi_N)| > 1$.

Полученото противоречие доказва теоремата.

З а б е л е ж к а. Теорема 2.1 още веднъж показва, че пространството $D'(\Omega)$ не зависи от избора на редицата $\{K_n\}$.

Сега ще разгледаме няколко типични примера.

Пример 1. Нека $u \in L_{loc}(\Omega)$. На всяка такава функция съпоставяме линейния функционал

$$/3/ \quad (u, \varphi) = \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

който, както сега ще покажем, се оказва разпределение. Наистина нека $\{\varphi_j\} \rightarrow 0$ в $\mathcal{D}(\Omega)$. Следователно съществува компакт $K \subset \Omega$, такъв, че $\text{supp } \varphi_j \subset K$ за всяко j .

Очевидното неравенство

$$|(u, \varphi_j)| \leq \left(\int_K |u(x)| dx \right) \max_K |\varphi_j|$$

показва, че (u, φ) наистина е разпределение.

Функцията u се нарича **плътност** на разпределението /3/. Следващата лема показва, че едно разпределение не може да има повече от една плътност.

Лема 2.1. Нека $u \in L_{loc}(\Omega)$, $v \in L_{loc}(\Omega)$ и нека

$$\int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx = \int_{\Omega} v(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Тогав $u = v$ почти навсякъде в Ω .

Доказателство. Нека Ω_1 е ^{ограничена} област, която се съдържа в Ω заедно със своята затворена обвивка. (В такъв случай ще пишем $\Omega_1 \Subset \Omega$.) Нека Ω_2 е подобласт на Ω , за която

$$\Omega_1 \Subset \Omega_2 \Subset \Omega.$$

Да дефинираме функцията

$$w = \begin{cases} u - v, & x \in \Omega_2 \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_2. \end{cases}$$

Очевидно е, че $w \in L^1(\Omega_2)$ и следователно според теорема 1.2, в /стр.175/ имаме $\|w_\varepsilon - w\|_{L^1(\Omega_2)} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Разбира се, както показва очевидното неравенство

$$\|w_\varepsilon - w\|_{L^1(\Omega_1)} \leq \|w_\varepsilon - w\|_{L^1(\Omega_2)}$$

същият резултат е в сила и в $L^1(\Omega_1)$.

Да вземем сега $\varepsilon > 0$ по-малко от разстоянието между Ω_1 границата на Ω_2 . Тогав, ако χ е камбановидната функция, използвана в доказателството на теорема 1.2 /вж. /17/, стр. 174/ за $x \in \Omega_1$ полагаме

$$\psi_\varepsilon(y) = \frac{1}{\varepsilon^n} \chi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \in C_0^\infty(\Omega_2),$$

получаваме

$$w_\varepsilon(x) = \int_{\Omega} (u(y) - v(y)) \psi_\varepsilon(y) dy = (u, \psi_\varepsilon) - (v, \psi_\varepsilon) = 0, \quad (x \in \Omega_1)$$

Излезе, че w_ε се анулира тъждествено в Ω_1 , откъдето следва

$$\|w\|_{L^1(\Omega_1)} = \|w_\varepsilon - w\|_{L^1(\Omega_1)} \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

т.е. $w = 0$ почти навсякъде в Ω_1 . Понеже Ω_1 беше произволна компактна подобласт на Ω , същото заключение важи и в Ω .

С това лема 2.1 е доказана.

Оттук нататък няма да правим разлика между разпределенията и техните плътности, ако такива съществуват. В частност, според това условие локално сумируемите функции, които се различават върху множества с мярка нула, ще считаме за неразлични.

В същност теорията на разпределенията е съдържателна именно защото далеч не всяко разпределение притежава плътност.

Пример 2. Нека $x_0 \in \Omega$. Да разгледаме линейния функционал δ_{x_0} дефиниран чрез равенството

$$(\delta_{x_0}, \varphi) = \varphi(x_0), \quad \varphi \in D(\Omega).$$

Очевидно е, че $\delta_{x_0} \in D'(\Omega)$. Това разпределение се нарича "функция на Дирак", съсредоточена в точката x_0 . Ако $x_0 = 0$, говорим просто за функция на Дирак и пишем δ вместо δ_0 . Тази "функция" е била "дефинирана" в тридесетте години от знаменития английски физик по следния начин:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R}^1, \quad x \neq 0 \\ +\infty, & x = 0 \end{cases}$$

и освен това $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$. Естествено от математическо

гледище такава функция не съществува. От друга страна, Дирак е показал, че някои формални манипулации с δ -функцията дават до верни резултати. Желанието да се включи тази функция в рамките на една съдържателна теория е било един от импулсите, довели до теорията на разпределенията.

Пример 3. Функцията $x \rightarrow \frac{1}{x}$, дефинирана в $\mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$ не е локално интегрируема и функционалът

$$\varphi \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

не е дефиниран в цялото пространство $D(\mathbb{R}^1)$. Ето защо, оставайки в рамките на пример 1, не можем да съпоставим на тази функция нито едно разпределение от $D'(\Omega)$. Възможна е обаче една естествена модификация. Да разгледаме функционала

$$\left(\sqrt{p} \frac{1}{x}, \varphi \right) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx, \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^1).$$

Лесно се проверява, че тази дефиниция е коректна. Наистина нека $\text{supp } \varphi \subset [-R, R]$. В такъв случай имаме

$$\begin{aligned} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx &= \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} \frac{\varphi(x)}{x} dx \\ &= \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} \frac{\varphi(0)}{x} dx = \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx, \end{aligned}$$

защото равенството

$$\int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} \frac{\varphi(0)}{x} dx = \varphi(0) \left(\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^R \frac{dx}{x} \right) = 0$$

е очевидно. Понеже интегралът

$$\int_{-R}^R \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx$$

е сходящ, стигаме до равенството

$$1/4 \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{-R}^R \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx,$$

което показва, че дефиницията на функционала $\sqrt{p} \frac{1}{x}$ е коректна. Изхождайки от 1/4 за $\varphi \in C_0^\infty(-R, R)$ получаваме оценката

$$1/5 \quad \left| \left(\sqrt{p} \frac{1}{x}, \varphi \right) \right| \leq 2R \max_{|x| \leq R} |\varphi'(x)|,$$

с което проверката, че $\sqrt{p} \frac{1}{x} \in D'(\mathbb{R}^1)$ е завършена.

З а б е л е ж к а. Ако f е непрекъсната в $[-1, 1] \setminus 0$ и границата

$$l = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} f(x) dx$$

съществува, казваме, че $\int_{-1}^1 f(x) dx$ притежава главна стойност в смисъл на Коши и пишем

$$l = V. p \int_{-1}^1 f(x) dx.$$

Този термин обяснява означението $Vp \frac{1}{x}$, което възприехме. Често се използва и означението $P(\frac{1}{x})$ за същия функционал.

У п р а ж н е н и е 1

1. Докажете неравенството /5/. Понеже φ може да приема и комплексни стойности, теоремата за крайните нараствания в нейната стандартна форма е неприложима.

2. Докажете равенството

$$\left(Vp \frac{1}{x}, \varphi\right) = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx.$$

Покажете, че този функционал е от $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$.

3. Докажете, че разпределението

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$$

не притежава плътност.

4. Нека $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^1)$. Докажете, че функционалът

$$\varphi \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi'(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$$

е разпределение.

5. Убедете се, че функционалът

$$\left(P \frac{1}{x^2}, \varphi\right) \stackrel{\text{def}}{=} V. p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2} dx, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$$

е коректно дефиниран и представлява разпределение от $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$.

6. Докажете, че редът $\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k$ е слабо сходящ в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$ и

следователно дефинира разпределение от това пространство.

7. Докажете, че функцията $f(x) = e^{x^2}$, $x \in \mathbb{R}^1$ не се съдържа в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$. Въпреки това, убедете се, че съществува

$g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$ такава, че $|g(x)| = e^{x^2}$, за $|x| \geq 1$.

У п ъ т в а н е. Функциите $2xe^{x^2}$ и $e^{ie^{x^2}}$ се съдържат в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$.

2.2. Ред, носител и сингулярен носител на едно разпределение

Д е ф и н и ц и я 2.1. Елементите от $\mathcal{D}'(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, които имат следното свойство: съществува естествено m такова, че за всеки компакт $K \subset \Omega$ е в сила оценката

$$|(\varphi, \varphi)| \leq C_K \sum_{|\alpha| \leq m} \max_{\Omega} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \quad \varphi \in C_0^\infty(K)$$

с подходяща константа C_K , се наричат разпределения от **к р а е н** р е д. Най-малкото m , за което /6/ е в сила, се нарича **р е д** на разпределението.

Разпределенията от краен ред образуват линейно подпространство на $\mathcal{D}'(\Omega)$, което се означава с $\mathcal{D}_F'(\Omega)$.

Далеч не всички разпределения са от краен ред. Ето един типичен пример: разпределението:

$$(u, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi^{(\nu)}(\nu), \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^1)$$

очевидно принадлежи на $D'(\mathbb{R}^1)$ но не се съдържа в $D'_F(\mathbb{R}^1)$.

Линейните непрекъснати функционали в $C_0(\Omega)$ /вж. упр. към 5.2, стр.141/ се наричат мерки на Радон. Радон-вите мерки и разпределенията от нулев ред по същество съвпадат. Наистина, ако $u \in D'(\Omega)$ е разпределение от нулев ред, за всеки компактен $K \subset \Omega$ е в сила оценката

$$|/| \quad |(u, \varphi)| \leq C_K \max_{x \in K} |\varphi(x)|, \quad \varphi \in C_0^\infty(K)$$

която позволява по непрекъснатост да го продължим до еднозначно определена мярка на Радон. Обратно, всяка такава мярка удовлетворява /7/ с подходяща константа C_K и следователно е разпределение от нулев ред.

Т е о р е м а 2.2. Всички разпределения от $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ са от краен ред.

За да стане ясен смисълът на това твърдение, трябва да кажем няколко думи.

Очевидното включване $D(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ като множества/показва, че всеки функционал от $\mathcal{S}'$ е дефиниран и в $D'(\mathbb{R}^n)$. Остава да проверим, че той е непрекъснат в $D(\mathbb{R}^n)$. Нека $u \in \mathcal{S}'$. Тогава съществува полунорма от вида

$$q_{m,k}(\varphi) = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ |\alpha| \leq k}} (1 + |x|^2)^m |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

такава, че да имаме

$$|/| \quad |(u, \varphi)| \leq C q_{m,k}(\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{S}$$

с подходяща константа C . Понеже от $\{\varphi_\nu\} \rightarrow 0$ в $D(\mathbb{R}^n)$ веднага следва, че $q_{m,k}(\varphi_\nu) \rightarrow 0$, от /8/ и от теорема 2.1.6/, стр. 180 показват, че $u \in D'(\mathbb{R}^n)$.

Остава да покажем, че u е от краен ред. Нека K е компактен в $\mathbb{R}^n$. Тогава съществува такова $R > 0$, че от $x \in K$ следва $|x| \leq R$. Сега очевидното неравенство

$$q_{m,k}(\varphi) \leq (1+R^2)^m \sum_{|\alpha| \leq k} \max_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \quad \varphi \in C_0^\infty(K)$$

и /8/ показват, че наистина u , разглеждано като елемент от $D'(\mathbb{R}^n)$ има ред ненадминаващ k .

И така, ние установихме, че $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset D'(\mathbb{R}^n)$. Оказва се обаче, че всеки елемент от $\mathcal{S}'$ се определя еднозначно от своята рестрикция върху $D(\mathbb{R}^n)$, така че можем да отъждествим $\mathcal{S}'$ с подпространството на $D'(\mathbb{R}^n)$, образувано от разпределенията, допускащи оценка от вида /8/. Доказателството на това твърдение почива върху следната

Л е м а 2.2. Пространството $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ е навсякъде гъсто в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Д о к а з а т е л с т в о . Нека $\varphi \in \mathcal{S}$. Да означим с ψ функцията от $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такава, че $\psi(x) = 1$ за $|x| \leq 1$ и $\psi(x) = 0$ за $|x| \geq 2$. Да положим $f_\varepsilon(x) = \varphi(x) \psi(\varepsilon x)$, където $\varepsilon \in (0,1)$. Ясно е, че $f_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ще покажем, че $f_\varepsilon \rightarrow \varphi$ в $\mathcal{S}$. Да разгледаме разликата

$$f_\varepsilon(x) - \varphi(x) = \varphi(x) (\psi(\varepsilon x) - 1).$$

Трябва да докажем, че за всяка полунорма

$$q_{m,\alpha}(f) = \sup_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^m |\partial^\alpha f(x)|$$

имаме

$$q_{m,\alpha}(f_\varepsilon - \varphi) \rightarrow 0, \quad \text{когато } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Понеже при всяко диференциране на $\psi(\varepsilon x)$ излиза по едно ε , в сила е неравенството

$$\sup_{\mathbb{R}^n} |\partial^\beta (\psi(\varepsilon x) - 1)| \leq \sup_{\mathbb{R}^n} |\partial^\beta \psi(x)| \varepsilon^{|\beta|}$$

за всеки мултииндекс β . Имайки пред вид това неравенство, с помощта на формулата на Лайбниц /вж. стр. 207/ получаваме

$$\begin{aligned} q_{m,\alpha}(f_\varepsilon - \varphi) &\leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \sup_{|x| \geq N} (1+|x|^2)^m |\partial^\beta \varphi(x)| |\partial^{\alpha-\beta}(\psi(\varepsilon x) - 1)| \\ &\leq \sum_{\beta \leq \alpha} C_{\alpha,\beta} \binom{\alpha}{\beta} \sup_{|x| \geq N} (1+|x|^2)^m |\partial^\beta \varphi(x)| \\ &+ \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \sup_{|x| \leq N} (1+|x|^2)^m |\partial^\beta \varphi(x)| |\partial^{\alpha-\beta}(\psi(\varepsilon x) - 1)|. \end{aligned}$$

Нека сега $\delta > 0$ е произволно. Да вземем $N = N(\delta)$ толкова голямо, че за всяко $\beta \leq \alpha$ да имаме

$$\sup_{|x| \geq N} (1+|x|^2)^m |\partial^\beta \varphi(x)| < \delta$$

и да го фиксираме /вж. доказателството на /9/, стр.156/.

В такъв случай за $\varepsilon < \frac{1}{N}$ и $|x| \leq N$ получаваме $|\varepsilon x| < 1$ и втората сума се анулира тъждествено /спомнете си дефиницията на ψ /. Следователно за $\varepsilon < \frac{1}{N}$ /9/ ни дава

$$q_{m,\alpha}(f_\varepsilon - \varphi) \leq \delta \sum_{\beta \leq \alpha} C_{\alpha,\beta} \binom{\alpha}{\beta},$$

с което всичко е доказано, защото константата до δ не зависи от ε .

Упражнение 2

1. Докажете, че функционалът

$$(u, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}\left(\frac{1}{n}\right), \quad \varphi \in \mathcal{D}(0,1)$$

е разпределение от $\mathcal{D}'(0,1)$, но не е от краен ред.

✓ 2. Докажете, че $\sqrt[p]{p} \frac{1}{x}$ е от първи ред.

У п ъ т в а н е. Неравенство /5/ /стр.185/ показва, че редът на $\sqrt[p]{p} \frac{1}{x}$ не надминава 1. Допуснете, че то е от ред нула и с помощта на /7/ го продължете до непрекъснат функционал ℓ в $\mathcal{C}_0(-\infty, +\infty)$. След това разгледайте функцията

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{за } x \leq 0, \\ x^\alpha, & \text{за } 0 \leq x \leq 1, \alpha > 0 \\ 2-x, & \text{за } 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{за } x \geq 2, \end{cases}$$

и използвайки конкретния вид на $\sqrt[p]{p} \frac{1}{x}$, покажете, че

$$\ell(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx = \int_0^1 x^{\alpha-1} dx + \int_1^2 (2-x)x^{-1} dx = \frac{1}{\alpha} x^\alpha \Big|_0^1 - \int_1^2 \ln x dx = \frac{1}{\alpha} - \int_1^2 \ln x dx$$

С помощта на това равенство, избирайки α достатъчно малко, получите противоречие със /7/.

3. В тази задача с $\mathcal{C}_0(\Omega)$ означаваме линейното пространство от функциите $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$ с компактен носител с неговата естествена топология. Един линеен функционал

$$f: \mathcal{C}_0(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^1$$

се нарича положителен, ако от $\varphi \geq 0$, $\varphi \in \mathcal{C}_0(\Omega)$ следва, че $f(\varphi) \geq 0$. Докажете, че всеки положителен функционал е мярка на Радон.

*

* *

Понеже разпределенията са функционали, не можем да говорим за стойност на дадено разпределение $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ в някаква точка от Ω . Оказва се обаче, че можем да сравняваме разпределенията в отворените подмножества на Ω .

Дефиниция 2.2. Нека u и v са две разпределения от $D'(\Omega)$. Казваме, че $u = v$ в отвореното подмножество O на Ω тогава и само тогава, когато

$$(u, \varphi) = (v, \varphi)$$

за всяко $\varphi \in C_0^\infty(O)$.

В частност, в съгласие с нашето условие да отъждествяваме разпределенията с техните плътности /ако имат такива/ казваме, че $u \in D'(\Omega)$ и $v \in L_{loc}(\Omega)$ съвпадат в O (O — отворено подмножество на Ω), ако за всяко $\varphi \in C_0^\infty(O)$ имаме

$$(u, \varphi) = \int_O v \varphi dx.$$

Теорема 2.3. Нека $u \in D'(\Omega)$ и $v \in D'(\Omega)$ съвпадат във всяко от отворените множества $O = \bigcup_{j \in J} O_j$, $j \in J$. Тогава те съвпадат и в отвореното множество O .

Доказателство. Без ограничение на общността можем да предполагаме, че O_j , $j \in J$ са области, защото всяко отворено множество е сума от области. Нека $\varphi \in C_0^\infty(O)$ е произволно и нека $K = \text{supp } \varphi$. Понеже K е компактно, съществуват краен брой области $\{O_{j_v}\}$, които го покриват. Нека $\{\psi_v\}$ е разлагане на единицата около K , подчинено на покритието $\{O_{j_v}\}$. Тъй като

$$(u, \varphi) = (u, \varphi \sum_v \psi_v) = (u, \sum_v \varphi \psi_v) = \sum_v (u, \varphi \psi_v)$$

$$= \sum_v (v, \varphi \psi_v) = (v, \sum_v \varphi \psi_v) = (v, \varphi),$$

равенството $u = v$ в O е установено.

Тази теорема ни дава възможност да въведем още едно важно понятие.

Дефиниция 2.3. Допълнението на най-голямото отворено подмножество на Ω , в което u се анулира, се нарича носител на u и се бележи със $\text{supp } u$.

Забележка. Непосредствено от дефиницията на $\text{supp } u$ произтича следното твърдение: ако $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ и $\text{supp } u \cap \text{supp } \varphi = \emptyset$, то $(u, \varphi) = 0$. Наистина от условието следва, че $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \setminus \text{supp } u)$ и твърдението става очевидно. От тази забележка непосредствено произтича следният резултат:

Всички разпределения с компактен носител са от краен ред.

Наистина нека $u \in D'(\Omega)$ и $\text{supp } u$ е компактно подмножество на Ω . По-нататък нека $g \in C_0^\infty(\Omega)$ е функция, тъждествено равна на единица в някаква околност на компакта $\text{supp } u$. За произволна функция $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ получаваме

$$(u, \varphi) = (u, g\varphi) + (u, (1-g)\varphi) = (u, g\varphi),$$

защото $\text{supp } u \cap \text{supp } (1-g)\varphi = \emptyset$ и следователно $(u, (1-g)\varphi) = 0$. Нека $K \subset \Omega$ е компактен, който съдържа $\text{supp } g$. Понеже за всяко $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ имаме $g\varphi \in C_0^\infty(K)$, получаваме

$$\begin{aligned} |(u, \varphi)| &= |(u, g\varphi)| \leq C_K \sum_{|\alpha| \leq m(K)} \max |\partial^\alpha (g\varphi)| \\ &\leq C C_K \sum_{|\alpha| \leq m(K)} \max |\partial^\alpha \varphi(x)|, \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \end{aligned}$$

и нашето твърдение е доказано.

Упражнение 3

1. Нека $u \in D'(\Omega)$ е разпределение с плътност $f \in C(\Omega)$. Докажете, че $\text{supp } u$ и $\text{supp } f \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha \in \Omega, f(\alpha) \neq 0\}$ съвпадат.

2. Нека $f \in L_{loc}(\Omega)$ и u_f е разпределението с плътност f . Носителят на u_f се нарича носител на f . Характеризирайте $\text{supp } u_f$ директно чрез f , без да използвате u_f .

Следващото родствено понятие играе основна роля при изследването на гладкостта на решенията на диференциалните уравнения.

Д е ф и н и ц и я 2.4. Нека $u \in D'(\Omega)$ и $\mathcal{O}_\infty$ е най-голямото отворено множество, в което u съвпада с някаква безкрайно гладка функция /не е изключено $\mathcal{O}_\infty$ да бъде празно/. Множеството $\Omega \setminus \mathcal{O}_\infty$ се нарича **с и н г у л я р е н н о с и т е л** на u и се бележи със *sing supp* u .

За да оправдаем тази дефиниция, трябва да се убедим, че $\mathcal{O}_\infty$ съществува. Нека $\{Q_j\}$, $j \in J$ са отворени множества и нека $u = \varphi_j$, $\varphi_j \in C^\infty(Q_j)$ за всяко $j \in J$. Ще покажем, че u съвпада с някаква безкрайно гладка функция и в тяхното обединение $\mathcal{O} = \bigcup_{j \in J} Q_j$.

Достатъчно е да разгледаме частния случай $\mathcal{O} = Q_1 \cup Q_2$, където Q_1 и Q_2 са области. Нека $Q_1 \cap Q_2 = G$. Понеже $u = \varphi_i \in C^\infty(Q_i)$, $i = 1, 2, \dots$ за $\psi \in C_0^\infty(G)$, получаваме

$$(u, \psi) = (\varphi_1, \psi) = (\varphi_2, \psi), \text{ т.е./лема 2.1/}$$

$\varphi_1 = \varphi_2$ почти навсякъде в G . Понеже φ_1 и φ_2 са непрекъснати, $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ в G . Следователно функцията

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_1, & x \in Q_1, \\ \varphi_2, & x \in Q_2, \end{cases}$$

принадлежи на $C^\infty(Q_1 \cup Q_2)$ и според теорема 2.3 $u = \varphi$ в тази област.

Сега вече е ясно, че търсеното отворено множество $\mathcal{O}_\infty$ е обединението на всевъзможните отворени множества, във всяко от които u съвпада с някаква гладка функция.

У п р а ж н е н и е 4

1. Проверете, че функционалите

$$(u, \varphi) = \int_{|x| \leq 1} \varphi(x) dx, \quad (u, \varphi) = \int_{|x|=1} \varphi(x) dx,$$

$$(u, \varphi) = \int_{|x| \leq 1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) dx$$

са разпределения от $D'(\mathbb{R}^n)$ и намерете техните носители и сингулярни носители. От какъв ред са тези разпределения?

2. Докажете, че разпределенията

$$\left(P\left(\frac{1}{x^2}\right), \varphi\right) = V.p \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2} dx$$

и

$$\left(V.p \frac{1}{x}, \varphi\right) = V.p \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

съвпадат съответно с функциите $\frac{1}{x^2}$ и $\frac{1}{x}$ в $\mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$. Убедете се, че дефиницията на $P\left(\frac{1}{x^2}\right)$ е коректна и че по този начин наистина се дефинира разпределение. Определете неговия ред.

3. Смисълът на първото твърдение в задача 2 става по-ясен след като разполагаме със следната

Д е ф и н и ц и я. Нека Ω е област в $\mathbb{R}^n$ и $x_0 \in \Omega$. Нека $f: \Omega \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ е непрекъснатата функция. Всяко разпределение $u \in D'(\Omega)$, което съвпада с f в $\Omega \setminus \{x_0\}$ се нарича **р е г у л я р и з а ц и я** на f .

Например, ако $f \in C(\mathbb{R}^1 \setminus \{0\})$ и близо до $x = 0$ удовлетворява неравенството

$$|f(x)| \leq \frac{C}{|x|^m}, \quad C = \text{const}, \quad m - \text{естестве-}$$

но число,

функционалът

$$(u, \varphi) = \int_{-1}^1 f(x) \left(\varphi(x) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} x^j \right) dx + \int_{|x| \geq 1} f(x) \varphi(x) dx$$

регуляризира f . Проверете!//

Намерете още една регуляризация на f ! Каква е връзката между двете регуляризации?

4. Докажете, че не съществува разпределение от $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$, което съпада с $e^{\frac{1}{x^2}}$ в $\mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$.

Тази задача показва, че не всяка функция допуска регуляризиране. /За по-общ резултат вижте [21], зад.4.15, стр.45./

Решение. Ще докажем малко по-общ резултат: не съществува разпределение от $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$, което съпада с $e^{\frac{1}{x^2}}$ за $x > 0$.

Да допуснем противното и да означим с u едно такова разпределение. Да разгледаме функцията

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{2x}}, & x > 0, \end{cases}$$

която очевидно е от $C^\infty(\mathbb{R}^1)$. По-нататък нека $e(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ е такова, че

$$e(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 2 \\ 0, & x \geq 3 \end{cases}$$

Да положим $h = eg$. Ясно е, че $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$. Освен това $h_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} h(x - \frac{1}{n}) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ и за неговия носител имаме

$$\text{supp } h_n \subset [\frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n}].$$

Веднага се вижда, че $h_n \rightarrow h$ в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$.

Ето защо

$$(u, h_n) = \int_{\frac{1}{n}}^{3 + \frac{1}{n}} e^{\frac{1}{x^2}} h_n(x) dx \rightarrow (u, h),$$

т.е.

$$\int_{\frac{1}{n}}^{3 + \frac{1}{n}} e^{\frac{1}{x^2}} h_n(x) dx \leq C = \text{const}$$

и още повече

$$\int_{\frac{1}{n}}^1 e^{\frac{1}{x^2}} h_n(x) dx \leq C.$$

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно, но фиксирано и n е по-голямо от $\frac{1}{\varepsilon}$. Тогава имаме

$$\int_{\varepsilon}^1 e^{\frac{1}{x^2}} h_n(x) dx \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 e^{\frac{1}{x^2}} h_n(x) dx \leq C.$$

Обаче в интервала $[\varepsilon, 1]$ е в сила равенството

$$h_n(x) = e^{-\frac{1}{2(x - \frac{1}{n})^2}},$$

като h_n клони равномерно към $e^{-\frac{1}{2x^2}}$.

Следователно, извършвайки граничния преход от горното неравенство, получаваме

$$\int_{\varepsilon}^1 e^{\frac{1}{x^2}} e^{-\frac{1}{2x^2}} dx \leq C,$$

което е невъзможно, защото $\varepsilon > 0$ беше произволно, а интегралът

$$\int_0^1 e^{\frac{1}{2x^2}} dx \text{ е разходящ.}$$

2.3. Диференциране на разпределения.

Всички разпределения могат да бъдат диференцирани безкрайно много пъти. Това е основното предимство на разпределенията пред обикновените функции.

За да стигнем до правилната дефиниция на операцията диференциране, ще разгледаме най-напред разпределение, което има за плътност функция от $C^1(\Omega)$. Въобще, изучавайки теорията на разпределенията, читателят трябва постоянно да има пред очите си важния частен случай, когато разпределението съвпада с гладка функция. От него произтичат дефинициите на всички операции в тази теория.

И така, нека $u \in C^1(\Omega)$. Ръководейки се от принципа за перманентност, естествено е да наречем функционала

$$\varphi \rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi \right) = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi(x) dx, \quad \varphi \in D(\Omega)$$

частна производна на разпределението $\varphi \rightarrow (u, \varphi)$.

По-нататък да се опитаме да преработим $\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi \right)$ по такъв начин, че да получим функционал, който има смисъл и когато функцията u не е гладка. Това се достига лесно с помощта на теоремата на Гаус. Понеже φ е с компактен носител, интегралът по границата е нула и ние получаваме¹

¹Тази процедура ще наричаме интегриране по части. Обърнете внимание на обстоятелството, че за границата на Ω не се предпо-

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi \right) = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi(x) dx = - \int_{\Omega} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = - \left(u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right)$$

Тъй като в израза $\left(u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right)$ не участвуват производните на u , той има смисъл за произволно разпределение $u \in D'(\Omega)$. Така стигнахме до следната основна

Д е ф и н и ц и я 2.5. Нека $u \in D'(\Omega)$ и α е произволно мултииндекс. Функционала $\left(\partial^{\alpha} u, \varphi \right) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{|\alpha|} \left(u, \partial^{\alpha} \varphi \right)$, $\varphi \in D(\Omega)$ наричаме **п р о и з в о д н а** на u от вида ∂^{α} .

Веднага се вижда, че $\partial^{\alpha} u$ е също разпределение. Понеже неговата линейност е очевидна, остава да докажем, че той е непрекъснат. За тази цел да вземем произволна редица $\{\varphi_r\} \subset D(\Omega)$, която клони към нула в това пространство. Но тогава и редицата $\{\partial^{\alpha} \varphi_r\}$ клони към нула в $D(\Omega)$ и ние получаваме

$$\left(\partial^{\alpha} u, \varphi_r \right) = (-1)^{|\alpha|} \left(u, \partial^{\alpha} \varphi_r \right) \rightarrow 0,$$

с което непрекъснатостта на $\partial^{\alpha} u$ в началото, а оттам и неговата непрекъснатост въобще, е установена.

З а б е л е ж к и. В друг контекст дефиниция 2.5. е била използвана и преди Лоран Шварц. Например Соболев и Фридрихс са използвали така наречените **с л а б и** производни. Те са използвали

лага нищо. Причината за това е следната: в същност интегрирането става върху множеството $\text{supp } \varphi$ така, че можем да вземем област Ω' с гладка граница, такава, че $\text{supp } \varphi \in \Omega' \subset \Omega$ и да

приложим теоремата на Гаус към $\int_{\Omega'} \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi(x) dx$ и в полученния резултат да заместим отново Ω' с Ω .

Дефиниция 2.6. Нека $u \in L_{loc}(\Omega)$, $v \in L_{loc}(\Omega)$,
Ако за всяко $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ тези две функции са свързани с
равенството

$$\int_{\Omega} u \partial^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \varphi dx,$$

казваме, че $v = \partial^\alpha u$ в слаб смисъл или че v е
слаба производна на u от вида ∂^α .

Според лема 2.1 слабата производна $\partial^\alpha u$, ако съществува е
единствена /с точност до множество с мярка нула/. Понеже $D'(\Omega)$
съдържа $L_{loc}(\Omega)$, то съдържа и всевъзможните слаби производни
на функции от $L_{loc}(\Omega)$.

Ясно е, че деф. 2.5 и деф. 2.6 по същество са идентични. Из-
следванията на Фридрихс, Соболев и Бохнер /последният се е зани-
мавал с обобщения на трансформацията на Фурие/ са били отправната
точка, от която е тръгнал Шварц, за да придаде окончателния вид
на теорията на разпределенията.

Ще завършим обсъждането на дефиниция 2.5 с една елементарна
теорема, която показва, че резултатът от диференцирането не зави-
си от реда, в който диференцираме.

Теорема 2.4. Ако α и β са мултииндекси и
 $u \in D'(\Omega)$, то

$$\partial^\alpha (\partial^\beta u) = \partial^\beta (\partial^\alpha u).$$

$$\text{В частност } \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Доказателство. Понеже за функциите от $C_0^\infty(\Omega)$
имаме $\partial^\alpha (\partial^\beta \varphi) = \partial^\beta (\partial^\alpha \varphi)$, получаваме
 $(\partial^\alpha (\partial^\beta u), \varphi) = (-1)^{|\beta|} (\partial^\beta u, \partial^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|+|\beta|} (u, \partial^\beta (\partial^\alpha \varphi))$
 $= (-1)^{|\alpha|+|\beta|} (u, \partial^\alpha (\partial^\beta \varphi)) = (-1)^{|\beta|} (\partial^\alpha u, \partial^\beta \varphi) = (\partial^\beta (\partial^\alpha u), \varphi),$
к.т.д.д.

Примери

1. Нека $\delta \in D'(\mathbb{R}^1)$ е функцията на Дирак. Прилагайки де-
финицията, получаваме

$$(\delta', \varphi) = -(\delta, \varphi') = -\varphi'(0).$$

2. Нека

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

е така наречената функция на Хевисайд. Интерпретирайки h като раз-
пределение от $D'(\mathbb{R}^1)$, намираме

$$(h', \varphi) = (-h, \varphi') = -\int_0^\infty \varphi'(x) dx = \varphi(0),$$

т.е.

$$h' = \delta.$$

Упражнение 5

1. Нека $u \in D'(\Omega)$. Докажете, че
 $\text{supp } \partial^\alpha u \subset \text{supp } u$

за всеки мултииндекс α .

2. Докажете, че ако $u \in D'(\Omega)$ е от краен ред, то и $\partial^\alpha u$
е от краен ред.

3. Проверете, че ако $u \in \mathcal{F}'(\mathbb{R}^n)$, то и $\partial^\alpha u \in \mathcal{F}'(\mathbb{R}^n)$.

4. Установете равенството

$$\left(\left(V.p. \frac{1}{x} \right)', \varphi \right) = -V.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2} dx.$$

Упътване. Преработете $\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi'(x)}{x} dx$ с интегри-
 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

ране, по части и групирайте подходящо граничните членове.

3. Решете уравнението

/10/ $y' = 0$

в $D'(\mathbb{R}^1)$.

У п ъ т в а н е. Нека $y \in D'(\mathbb{R}^1)$ е решение. За всяко $\varphi \in D(\mathbb{R}^1)$ имаме

/11/ $0 = (y', \varphi) = -(y, \varphi')$.

След като разполагате с това наблюдение, изяснете си кога един елемент от $D(\mathbb{R}^1)$ е производна на някаква функция от същото пространство. Докажете, че $\psi \in D(\mathbb{R}^1)$ има примитивна в $D(\mathbb{R}^1)$

тогава и само тогава, когато $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$. След това за да завършите решението на /10/, означете с $e(x)$ някаква функция от $D(\mathbb{R}^1)$, за която $\int_{-\infty}^{\infty} e(x) dx = 1$ и се възползвайте от тъждеството

$$(y, \varphi) = (y, \varphi - \lambda e) + \lambda (y, e)$$

където $\lambda = \lambda_{\varphi} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = \text{const.}$

Понеже $\varphi - \lambda e$ има примитивна в $D(\mathbb{R}^1)$, /защо?/, използвайте /11/, получаваме

$$(y, \varphi) = \lambda (y, e) = \int_{-\infty}^{\infty} c \varphi(x) dx = (c, \varphi),$$

където $c = (y, e) = \text{const.}$ С това равенството

$$y = c$$

е установено.

2.4. Бръзка между обобщените и обикновените производни. Обща формула на Лайбниц

Ще докажем две теореми, които донякъде изясняват връзката между слабите и обикновените производни.

Т е о р е м а 2.5. Нека $u \in L_{loc}(\Omega)$ и нека за всеки компакт $K \subset \Omega$ съществува константа $A(K)$ такава, че за почти всяко $x \in K$ да имаме

$$\left| \frac{u(x + h l_j) - u(x)}{h} \right| \leq A(K),$$

за всяко достатъчно малко $h \neq 0$ (l_j е j -тият координатен вектор в $\mathbb{R}^n$)

Ако границата

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x + l_j h) - u(x)}{h} \stackrel{\text{def}}{=} g(x)$$

съществува почти навсякъде в Ω , g съвпада със слабата производна $\frac{\partial u}{\partial x_j}$.

Д о к а з а т е л с т в о. Трябва да докажем, че за всяко $\varphi \in D(\Omega)$ е в сила равенството

/12/ $\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = - \int_{\Omega} g(x) \varphi(x) dx.$

Нека φ е фиксиран елемент от $D(\Omega)$ и нека положителното число h_0 е толкова малко, че за $h \in (-h_0, h_0)$ образът на $\text{supp } \varphi$ чрез трансляцията $x \rightarrow x + h l_j$ се съдържа в Ω . За такива стойности на h ($h \neq 0$) имаме

$$\int_{\Omega} \frac{u(x + h l_j) - u(x)}{h} \varphi(x) dx = \int_{\Omega} u(x) \frac{\varphi(x - h l_j) - \varphi(x)}{h} dx.$$

Оттук, прилагайки теоремата на Лебег за граничен преход под знака на интеграла / [6], стр. 298, [19], стр. 154, [20], стр. 234/, получаваме /12/, с което теоремата е доказана.

Т е о р е м а 2.6. Нека $u \in C(\Omega)$ и нейните слаби производни $\frac{\partial u}{\partial x_j}$, $j = 1, 2, \dots, n$ са непрекъснати. Тогава $u \in C^1(\Omega)$ и $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ съпадат със съответните им класически производни.

Д о к а з а т е л с т в о. Понеже теоремата има локален характер, достатъчно е да я докажем в някаква околност на произволна точка $x_0 \in \Omega$.

Нека $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ е камбановидната функция /17/ /стр. 174/, използвана в доказателството на теорема 1.2. Да означим с G кълбото $|x - x_0| \leq \delta$, където $\delta > 0$ е толкова малко, че да имаме $G \subset \Omega$. В такъв случай за $x \in G$ и за $\varepsilon < \rho(G, \partial\Omega)$ функцията $\psi(y) = \frac{1}{\varepsilon^n} \chi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \in C_0^\infty(\Omega)$.

След тази констатация да разгледаме конволюцията

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\Omega} u(y) \chi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy$$

Очевидно $u_\varepsilon \in C^\infty(G)$ и освен това имаме

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\varepsilon(x)}{\partial x_j} &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\Omega} u(y) \frac{\partial}{\partial x_j} \chi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy \\ &= -\frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\Omega} u(y) \frac{\partial}{\partial y_j} \chi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j}(y) \chi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy, \end{aligned}$$

като последното равенство получихме въз основа на деф. 2.6. Така установихме, че за $x \in G$ е в сила тъждеството

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} * \chi_\varepsilon\right)(x), \text{ където } \chi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Точно както при доказателството на теорема 1.2,6/ /стр.175/, се вижда, че в G имаме $u_\varepsilon \rightharpoonup u$, $\frac{\partial u}{\partial x_j} * \chi_\varepsilon \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial x_j}$. /Със $\rightharpoonup$ означаваме равномерната сходимост./ С други думи, излезе, че $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ и $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial x_j}$. Сега вече твърдението следва от един добре известен резултат от диференциалното смятане.

Д е ф и н и ц и я 2.7. Нека $u \in D'(\Omega)$, а $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ е функция от $C^\infty(\Omega)$. Разпределението $f u$, дефинирано чрез равенството

$$(f u, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} (u, f \varphi), \quad \varphi \in D(\Omega)$$

наричаме произведение на f и u .

Очевидно е, че функционалът $f u$, който току-що дефинирахме, е наистина разпределение, защото пом $\varphi \in D(\Omega)$, $f \in C^\infty(\Omega)$, то и $f \varphi \in D(\Omega)$ и от $\{\varphi_j\} \rightarrow 0$ в $D(\Omega)$ следва, че и $\{f \varphi_j\} \rightarrow 0$ в същото пространство.

Оказва се, че за така дефинираното произведение формулата на Лайбниц остава в сила.

Т е о р е м а 2.7. Нека $f \in C^\infty(\Omega)$, $u \in D'(\Omega)$. В такъв случай е валидно тъждеството

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (f u) = \frac{\partial f}{\partial x_j} u + f \frac{\partial u}{\partial x_j}.$$

Д о к а з а т е л с т в о. Изхождайки от дефинициите за производна и произведение, получаваме

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (f u), \varphi\right) &= -\left(f u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) = -\left(u, f \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) \\ &= -\left(u, \frac{\partial}{\partial x_j} (f \varphi) - \frac{\partial f}{\partial x_j} \varphi\right) = -\left(u, \frac{\partial}{\partial x_j} (f \varphi)\right) + \left(u, \frac{\partial f}{\partial x_j} \varphi\right) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}, f \varphi\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} u, \varphi\right) = \left(f \frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_j} u, \varphi\right), \end{aligned}$$

с което доказателството е завършено.

З а б е л е ж к а. Лесно се вижда, че е невъзможно да се дефинира асоциативно умножение на разпределения, което да съдържа вече дефинираното произведение на разпределение и гладка функция като частен случай.

Наистина да допуснем, че такова произведение съществува. Тогава имаме

$$\left(\sqrt{p} \frac{1}{x} \cdot x\right) \delta = 1 \cdot \delta = \delta,$$

но от друга страна

$$\sqrt{p} \frac{1}{x} \cdot (x \delta) = \sqrt{p} \frac{1}{x} \cdot 0 = 0.$$

Стигнахме до противоречие.

Едно непосредствено обобщение на /13/ е твърде полезно. Преди да напишем тъждеството, което имаме пред вид, ще въведем удобни означения.

Нека $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ са мултииндекси. Ще пишем $\beta \leq \alpha$ тогава и само тогава, когато $\beta_j \leq \alpha_j$, за $j = 1, 2, \dots, n$. По-нататък да дефинираме символите $\alpha!$ и $\binom{\alpha}{\beta}$ както следва:

$$\alpha! \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!.$$

$$\binom{\alpha}{\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \binom{\alpha_1}{\beta_1} \binom{\alpha_2}{\beta_2} \dots \binom{\alpha_n}{\beta_n}.$$

Като вземем пред вид, че за $\beta_j \leq \alpha_j$ имаме

$$\binom{\alpha_j}{\beta_j} = \frac{\alpha_j!}{\beta_j! (\alpha_j - \beta_j)!}, \text{ получаваме } \binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta! (\alpha - \beta)!},$$

при условие, че $\beta \leq \alpha$.

Тези означения придават особено прост вид на някои важни формули от анализа. Например формулата на Лайбниц изглежда по следния начин:

$$\partial^\alpha (f g) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \partial^{\alpha-\beta} g, \quad f, g \in C^{|\alpha|}(\Omega),$$

а формулата на Тейлър с остатъчен член в интегрална форма взема вида

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{(x-a)^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha f(a) + R_m(x),$$

където

$$R_m(x) = \sum_{|\alpha| = m+1} \frac{(m+1)!}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^m \partial^\alpha f(a+t(x-a)) dt.$$

За удобство на читателя доказателството на тези добре познати формули е скицирано в упражненията.

Сега да се върнем към нашата тема. Нека

$$/14/ \quad P(\partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha$$

е диференциален оператор с постоянни коефициенти. Полиномът

$$P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

(припомняме, че $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \dots \xi_n^{\alpha_n}$) се нарича символ на $P(\partial)$. Тъждеството

$$/15/ \quad P(\partial) e^{(x, \xi)} = P(\xi) e^{(x, \xi)}$$

където $(x, \xi) = \sum_{j=1}^n x_j \xi_j$ показва, че съответствието между

диференциалните оператори с постоянни коефициенти и техните символи е еднозначно-обратимо.

Нека сега $f \in C^\infty(\Omega)$, $u \in D'(\Omega)$, а $P(\partial)$ има вида /14/. Тогава са в сила тъждествата

$$/16a/ \quad P(\partial)(fu) = \sum_{|\beta| \leq m} \frac{(P^{(\beta)}(\partial)f)}{\beta!} \partial^\beta u,$$

$$/16b/ \quad P(\partial)(fu) = \sum_{|\beta| \leq m} (\partial^\beta f) \frac{P^{(\beta)}(\partial)u}{\beta!},$$

където $P^{(\beta)}(\xi) = \partial^\beta P(\xi)$.

Доказателство. За образец да докажем /16a/. Прилагайки многократно /13/, достигаме до съотношение от вида

$$P(\partial)(fu) = \sum_{|\beta| \leq m} (Q_\beta(\partial)f) \partial^\beta u,$$

където $Q_\beta(\partial)$ е диференциален оператор с постоянни коефициенти. За да намерим този оператор да вземем

$$f(x) = e^{(x, \xi)}, \quad u = e^{(x, \eta)},$$

където $(x, \xi) = \sum_{j=1}^n x_j \xi_j$, $(x, \eta) = \sum_{j=1}^n x_j \eta_j$, $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$.

С помощта на /15/ очевидно получаваме

$$P(\xi + \eta) e^{(x, \xi + \eta)} = \sum_{|\beta| \leq m} Q_\beta(\xi) \eta^\beta e^{(x, \xi)} e^{(x, \eta)},$$

т.е.

$$P(\xi + \eta) = \sum_{|\beta| \leq m} Q_\beta(\xi) \eta^\beta.$$

От друга страна, формулата на Тейлър ни дава

$$P(\xi + \eta) = \sum_{|\beta| \leq m} \frac{P^{(\beta)}(\xi)}{\beta!} \eta^\beta,$$

т.е.

$$Q_\beta(\xi) = \frac{P^{(\beta)}(\xi)}{\beta!},$$

с което /16a/ е доказано.

Упражнение 6

1. Докажете формулата на Лайбниц

$$a/ \quad \partial^\alpha (fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \partial^{\alpha-\beta} g, \quad f, g \in C^{|\alpha|}(\Omega)$$

като разсъждавате както в текста. Като следствие получите тъждеството

$$b/ \quad g \partial^\alpha f = \sum_{\beta \leq \alpha} (-1)^{|\beta|} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta} (f \partial^\beta g)$$

което се нарича транспонирана формула на Лайбниц.

Упътване. За да получите б/ умножете $g \partial^\alpha f$ с произволна функция $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ и приложете а/ към дясната част на тъждеството

$$\int_\Omega \varphi g \partial^\alpha f dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f \partial^\alpha (\varphi g) dx.$$

След това с интегриране по части прехвърлете производните от φ върху другите множители.

2. Нека $P(\partial) = \sum a_\alpha(x) \partial^\alpha$ е диференциален оператор с коефициенти от $C^\infty(\Omega)$, а $u \in D'(\Omega)$. Докажете, че $\text{supp } P(\partial)u \subset \text{supp } u$.

3. Нека $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ е функция с непрекъснати производни до $m+1$ ред. Интегрирайте по части

$$\int_0^1 (1-t)^m g^{(m+1)}(t) dt \text{ и получите тъждеството}$$

$$/17/ \quad g(1) = g(0) + \frac{g'(0)}{1!} + \dots + \frac{g^{(m)}(0)}{m!} + \frac{1}{m!} \int_0^1 (1-t)^m g^{(m+1)}(t) dt.$$

След това го приложете за

$$g(t) = f(a + t(x-a)),$$

където $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ е функция от класа $C^{m+1}(\Omega)$ и отсечката $a + t(x-a)$, $0 \leq t \leq 1$ се съдържа в Ω . Като вземете пред вид, че

$$g^{(k)}(t) = k! \sum_{|\alpha|=k} \frac{(x-a)^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha f(a + t(x-a))$$

и заместете в /17/, ще получите формулата на Тейлър.

$$4. \text{ Нека } P(x, \partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha,$$

където $a_\alpha(x)$ са функции, дефинирани в Ω . Ако f и g са функции от $C^m(\Omega)$, докажете, че

$$P(x, \partial)(fg) = \sum_{|\beta| \leq m} \frac{1}{\beta!} (P^{(\beta)}(x, \partial)f) \partial^\beta g,$$

където

$$P^{(\beta)}(x, \xi) \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\xi^\beta P(x, \xi).$$

Ще завършим обсъждането на операциите диференциране и умножение на разпределение с гладка функция с една теорема за непрекъснатост. За да достигнем пълна яснота, да означим с $D'_\beta(\Omega)$ ($D'_\sigma(\Omega)$) линейното топологично пространство, което се полу-

чава, когато в $D'(\Omega)$ въведем силната $\beta(D', D)$ (съответно слабата $\sigma(D', D)$) топология.

Т е о р е м а 2.8. За всеки мултиндекс α операторите

$$/18/ \quad D'_\beta(\Omega) \xrightarrow{\partial^\alpha} D'_\beta(\Omega)$$

и

$$/19/ \quad D'_\sigma(\Omega) \xrightarrow{\partial^\alpha} D'_\sigma(\Omega)$$

са непрекъснати.

Д о к а з а т е л с т в о. Да докажем, че операторът /18/ е непрекъснат. Ще припомним, че топологията $\beta(D', D)$ се дефинира с помощта на фамилията от полунорни

$$P_\beta(u) = \sup_{\varphi \in B} |(u, \varphi)|,$$

която се получава, когато B описва семейството на ограничените множества в $D(\Omega)$. Понеже операторът ∂^α е линеен, достатъчно е да докажем неговата непрекъснатост в началото.

Нека U е околност на началото в $D'_\beta(\Omega)$. Трябва да намерим околност V на началото в същото пространство такава, че от $u \in V$ да следва $\partial^\alpha u \in U$. Без ограничение на общността можем да предположим, че U има вида

$$/20/ \quad U = \{u \in D'(\Omega), \sup_i P_{B_i}(u) < \varepsilon\},$$

където B_i са ограничени множества в $D(\Omega)$, а индексът i приема краен брой стойности. Да означим с B ограниченото множество $\bigcup_i B_i$ и с B_α неговия образ при изображението

$$/21/ \quad D(\Omega) \xrightarrow{\partial^\alpha} D(\Omega).$$

Понеже /21/ е непрекъснато /зад.2, стр.141/ B_α е също ограничено /дайте доказателство!/. Да въведем полунормата

$$P_{B_\alpha}(u) = \sup_{\varphi \in B_\alpha} |(u, \varphi)| \text{ и да положим } V = \{u \in D'(\Omega), P_{B_\alpha}(u) < \frac{\varepsilon}{2}\}$$

Понеже P_{B_α} е непрекъсната, V е околност на началото в $D'_\beta(\Omega)$. От друга страна, от $\varphi \in B$ следва $\partial^\alpha \varphi \in B_\alpha$ и за всяко $u \in V$ получаваме

$$|(u, \partial^\alpha \varphi)| = |(\partial^\alpha u, \varphi)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \varphi \in B$$

т.е.

$$\sup_{\varphi \in B} |(\partial^\alpha u, \varphi)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

което означава, че $\partial^\alpha u \in U$.

С това непрекъснатостта на /18/ е установена. Доказателството, че и /19/ е непрекъснат е тривиално и ние го предоставяме на читателя.

З а б е л е ж к а. В повечето случаи е достатъчен един много по-прост резултат - именно секвенциалната непрекъснатост на ∂^α .

Д е ф и н и ц и я 2.8. Нека X и Y са локално изпъкнали отделими пространства над едно и също числово поле G . Линейният оператор $T: X \rightarrow Y$ се нарича **секвенциално непрекъснат**, ако трансформира сходяща редица в сходяща редица, т.е. ако е такъв, че от $\{x_n\} \rightarrow x_0$ в X следва и $Tx_n \rightarrow Tx_0$ в Y .

Ако X е метризуемо, секвенциалната и обикновената непрекъснатост съвпадат /дайте доказателство!/. В общия случай изискването T да бъде секвенциално непрекъснат е по-слабо. Следователно теорема 2.8 веднага ни дава секвенциалната непрекъснатост на ∂^α . Обаче за да илюстрираме лекотата, с която обикновено се установява и използва секвенциалната непрекъснатост, ще дадем отделно доказателство.

И така, нека $u_p \rightarrow u$ в $D'(\Omega)^1$. Трябва да докажем, че

¹ Според следствието от теорема 6.8 /стр.157/ силната и слабата сходимост на редиците в $D'(\Omega)$ съвпадат, така че няма нужда да уточняваме в кое от пространствата $D'_\beta(\Omega)$ и $D'_\sigma(\Omega)$ разглеждаме въпроса.

и $\partial^\alpha u_p \rightarrow \partial^\alpha u$. При фиксирано $\varphi \in D(\Omega)$ имаме $(\partial^\alpha u_p, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (u_p, \partial^\alpha \varphi) \rightarrow (-1)^{|\alpha|} (u, \partial^\alpha \varphi) = (\partial^\alpha u, \varphi)$, с което всичко е доказано.

Теорема 2.9. Нека $a(x) \in C^\infty(\Omega)$. Тогава изображенията

$$T_a : D'_\beta(\Omega) \rightarrow D'_\beta(\Omega),$$

$$T_a : D'_\sigma(\Omega) \rightarrow D'_\sigma(\Omega),$$

където T_a действа по правилото $u \rightarrow au$ са непрекъснати.

Д о к а з а т е л с т в о. Ще разгледаме само първия случай. Вторият случай е съвсем прост и ние го предоставяме на читателя.

Нека отново U е околността на началото в $D'_\beta(\Omega)$, дефинирана чрез /20/. Да означим с B_a образа на ограниченото множество $\bigcup_i B_i$ при непрекъснатото изображение $\varphi \rightarrow a\varphi$ на

$D(\Omega)$ в $D(\Omega)$. Убедете се, че то наистина е непрекъснато! Понеже B_a е ограничено /защо?/, полунормата

$$p_{B_a}(u) = \sup_{\varphi \in B_a} |(u, \varphi)|$$

е непрекъсната. Нека

$$V \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ u \in D'(\Omega), p_{B_a}(u) < \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Тъй като от $\varphi \in B$ следва $a\varphi \in B_a$, за $u \in V$ получаваме

$$|(au, \varphi)| = |(u, a\varphi)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \varphi \in B,$$

т.е.

$$\sup_{\varphi \in B} |(au, \varphi)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

което показва, че $au \in U$ и доказателството е завършено.

Теорема 2.8 и 2.9 веднага ни дават следния резултат.

Т е о р е м а 2.10. Ако $a_\alpha \in C^\infty(\Omega)$ и

$$P(\partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha,$$

изображенията

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'_p(\Omega) &\xrightarrow{P(\partial)} \mathcal{D}'_p(\Omega) \\ \mathcal{D}'_q(\Omega) &\xrightarrow{P(\partial)} \mathcal{D}'_q(\Omega) \end{aligned}$$

са непрекъснати.

Предоставяме на читателя сам да обмисли подробностите.

З а б е л е ж к а. Понеже изображението $\partial^\alpha: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ е непрекъснато /зад.1, стр.61/ и от $u \in \mathcal{S}'$ следва $\partial^\alpha u \in \mathcal{S}'$ /зад.3, стр.201/, теорема 2.8 запазва своята валидност и в $\mathcal{S}'$. Що се отнася до теорема 2.9, там се налагат малки модификации. Очевидно е, че тя остава в сила стига изображението $\varphi \rightarrow a\varphi$ на $\mathcal{S}$ да е непрекъснато. Това е така тогава и само тогава, когато a принадлежи на класа $\mathcal{O}_M$, който се въвежда със следната

Д е ф и н и ц и я 2.9. Казваме, че една функция $a: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ принадлежи на $\mathcal{O}_M$, когато е безкрайно гладка и за всеки мултииндекс $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ съществуват константи C_α и $m(\alpha)$ такива, че е в сила неравенството $|\partial^\alpha a(x)| \leq C_\alpha (1 + |x|^2)^{m(\alpha)}, x \in \mathbb{R}^n$.

Сега можем да кажем, че ако коефициентите на диференциалния оператор $P(\partial)$ са функции от $\mathcal{O}_M$ и теорема 2.10 остава вярна.

Елементите на $\mathcal{O}_M$ се наричат **м у л т и п л и к а т о р и** на $\mathcal{S}$.

У п р а ж н е н и е 7

1. Докажете директно секвенциалната непрекъснатост на оператора

$$\mathcal{D}'(\Omega) \xrightarrow{P(\partial)} \mathcal{D}'(\Omega).$$

2. Докажете, че ако $a \in \mathcal{O}_M$, изображението $\varphi \rightarrow a\varphi$ на $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}$ е непрекъснато.

3. Нека $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ е такава, че от $\varphi \in \mathcal{S}$ да следва, че $a\varphi \in \mathcal{S}$. Докажете, че $a \in \mathcal{O}_M$.

У п ъ т в а н е. Допуснете, че неравенството

$$|a(x)| \leq C(1 + |x|^2)^k, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

не е в сила, както и да избираме константите C и k . Следователно може да се намери редица $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ такава, че

$$|a(x_k)| > (1 + |x_k|^2)^k, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Без ограничение на общността можем да предположим, че

$|x_{k+1}| \geq |x_k| + 2$. След тази констатация разгледайте функцията

$$\Psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi(x - x_k)}{(1 + |x_k|^2)^k},$$

където $\varphi \in C_0^\infty(|x| < 1)$ и $\varphi(0) = 1$.

Веднага се вижда, че $\Psi \in \mathcal{S}$, но въпреки това

$$|a(x_k)\Psi(x_k)| = \frac{\varphi(0)|a(x_k)|}{(1 + |x_k|^2)^k} \geq 1,$$

което показва, че $a\Psi \notin \mathcal{S}$. По този начин /21/ е установено.

За да установите, че и $\frac{\partial a}{\partial x_j}$ удовлетворява същото неравенство,

използвайте тъждеството

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(a\varphi) = a \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \frac{\partial a}{\partial x_j} \varphi$$

и т.н.

2.5. Структура на разпределенията от

$$D'(\Omega), \mathcal{E}'(\Omega) \text{ и } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

Т е о р е м а 2.11. Нека $u \in D'(\Omega)$ и $G \Subset \Omega$ е под-област на Ω , $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Съществуват непрекъсната функция $f \in C(\Omega)$ и мултииндекс α такива, че

$$(u, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, \partial^\alpha \varphi)$$

за всяко $\varphi \in C_0^\infty(G)$. С други думи, в G е в сила равенството

$$u = \partial^\alpha f,$$

където производната на f се разбира в смисъл на деф. 2.5.

Тази теорема показва, че $D'_F(\Omega)$ е минималното линейно пространство, което заедно с функциите от $C(\Omega)$ съдържа и техните обобщени производни.

Преди да започнем доказателството ще установим една очевидна лема.

Л е м а 2.3. Ако за две функции $\varphi, \psi \in C_0^\infty(G)$ е в сила равенството

$$\partial^\alpha \varphi = \partial^\alpha \psi$$

с някакъв мултииндекс α , то $\varphi \equiv \psi$.

Д о к а з а т е л с т в о. Достатъчно е да разгледаме случая

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \frac{\partial \psi}{\partial x_j}. \text{ Да положим } h = \varphi - \psi \text{ и да фиксираме точката}$$

$x = (x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)$. След това да изберем числото x_j^0 по такъв начин, че точката $x_0 = (x_1, \dots, x_j^0, \dots, x_n)$, която се различава от x само по своята j -та координата, да не се съдържа в $\text{supp } h$. В такъв случай получаваме

$$0 = \int_{x_j^0}^{x_j} \frac{\partial h}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \dots, x_n) dt = h(x) - h(x_0) = h(x),$$

с което равенството $\varphi = \psi$ е установено, защото точката x беше произволна.

Д о к а з а т е л с т в о на теорема 2.11. Понеже $u \in D'(\Omega)$ и $G \Subset \Omega$, за $\varphi \in C_0^\infty(G)$, имаме

$$|(u, \varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \max_G |\partial^\alpha \varphi|.$$

Оттук чрез многократното прилагане на тривиалното неравенство

$$|\varphi(x)| \leq \int_{-\infty}^{x_j} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \dots, x_n) \right| dt$$

$$\leq d(G) \max \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right|,$$

където $\varphi \in C_0^\infty(G)$, а $d(G)$ е диаметърът на G , получаваме

$$/22/ \quad |(u, \varphi)| \leq C_2 \max |\partial^\beta \varphi|, \quad \varphi \in C_0^\infty(G),$$

където β е мултииндекс с достатъчно големи компоненти — например можем да вземем $\beta = (k, k, \dots, k)$. Накрая да привлечем на помощ тъждеството

$$/23/ \quad f(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} \partial_{t_1}^1 \partial_{t_2}^1 \dots \partial_{t_n}^1 f(t_1, t_2, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n$$

$f \in C_0^\infty(G)$ и да положим за краткост $\rho = (1, 1, \dots, 1)$, $\gamma = \beta + \rho$.

В такъв случай /23/ и неравенството на Шварц ни дават

$$/24/ \quad |\partial^\beta \varphi(x)| \leq \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} |\partial^\gamma \varphi(t)| dt \leq \int_G |\partial^\gamma \varphi(t)| dt$$

$$\leq \sqrt{\text{mes } G} \|\partial^\gamma \varphi\|_{L^2(G)}.$$

Сега вече от /22/ и /24/ получаваме

$$/25/ \quad |(u, \varphi)| \leq C_2 \|\partial^r \varphi\|_{L^2(G)},$$

което играе основна роля в цялото доказателство.

Да означим с $\mathcal{H}$ линейното подпространство на $C_0^\infty(G)$, което се състои от функциите от вида

$$/26/ \quad \psi = \partial^r \varphi, \quad \varphi \in C_0^\infty(G).$$

Да разгледаме линейния функционал F , дефиниран в $\mathcal{H}$, който действа по правилото

$$/27/ \quad F(\psi) = (u, \varphi),$$

където φ и ψ са свързани с /26/. Според лема 2.3. функцията $\psi \in \mathcal{H}$ определя φ еднозначно и дефиницията на F е коректна. Тъй като според /25/ и /26/ имаме

$$|F(\psi)| \leq C_2 \|\psi\|_{L^2(G)}$$

с теоремата на Хан-Банах можем да продължим F до ограничен функционал в цялото $L^2(G)$ и теоремата на Рис ни дава

$$F(\psi) = \int_G \psi(x) \bar{h}(x) dx, \quad \psi \in L^2(G),$$

където функцията $h \in L^2(G)$ е еднозначно определена.

В частност за $\psi = \partial^r \varphi$, $\varphi \in C_0^\infty(G)$, получаваме

$$F(\psi) = (u, \varphi) = \int_G \partial^r \varphi(x) \bar{h}(x) dx,$$

което е почти това, което искаме да докажем.

Нека $\{h_\nu\} \subset C_0^\infty(G)$ е редица, апроксимираща h в $L^2(G)$. Да продължим h като нула извън G и да положим

$$f_\nu(x) = (-1)^{|r|} \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} \bar{h}_\nu(t) dt.$$

Ясно е, че $f_\nu \in \bar{C}(G)$ и освен това

$$\max_G |f_\nu - f_\mu| \leq \int_G |\bar{h}_\nu - \bar{h}_\mu| dt \leq \sqrt{mes G} \|h_\nu - h_\mu\|_{L^2(G)} \rightarrow 0,$$

което показва, че $\{f_\nu\}$ равномерно клони към

$$f(x) = (-1)^{|r|} \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} \bar{h}(t) dt$$

и следователно f е непрекъснатата¹.

От друга страна, очевидно имаме

$$\int_G \partial^r \varphi(x) \bar{h}_\nu(x) dx = (-1)^{|r|+n} \int_G (\partial^{r+p} \varphi(x)) f_\nu(x) dx,$$

откъдето с граничен преход получаваме

$$(u, \varphi) = (-1)^{|r|+n} \int_G (\partial^{r+p} \varphi(x)) f(x) dx = (\partial^{r+p} \varphi, f)$$

и доказателството е завършено.

Като следствие от получения резултат получаваме

Т е о р е м а 2.12. Ако разпределението $u \in \mathcal{D}'(S)$ е с компактен носител, съществуват краен брой непрекъснати функции $\{f_i\}$, $i \in I$ с компактни носители и мултииндекси α_i такива, че

$$u = \sum_{i \in I} \partial^{\alpha_i} f_i \quad /I \text{ е крайно множество}/.$$

¹ Според едно от основните свойства на Лебеговия интеграл f е даже абсолютно непрекъснатата.

Носителите на u и f_i , $i \in I$, са свързани с релацията

$$\text{supp } u \subset \text{supp } f_i \subset \Omega,$$

като $\{f_i\}$ могат да се изберат така, че носителите им да се съдържат в произволна околност на $\text{supp } u$.

Доказателство. Нека $G \subset \Omega$ е произволна под-област на Ω , която съдържа $\text{supp } u$. Нека $\psi \in C_0^\infty(G)$ е функция, тъждествено равна на единица в някаква околност на $\text{supp } u$. За произволно $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ имаме

$$(u, \varphi) = (u, \psi \varphi).$$

Наистина

$$(u, \varphi) - (u, \psi \varphi) = (u, (1 - \psi) \varphi) = 0,$$

понеже $\text{supp } u \cap \text{supp } (1 - \psi) \varphi = \emptyset$.

От друга страна, теорема 2.11 ни дава

$$/28/ \quad (u, \varphi) = (u, \psi \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, \partial^\alpha (\psi \varphi))$$

с подходящ мултииндекс α и $f \in \mathcal{L}(G)$.

От /28/ с формулата на Лайбниц получаваме

$$(u, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} \left(f, \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta} \psi \partial^\beta \varphi \right)$$

$$= (-1)^{|\alpha|} \sum_{\beta \leq \alpha} \left(\binom{\alpha}{\beta} f \partial^{\alpha-\beta} \psi, \partial^\beta \varphi \right)$$

$$= \left(\sum_{\beta \leq \alpha} (-1)^{|\alpha+\beta|} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta (f \partial^{\alpha-\beta} \psi), \varphi \right),$$

т.е.

$$u = \sum_{\beta \leq \alpha} \partial^\beta f_\beta.$$

където сме положили за краткост

$$f_\beta = (-1)^{|\alpha+\beta|} \binom{\alpha}{\beta} f \partial^{\alpha-\beta} \psi.$$

Понеже очевидно $f_\beta \in C_0(G)$, следствието е доказано.

Линейното подпространство на $\mathcal{D}'(\Omega)$, образувано от разпределенията с компактен носител, традиционно се означава с $\mathcal{E}'(\Omega)$. Оказва се, че то съвпада със сврегатното пространство на $C^\infty(\Omega)$.

Теорема 2.13. Нека $u \in C^\infty(\Omega)^*$. Тогава неговата рестрикция в $\mathcal{D}(\Omega)$ е разпределение с компактен носител. Обратно, всяко разпределение от $\mathcal{E}'(\Omega)$ се продължава до еднозначно определен елемент от $C^\infty(\Omega)^*$.

Доказателство. Пом $u \in C^\infty(\Omega)^*$, съществува полуорма

$$P(f) = \max_{\substack{K, j \\ |\alpha| \leq j \\ \alpha \in K}} |\partial^\alpha f(x)|, \quad f \in C^\infty(\Omega),$$

където $K \subset \Omega$ е компактен, за който е в сила неравенството

$$/29/ \quad |(u, \varphi)| \leq C p_{K,j}(\varphi), \quad \varphi \in C^\infty(\Omega)$$

с подходяща константа C . От /29/ веднага следва, че рестрикцията на u в $\mathcal{D}(\Omega)$ е разпределение от ред $\leq j$. Немо повече, $\text{supp } u$ се съдържа в K . Наистина, нека $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ и $K \cap \text{supp } \varphi = \emptyset$. Тогава $p_{K,j}(\varphi) = 0$, и /29/ ни дава $(u, \varphi) = 0$. С това включването $\text{supp } u \subset K$ е установено. Излезе, че наистина $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$.

Нека сега $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ и нека $g \in C_0^\infty(\Omega)$ е функция, тъждествено равна на единица в някаква околност на $\text{supp } u$. Да въведем функционала

$$(v_g, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} (u, g\varphi), \quad \varphi \in C^\infty(\Omega).$$

Веднага се вижда, че ако h е друга функция със свойствата на g , имаме $V_g = V_h$. Наистина, за всяко $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ получаваме

$$(V_g, \varphi) - (V_h, \varphi) = (u, (g - h) \varphi) = 0,$$

защото $\text{supp } u \cap \text{supp } (g - h) \varphi = \emptyset$.

По-нататък, понеже от $\{\varphi_\nu\} \rightarrow 0$ в $C^\infty(\Omega)$ очевидно следва $\{g \varphi_\nu\} \rightarrow 0$ в $D(\Omega)$, то $V_g \in C^\infty(\Omega)^*$. Накрая, ясно е, че

$$V_g|_{D(\Omega)} = u.$$

Ако $V \in C^\infty(\Omega)^*$ е някакъв друг функционал, за който $V|_{D(\Omega)} = u$, то веднага заключаваме, че $V = V_g$, защото

$D(\Omega)$ е разположено навсякъде гъсто в $C^\infty(\Omega)$ /зад. 1 от следващото упражнение/.

С това теорема 2.13 е доказана.

З а б е л е ж к а. Оттук нататък, имайки пред вид установеното съответствие между $\mathcal{E}'(\Omega)$ и $C^\infty(\Omega)^*$, няма да правим разлика между елементите на тези две пространства и ако $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$, $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ вместо $(u, g \varphi)$ ще пишем просто (u, φ) понеже, както се убедихме, изборът на срязващата функция g е без значение.

Както вече видяхме, структурата на разпределенията от $\mathcal{E}'(\Omega)$ е сравнително проста /теорема 2.12/. Един важен частен случай обаче може да се получи още по-завършен резултат. Имаме пред вид теоремата, която описва структурата на разпределенията, съсредоточени в една единствена точка.

Пътят към нея минава през следната

Л е м а 2.4. Нека $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ и неговият ред не надминава k . Тогава $(u, \varphi) = 0$ за всяка функция $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, която се анулира върху $\text{supp } u$ заедно с производните си $\partial^\alpha \varphi$, $|\alpha| \leq k$.

Доказателство. Да положим $K_\varepsilon = \text{supp } u$ да означим K_ε множеството от точките, чието разстояние от K на надминава ε . Т.е. $\varepsilon > 0$ да е достатъчно малко, така че K_ε не съдържа Ω . Да въведем функцията

$$\chi_\varepsilon(x) = \int_{K_\varepsilon} \chi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \frac{dy}{\varepsilon^n},$$

където χ е кулоновата функция, дефинирана на стр.174. Понеже $\chi_\varepsilon(x) = 1$ в K_ε и $\text{supp } \chi_\varepsilon = K_{3\varepsilon} \subset \Omega$ /предполагаме, че ε е достатъчно малко/, $\chi_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ и

$$(u, \varphi) = (u, \varphi \chi_\varepsilon)$$

за всяко $\varphi \in D(\Omega)$.

Да вземем област $G \subset \Omega$ такава, че $K \subset G$ и да я фиксираме. След това да вземем ε толкова малко, че да имаме $K_{3\varepsilon} \subset G$. Спомняйки си, че редът на u не надминава k , заключаваме

$$|30| (u, \varphi) | \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_G |\partial^\alpha (\varphi \chi_\varepsilon)|, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

където C зависи от G , но не зависи от ε . Ще оценим производните в дясната страна на /30/ при предположение, че $\partial^\alpha \varphi(x) \equiv 0$ върху $\text{supp } u$, за $|\alpha| \leq k$. Най-напред ще забележим, че

$$\sup_G |\partial^\alpha (\varphi \chi_\varepsilon)| = \sup_{K_{3\varepsilon}} |\partial^\alpha (\varphi \chi_\varepsilon)|, \quad \text{защото}$$

$\text{supp } \varphi \chi_\varepsilon \subset K_{3\varepsilon} \subset G$. Да вземем произволна точка $x \in K_{3\varepsilon}$. В такъв случай съществува точка $a \in K = \text{supp } u$ такава, че $|a - x| \leq 3\varepsilon$. Прилагайки формулата на Тейлър, получаваме

$$|31| \quad \varphi(x) = \sum_{|\alpha| \leq k+1} \frac{(x-a)^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^k \partial^\alpha \varphi(a+t(x-a)) dt.$$

защото всички производни на φ от ред $\leq k$ се анулират в a . От /31/ следва

$$|\varphi(x)| \leq A_0 |x-a|^{k+1} \leq A_0 (3\varepsilon)^{k+1}, \quad A_0 = \text{const},$$

понеже производните на φ в G са ограничени. По същия начин и за функциите $\partial^\beta \varphi$, $|\beta| \leq k$ получаваме оценката

$$|\partial^\beta \varphi(x)| \leq A_\beta (3\varepsilon)^{k+1-|\beta|}, \quad A_\beta = \text{const}.$$

Остава да забележим, че производните на χ_ε удовлетворяват неравенствата

$$|\partial^\beta \chi_\varepsilon(x)| \leq C_\beta \cdot \varepsilon^{-|\beta|}, \quad C_\beta = \text{const}$$

и да се възползваме от формулата на Лайбниц

$$\partial^\alpha (\varphi \chi_\varepsilon) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^\beta \varphi) \partial^{\alpha-\beta} \chi_\varepsilon.$$

Оценявайки почленно сумата в дясно, намираме

$$\begin{aligned} \sup_{K_{3\varepsilon}} |\partial^\alpha (\varphi \chi_\varepsilon)| &\leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} A_\beta (3\varepsilon)^{k+1-|\beta|} C_{\alpha-\beta} \varepsilon^{-|\alpha-\beta|} \\ &= B_\alpha \varepsilon^{k+1-|\alpha|}, \quad B_\alpha = \text{const} \end{aligned}$$

Комбинирайки полученото неравенство с /30/, стигаме до оценката

$$|(u, \varphi)| \leq C_1 \varepsilon, \quad C_1 = \text{const},$$

което показва, че $(u, \varphi) = 0$, защото числото $\varepsilon > 0$ беше произволно. С това лема 2.4 е доказана. Като следствие от нея веднага получаваме

Теорема 2.14. Нека носителят на $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ се състои от точката x_0 . В такъв случай u има вида

$$u = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \delta_{x_0}^{(\alpha)}$$

където k е редът на u и сме положили за краткост $\partial^\alpha \delta_{x_0} = \delta_{x_0}^{(\alpha)}$.

Доказателство. Според формулата на Тейлър имаме

$$\varphi(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{(x-x_0)^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha \varphi(x_0) + R(x),$$

където $\partial^\alpha R(x_0) = 0$, за $|\alpha| \leq k$.

Следователно според лемата $(u, R) = 0$ и ние получаваме

$$\begin{aligned} (u, \varphi) &= \sum_{|\alpha| \leq k} \left(u, \frac{(x-x_0)^\alpha}{\alpha!} \right) \partial^\alpha \varphi(x_0) \\ &= \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \partial^\alpha \varphi(x_0), \end{aligned}$$

т.е.

$$u = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \delta_{x_0}^{(\alpha)},$$

където $a_\alpha = (-1)^{|\alpha|} \left(u, \frac{(x-x_0)^\alpha}{\alpha!} \right)$

С това теоремата е доказана.

Упражнение 8

1. Докажете, че $\mathcal{D}(\Omega)$ е разположено навсякъде гъсто в $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Упътване. Нека $\{K_j\}$ е редица от компакти, която изчерпва Ω . Нека $\alpha_j \in \mathcal{C}_0^\infty(K_{j+1})$ и е тъждествено равно на единица около K_j . Тогава за всяко фиксирано $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ редицата $\{\alpha_j \varphi\}$ клони към φ в $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

2. Докажете, че влагането

$$D(\Omega) \longrightarrow C^\infty(\Omega)$$

е непрекъснато. Имаме пред вид изображението, което на всяка функция $D(\Omega)$ съпоставя същата функция, но разглеждана като елемент от $C^\infty(\Omega)$.

Според зад.1 образът на $D(\Omega)$ при това влагане е разположен навсякъде гъсто в $C^\infty(\Omega)$.

3. Нека $u \in D'(\Omega)$ и нека $\varphi \in D(\Omega)$. Докажете, че ако φ и всичките ѝ производни се анулират в точките от $\text{supp } u$, то $(u, \varphi) = 0$.

4. Нека $u \in D'(\Omega)$ и нека $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ е такава, че множеството $\text{supp } u \cap \text{supp } \varphi$ е компактно и се съдържа във вътрешността на Ω . Дайте една разумна дефиниция на (u, φ) .

У п ъ т в а н е. Означете с g една функция от $D(\Omega)$, която е тъждествено равна на единица в някаква околност на $\text{supp } u \cap \text{supp } \varphi$ и положете

$$(u, \varphi) = (u, g\varphi).$$

Покажете, че (u, φ) не зависи от g .

5. Нека $u \in D'(\mathbb{R}^1)$ и нека $\text{supp } u$ се съдържа в интервала $(-\infty, 1]$. Да означим с $\mathcal{H}$ подпространството на $C^\infty(\mathbb{R}^1)$, състоящо се от функциите с носители в $[-1, +\infty)$ с индуцираната от $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ топология. Конструирайте непрекъснат линеен функционал в $\mathcal{H}$, който в $\mathcal{H} \cap D(\mathbb{R}^1)$ съвпада с u .

6. За какви редици $\{a_j\} \subset \mathbb{C}$ редът

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j \delta^{(j)}$$

е сходящ в $D'(\mathbb{R}^1)$? Намерете необходимо и достатъчно условие.

Отг. Само краен брой от числата $\{a_j\}$ могат да бъдат различни от нула.

Следващата теорема описва структурата на разпределенията от $\mathcal{S}'$ и в общи линии се доказва като теорема 2.11.

Т е о р е м а 2.15. Нека $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Тогава съществуват крайно множество N от n -мерни мултииндекси и краен брой функции $f_\alpha \in C(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \in N$, удовлетворяващи неравенството

$$|f_\alpha(x)| \leq C_\alpha (1+|x|^2)^{m(\alpha)}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

такива, че

$$u = \sum_{\alpha \in N} \partial^\alpha f_\alpha.$$

Д о к а з а т е л с т в о. Щом $u \in \mathcal{S}'$, съществува полунорма от вида

$$/32/ \quad q_{k,\beta}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^k |\partial^\beta f(x)|,$$

за която

$$/33/ \quad |(u, \varphi)| \leq C q_{k,\beta}(\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

защото всяка крайна сума на полунорми от вида /32/ се мажорира от също такава полунорма, умножена с достатъчно голяма константа /зад.1 от следващото упражнение/.

Ще преработим неравенство /33/. Имаме

$$/34/ \quad (1+|x|^2)^k \partial^\beta \varphi(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} \partial^\beta [(1+|t|^2)^k \partial^\beta \varphi(t)] dt,$$

където, както по-рано, $\rho = (1, 1, 1, \dots, 1)$. Като вземем пред вид, че

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_j} (1+|x|^2)^k \right| = 2 \left| k x_j (1+|x|^2)^{k-1} \right| \leq k (1+|x|^2)^k,$$

от /34/ получаваме

$$/35/ \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^k |\partial^\beta \varphi(x)| \leq C_1 \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^k \sum_{\alpha \in N} |\partial^\alpha \varphi(x)| dx,$$

където N е множеството от мултииндексите, което се получава, когато извършим диференциранията в /34/. Така стигнахме до неравенството

$$/36/ |(u, \varphi)| \leq C_2 \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^k \sum_{\alpha \in N} |\partial^\alpha \varphi(x)| dx.$$

За да можем отново да приложим теоремата на Рис, имаме нужда от оценка в подходящо пространство L^2 . За да получим такава оценка ще приложим неравенството на Коши - Буняковски - Шварц - най-напред за крайни суми, после за интеграли. Последователно получаваме

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^k \sum_{\alpha \in N} |\partial^\alpha \varphi| dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\sum_{\alpha} (1+|x|^2)^{k+\frac{n}{2}} |\partial^\alpha \varphi|}{(1+|x|^2)^{\frac{n}{2}}} dx$$

$$\leq C_3 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\sqrt{\sum_{\alpha} (1+|x|^2)^{2k+n} |\partial^\alpha \varphi|^2}}{(1+|x|^2)^{\frac{n}{2}}} dx$$

$$\leq C_3 \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1+|x|^2)^n} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\alpha \in N} (1+|x|^2)^{2k+n} |\partial^\alpha \varphi|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

което заедно с /36/ ни дава

$$/37/ |(u, \varphi)| \leq C_4 \left(\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\alpha \in N} (1+|x|^2)^{2k+n} |\partial^\alpha \varphi|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Сега вече сме близо до целта.

Нека

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$$

са мултииндексите от N , наредени по произволен начин. /Следователно p е техният брой./ Нека

$$L_p^2(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{j=1}^p L^2(\mathbb{R}^n)$$

е директната сума на p копия от $L^2(\mathbb{R}^n)$. Елементите на $L_p^2(\mathbb{R}^n)$ са вектори от вида

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_p), \quad f_j \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

които се събират и умножават с константи покомпонентно, а скаларното произведение се дефинира чрез равенството

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^p f_j(x) \overline{g_j(x)} dx.$$

Очевидно е, че по този начин $L_p^2(\mathbb{R}^n)$ се превръща в Хилбертово пространство. /Убедете се, че то е пълно!/
След тази подготовка на всяка функция $\varphi \in \mathcal{S}$ да съпоставим вектора

$$/38/ \quad \Psi(x) =$$

$$= \left((1+|x|^2)^{k+\frac{n}{2}} \partial^{\alpha_1} \varphi, (1+|x|^2)^{k+\frac{n}{2}} \partial^{\alpha_2} \varphi, \dots, (1+|x|^2)^{k+\frac{n}{2}} \partial^{\alpha_p} \varphi \right).$$

Ясно е, че можем да запишем /37/ във вида

$$/39/ \quad |(u, \varphi)| \leq C_4 \|\Psi\|_{L_p^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Ръководейки се от аналогията с теорема 2.11, да въведем линейното подпространство H , което се описва от Ψ , когато φ пробягва $\mathcal{S}$. Да разгледаме линейния функционал F , дефиниран в H , който действа по правилото

$$F(\psi) = (u, \varphi).$$

Понеже φ се определя еднозначно от ψ , дефиницията на F е коректна. Според /39/ имаме

$$|F(\psi)| \leq C_4 \|\psi\|_{L^2_p},$$

което показва, че F е ограничен. С помощта на теоремата на Хан-Банах да го продължим до ограничен функционал в цялото $L^2_p(\mathbb{R}^n)$ и да запазим старото означение. Теоремата на Рис ни дава

$$F(\psi) = \int_{\mathbb{R}^n} (\psi(x), \bar{h}(x)) dx, \quad \psi \in L^2_p(\mathbb{R}^n),$$

където $\bar{h}$ е еднозначно определен елемент от $L^2_p(\mathbb{R}^n)$. В частност за ψ от вида /38/ получаваме

$$F(\psi) = (u, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\alpha \in N} (1+|x|^2)^{k+\frac{n}{2}} \partial^\alpha \varphi(x) \bar{h}_\alpha(x) dx,$$

където h_α са съответните компоненти на h . За да завършим доказателството остава да въведем функциите

$$/40/ \quad f_\alpha(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_n} (1+|t|^2)^{k+\frac{n}{2}} \bar{h}_\alpha(t) dt, \quad \alpha \in N.$$

Апроксимирайки h_α в $L^2(\mathbb{R}^n)$ с елементи от $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, както в теорема 2.11, се убеждаваме, че f_α е непрекъсната и

$$(u, \varphi) = (-1)^n \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\alpha \in N} f_\alpha(x) \partial^{\alpha+p} \varphi(x) dx.$$

Остава да проверим, че f_α удовлетворява неравенство от вида

$$|f_\alpha(x)| \leq C_\alpha (1+|x|^2)^{m(\alpha)}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Това обаче следва моментално от /40/. Наистина имаме

$$\begin{aligned} |f_\alpha(x)| &\leq \left(\left| \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_n} (1+|t|^2)^{2k+n} dt \right| \left| \int_{\mathbb{R}^n} |\bar{h}_\alpha(t)|^2 dt \right| \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_\alpha \left(\int_{|t| \leq |x|} (1+|t|^2)^{2k+n} dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq C'_\alpha (1+|x|^2)^{k+n}, \end{aligned}$$

с което доказателството е завършено.

У п р а ж н е н и е 9

1. Докажете, че в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ всяка крайна сума на полунорми от вида

$$q_{k,\alpha}(f) = \sup_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^k |\partial^\alpha f(x)|$$

се мажорира от $C \sup_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^m |\partial^\beta f(x)|$, където констан-

тите C, m и $|\beta|$ са достатъчно големи и, разбира се, не зависят от f .

2. Докажете, че ако $\varphi \in \mathcal{S}$ за всяко $k > 0$ и за всеки мултииндекс α интегралът

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^k |\partial^\alpha \varphi(x)|^2 dx$$

е сходящ.

3. Докажете теорема 2.15, като изхождате от неравенството

$$|(u, \varphi)| \leq C \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ |\alpha| \leq m}} (1+|x|^2)^k |\partial^\alpha \varphi(x)|,$$

без да прибегвате до твърдението в задача 1.

4. Да означим с M линейното подпространство на $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, състоящо се от функциите, за които интегралите

$$/41/ \quad \|f\|_{\alpha, \beta} = \int_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha| |\partial^\beta f(x)| dx$$

са сходящи за произволни мултииндекси $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$. Припомняме, че $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$. Докажете, че ако въведем топология в M чрез фамилията от полунорми /41/, полученото локално изпъкнало пространство съвпада с $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

2.6. Нормални пространства от разпределения

Д е ф и н и ц и я 2.10. Нека E е линейно топологично пространство, за което са в сила вclusions

$$D(\Omega) \subset E \subset D'(\Omega)$$

и естествените вложения

$$D(\Omega) \longrightarrow E \longrightarrow D'_\beta(\Omega)$$

са непрекъснати. E се нарича н о р м а л н о пространство от разпределения, ако образите на $D(\Omega)$ и на E при тези вложения са разположени навсякъде гъсто в съответното пространство.

П р и м е р. $\mathcal{E}'(\Omega)$ е нормално пространство от разпределения.

Т е о р е м а 2.16. Ако E е нормално пространство от разпределения, то неговото спрегнато E' е подпространство на $D'(\Omega)$ и вложенията

$$/42/ \quad E'_\beta \longrightarrow D'_\beta(\Omega)$$

и

$$/43/ \quad E'_\sigma \longrightarrow D'_\sigma(\Omega)$$

са непрекъснати.

Д о к а з а т е л с т в о. Нека $f \in E'$. Понеже топологията, която E индуцира върху $D(\Omega)$ е по-слаба от неговата оригинална топология /твърдението, че вложенията $D(\Omega) \longrightarrow E$ е непрекъснато, означава точно това/, рестрикцията $f|_{D(\Omega)}$ е непрекъсната спрямо топологията на $D(\Omega)$, т.е. $f|_{D(\Omega)}$ е раз-

пределение. Понеже $D(\Omega)$ по условие е навсякъде гъсто в E , f се определя еднозначно от тази рестрикция. Отъждествявайки f с $f|_{D(\Omega)}$, получаваме вclusions $E' \subset D'(\Omega)$. Доказателството,

че вложенията /42/ и /43/ са непрекъснати, по принцип не се отличава от доказателството на теорема 2.9 /вместо оператора T_α трябва да разглеждаме идентитета/ и ние го предоставяме на читателя.

Т е о р е м а 2.17. $C^\infty(\Omega)$ е нормално пространство от разпределения.

Д о к а з а т е л с т в о. Настоячиво съветваме читателя сам да се убеди, че вложенията

$$D(\Omega) \longrightarrow C^\infty(\Omega) \longrightarrow D'_\beta(\Omega)$$

са непрекъснати. Доказателството, че $D(\Omega)$ е навсякъде гъсто в $C^\infty(\Omega)$ е скицирано в зад.1 на упр. 8, стр.225. Що се касае до гъстотата на $C^\infty(\Omega)$ в $D'_\beta(\Omega)$, тя е следствие от по-общата теорема 2.25, според която $C_0^\infty(\Omega)$ е навсякъде гъсто в $D'_\beta(\Omega)$ /стр.254 /.

Следващата таблица съдържа нормалните пространства, с които се запознахме досега. Стрелките означават естествените вложения, $p \geq 1$.

$$D(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega) \longrightarrow L_{loc}^p(\Omega) \longrightarrow D'_\beta(\Omega)$$

$$D(\Omega) \longrightarrow C^\infty(\Omega) \longrightarrow L_{loc}^p(\Omega) \longrightarrow D'_\beta(\Omega)$$

$$D(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow D'_\beta(\mathbb{R}^n)$$

$$D(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow D'_\beta(\mathbb{R}^n).$$

У п р а ж н е н и е 10

1. Проверете, че вложенията в първия и последния ред на таблицата са непрекъснати.

2. Докажете, че $C^\infty(\mathbb{R}^n) \not\subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

3. Конструирайте функция g от $C^\infty(\mathbb{R}^1) \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$, за която не съществува полином p , такъв, че да бъде в сила неравенството

$$|g(n)| \leq |p(n)|, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

2.7. Тензорно произведение на разпределения

Ако $f \in L^1(\mathbb{R}_x^n)$, $g \in L^1(\mathbb{R}_y^m)$, функцията $f \otimes g$ дефинирана чрез равенството

$$(f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y)$$

почти навсякъде в $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^m$, се нарича тензорно произведение на f и g . Нашата задача тук е да дефинираме аналогично изображение

$$D'(\mathbb{R}_x^n) \times D'(\mathbb{R}_y^m) \xrightarrow{\otimes} D'(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^m),$$

което е важно не толкова само по себе си, колкото като стъпка към конволюцията, една от основните операции в теорията на разпределенията.

Нека $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^m)$ и както по-горе $f \in L^1(\mathbb{R}_x^n)$, $g \in L^1(\mathbb{R}_y^m)$. Интерпретирайки $f \otimes g$ като елемент от $D'(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^m)$, с помощта на теоремата на Фубини получаваме

$$\begin{aligned} (f \otimes g, \varphi) &= \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x)g(y)\varphi(x, y) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}_x^n} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}_y^m} g(y)\varphi(x, y) dy \right) dx \end{aligned}$$

Този резултат ни подсеща да дадем

Д е ф и н и ц и я 2.11. Тензорно произведение на разпределенията $u \in D'(\mathbb{R}_x^n)$ и $v \in D'(\mathbb{R}_y^m)$ наричаме линейния функционал $u \otimes v$, който действа по правилото

$$/44/ \quad (u \otimes v, \varphi) = (u, (v_y, \varphi(x, y))), \quad \varphi \in D(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^m)$$

При фиксирано x $\varphi(x, \cdot)$ е функция от $D(\mathbb{R}_y^m)$. Индексът y в израза $(v_y, \varphi(x, y))$ означава, че v действа именно на тази функция.

Т е о р е м а 2.18. Тензорното произведение $u \otimes v$ е разпределение от $D'(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^m)$. Освен /44/ в сила е и тъждеството

$$(u \otimes v, \varphi) = (v, (u_x, \varphi(x, y))),$$

т.е.

$$/45/ \quad (u, (v_y, \varphi(x, y))) = (v, (u_x, \varphi(x, y))).$$

Ще повече - изображението

$$/46/ \quad D'_\beta(\mathbb{R}_x^n) \times D'_\beta(\mathbb{R}_y^m) \xrightarrow{\otimes} D'_\beta(\mathbb{R}^{n+m})$$

е билинейно и непрекъснато.

Тази теорема следва непосредствено от две лема.

Л е м а 2.5. Нека $v \in D'(\mathbb{R}_y^m)$. Изображението

$$\tilde{v} : D(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^m) \longrightarrow D(\mathbb{R}_x^n),$$

което действа по правилото

$$\varphi \xrightarrow{\tilde{v}} (v_y, \varphi(x, y)) = \psi(x)$$

е непрекъснато.

Д о к а з а т е л с т в о. Най-напред ще покажем, че $\psi \in D(\mathbb{R}_x^n)$. Ако $|x_0|$ е достатъчно голямо, точката $(x_0, y) \in \text{supp } \varphi$ каквото и да бъде $y \in \mathbb{R}^m$; следователно $\varphi(x_0, y) \equiv 0$ и ние заключаваме, че $\psi(x_0) = 0$. По този начин се убедихме, че ψ има компактен носител. Оста-

ва да докажем, че тази функция е гладка. За образец ще установим, че $\frac{\partial \Psi}{\partial x_n}$ съществува и е непрекъсната. За останалите производни разсъжденията са аналогични.

Да положим за краткост $x = (x', x_n)$, където естествено $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$. Очевидно имаме

$$/47/ \quad \frac{\Psi(x', x_n+h) - \Psi(x', x_n)}{h} = (\nu_y, \frac{\varphi(x', x_n+h, y) - \varphi(x', x_n, y)}{h})$$

Нека $\{h_\nu\} \rightarrow 0$, $0 < |h_\nu| < 1$. Веднага се вижда, че редицата

$$g_\nu(x, y) = \frac{\varphi(x', x_n + h_\nu, y) - \varphi(x', x_n, y)}{h_\nu}$$

клони към $\frac{\partial \Psi}{\partial x_n}$ в $D(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^m)$. Проверете! Това между

другото означава, че когато точката x е фиксирана, $g_\nu(x, y)$ кло-
ни към $\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x, y)$ в $D(\mathbb{R}_y^m)$. Следователно, извършвайки
граничния преход $h_\nu \rightarrow 0$, от /47/ получаваме

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_n}(x) = (\nu_y, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x, y)).$$

Повтаряйки многократно това разсъждение, лесно се убеждаваме, че $\Psi \in C^\infty(\mathbb{R}_x^n)$ и освен това за всеки n -мерен мултииндекс α е в сила равенството

$$/48/ \quad \partial^\alpha \Psi(x) = (\nu_y, \partial_x^\alpha \varphi(x, y)).$$

Стигнахме до резултат, аналогичен на теоремата за диференциране под знака на интеграла. Понеже по-горе установихме, че Ψ е с компактен носител, принадлежността на Ψ към $D(\mathbb{R}_x^n)$ е доказана. Остава да проверим, че изображението $\tilde{\nu}$ е непрекъснато. Според дефиницията на топологията в $D(\mathbb{R}^{n+m})$, достатъчно е да покажем, че рестрикцията на $\tilde{\nu}$ върху $C_0^\infty(K)$, където K е произволен компакт в $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^m$ е непрекъсната. За да се убедим в по-

следното, да вземем такива компакти $K_1 \subset \mathbb{R}_x^n$, $K_2 \subset \mathbb{R}_y^m$, че да имаме $K \subset K_1 \times K_2$. Понеже $\tilde{\nu}$ изобразява $C_0^\infty(K)$ в $C_0^\infty(K_1)$ и топологията на $C_0^\infty(K_1)$ съвпада с тази, индуцирана от $D(\mathbb{R}_x^n)$ /теорема 5.2/, остава да установим, че изображението

$$C_0^\infty(K) \xrightarrow{\tilde{\nu}} C_0^\infty(K_1)$$

е непрекъснато.

Нека сега U е околност на началото в $C_0^\infty(K_1)$. Вез ограничение на общността можем да си мислим, че U има вида

$$U = \{\varphi \in C_0^\infty(K_1), \quad \rho(\varphi) < \varepsilon\},$$

където $\rho(\varphi) = \sup_{\substack{|\alpha| \leq m \\ x \in K_1}} |\partial^\alpha \varphi(x)|$.

От друга страна, ν е разпределение - следователно за всяко $\varphi \in C_0^\infty(K)$ е в сила оценка от вида

$$/49/ \quad |(\nu_y, \varphi(x, y))| \leq C \max_{\substack{y \in K_2 \\ |\beta| \leq p}} |\partial_y^\beta \varphi(x, y)|$$

с подходящи константи C и p , зависещи само от K_2 .

Нека сега $W \subset C_0^\infty(K)$ е околността на началото, дефинирана с неравенството

$$\sup_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq p \\ (x, y) \in K}} |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \varphi(x, y)| < \frac{\varepsilon}{C}.$$

С помощта на /48/ и /49/ веднага заключаваме, че от $\varphi \in W$ следва $\Psi = \tilde{\nu}(\varphi) \in U$, с което лемата е доказана.

Следното твърдение е почти очевидно и може да се установи по няколко различни начина.

Л е м а 2.6. Крайните линейни комбинации от вида

$$/50/ \quad \sum_j \varphi_j(x) \psi_j(y), \quad \varphi_j \in D(\mathbb{R}_x^n), \quad \psi_j \in D(\mathbb{R}_y^m).$$

са разположени навсякъде гъсто в $D(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^m)$.

Доказателство. Нека $\varphi \in D(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^m)$. Да предположим за простота, че $\text{supp } \varphi$ се съдържа в куба $|x_j| \leq \pi$, $|y_i| \leq \pi$, $j = 1, 2, \dots, n$, $i = 1, 2, \dots, m$ /в противен случай ще направим линейна смяна на променливите/ и да развием φ в ред на Фурие. Получаваме

$$/51/ \quad \varphi(x, y) = \sum_{(\nu, \mu) \in \mathbb{Z}^{n+m}} a_{\nu, \mu} e^{i(\nu, x)} e^{i(\mu, y)},$$

където $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$ са вектори, описващи целочислените точки съответно в $\mathbb{R}_x^n$ и $\mathbb{R}_y^m$,

$$(\nu, x) = \sum_{j=1}^n \nu_j x_j, \quad (\mu, y) = \sum_{k=1}^m \mu_k y_k$$

са скаларните произведения в тези пространства и

$$a_{\nu, \mu} = \frac{1}{(2\pi)^{n+m}} \int_{\mathbb{R}^{n+m}} \varphi(x, y) e^{-i(\nu, x)} e^{-i(\mu, y)} dx dy.$$

Нека сега p и q са произволни естествени числа. Да положим

$$\Delta_x = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}, \quad \Delta_y = \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2}{\partial y_k^2}, \quad A_x = (I - \Delta_x)^p, \quad B_y = (I - \Delta_y)^q.$$

Очевидно имаме

$$\begin{aligned} & (1 + |\nu|^2)^p (1 + |\mu|^2)^q a_{\nu, \mu} = \\ & = \frac{1}{(2\pi)^{n+m}} \int_{\mathbb{R}^{n+m}} \varphi(x, y) A_x(e^{-i(x, \nu)}) B_y(e^{-i(y, \mu)}) dx dy, \end{aligned}$$

откъдето с интегриране по части (φ е компактен носител) намираме

$$(1 + |\nu|^2)^p (1 + |\mu|^2)^q a_{\nu, \mu} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n+m}} \int_{\mathbb{R}^{n+m}} e^{-i(\nu, x)} e^{-i(\mu, y)} A_x B_y \varphi(x, y) dx dy,$$

т.е.

$$|a_{\nu, \mu}| \leq \frac{C_{p, q}}{(1 + |\nu|^2)^p (1 + |\mu|^2)^q}.$$

неравенство, което показва, че редът /51/ и всички редове, които се получават от него с почленно диференциране, са равномерно сходящи в $\mathbb{R}^{n+m}$. Този факт показва, че сумата на /51/ е тъкмо φ , а диференцираните редове имат суми, равни на съответните производни на тази функция ([14], стр.121).

Нека

$$S_k(x, y) = \sum_{\substack{|\nu| \leq k \\ |\mu| \leq k}} a_{\nu, \mu} e^{i(\nu, x)} e^{i(\mu, y)}$$

и нека $f \in D(\mathbb{R}_x^n)$, $g \in D(\mathbb{R}_y^m)$ са функции, тъждествено равни на единица съответно около

$$\Omega_1: |x_j| \leq \pi, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n \quad \text{и} \quad \Omega_2: |y_i| \leq \pi, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

В такъв случай редицата с общ член

$$\psi_k(x, y) = f(x) g(y) S_k(x, y)$$

притежава всички необходими свойства и лемата е доказана.

Сега да докажем теорема 2.18.

Доказателство. Според лема 2.5, ако $\{\varphi_\nu\} \rightarrow 0$ в $D(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^m)$, то $\psi_\nu(x) = (v_\nu, \varphi_\nu(x, y))$ клони към нула в $D(\mathbb{R}_x^n)$ и /44/ показва, че

$$(u \otimes v, \varphi_\nu) \rightarrow 0,$$

т.е. $u \otimes v$ е разпределение от $D'(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^m)$.

За да установим /45/ ще забележим, че за $\varphi(x, y) = h_1(x) h_2(y)$,

където $h_1 \in D(\mathbb{R}_x^n)$, $h_2 \in D(\mathbb{R}_y^m)$ имаме

$$(u, (\psi_{\infty}, \varphi)) = (u, h_1) (\nu, h_2) = (\nu, (u_{\infty}, \varphi)),$$

така че /45/ е удовлетворено. Следователно то е в сила и за функциите от вида /50/. Понеже те са навсякъде гъсто в $D(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^m)$ /45/ е доказано.

Остава да се убедим, че изображението

$$D'_\beta(\mathbb{R}_x^n) \times D'_\beta(\mathbb{R}_y^m) \xrightarrow{\otimes} D'_\beta(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^m)$$

е непрекъснато. /Неговата билинейност е очевидна./

Нека W е околност на началото в $D'_\beta(\mathbb{R}^{n+m})$. Трябва да намерим околности W_1 и W_2 на началото в $D'_\beta(\mathbb{R}_x^n)$ и в $D'_\beta(\mathbb{R}_y^m)$ такива, че от $(u, \nu) \in W_1 \times W_2$ да следва $u \otimes \nu \in W$.

Без ограничение на общността можем да предположим, че W има вида

$$W = \left\{ w \in D'(\mathbb{R}^{n+m}), \sup_{\varphi \in B} |(w, \varphi)| < \varepsilon \right\},$$

където B е ограничено множество в $D(\mathbb{R}^{n+m})$. /Това се дължи на обстоятелството, че ако $B_1, B_2, \dots, B_k$ са ограничени множества в $D(\mathbb{R}^{n+m})$, то и $\bigcup_1^k B_i$ е ограничено. /Сравнете с док. на теореми 2.8 и 2.9./ Тогави B се съдържа в някое от пространствата $C_0^\infty(K_1 \times K_2)$, където $K_1 \times K_2$ е компакт в $\mathbb{R}^{n+m}$ и за произволна двойка от мултииндекси (α, β) имаме

$$\sup_{\varphi \in B} \sup_{(x,y) \in K_1 \times K_2} |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \varphi(x,y)| < C_{\alpha,\beta},$$

където $C_{\alpha,\beta}$ са подходящи константи /теорема 2.20 стр. 36/. Да положим $C_\beta = \max_{|\alpha| \leq |\beta|} C_{\alpha,\beta}$ и да означим с B_y ограниче-

ното множество от функциите $f \in C_0^\infty(K_2)$, за които

$$\sup_{y \in K_2} |\partial^\beta f(y)| \leq C_\beta.$$

След всичко това да дефинираме околността W_2 на началото в $D'_\beta(\mathbb{R}_y^m)$ по следния начин:

$$W_2 = \left\{ \nu \in D'(\mathbb{R}_y^m), \sup_{f \in B_y} |(\nu, f)| < 1 \right\}.$$

Ясно е, че ако $\varphi \in B$, при всяко фиксирано x функцията $\varphi(x, \cdot)$ принадлежи на B_y . Наистина имаме $\sup_{y \in K_2} |\partial_y^\beta \varphi(x, y)| \leq \sup_{(x,y) \in K_1 \times K_2} |\partial_y^\beta \varphi(x, y)| \leq C_{0,\beta} \leq C_\beta$, т.е. $\varphi(x, \cdot) \in B_y$. Ще установим, че когато φ описва B , а $\nu \in W_2$, функцията $\psi_{\nu, \varphi}$, дефинирана чрез равенството

$$/52/ \quad \psi_{\nu, \varphi} = (\nu_y, \varphi(x, y)),$$

остава в някакво ограничено множество $B_x \subset D(\mathbb{R}_x^n)$. Най-напред е ясно /лема 2.5/, че $\psi_{\nu, \varphi} \in C_0^\infty(K_1)$. Следователно остава да докажем, че за всеки n -мерен мултииндекс α имаме

$$/53/ \quad \sup_{x \in K_1} |\partial_x^\alpha \psi_{\nu, \varphi}(x)| \leq A_\alpha = \text{const}$$

за всяко $\psi_{\nu, \varphi}$ от вида /52/. Тъй като според /48/ имаме

$$\partial_x^\alpha \psi_{\nu, \varphi}(x) = (\nu_y, \partial_x^\alpha \varphi(x, y)),$$

достатъчно е да проверим, че за всяко фиксирано x и за всяко $\varphi \in B$, функцията $\frac{1}{\lambda} \partial_x^\alpha \varphi(x, y) \in B_y$, където $\lambda > 1$ е подходяща константа. Това обаче е почти очевидно благодарение на удачната дефиниция на B_y . Наистина имаме

$$\begin{aligned} |\partial_y^\beta (\frac{1}{\lambda} \partial_x^\alpha \varphi(x, y))| &\leq \frac{1}{\lambda} |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \varphi(x, y)| \\ &\leq \frac{1}{\lambda} C_{\alpha,\beta} \leq \frac{1}{\lambda} C_\beta < C_\beta \end{aligned}$$

за $|\beta| \geq |\alpha|$. Мултииндексите β , за които $|\beta| \leq |\alpha|$ са краен брой (α е фиксирано) и вземайки $\lambda = \lambda_\alpha$ достатъчно голямо, можем да си осигурим и неравенствата $\frac{1}{\lambda} C_{\alpha, \beta} < C_\beta$ за $|\beta| \leq |\alpha|$.

И така, излезе, че $\frac{1}{\lambda} \Psi_{\nu, \varphi} \in B_y$. В такъв случай според дефиницията на W_2 за всяко $\nu \in W_2$ получаваме

$$\left| \frac{1}{\lambda_\alpha} \partial^\alpha \Psi_{\nu, \varphi}(x) \right| = \left| \left(V_y, \frac{1}{\lambda_\alpha} \partial^\alpha \varphi(x, y) \right) \right| \leq 1,$$

т.е.

$$|\partial^\alpha \Psi_{\nu, \varphi}(x)| \leq \lambda_\alpha,$$

с което /53/ е доказано с $A_\alpha = \lambda_\alpha$. Това неравенство ни позволява да заключим /теорема 2.20 стр. 36/, че $\Psi_{\nu, \varphi}$ наистина остава в някакво ограничено множество $B_x \subset D(\mathbb{R}_x^n)$.

След тази констатация да положим

$$W_1 = \left\{ u \in D'(\mathbb{R}_x^n), \sup_{\Psi \in B_x} |(u, \Psi)| < \varepsilon \right\}.$$

Очевидно W_1 е околност на началото в $D'_\beta(\mathbb{R}_x^n)$ и равенството

$$(u \otimes \nu, \varphi) = (u, (V_y, \varphi(x, y)))$$

показва, че от $(u, \nu) \in W_1 \times W_2$ наистина следва $u \otimes \nu \in W$.

С това доказателството е завършено.

Равенството

$$(u, (V_y, \varphi(x, y))) = (\nu, (u_\alpha, \varphi(x, y))),$$

което установихме между другото, очевидно представлява аналог на теоремата на Фубини.

З а б е л е ж к а. Ние едва ли ще имаме случай да използваме, че изображението /46/ е непрекъснато. Обикновено е достатъчно да знаем, че то е непрекъснато по всяка от променливите u и ν , когато другата остава фиксирана т.е. че то е разделно непрекъснато. Дадохме доказателството в текста, защото ни се стру-

на поучително. За по-слаби, просто доказуеми твърдения, които са достатъчни в повечето случаи, вижте следващото упражнение.

Ще завършим обсъждането на свойствата на тензорното произведение с един фактически вече установен резултат.

Т е о р е м а 2.19. Нека $u \in D'(\mathbb{R}_x^n)$, $\nu \in D'(\mathbb{R}_y^m)$.
Тогава

$$\text{supp } u \otimes \nu = \text{supp } u \times \text{supp } \nu.$$

Д о к а з а т е л с т в о. Нека $\varphi \in D(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^m)$. Ако $\text{supp } \varphi \cap \{\text{supp } u \times \text{supp } \nu\} = \emptyset$, както в доказателството на теорема 2.18 се вижда, че носителят на $\Psi_{(x)} = (V_y, \varphi(x, y))$ не се пресича с носителя на u и следователно $(u \otimes \nu, \varphi) = (u, \Psi) = 0$. Така доказахме включването

$$\text{supp } u \otimes \nu \subset \text{supp } u \times \text{supp } \nu.$$

За да се убедим, че в същност имаме равенство, достатъчно е да забележим, че за $\varphi_1 \in D(\mathbb{R}_x^n)$, $\varphi_2 \in D(\mathbb{R}_y^m)$ имаме

$$(u \otimes \nu, \varphi_1(x) \varphi_2(y)) = (u, \varphi_1) (\nu, \varphi_2).$$

У п р а ж н е н и е 11

1. Докажете директно, че ако $\{u_\nu\} \rightarrow u$ в $D'(\mathbb{R}_x^n)$, за всяко $\nu \in D'(\mathbb{R}_y^m)$ имаме $u_\nu \otimes \nu \rightarrow u \otimes \nu$.

У п ъ т в а н е. Използвайте слабата топология.

2. Установете директно, че ако

$$u_\nu \rightarrow u \text{ в } D'(\mathbb{R}_x^n), \quad \nu_\mu \rightarrow \nu \text{ в } D'(\mathbb{R}_y^m),$$

то

$$u_\nu \otimes \nu_\mu \rightarrow u \otimes \nu \text{ в } D'(\mathbb{R}^{n+m}),$$

когато индексите ν и μ независимо един от друг клонят към безкрайност.

3. Докажете директно, че изображенията

$$u \longrightarrow u \otimes v \text{ и } v \longrightarrow u \otimes v$$

съответно на $D'_\beta(\mathbb{R}^n_x)$ и $D'_\beta(\mathbb{R}^m_y)$ в $D'_\beta(\mathbb{R}^{n+m})$ са непрекъснати.

4. Нека $u \in D'(\mathbb{R}^n_x)$, $v \in D'(\mathbb{R}^m_y)$, $w \in D'(\mathbb{R}^k_z)$. Докажете, че

$$(u \otimes v) \otimes w = u \otimes (v \otimes w).$$

/Асоциативност на тензорното произведение./

5. Нека $u \in D'(\mathbb{R}^n_x)$, $v \in D'(\mathbb{R}^m_y)$. Докажете равенствата

$$\partial_x^\alpha u \otimes \partial_y^\beta v = \partial_x^\alpha \partial_y^\beta (u \otimes v),$$

$$f u \otimes g v = (f \otimes g)(u \otimes v),$$

$$(f \in C^\infty(\mathbb{R}^n_x), \quad g \in C^\infty(\mathbb{R}^m_y)).$$

6. Нека $u \in D'(\mathbb{R}^n_x)$, $v \in D'(\mathbb{R}^m_y)$, $w \in D'(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^m_y)$.

Докажете, че ако за всяка функция $f \otimes g$ ($f \in D(\mathbb{R}^n_x)$, $g \in D(\mathbb{R}^m_y)$) имаме

$$(w, f \otimes g) = (u, f)(v, g),$$

то $w = u \otimes v$. /Единственост на тензорното произведение./

2.8. Конволюция на две разпределения

Както вече загатнахме, конволюцията играе изключителна роля в теорията на разпределенията и нейните приложения.

За да стигнем до правилната дефиниция, да вземем две функции $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $v \in L^1(\mathbb{R}^m)$ и да интерпретираме тяхната

конволюция

$$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y) v(y) dy$$

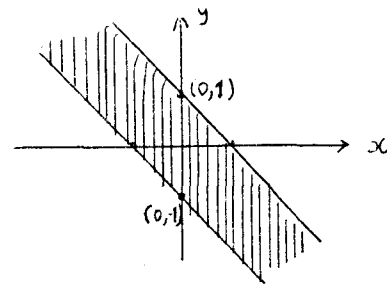
като разпределение. За всяко $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ получаваме

$$\begin{aligned} (u * v, \varphi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} u(x-y) v(y) dy \right) \varphi(x) dx \\ &= \iint_{\mathbb{R}^{2n}} u(x-y) v(y) \varphi(x) dy dx \\ &= \iint_{\mathbb{R}^{2n}} u(z) v(y) \varphi(y+z) dz dy = (u \otimes v, \varphi(x+y)). \end{aligned}$$

Този резултат ни подсеща да дефинираме конволюция на две разпределения $u \in D'(\mathbb{R}^n)$, $v \in D'(\mathbb{R}^m)$ с помощта на равенството /54/

$$(u * v, \varphi) = (u \otimes v, \varphi(x+y)), \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^n).$$

За съжаление тази дефиниция не винаги е състоятелна. Работата е там, че от $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ не следва, че функцията $\Psi(x, y) = \varphi(x+y) \in D(\mathbb{R}^{2n})$, например, ако $\varphi \in D(\mathbb{R}^1)$ и $\text{supp } \varphi = [-1, 1]$, то носител на $\varphi(x+y)$ в $\mathbb{R}^2$ е ивицата $|x+y| \leq 1$, зафривована на фиг.5, която



Фиг.5

не е компактна. За да се ориентираме в естеството на въпроса, да разгледаме по-внимателно възможностите, които ни предлага /54/. Имаме

$$(u \otimes v, \varphi(x+y)) = (u, (v_y, \varphi(x+y))).$$

Във всеки случай функцията

$$\Psi(x) \stackrel{\text{def}}{=} (v_y, \varphi(x+y))$$

е дефинирана за всяко $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ и разсъжденията, направени при доказателството на лема 5.2 показват, че $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и

$$/55/ \quad \partial^\alpha \varphi(x) = (\nu_y, \partial_x^\alpha \varphi(x+y)).$$

Сега за нас е важно да изследваме носителя на φ . Нека $x_0 \in \text{supp } \varphi$. Очевидно е, че в такъв случай трябва да имаме

$$/56/ \quad \text{supp } \nu \cap \text{supp } \varphi(x_0 + y) \neq \emptyset,$$

защото в противен случай веднага следва $\varphi(x_0) = 0$. Релацията /56/ означава, че съществува поне едно $y_0 \in \text{supp } \nu$, за което $x_0 + y_0 \in \text{supp } \varphi$. С други думи, установихме вкличването $x_0 \in \text{supp } \varphi - y_0 \subset \text{supp } \varphi - \text{supp } \nu$, което означава, че

$$/57/ \quad \text{supp } \varphi \subset \text{supp } \varphi - \text{supp } \nu,$$

защото точката $x_0 \in \text{supp } \varphi$ беше произволна¹. Съотношението /57/ спасява дефиниция /54/ в няколко важни случая.

Наистина нека $u \in D'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ако сечението $\text{supp } u \cap \text{supp } \varphi$ е компактно множество в $\mathbb{R}^n$, стойността на u върху елемента φ допуска разумна дефиниция. Достатъчно е да положим

$$/58/ \quad (u, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} (u, g\varphi),$$

където $g \in D(\mathbb{R}^n)$ и е тъждествено равно на единица в някаква околност на $\text{supp } u \cap \text{supp } \varphi$. Ако h е друга такава функция, веднага се вижда, че

$$(u, g\varphi) = (u, h\varphi),$$

защото $(u, (g-h)\varphi) = 0$, понеже $\text{supp } u \cap \text{supp } (g-h)\varphi = \emptyset$. Следователно дефиницията /58/ е смислена и показва, че ако за всяко $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ сечението

$$\text{supp } u \cap (\text{supp } \varphi - \text{supp } \nu)$$

¹Понеже $\text{supp } \varphi$ и $\text{supp } \nu$ са множества в линейното пространство $\mathbb{R}^n$, смисълът на означението $\text{supp } \varphi - \text{supp } \nu$ е ясен.

е компактен от $\mathbb{R}^n$, конволюцията $u * \nu$ може да се дефинира чрез /54/.

Дойде време да въведем един термин.

Д е ф и н и ц и я 2.12. Ще казваме, че разпределенията $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ и $\nu \in D'(\mathbb{R}^n)$ имат правилно (к о н в о л ю т и в н о) разположени носители, ако за всеки компактен $K \subset \mathbb{R}^n$ сечението

$$\text{supp } u \cap (K - \text{supp } \nu)$$

е компактно.

Предоставяме на читателя сам да се убеди, че множествата

$$\text{supp } u \cap (K - \text{supp } \nu) \text{ и } \text{supp } \nu \cap (K - \text{supp } u)$$

са компактни или некомпактни едновременно. Бихме могли да кажем, че u и ν имат правилно разположени носители тогава и само тогава, когато от $x + y \in K$, $x \in \text{supp } u$, $y \in \text{supp } \nu$, където $K \subset \mathbb{R}^n$ е компактен, следва, че x и y остават в някакви ограничени множества в $\mathbb{R}^n$.

Сега вече можем да произнесем следната

Т е о р е м а 2.19. Ако u и ν са разпределения от $D'(\mathbb{R}^n)$ с правилно разположени носители, конволюцията $u * \nu$ се дефинира чрез равенството

$$/54/ \quad (u * \nu, \varphi) = (u \otimes \nu, \varphi(x+y)), \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$$

и представлява разпределение от $D'(\mathbb{R}^n)$.

В частност конволюцията е дефинирана в следните важни случаи:

а/ когато поне един от носителите на u и ν е компактен;

б/ когато носителят на едното разпределение се съдържа в полупространството $x_n \geq 0$, а носителят на другото - в конуса

$$\Omega : (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2)^{\frac{1}{2}} \leq ax_n, \quad a > 0.$$

Доказателство. Нека u и v са с правилно разположени носители. От разсъжденията, които вече направихме, е ясно, че дефиницията /54/ е коректна. Остава да проверим, че функционалът $u * v$ е непрекъснат в $D(\mathbb{R}^n)$. Нека $\{\varphi_\nu\} \rightarrow 0$ в $D(\mathbb{R}^n)$ и K е компакт, който съдържа носителите на всяка от функциите $\{\varphi_\nu\}$. Нека $\alpha \in D(\mathbb{R}^n)$ е функция, тъждествено равна на единица около компактно множество

$$\text{supp } u \cap (K - \text{supp } v)$$

Според /54/ имаме

$$\begin{aligned} (u * v, \varphi_\nu) &= (u, \alpha(x) (v_y, \varphi_\nu(x+y))) \\ &= (u, (v_y, \alpha(x) \varphi_\nu(x+y))). \end{aligned}$$

Да положим за момент

$$\psi_\nu(x) = (v_y, \alpha(x) \varphi_\nu(x+y))$$

Понеже редицата $\{\alpha(x) \varphi_\nu(x+y)\}$ клони към нула в $D(\mathbb{R}^{2n})^1$, според лема 2.5 редицата $\{\psi_\nu\} \rightarrow 0$ в $D(\mathbb{R}^n)$ и следователно

$$(u * v, \varphi_\nu) = (u, \psi_\nu) \rightarrow 0,$$

с което включването $u * v \in D'(\mathbb{R}^n)$ е установено. За да завършим с доказателството на теоремата, остава да се убедим, че в случаите а/ и б/ u и v са с правилно разположени носители.

Случаят а/ е съвсем ясен. Да разгледаме б/.

Нека $x \in \text{supp } u \subset \{x, x_n \geq 0\}$, $y \in \text{supp } v \subset \Omega$ и освен това $x+y \in B$, където B е произволно ограничено множество в $\mathbb{R}^n$. От $x+y \in B$ веднага следва $|x_n + y_n| \leq A = \text{const}$, т.е. $0 \leq x_n \leq A$, $0 \leq y_n \leq A$, понеже по ус-

¹ В частност това означава, че носителите на $\{\alpha(x) \varphi_\nu(x+y)\}$ са равномерно ограничени. Ето защо присъствието на множителя α е съществено.

ловие имаме $x_n \geq 0$, $y_n \geq 0$. Сега вече дефиницията на Ω ни дава

$$\text{т.е.} \quad (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{n-1}^2)^{\frac{1}{2}} \leq ay_n \leq aA,$$

$$y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{n-1}^2 \leq a^2 A^2,$$

откъдето следва $|y|^2 \leq a^2 A^2 + A^2$. От тук и от $x+y \in B$ заключаваме, че x остава ограничено.

С това теорема 2.19 е доказана.

Теорема 2.20. Ако $u \in D'(\mathbb{R}^n)$, $v \in D'(\mathbb{R}^n)$ са разпределения с правилно разположени носители, то

$$u * v = v * u,$$

т.е. конволюцията е комутативна.

Доказателство. Трябва да покажем, че за всяко фиксирано $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ имаме

$$(u * v, \varphi) = (v * u, \varphi),$$

защото очевидно $u * v$ и $v * u$ са дефинирани. За тази цел ще използваме тъждеството

$$/45/ \quad (u, (v_y, h(x, y))) = (v, (u_x, h(x, y))), \quad h \in D(\mathbb{R}^{2n}),$$

установено при доказателството на теорема 2.18.

Нека $\alpha \in D(\mathbb{R}^n)$ е тъждествено равна на единица около компакта

$$\Omega_1 = \text{supp } u \cap (\text{supp } \varphi - \text{supp } v).$$

Имаме

$$\begin{aligned} (u * v, \varphi) &= (u, (v_y, \varphi(x+y))) = (u, \alpha(x) (v_y, \varphi(x+y))) \\ &= (u, (v_y, \alpha(x) \varphi(x+y))) = (v, (u_x, \alpha(x) \varphi(x+y))), \end{aligned}$$

като последното равенство получихме въз основа на /45/.

От друга страна, дефиницията ни дава

$$(v * u, \varphi) = (v, (u_x, \varphi(x+y))).$$

Следователно достатъчно е да установим, че функциите

$$\psi_1(y) = (u_x, \alpha(x) \varphi(x+y))$$

и

$$\psi_2(y) = (u_x, \varphi(x+y))$$

съвпадат тъждествено в някаква околност на компакта

$$\text{supp } v \cap (\text{supp } \varphi - \text{supp } u) = \Omega_2,$$

защото според /57/ носителите на ψ_1 и ψ_2 се съдържат в $\text{supp } \varphi - \text{supp } u$, откъдето следва, че (v, ψ_1) и (v, ψ_2) зависят само от стойностите на ψ_1 и ψ_2 около Ω_2 .

Нека Ω_2 е компактна околност на Ω_2 . Да проследим как варира носителят на $\varphi(x+y)$, разглеждан като функция на x , когато y описва Ω_2 . Понеже от $x+y \in \text{supp } \varphi$, $y \in \Omega_2$ получаваме

$$x \in \text{supp } \varphi - y \subset \text{supp } \varphi - \Omega_2,$$

а множеството $\text{supp } \varphi - \Omega_2$ е компактно, ако изберем $\alpha \in D(\mathbb{R}^n)$ по такъв начин, че да имаме $\alpha \equiv 1$ в някаква околност на $\text{supp } \varphi - \Omega_2$, ще получим $\varphi(x+y) \equiv \varphi(x+y) \alpha(x)$ за $y \in \Omega_2$, т.е.

$$\psi_1(y) \equiv \psi_2(y)$$

в Ω_2 .

Понеже досега единственото изискване за α беше да бъде равно на единица около Ω_2 , за всяко $\alpha \in D(\mathbb{R}^n)$, което е тъждествено равно на единица в някаква околност на компакта

$$\Omega_1 \cup (\text{supp } \varphi - \Omega_2),$$

получаваме $(v, \psi_1) = (v, \psi_2)$, т.е.

$$(u * v, \varphi) = (v * u, \varphi),$$

с което комутативността на конволюцията е доказана.

Пример 1. За всяко $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ имаме

$$u * \delta = \delta * u = u.$$

Наистина $(u * \delta, \varphi) = (u, (\delta_y, \varphi(x+y))) = (u, \varphi).$

Теорема 2.21. Нека $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ и $v \in D'(\mathbb{R}^n)$ са с правилно разположени носители. Тогава

$$\text{supp}(u * v) \subset \overline{\text{supp } u + \text{supp } v}^1$$

Доказателство. Нека $z_0 \in \text{supp } u * v$. Това означава, че за всяка околност Ω_{z_0} на тази точка съществува функция φ_{z_0} , чийто носител се съдържа в Ω_{z_0} , за която $(u * v, \varphi_{z_0}) \neq 0$, т.е.

$$/59/ \quad (u, (v_y, \varphi_{z_0}(x+y))) \neq 0.$$

Както обикновено, да положим

$$\psi_{z_0}(x) = (v_y, \varphi_{z_0}(x+y)).$$

Неравенство /59/ показва, че $\text{supp } u \cap \text{supp } \psi_{z_0} \neq \emptyset$. С други думи, съществува поне една точка $x_0 \in \text{supp } u$ такава, че да имаме $x_0 = z - y_0$, където $z \in \text{supp } \varphi_{z_0}$, $y_0 \in \text{supp } v$, защото според /57/ носителят на ψ_{z_0} се съдържа в $\text{supp } \varphi_{z_0} - \text{supp } v$. И така, намерихме точка $z \in \Omega_{z_0}$, за която

$$/60/ \quad z = x_0 + y_0 \in \text{supp } u + \text{supp } v \subset \overline{\text{supp } u + \text{supp } v}.$$

Понеже околността Ω_{z_0} беше произволна /60/ ни дава

$$z_0 \in \overline{\text{supp } u + \text{supp } v},$$

т.е.

$$\text{supp}(u * v) \subset \overline{\text{supp } u + \text{supp } v},$$

защото и точката $z_0 \in \text{supp}(u * v)$ беше произволна.

С това теоремата е доказана.

¹Припомняме, че с $\bar{A}$ означаваме затворената обвивка на A .

С л е д с т в и е. Конволюцията на две разпределения с компактен носител е разпределение с компактен носител.

Т е о р е м а 2.22. Нека u и v са разпределения от $D'(\mathbb{R}^n)$ с правилно разположени носители. Тогава имаме

$$\partial^\alpha(u * v) = \partial^\alpha u * v = u * \partial^\alpha v,$$

за произволен мултиндекс α .

Д о к а з а т е л с т в о. Непосредствено от дефинициите получаваме

$$(\partial^\alpha(u * v), \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (u * v, \partial^\alpha \varphi)$$

$$= (-1)^{|\alpha|} (u, (v_y, \partial_y^\alpha \varphi(x+y)))$$

$$= (u, (\partial^\alpha v_y, \varphi(x+y))) = (u * \partial^\alpha v, \varphi),$$

с което равенството $\partial^\alpha(u * v) = u * \partial^\alpha v$ е доказано. По-натък, използвайки комутативността на конволюцията, намираме

$$\partial^\alpha(u * v) = \partial^\alpha(v * u) = v * \partial^\alpha u = \partial^\alpha u * v$$

и доказателството е завършено.

Следващият пример показва, че диференцирането може да се запише като конволюция.

П р и м е р 2. За всяко $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ имаме

$$\partial^\alpha \delta * u = \delta * \partial^\alpha u = \partial^\alpha u. \text{ В частност } \delta * u = u.$$

Т е о р е м а 2.23. Ако u, v и w са разпределения от $D'(\mathbb{R}^n)$ и поне две от тях са с компактен носител, имаме

$$/61/ \quad u * (v * w) = (u * v) * w.$$

Д о к а з а т е л с т в о. Според теорема 2.21 и двете конволюции в /61/ съществуват. Тяхното равенство се установява непосредствено. Например, за първата от тях получаваме

$$(u * (v * w), \varphi) = (u_x, (v_y, w_z, \varphi(x+y+z)))$$

$$= (u_x, (v_y, (w_z, \varphi(x+y+z))))$$

Втората конволюция се преработва аналогично и се стига до същия резултат.

З а б е л е ж к а. Следващият пример, даден от самия Шварц, показва, че в общия случай нямаме асоциативност.

Нека

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}^1$$

е функцията на Хевисайд. Имам

$$(1 * \delta') * h = (1 * \delta)' * h = 1' * h = 0.$$

От друга страна, обаче

$$1 * (\delta' * h) = 1 * h' = 1 * \delta = 1.$$

Следващата теорема е твърде полезна.

Т е о р е м а 2.24. Ако $u \in D'(\mathbb{R}^n)$, а $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, конволюцията $u * \varphi$ е функция от $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Нещо повече, в сила е равенството

$$/62/ \quad u * \varphi = (u_y, \varphi(x-y)).$$

Д о к а з а т е л с т в о. Разсъжденията, направени при доказателството на лема 2.5, показват, че функцията

$$\psi(x) \stackrel{\text{def}}{=} (u_y, \varphi(x-y))$$

принадлежи на $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Остава да установим /62/. За всяко $h \in D(\mathbb{R}^n)$ имаме

$$(u * \varphi, h) = (u, (\varphi_y, h(x+y)))$$

$$= (u_x, \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) h(x+y) dy) = (u_x, \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y-x) h(y) dy)$$

$$= (u_x, (h_y, \varphi(y-x))) = (h_y, (u_x, \varphi(y-x))) = (\psi, h).$$

като предпоследното равенство получиме, използвайки свойството

/45/ на тензорното произведение. Понеже h беше произволна функция от $D(\mathbb{R}^n)$, /62/ е доказано.

Следващата теорема има принципно значение и илюстрира силата на конволюцията като инструмент за апроксимиране.

Т е о р е м а 2.25. Нека Ω е произволна област в $\mathbb{R}^n$. Елементите на $D(\Omega)$ са навсякъде гъсто в $D'_\beta(\Omega)$.

Д о к а з а т е л с т в о. Най-напред ще покажем, че елементите на $\mathcal{E}'(\Omega)$ са разположени навсякъде гъсто в $D'_\beta(\Omega)$. Нека $\{K_j\}$ е редица от компакти, която изчерпва Ω и $h_j \in D(\Omega)$ е функция, която е тъждествено равна на единица в компакта K_j . Да положим $u_j = h_j u$. Очевидно е, че $u_j \in \mathcal{E}'(\Omega)$. Ще покажем, че $u_j \rightarrow u$ в $D'_\beta(\Omega)$. Нека B е ограничено множество в $D(\Omega)$ и нека околността W на началото в $D'_\beta(\Omega)$ има вида

$$W = \left\{ w \in D'(\Omega), \sup_{\varphi \in B} |(w, \varphi)| < \varepsilon \right\}^1$$

Понеже функциите $\varphi \in B$ имат равномерно ограничени носители /теорема 5.3 стр.133/, за $j > j_0(B)$ имаме $(u_j, \varphi) = (u, \varphi)$ за всяко $\varphi \in B$, т.е. $u_j - u \in W$ и равенството

$$\lim_{j \rightarrow \infty} u_j = u \text{ в } D'_\beta(\Omega)$$

е установено.

Остава да докажем, че елементите на $D(\Omega)$ са навсякъде гъсто в $\mathcal{E}'_\beta(\Omega)$.

Нека $v \in \mathcal{E}'(\Omega)$ и нека $v_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} v * \chi_\varepsilon$, където $\chi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, а $\chi \in D(\mathbb{R}^n)$ е дефинирана чрез равенството

$$\chi(x) = \begin{cases} c_0 e^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

¹Припомяне, че околностите от този вид образуват фундаментална система на началото в $D'_\beta(\Omega)$.

като константата $c_0 > 0$ е избрана така, че да имаме

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi(x) dx = 1. \text{ Според /62/}$$

$$v_\varepsilon(x) = (v, \chi_\varepsilon(x - y)) \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Не е трудно да се види, че ако ε е достатъчно малко $v_\varepsilon \in D(\Omega)$. Наистина, нека $x_0 \in \text{supp } v_\varepsilon$. Тогава съществува поне едно $y_0 \in \text{supp } v$, такова, че $x_0 - y_0 \in \text{supp } \chi_\varepsilon$, т.е.

$$x_0 \in \text{supp } \chi_\varepsilon + y_0 \subset \text{supp } \chi_\varepsilon + \text{supp } v$$

$$= \{ |x| \leq \varepsilon \} + \text{supp } v \in \Omega,$$

стига ε да бъде по-малко от разстоянието между компакта $\text{supp } v$ и $\partial\Omega$.

Ще докажем, че $v_\varepsilon \rightarrow v$ в $\mathcal{E}'_\beta(\Omega)$, когато $\varepsilon \rightarrow 0$.

Нека

$$W = \left\{ w \in \mathcal{E}'(\Omega), \sup_{\psi \in B} |(w, \psi)| < \delta \right\}$$

е околност на началото в $\mathcal{E}'_\beta(\Omega)$. (B е някакво ограничено множество в $C^\infty(\Omega)$).

Ако установим, че от $\varepsilon < \varepsilon_0$ следва $v_\varepsilon - v \in W$, доказателството ще бъде завършено. Нека $\psi \in B$. Имаме

$$(v_\varepsilon - v, \psi) = (v * \chi_\varepsilon, \psi) - (v, \psi) = (v, (\chi_\varepsilon, \psi(x+y)))$$

$$- (v, \psi) = \left(v, \int_{\mathbb{R}^n} \chi(z) \psi(x+\varepsilon z) dz - \psi(x) \right).$$

Нека $K \subset \Omega$ е компакт, който съдържа $\text{supp } v$ в своята вътрешност. Понеже $v \in \mathcal{E}'(\Omega)$, имаме

$$/63/ \quad |(v, f)| \leq C \max_{\substack{|\alpha| \leq m \\ x \in K}} |\partial^\alpha f(x)|, \quad f \in C^\infty(\Omega)$$

с подходящи константи C и m . Да положим

$$f_{\varepsilon}^{\alpha}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi(z) \psi(x + \varepsilon z) dz - \psi(x).$$

Не е трудно да се види, че за всяко $\psi \in B$ е в сила оценката

$$\max_{\substack{|\alpha| \leq m \\ x \in K}} |\partial^{\alpha} f_{\varepsilon}^{\alpha}(x)| \leq \varepsilon A,$$

където $A = \text{const}$ не зависи от ψ . Наистина имаме

$$/64/ \quad \partial^{\alpha} f_{\varepsilon}^{\alpha}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi(z) \partial_x^{\alpha} (\psi(x + \varepsilon z) - \psi(x)) dz.$$

Да разгледаме

$$g(t) \stackrel{\text{def}}{=} \partial^{\alpha} \psi(x + tz)$$

като функция на скаларното променливо t , което описва интервала $[0, \varepsilon]$. Нека $\varepsilon_0 = g(K, \partial \Omega)$ и нека $\varepsilon < \varepsilon_0$. Да означим с K_{ε} ε -околността на K . В такъв случай за всяко $x \in K$ и $|z| < 1$, точката $x + tz \in K_{\varepsilon} \subset \Omega$ и тъждеството

$$\partial^{\alpha} \psi(x + \varepsilon z) - \partial^{\alpha} \psi(x) = g(\varepsilon) - g(0) = \int_0^{\varepsilon} g'(\xi) d\xi$$

ни дава

$$/65/ \quad \begin{aligned} |\partial_x^{\alpha} (\psi(x + \varepsilon z) - \psi(x))| &\leq \varepsilon \max_{0 \leq \xi \leq \varepsilon} |g'(\xi)| \\ &\leq \varepsilon n \max_{\substack{|\beta| \leq |\alpha|+1 \\ x \in K_{\varepsilon}}} |\partial^{\beta} \psi(x)| \leq \varepsilon n \max_{\substack{|\beta| \leq m+1 \\ x \in K_{\varepsilon_0}}} |\partial^{\beta} \psi(x)|. \end{aligned}$$

Понеже полуноормата

$$p(\psi) = \max_{\substack{|\beta| \leq m+1 \\ x \in K_{\varepsilon_0}}} |\partial^{\beta} \psi(x)|$$

е непрекъснатата в $C^{\infty}(\Omega)$, от $\psi \in B$ следва съществуването на

константа C_m такава, че $p(\psi) \leq C_m$ за всяко $\psi \in B$. Сега вече /65/ ни дава

$$\max_{\substack{|\alpha| \leq m, |z| \leq 1 \\ x \in K}} |\partial^{\alpha} \psi(x + \varepsilon z) - \partial^{\alpha} \psi(x)| \leq C_m n \varepsilon,$$

откъдето благодарение на /64/ получаваме

$$\max_{\substack{|\alpha| \leq m \\ x \in K}} |\partial^{\alpha} f_{\varepsilon}^{\alpha}(x)| \leq C_m n \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \chi(z) dz = C_m n \varepsilon.$$

Комбинирайки този резултат с /63/, намираме

$$|(\psi_{\varepsilon} - \psi, \varphi)| = |(f_{\varepsilon}, \varphi)| \leq C_m n \varepsilon,$$

което показва, че за $\varepsilon < \frac{\delta}{C_m n}$, $\psi_{\varepsilon} - \psi \in W$.

И така установихме, че $\psi_{\varepsilon} \rightarrow \psi$ в $E'_{\beta}(\Omega)$. Понеже топологията в $E'_{\beta}(\Omega)$ е по-силна от тази, която $D'_{\beta}(\Omega)$ индуцира върху $E'(\Omega)$, теорема 2.25 е доказана.

Естествено възниква въпросът как зависи $u * v$ от двата си аргумента. Оказва се, че без допълнителни предположения съответствието $(u, v) \rightarrow u * v$ не е непрекъснато. За частие в повечето случаи следващата теорема е достатъчна.

Т е о р е м а 2.26. Изображението

$$(u, v) \rightarrow u * v$$

на $E'_{\beta}(\mathbb{R}^n) \times D'_{\beta}(\mathbb{R}^n)$ в $D'_{\beta}(\mathbb{R}^n)$ е билинейно и разделно непрекъснато.

Д о к а з а т е л с т в о . Понеже билинейността е очевидна, ще се занимаваме само с въпроса за непрекъснатост.

Нека B е ограничено множество в $D(\mathbb{R}^n)$ и нека

$$/65/ \quad W = \{ w \in D'(\mathbb{R}^n) \mid \sup_{\varphi \in B} |(w, \varphi)| < \varepsilon \}$$

е околност на началото в $D'_{\beta}(\mathbb{R}^n)$.

Трябва да докажем две неща:

1/ Ако $v \in D'(\mathbb{R}^n)$ е фиксирано, съществува околност $\mathcal{U}$ на началото в $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ такава, че от $u \in \mathcal{U}$ да следва $u * v \in \mathcal{W}$.

2/ При фиксирано $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ съществува околност $\mathcal{V}$ на началото в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ такава, че от $v \in \mathcal{V}$ да следва $u * v \in \mathcal{W}$.

Доказателство. 1/ Разсъждавайки както при доказателството на лема 2.5 се убеждаваме, че изображението

$$D(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\tilde{\tau}} C^\infty(\mathbb{R}^n),$$

което действа по правилото

$$\varphi \rightarrow \psi_\varphi = (\tilde{v}_\varphi, \varphi(x+y))$$

е непрекъснато. Следователно образът на B при това изображение е някакво ограничено множество $\tilde{B}$ в $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Да дефинираме

$$\mathcal{U} = \left\{ u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n), \sup_{\psi \in \tilde{B}} |(u, \psi)| < \varepsilon \right\}.$$

Нека сега $u \in \mathcal{U}$. Понеже

$$(u * v, \varphi) = (u, (\tilde{v}_\varphi, \varphi(x+y))) = (u, \psi_\varphi),$$

получаваме

$$\sup_{\varphi \in B} |(u * v, \varphi)| = \sup_{\varphi \in B} |(u, \psi_\varphi)| \leq \sup_{\psi \in \tilde{B}} |(u, \psi)| < \varepsilon,$$

с което 1/ е доказано.

Да докажем 2/. Имаме $u * v = v * u$. Следователно

$$(u * v, \varphi) = (v, (u_\varphi, \varphi(x+y))).$$

Да положим отново

$$\psi_\varphi(x) = (u_\varphi, \varphi(x+y)).$$

Според /54/ $\text{supp } \psi_\varphi \subset \text{supp } \varphi - \text{supp } u$, т.е. ψ_φ се оказва с компактен носител. Сега лема 2.5 показва, че изображението

$$\varphi \xrightarrow{\tilde{u}} \psi_\varphi$$

на $D(\mathbb{R}^n)$ в $D(\mathbb{R}^n)$ е непрекъснато. Нека отново $\mathcal{W}$ е околността /66/ и нека

$$\mathcal{V} = \left\{ v \in D'(\mathbb{R}^n), \sup_{\psi \in \tilde{B}} |(v, \psi)| < \varepsilon \right\},$$

където $\tilde{B}$ е образът на B чрез $\tilde{u}$. Очевидно имаме

$$\sup_{\varphi \in B} |(u * v, \varphi)| = \sup_{\varphi \in B} |(v, \psi_\varphi)| \leq \sup_{\psi \in \tilde{B}} |(v, \psi)| < \varepsilon$$

и доказателството е завършено.

З а б е л е ж к а. Теорема 2.26 не съдържа цялата истина за изображението $(u, v) \rightarrow u * v$. За да стане ясно какво имаме пред вид, ще дадем следната

Д е ф и н и ц и я 2.13. Нека X, Y и Z са локално изпъкнали пространства и

$$B: X \times Y \rightarrow Z$$

е билинейно изображение. B се нарича хипонепрекъснато, ако са верни следните твърдения:

а/ За всяко ограничено множество $A_1 \subset X$ и за всяка околност на началото $\mathcal{W}$ в Z съществува околност на началото $\mathcal{V} \subset Y$ такава, че от $x \in A_1, y \in \mathcal{V}$ да следва

$$B(x, y) \in \mathcal{W}.$$

б/ За всяко ограничено множество $A_2 \subset Y$ и за всяка околност $\mathcal{W}$ на началото в Z съществува околност $\mathcal{U}$ на началото в X такава, че от $x \in \mathcal{U}, y \in A_2$ да следва

$$B(x, y) \in \mathcal{W}.$$

С други думи, B е хипонепрекъснато, ако $B(x, y) \rightarrow 0$, когато единият аргумент клони към нула, а другият описва някакво ограничено множество.

Теорема 2.26 може да се усили по следния начин: изображението $(u, v) \rightarrow u * v$ на $\mathcal{E}'(\Omega) \times \mathcal{D}'(\Omega)$ в $\mathcal{D}'(\Omega)$ е хипонепрекъснато.

На доказателството няма да се спираме /вж. например [5] /.

Ще завършим изследването на конволюцията с една теорема, която показва, че нейната инвариантност относно транслагациите я характеризира напълно.

Нека $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, $h \in \mathbb{R}^n$. Да положим $(\tau_h \varphi)(x) = \varphi(x-h)$. В такъв случай за произволно $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ имаме

$$\begin{aligned} \tau_h(u * \varphi)(x) &= \tau_h(u, \varphi(x-y)) = (u, \varphi(x-y-h)) \\ &= (u * \tau_h \varphi)(x), \end{aligned}$$

т.е. операциите $*$ и τ_h комутират. Именно това се има пред вид, когато се говори за инвариантност на конволюцията относно транслагациите.

Т е о р е м а 2.27. Нека $T: D(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$ е непрекъснат линеен оператор, който комутира с транслагациите в $\mathbb{R}^n$. Тогава съществува единствено разпределение $u_T \in D'(\mathbb{R}^n)$ такава, че

$$T(\varphi) = u_T * \varphi, \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^n).$$

Д о к а з а т е л с т в о . Да положим

$$\check{\varphi}(x) = \varphi(-x), \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$$

и да дефинираме линейния функционал

$$u_T(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} T(\check{\varphi})(0).$$

Понеже T е непрекъснат, от $\{\varphi_\nu\} \rightarrow 0$ в $D(\mathbb{R}^n)$ следва, че $u_T(\varphi_\nu) \rightarrow 0$, т.е. $u_T \in D'(\mathbb{R}^n)$. Не е трудно да се види, че $u_T * \varphi = T(\varphi)$. Наистина дефиницията на u_T ни дава /67/

$$T(\varphi)(0) = (u_T, \check{\varphi}) = (u_T * \varphi)(0).$$

Понеже операторите T и $\varphi \rightarrow u_T * \varphi$ са инвариантни относно транслагациите, от /67/ получаваме

$$T(\varphi)(x) = T(\tau_{-x}\varphi)(0) = (u_T * \tau_{-x}\varphi)(0) = (u_T * \varphi)(x).$$

и доказателството е завършено.

У п р а ж н е н и е 12

1. Нека Ω е област в $\mathbb{R}^n$ и $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$. Нека $v \in D'(\mathbb{R}^n)$ се анулира в областта $\Omega - \Omega^1$. Докажете, че $u * v$ се анулира в Ω .

2. Нека u е разпределението от зад.1, а $v \in D'(\mathbb{R}^n)$ съвпада с безкрайно гладка функция в $\Omega - \Omega$. Докажете, че

$$u * v \in C^\infty(\Omega).$$

У п ъ т в а н е . Понеже твърдението има локален характер, достатъчно е да докажем, че $u * v$ е безкрайно гладка в някаква околност на произволна точка $x_0 \in \Omega$. За да се убедите, че това е вярно, означете с Ω някаква подобласт на Ω , която съдържа $x_0 \cup \text{supp } u$ и $\Omega' \subset \Omega$. След това вземете функция $h \in D(\Omega - \Omega)$, която е тъждествено равна на единица около компакта $\overline{\Omega'} - \overline{\Omega'}$ и се възползвайте от разлагането

$$u * v = u * hv + u * (1-h)v.$$

3. Докажете, че изображението

$$(u, v) \longrightarrow u * v$$

на $\mathcal{E}'_B(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{E}'_B(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{E}'_B(\mathbb{R}^n)$ е непрекъснато.

У п ъ т в а н е . Установете най-напред, че изображението, което на $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ съпоставя функцията $\Psi_\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, дефинирана чрез равенството $\Psi_\varphi(x, y) = \varphi(x+y)$ е непрекъснато. После подражайки на док. на теорема 2.18, установете, че изображението

$$\mathcal{E}'_B(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{E}'_B(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\otimes} \mathcal{E}'_B(\mathbb{R}^{2n})$$

е непрекъснато и комбинирайте тези факти.

¹Припомняме, че $\Omega - \Omega = \{x - y\}$, където $x \in \Omega$, y

4. Нека $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ е фиксирано. Докажете, че изображението

$$D'_\beta(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n),$$

което действа по правилото

$$v \longrightarrow (u_y, \varphi(x-y)) = v * \varphi,$$

е непрекъснато.

5. Нека $u \in D'(\mathbb{R}^n)$, а χ е камбановидната функция, дефинирана на стр. 254. Нека, както в текста, $\chi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.

Докажете, че

$$u_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} u * \chi_\varepsilon \xrightarrow{D'(\mathbb{R}^n)} u$$

при $\varepsilon \longrightarrow 0$.

6. Нека K е компактно подмножество на $\mathbb{R}^n$ и нека $E'(K)$ е линейното подпространство на $E'(\mathbb{R}^n)$, състоящо се от разпределения с носител в K . Да означим с $E'_\beta(K)$ ЛИП, което се получава, като въведем в $E'(K)$ индуцираната от $E'_\beta(\mathbb{R}^n)$ топология. Докажете, че билинейното изображение

$$(u, v) \longrightarrow u * v$$

на $E'_\beta(K) \times D'(\mathbb{R}^n)$ в $D'_\beta(\mathbb{R}^n)$

е непрекъснато.

7. Нека $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, а $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Докажете, че конволюцията

$$u * \varphi \stackrel{\text{def}}{=} (u_y, \varphi(x-y))$$

е гладка функция с полиномен ръст. По-точно установете, че тя принадлежи на $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$ /за деф. вижте стр. 214 /.

*
*
*

В следващите задачи са скицирани кратки доказателства на класическите теореми на Вайерштрас за апроксимиране с тригонометрични и алгебрични полиноми. Те подчертават значението на конволюцията при разглеждането на въпроси от такъв характер.

8. Нека $\varphi_n(t) = C_n(1 + \cos t)^n$, където C_n е избрана така, че да имаме

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t) dt = 1.$$

Докажете, че за $\delta \in (0, \pi)$ е в сила равенството

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \varphi_n(t) dt = 0.$$

Решение

$$\int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \varphi_n(t) dt = \frac{\int_{\delta \leq |t| \leq \pi} (1 + \cos t)^n dt}{\int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos t)^n dt}$$

$$\leq \frac{\int_{\delta \leq |t| \leq \pi} (1 + \cos t)^n dt}{\int_{|t| \leq \frac{\delta}{2}} (1 + \cos t)^n dt} \leq \left(\frac{1 + \cos \delta}{1 + \cos \frac{\delta}{2}} \right)^n \frac{2\pi - 2\delta}{\delta} \rightarrow 0.$$

9. Нека $\{\varphi_n\}$ са тригонометричните полиноми от предната задача, а $f: \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{C}$ е непрекъснатата функция с период 2π . Докажете:

$$a/ \text{ че } (f * \varphi_n)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \varphi_n(t-x) dx$$

е периодична с период 2π ,

b/ че $f * \varphi_n$ е тригонометричен полином и

в/ че $\max_{|t| \leq \pi} |f * \varphi_n - f| \longrightarrow 0$, когато $n \longrightarrow \infty$.

Обърнете внимание на обстоятелството, че от в/ следва пълнотата на тригонометричната система и на системата $\{e^{inx}\}$.

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

10. Ако $f \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ и е периодична с период 2π , докажете, че за всяко естествено число k имаме

$$(f * \varphi_n)^{(k)}(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(x) \varphi_n(t-x) dx,$$

следователно

$$\max_{-\pi \leq t \leq \pi} |(f * \varphi_n)^{(k)}(t) - f^{(k)}(t)| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

11. Нека областта $G \subset \mathbb{R}^n$ се съдържа в куба $K^n: |x_j| \leq \pi$, $j = 1, 2, \dots, n$ и нека $\varphi \in D(G)$. Докажете, че съществува редица от тригонометрични полиноми $\{P_\nu(x)\}$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ такава, че за всеки мултииндекс α , $\{\partial^\alpha P_\nu\} \rightrightarrows \partial^\alpha \varphi$ в G .

У п ъ т в а н е. В тази задача е формулиран многомерният вариант на усилената теорема на Вайерщрас, която доказваме в лема 2.6.

Независимо доказателство може да получите, като разгледате тригонометричните полиноми

$$\varphi_\nu(x) = C_\nu \prod_{k=1}^n (1 + \cos x_k)^\nu, \int_{K^n} \varphi_\nu(x) dx = 1$$

и разсъждавате както в зад. 8, 9 и 10.

12. Нека $q_n(x) = C_n(1-x^2)^n$, $x \in \mathbb{R}^1$, където C_n е такава константа, че

$$\int_{-1}^1 q_n(x) dx = 1.$$

Разсъждавайки както в зад. 8, докажете, че за всяко $\delta \in (0, 1)$ имаме

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta \leq |x| \leq 1} q_n(x) dx = 0,$$

т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\delta}^{\delta} q_n(x) dx = 1.$$

13. Нека $f \in C_0(-a, a)$, където $0 < a \leq \frac{1}{2}$. Докажете, че алгебричните полиноми

$$f_n(x) = \int_{-a}^a f(t) q_n(x-t) dt$$

апроксимират равномерно f във всеки интервал $[-k, k]$, $0 < k < a$, който съдържа $\text{supp } f$.

У п ъ т в а н е. Имаме

$$f_n(x) - f(x) = \int_{-a}^a (f(t) - f(x)) q_n(x-t) dt + f(x) \left(-1 + \int_{-a}^a q_n(x-t) dt \right).$$

Второто събираемо клони към нула за $x \in [-k, k]$, защото

$$\int_{-a}^a q_n(x-t) dt = \int_{x-a}^{x+a} q_n(s) ds \geq \int_{k-a}^{a-k} q(s) ds \rightarrow 1.$$

За да докажете, че и първото клони към нула, представете го като сума от три интеграла и използвайте зад. 12.

14. Нека $f \in C_0^\infty(-a, a)$, $0 < a \leq \frac{1}{2}$ и нека $0 < k < a$ е такова, че $\text{supp } f \subset [-k, k]$.

Докажете, че полиномите

$$f_n^{(j)}(x) = \int_{-a}^a f(t) q_n^{(j)}(x-t) dt$$

равномерно апроксимират съответните производни на f в $[-k, k]$.

15. Като следствие от зад. 13 и 14 получите усилената теорема на Вайерштрас, без да предполагате, че носителът на f е малък. Разгледайте и многомерния случай!

2.9. Периодични разпределения

Теорията на периодичните разпределения е толкова проста, че едва ли заслужава подробно изложение. Тук ще се ограничим с основните дефиниции и то в едномерния случай, като предоставим подробностите и доказателствата на читателя.

Д е ф и н и ц и я 2.14. Да означим с $\mathcal{P}$ подпространството на $C^\infty(\mathbb{R}^1)$, което се състои от периодичните функции с период 2π . Топология в $\mathcal{P}$ въвеждаме с фамилията от полунорми

$$p_k(f) = \max_{x \in [-\pi, \pi]} |f^{(v)}(x)|, \quad 0 \leq v \leq k$$

По този начин $\mathcal{P}$ се превръща в пространство на Фреше. Според лема 2.6 всяка функция от $\mathcal{P}$ се разлага в ред на Фурие

$$f(x) = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} c_v e^{ivx}, \quad c_v = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ivx} dx,$$

който може да се диференцира безбройно много пъти, без да се наруши неговата равномерна сходимост. Като следствие от това твърдение получаваме, че тригонометричните полиноми $\sum a_v e^{ivx}$ са разположени навсякъде гъсто в $\mathcal{P}$. Интегрирайки по части, за Фуриеровите коефициенти на произволна функция $f \in \mathcal{P}$ получаваме оценката

$$|c_v(f)| \leq \frac{A_k(f)}{|v|^k}, \quad v = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots,$$

с произволно естествено k , където, разбира се, константата $A_k(f)$ не зависи от v .

Д е ф и н и ц и я 2.15. Непрекъснатите линейни функционали, дефинирани в $\mathcal{P}$, се наричат периодични разпределения с период 2π . Тяното линейно пространство ще бележим с $\mathcal{P}'$.

Непосредствено от дефиницията следва, че за всяко $u \in \mathcal{P}'$ съществува естествено n такова, че

$$|(u, \varphi)| \leq C p_n(\varphi)$$

за всяко $\varphi \in \mathcal{P}$.

Най-малкото n с това свойство се нарича **р е д** на разпределението u .

П р и м е р 1. Нека $f \in L^1(-\pi, \pi)$. Функционалът u_f , който действа по правилото

$$(u_f, \varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \varphi(t) dt$$

очевидно се съдържа в $\mathcal{P}'$. Функцията f се нарича **плътност** на u_f .

Както по-рано, няма да правим разлика между разпределенията и техните плътности, ако такива съществуват.

П р и м е р 2. Функционалът

$$(\delta, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(0)$$

отново се нарича функция на Дирак. Очевидно той няма плътност.

Д е ф и н и ц и я 2.16. Нека $u \in \mathcal{P}'$. Разпределението

$$(u', \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} -(u, \varphi')$$

се нарича **производна** на u .

По-нататък, ако $a \in \mathcal{P}$, произведението au се дефинира чрез равенството

$$(au, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} (u, a\varphi).$$

Понеже за функциите от $\mathcal{P}$ конволюция се дефинира чрез равенството

$$(f * g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) g(t) dt$$

по аналогия с разглежданията от 2.8 стигаме до

Д е ф и н и ц и я 2.17. Конволюция на разпределенията f и g от $\mathcal{P}'$ наричаме функционала

$$(f * g, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} (f, (g, \varphi(x+y))), \quad \varphi \in \mathcal{P}.$$

Предоставяме на читателя сам да се убеди, че дефиницията е коректна, $f * g$ принадлежи на $\mathcal{P}'$ и $f * g = g * f$. В същност основното, което трябва да се докаже, е следната

Л е м а 2.7. Ако $\varphi \in \mathcal{P}$, а $g \in \mathcal{P}'$, функцията

$$\psi_{\varphi}(x) \stackrel{\text{def}}{=} (g, \varphi(x+y))$$

принадлежи на $\mathcal{P}$ и изображението $\varphi \rightarrow \psi_{\varphi}$, дефинирано чрез /68/ е непрекъснато.

Понеже $\mathcal{P}'$ е пространство от линейни функционали, в него както и в общия случай можем да разглеждаме слабата и силната топология и да говорим за слаба и силна сходимост.

Както и трябва да се очаква, най-естественият апарат, който ни позволява да опишем елементите на $\mathcal{P}'$, са редовете на Фурие.

Д е ф и н и ц и я 2.18. Нека $u \in \mathcal{P}'$. Числата

$$c_{\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} (u, e^{-i\nu x}), \quad \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

се наричат коефициенти на Фурие за u . На всяко u от $\mathcal{P}'$ съпоставяме неговия ред на Фурие

$$u \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_{\nu} e^{i\nu x}.$$

Надяваме се, че произходът на дефиниция /69/ е ясен.

Ако u е от ред $\mathcal{M}$, непосредствено от дефиницията получаваме оценката

$$|c_{\nu}| \leq A |\nu|^n, \quad \nu = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots,$$

където константата A зависи само от $\mathcal{M}$.

Предлагаме на читателя сам да докаже следната

Т е о р е м а 2.28. В сила са следните резултати:

а/ Всеки формален ред

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_{\nu} e^{i\nu x}, \quad \text{за който } |a_{\nu}| \leq A |\nu|^k, \quad \text{за } \nu \neq 0$$

с някакви константи A и k е слабо сходящ в $\mathcal{P}'$ и дефинира периодично разпределение ν , което действува по формулата

$$(\nu, \varphi) = 2\pi \sum_{-\infty}^{+\infty} a_{\nu} c_{-\nu}(\varphi),$$

където $c_{\nu}(\varphi)$ са Фуриеровите коефициенти на φ . Нещо повече, за всяко $u \in \mathcal{P}'$ имаме

$$u = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_{\nu} e^{i\nu x}, \quad c_{\nu} = \frac{1}{2\pi} (u, e^{-i\nu x}).$$

Този резултат ни позволява да отъждествим елементите на $\mathcal{P}'$ с тригонометричните редове /71/.

б/ Всеки елемент u на $\mathcal{P}'$ има вида

$$u = f^{(p)} + C, \quad C = \text{const},$$

където $f \in C[-\pi, \pi]$, $f(\pi) = f(-\pi)$ и производната се разбира в смисъла на деф. 2.15.

У п ъ т в а н е към б/. Ако

$$u = \sum_{-\infty}^{\infty} c_{\nu} e^{i\nu x} \quad \text{и} \quad |c_{\nu}| \leq A |\nu|^k,$$

разгледайте функцията

$$f(x) = \sum_{\nu \neq 0} \frac{c_{\nu}}{(i\nu)^{k+2}} e^{i\nu x}.$$

У п р а ж н е н и е 13

1. Докажете, че един ред от вида

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_\nu e^{i\nu x}$$

е /слабо/ сходящ в $\mathcal{P}'$ тогава и само тогава, когато $|a_\nu| \leq A |\nu|^k$, за $\nu \neq 0$ с подходящи константи A и k .

2. Нека $\mathcal{P}_n$ е подпространството на $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, състоящо се от функциите с период 2π спрямо всяка от променливите x_j , $j = 1, 2, \dots, n$. Топология в $\mathcal{P}_n$ дефинирайте с помощта на нормите

$$P_k(f) = \max_{\substack{|x_j| \leq \pi \\ j=1,2,\dots,n \\ |a| \leq k}} |\partial^a f(x)|, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

и развийте теорията на разпределенията от $\mathcal{P}_n$.

§ 3. Трансформация на Фурие

3.1. Трансформация на Фурие в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и $L^1(\mathbb{R}^n)$

Хармоничният анализ е един от най-старите и най-жизнеспособните клонове на анализа. Неговото влияние в другите дялове на математиката силно се увеличи след създаването на теорията на разпределенията, която позволи да се прилага трансформацията на Фурие към твърде обширни класове от функции.

В този параграф ще се ограничим с необходимия за нуждите на частните диференциални уравнения минимум. Като един добре балан-

сиран увод в предмета може да се използва [22]. Полезен допълнителен материал може да се намери в [23], [24] и [25]. Енциклопедичното съчинение [26] е посветено на абстрактните тенденции в тази теория.

Д е ф и н и ц и я 3.1. Нека $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Функцията

$$1/1 \quad \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,\xi)} f(x) dx,$$

където $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$

и $(x, \xi) = \sum_{j=1}^n x_j \xi_j$ се нарича т р а н с ф о р м а ц и я на Фурие на f . Понякога вместо $\hat{f}$ ще пишем $F(f)$.

Обикновено е за предпочитане да си мислим, че точките x и ξ се менят в различни евклидови пространства - $\mathbb{R}_x^n$ и $\mathbb{R}_\xi^n$. В такъв случай се казва, че ξ е променлива д у а л н а на x , която описва д у а л н о т о пространство $\mathbb{R}_\xi^n$.

Както ще се убедим след малко, при някои допълнителни предположения е в сила формулата за обръщане

$$1/2 \quad f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)} \hat{f}(\xi) d\xi,$$

от която между другото следва, че операторът на Фурие $f \xrightarrow{F} \hat{f}$ е еднозначно-обратим. В същност 1/2/ ни дава експлицитно оператора F^{-1} и показва, че F и F^{-1} не се различават съществено.

Търсенето на удобни условия, при които равенството 1/2/ е валидно, е било главната тема в класическия период от развитието на хармоничния анализ. Тези изследвания са показали, че пространството $L^1(\mathbb{R}^n)$, което на пръв поглед е най-естествено, не е удобно за построяване на симетрична и проста теория. Както ще видим, пространствата $L^2(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ са много по-подходящи за тази цел.

Преди да започнем разискванията по същество, ще отбележим, че в литературата се срещат /не съществено/ различни дефиниции /на

трансформацията на Фурие. Например, често $\hat{f}$ се дефинира чрез равенството

$$1/1/ \quad \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x, \xi)} f(x) dx$$

с формула за обръщане

$$1/2/ \quad f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\pi i(x, \xi)} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

Всяка от възможните дефиниции има своите предимства и недостатъци. Ние ще използваме формулите 1/1, 1/2/.

Теорема 3.1. Нека $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. В такъв случай $\hat{f}$ е непрекъснатата в $\mathbb{R}_\xi^n$ и клони към нула, когато $|\xi| \rightarrow \infty$. Освен това операторът на Фурие

$$L^1(\mathbb{R}_x^n) \xrightarrow{F} C(\mathbb{R}_\xi^n)$$

е непрекъснат.

В доказателството на тази теорема се използва следната важна

Лема на Риман-Лебег. Нека Ω е област в $\mathbb{R}^n$ и $f \in L^1(\Omega)$. Тогава

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \int_{\Omega} e^{i(x, \lambda)} f(x) dx = 0, \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

Доказателство. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно и нека $g \in C_0^\infty(\Omega)$ е така избрана, че да имаме $\|f - g\|_{L^1(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2}$. Такава функция лесно може да се построи например с помощта на теорема 1.2. Да разгледаме интеграла

$$I(\lambda) = \int_{\Omega} e^{i(x, \lambda)} g(x) dx,$$

където $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

Нека $\{\lambda^v\}$ е редица, за която $|\lambda^v| \rightarrow \infty$.

Понеже

$$|\lambda^v| = \sqrt{\sum_{j=1}^n (\lambda_j^v)^2} \rightarrow \infty,$$

поне една от редиците $\{\lambda_j^v\}$ - да кажем $\{\lambda_k^v\}$, ще клони към ∞ . От друга страна, тъй като g е с компактен носител, с едно интегриране по части получаваме

$$\begin{aligned} I(\lambda^v) &= \frac{1}{i\lambda_k^v} \int_{\Omega} g(x) \frac{\partial}{\partial x_k} e^{i(\lambda, x)} dx \\ &= -\frac{1}{i\lambda_k^v} \int_{\Omega} e^{i(\lambda, x)} \frac{\partial g}{\partial x_k} dx, \end{aligned}$$

т.е.

$$|I(\lambda^v)| \leq \frac{1}{|\lambda_k^v|} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial g}{\partial x_k} \right| dx \rightarrow 0.$$

Така доказваме, че $I(\lambda) \rightarrow 0$, когато $|\lambda| \rightarrow \infty$.

За да завършим доказателството, да вземем $N(\varepsilon)$ толкова голямо, че при $|\lambda| > N(\varepsilon)$ да имаме $|I(\lambda)| < \frac{\varepsilon}{2}$. При това предположение получаваме

$$\left| \int_{\Omega} f(x) e^{i(x, \lambda)} dx \right| \leq \left| \int_{\Omega} (f(x) - g(x)) e^{i(x, \lambda)} dx \right| + |I(\lambda)|$$

$$\leq \|f - g\|_{L^1(\Omega)} + |I(\lambda)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

с което лемата на Риман-Лебег е доказана.

Доказателство на теорема 3.1. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно и $N > 0$ е толкова голямо, че да имаме

$$\int_{|x| \geq N} |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Очевидното равенство

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) - \hat{f}(\xi_0) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) (e^{-i(x, \xi)} - e^{-i(x, \xi_0)}) dx \\ &= \int_{|x| \leq N} f(x) (e^{-i(x, \xi)} - e^{-i(x, \xi_0)}) dx + \int_{|x| \geq N} (e^{-i(x, \xi)} - e^{-i(x, \xi_0)}) f(x) dx \end{aligned}$$

ни дава

$$|\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\xi_0)| \leq \int_{|x| \leq N} |e^{-i(x, \xi)} - e^{-i(x, \xi_0)}| |f(x)| dx + \varepsilon$$

и понеже $e^{-i(x, \xi)}$ е равномерно непрекъсната в множеството $|x| \leq N$, $|\xi| \leq |\xi_0| + 1$, от $|\xi - \xi_0| < \delta(\varepsilon)$ следва

$$|\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\xi_0)| \leq \varepsilon \int_{|x| \leq N} |f(x)| dx + \varepsilon \leq \varepsilon \left(\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + 1 \right),$$

с което непрекъснатостта на $\hat{f}$ е установена.

Равенството $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0$ следва веднага от лемата на Риман-Лебег, а неравенството

$$\sup_{\mathbb{R}_\xi^n} |\hat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}_x^n} |f(x)| dx = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}_x^n)}$$

показва, че операторът на Фурие $L^1(\mathbb{R}_x^n) \xrightarrow{F} C(\mathbb{R}_\xi^n)$ е наистина непрекъснат.

Следващата теорема описва една обща закономерност.

Т е о р е м а 3.2. В сила са следните твърдения:

а/ Ако $f \in L^1(\mathbb{R}_x^n)$ и $|x|^m f \in L^1(\mathbb{R}_x^n)$, където m е естествено число, то $\hat{f} \in C^m(\mathbb{R}_\xi^n)$.

б/ Ако $f \in C^m(\mathbb{R}_x^n)$ и $\partial^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}_x^n)$, за $|\alpha| \leq m$, то $|\xi|^m \hat{f}(\xi) \rightarrow 0$, когато $|\xi| \rightarrow \infty$.

З а б е л е ж к а. Благодарение на формулата за обръщане, която ще установим по-нататък, твърденията а/ и б/ до известна степен са обратни едно на друго.

Д о к а з а т е л с т в о н а а/. От условието на теоремата веднага следва, че за всяко $k \leq m$ имаме $(1+|x|^k)f(x) \in L^1(\mathbb{R}_x^n)$. Достатъчно е да разгледаме случая $m=1$, защото индуктивните разсъждения, необходими в общия случай, са тривиални.

И така, нека $m=1$. Неравенството $|x_j| \leq |x|$, показва, че $x_j f \in L^1(\mathbb{R}_x^n)$ - релация, която ни осигурява включването

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_j}(\xi) \in C(\mathbb{R}^n), \text{ защото можем да диференцираме равенството}$$

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x, \xi)} f(x) dx$$

под знака на интеграла. Давайки на j последователно стойностите 1, 2, ..., n , заключаваме, че $\hat{f} \in C^1(\mathbb{R}^n)$ и а/ е доказано.

б/ Отново ще се ограничим със случая $m=1$. Достатъчно е да докажем, че за всяко $j=1, 2, \dots, n$ имаме $\xi_j \hat{f}(\xi) \rightarrow 0$, когато $|\xi| \rightarrow \infty$. Нека j е фиксирано. Понеже $f \in L^1(\mathbb{R}_x^n)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^1(\mathbb{R}_x^n), \text{ теоремата на Фубини показва, че интегралите}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right| dx_j, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx_j$$

са сходящи за почти всички точки

$$\hat{x}_j = (x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_x^{n-1}.$$

За по-голяма яснота да означим с M_j множеството от точките $\hat{x}_j$, за които /з/ са сходящи. В такъв случай за всяко $\hat{x}_j \in M_j$ получаваме равенството

$$f(\hat{x}_j, R_2) - f(\hat{x}_j, R_1) = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\hat{x}_j, x_j) dx_j,$$

което показва, че границите

$$\lim_{x_j \rightarrow +\infty} f(\hat{x}_j, x_j) = l_1(\hat{x}_j)$$

$$\lim_{x_j \rightarrow -\infty} f(\hat{x}_j, x_j) = l_2(\hat{x}_j)$$

съществуват за $\hat{x}_j \in M_j$.

Понеже и $\int_{-\infty}^{\infty} |f(\hat{x}_j, x_j)| dx_j < \infty$, заключаваме, че

$$l_1 = l_2 = 0 \text{ за всяко } \hat{x}_j \in M_j.$$

След тази констатация за всяко $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $x = (\hat{x}_j, x_j)$, за което $\hat{x}_j \in M_j$ получаваме

$$\int_{R_1}^{R_2} e^{-i(x, \xi)} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) dx_j = f(x) e^{-i(x, \xi)} \Big|_{R_1}^{R_2} + i \xi_j \int_{R_1}^{R_2} e^{-i(x, \xi)} f(x) dx_j,$$

откъдето с граничен преход ($R_1 \rightarrow -\infty$, $R_2 \rightarrow +\infty$) получаваме

$$/4/ \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(x, \xi)} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j = i \xi_j \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i(x, \xi)} dx_j$$

за почти всяко $\hat{x}_j \in \mathbb{R}^{n-1}$. ($\mathbb{R}^{n-1} \setminus M_j$ има мярка нула!) Интегрирайки /4/ спрямо $\hat{x}_j \in \mathbb{R}^{n-1}$ получаваме

$$i \xi_j \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x, \xi)} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) dx = F\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(\xi)$$

и твърдението веднага следва от лемата на Риман-Лебег. Попътно установихме важното равенство

$$/5/ \quad i \xi_j F(f)(\xi) = F\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(\xi),$$

което заслужава специално отбелязване.

Следващият пример е основен.

Пример 1. Нека $f(x) = e^{-|x|^2} \in L^1(\mathbb{R}_x^n)$. Имаме

$$/6/ \quad \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x, \xi)} e^{-|x|^2} dx = \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_j \xi_j} e^{-x_j^2} dx_j.$$

Следователно за да пресметнем $\hat{f}$, достатъчно е да познаваме едномерния интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix \xi} e^{-x^2} dx,$$

$x \in \mathbb{R}^1$, $\xi \in \mathbb{R}^1$, чието пресмятане е добре известно. (Вж. [21], стр. 71.) Например, ако интегрираме цялата функция

$f(z) = e^{-z^2}$ по контура, изобразен на фиг. 6, получаваме

$$/7/ \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+ih)^2} dx,$$

защото интегралите по отвесните страни на правоъгълника клонят към нула, когато $R \rightarrow +\infty$. От /7/ непосредствено следва

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = e^{h^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-2ixh} dx,$$

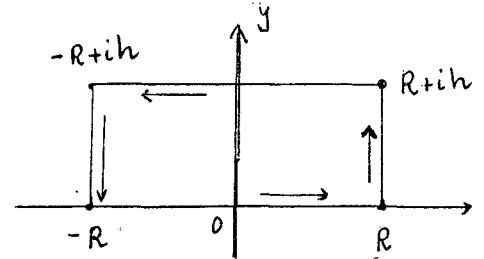
откъдето при $h = \frac{\xi}{2}$ получаваме

$$/8/ \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-ix \xi} dx = e^{-\frac{\xi^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\xi^2}{4}}.$$

Сега /6/ ни дава равенството

$$F(e^{-|x|^2})(\xi) = \pi^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4}},$$

което ще използваме при извода на формулата за обръщане.



Фиг. 6

Дойде време да въведем операторите D^α , които се трансформират по-просто от оператора на Фурие от стандартните диференциални оператори ∂^α .

Д е ф и н и ц и я 3.2. Нека $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ е мулти-индекс. Полагаме

$$D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

и

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdot D_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot D_n^{\alpha_n}.$$

Т е о р е м а 3.3. Трансформацията на Фурие действа непрекъснато от $\mathcal{S}(\mathbb{R}_x^n)$ в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_\xi^n)$. В сила са важните съотношения

$$\begin{aligned} (D_j \hat{\varphi})(\xi) &= \xi_j \hat{\varphi}(\xi), \\ (x_j \hat{\varphi})(\xi) &= - (D_j \hat{\varphi})(\xi), \end{aligned}$$

които показват, че трансформацията на Фурие свежда диференцирането до умножение с полином.

Д о к а з а т е л с т в о. Нека $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_x^n)$. Диференцирай-ки равенството

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x, \xi)} \varphi(x) dx$$

под знака на интеграла, получаваме

$$D^\alpha \hat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x, \xi)} (-x)^\alpha \varphi(x) dx.$$

Очевидното неравенство

$$|e^{-i(x, \xi)} (-x)^\alpha \varphi(x)| \leq |x^\alpha| |\varphi(x)|$$

показва, че диференцирането е законно, защото

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha| |\varphi(x)| dx < \infty.$$

По-нататък с помощта на тъждеството

$$\xi^\beta e^{-i(x, \xi)} = (-1)^{|\beta|} D_x^\beta e^{-i(x, \xi)}$$

с интегриране по части ($\varphi \in \mathcal{S}'$) намираме

$$\begin{aligned} \xi^\beta D^\alpha \hat{\varphi}(\xi) &= (-1)^{|\beta|} \int_{\mathbb{R}^n} D_x^\beta (e^{-i(x, \xi)}) (-x)^\alpha \varphi(x) dx \\ /11/ \quad &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x, \xi)} D_x^\beta \{(-x)^\alpha \varphi(x)\} dx. \end{aligned}$$

От това равенство веднага следва оценката

$$\sup_{\mathbb{R}_\xi^n} |\xi^\beta D^\alpha \hat{\varphi}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1+|x|^2)^n |D_x^\beta \{(-x)^\alpha \varphi(x)\}|}{(1+|x|^2)^n} dx$$

/12/

$$\leq \sup_{\mathbb{R}_x^n} \left| (1+|x|^2)^n D_x^\beta \{(-x)^\alpha \varphi(x)\} \right| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1+|x|^2)^n},$$

с което включването $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_\xi^n)$ е установено. Нещо повече /12/ показва, че операторът

$$\mathcal{S} \xrightarrow{F} \mathcal{S}'$$

е непрекъснат, защото полунормата

$$\varphi \longrightarrow \sup_{\mathbb{R}^n} \left| (1+|x|^2)^n D_x^\beta \{(-x)^\alpha \varphi(x)\} \right|, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

е очевидно непрекъсната спрямо топологията в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Понеже равенствата /10/ се проверяват непосредствено, теоремата е доказана.

Сега сме готови да установим първия вариант на формулата за обръщане. Елегантното доказателство, което следва, дължим на Ф.Рис.

Т е о р е м а 3.4. В пространството $\mathcal{S}$ е в сила формулата за обръщане

$$/13/ \quad \varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{+i(x,\xi)} \hat{\varphi}(\xi) d\xi.$$

С други думи, операторът на Фурие действа еднозначно-обратно от $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и обратният оператор F^{-1} има вида /13/.

Д о к а з а т е л с т в о. Нашата цел е да пресметнем интеграла

$$\int_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{i(x,\xi)} \left(\int_{\mathbb{R}^n_\eta} \varphi(\eta) e^{-i(\eta,\xi)} d\eta \right) d\xi.$$

Естествено е да се опитае да разменим реда в интегрирането. Това обаче не може да се направи направо, защото "двойният" интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} \varphi(\eta) e^{i(x-\eta,\xi)} d\eta d\xi$$

е разходящ и теоремата на Фубини е неприложима. За да получим сходящ интеграл, да вземем произволна функция $\psi \in \mathcal{S}$ и да представим интеграла

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} \varphi(\eta) \psi(\xi) e^{i(x-\eta,\xi)} d\eta d\xi$$

/който е даже абсолютно сходящ/, като повторен по два различни начина. Така получаваме

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi) \psi(\xi) e^{i(x,\xi)} d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\eta) \hat{\psi}(\eta-x) d\eta.$$

Нека сега $\varepsilon > 0$ е произволно. Да въведем функцията $h_\varepsilon(\xi) = \psi(\varepsilon\xi)$. Непосредствено се проверява, че $\hat{h}_\varepsilon(\eta) = \varepsilon^{-n} \hat{\psi}(\frac{\eta}{\varepsilon})$, така че като заместим ψ с h_ε , получаваме

$$/14/ \quad \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi) \psi(\varepsilon\xi) e^{i(x,\xi)} d\xi = \varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\eta) \hat{\psi}\left(\frac{\eta-x}{\varepsilon}\right) d\eta = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x+\varepsilon z) \hat{\psi}(z) dz.$$

Понеже φ и $\hat{\varphi}$ принадлежат на $\mathcal{S}$, имаме мажоранти от $L^1(\mathbb{R}^n)$ и в двата интеграла и теоремата на Лебег за граничен преход е приложима. Оставяйки ε да клони към нула в /14/, получаваме

$$/15/ \quad \psi(0) \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi) e^{i(x,\xi)} d\xi = \varphi(x) \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\psi}(z) dz.$$

Остава да изберем $\psi \in \mathcal{S}$ по такъв начин, че константата $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\psi}(z) dz$ да се пресметне лесно. Да вземем например $\psi(x) = e^{-|x|^2}$. В такъв случай имаме $\psi(0) = 1$, а според пример 1, $\hat{\psi}(\xi) = \pi^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4}}$ и следователно

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\psi}(\xi) d\xi = \pi^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\xi|^2}{4}} d\xi = 2^n \pi^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} d\eta = (2\pi)^n.$$

Като заместим в /15/, стигаме до окончателния резултат

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)} \hat{\varphi}(\xi) d\xi$$

и доказателството е завършено.

С л е д с т в и е. Трансформацията на Фурие изобразява $\mathcal{S}(\mathbb{R}_x^n)$ върху цялото, $\mathcal{S}(\mathbb{R}_\xi^n)$.

Д о к а з а т е л с т в о. Нека $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_\xi^n)$ е произволно. Да положим $\varphi = F^{-1}(h)$. Очевидното равенство $\varphi(-x) = F\left(\frac{h}{(2\pi)^n}\right)(x)$ показва, че $\varphi \in \mathcal{S}$ и дефиницията на φ ни дава $h = F(\varphi)$.

Т е о р е м а 3.5. Ако $f \in L^1(\mathbb{R}_x^n)$, $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}_\xi^n)$, отново е в сила формулата за обръщане.

По-точно, равенството

$$/16/ \quad f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)} \hat{f}(\xi) d\xi$$

е в сила за почти всички стойности на x от $\mathbb{R}^n$. С други думи,

в класа от функции еквивалентни¹ с f има и една непрекъсната и тя именно стои в лявата страна на /16/.

Теоремата е следствие от едно важно тъждество.

Л е м а 3.1. За произволна двойка $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ имаме

$$/17/ \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \hat{g}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) g(\xi) d\xi.$$

Д о к а з а т е л с т в о. Интегралът

$$I = \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(x) g(\xi) e^{-i(x,\xi)} dx d\xi$$

е абсолютно сходящ и теоремата на Фубини ни дава тъждествата

$$\bar{I} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) e^{-i(x,\xi)} d\xi \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \hat{g}(x) dx,$$

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i(x,\xi)} dx \right) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi,$$

от които моментално следва /17/.

Д о к а з а т е л с т в о на теорема 3.5. Понеже $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, можем да образуваме $\hat{\hat{f}}$. Да фиксираме $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: двукратното прилагане на /17/ ни дава

$$/18/ \quad \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \hat{\varphi}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx.$$

Оттук, като вземем пред вид тъждеството

$$/19/ \quad \hat{\hat{\varphi}}(x) = (2\pi)^n \varphi(-x), \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

¹ Припомняме, че в разглеждания случай две функции са еквивалентни, когато се различават върху множество с мярка нула.

което е равносилно с формулата за обръщане, получаваме

$$/20/ \quad \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) \varphi(x) dx = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(-x) dx = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} f(-x) \varphi(x) dx,$$

т.е.

$$/21/ \quad \int_{\mathbb{R}^n} \{ \hat{f}(x) - (2\pi)^n f(-x) \} \varphi(x) dx = 0, \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

От това тъждество веднага следва, че функцията

$h(x) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{f}(x) - (2\pi)^n f(-x)$ се анулира почти навсякъде в $\mathbb{R}^n$. Наистина самата дефиниция на h показва, че $h \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Според /21/ имаме

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x) \varphi(x) dx = 0, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

и лема 2.1, стр. 182, показва, че h се анулира почти навсякъде в $\mathbb{R}^n$. Така получихме равенството

$$\hat{f}(x) = (2\pi)^n f(-x),$$

т.е.

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \hat{f}(-x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)} \hat{f}(\xi) d\xi,$$

валидно за почти всички x от $\mathbb{R}^n$.

С това теоремата е доказана.

С л е д с т в и е. Изображението $f \rightarrow \hat{f}$ на $L^1(\mathbb{R}^n_x)$ в $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n_\xi)$ е инективно.

Д о к а з а т е л с т в о. Ако $\hat{f}_1 = \hat{f}_2$, то $\hat{f}_1 - \hat{f}_2 = 0 \in L^1(\mathbb{R}^n_\xi)$ и следователно $\hat{f}_1 - \hat{f}_2 = 0$ почти навсякъде, т.е. $\hat{f}_1 = \hat{f}_2$ като елементи на $L^1(\mathbb{R}^n_x)$.

П р и м е р 2. Да разгледаме функцията

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Очевидно $f \in L^1(\mathbb{R}^1)$. Непосредствено получаваме

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix} e^{-ix\xi} dx = \int_0^{\infty} e^{-x(1+i\xi)} dx = \frac{1}{1+i\xi},$$

т.е. $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Обстоятелството, че $\hat{f}$ не винаги се съдържа в $L^1(\mathbb{R}^n)$ е една от причините, поради които формулата за обръщане не е вярна без някои допълнителни предположения.

Фактът, че от $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ следва равенството

$$/22/ \quad \lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0$$

показва, че не всяка функция от $C(\mathbb{R}^n_x)$ е образ на елемент от $L^1(\mathbb{R}^n_x)$. Необходимото условие /22/ далеч не е достатъчно. Традиционният път, който води до това заключение, минава през следната

Лема 3.2. Ако $\hat{f}$ е Фуриеров образ на функция от $L^1(\mathbb{R}^n_x)$ и е нечетна, за произволни числа $a \geq 1$, $b \geq 1$ имаме

$$\left| \int_a^b \frac{\hat{f}(\xi)}{\xi} d\xi \right| \leq A = \text{const}$$

с константа A , която не зависи от a и b .

Доказателство. От равенството

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos x\xi dx + i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin x\xi dx$$

следва, че първият интеграл е нула, защото $\hat{f}$ и вторият интеграл са нечетни функции. Следователно

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\hat{f}(\xi)}{\xi} d\xi &= i \int_a^b \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\sin x\xi}{\xi} dx \right) d\xi \\ &= i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\int_a^b \frac{\sin x\xi}{\xi} d\xi \right) dx. \end{aligned}$$

като разместването в реда на интегрирането се оправдава от теоремата на Фубини. Понеже

$$\left| \int_a^b \frac{\sin x\xi}{\xi} d\xi \right| \leq B = \text{const}$$

и B не зависи от a и b , от /23/ получаваме

$$\left| \int_a^b \frac{\hat{f}(\xi)}{\xi} d\xi \right| \leq B \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = B \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

и лемата е доказана.

Сега вече можем да дадем отговор на въпроса, който ни интересува.

Нека g е нечетна и непрекъсната функция, която за $\xi \geq 2$ съпада с $\frac{1}{\ln \xi}$. От лема 3.2 веднага следва, че g не е фуриеров образ на функция от $L^1(\mathbb{R}^n)$, въпреки че $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} g(\xi) = 0$.

Наистина за $b > 2$ получаваме

$$\int_2^b \frac{g(\xi)}{\xi} d\xi = \int_2^b \frac{d\xi}{\xi \ln \xi} = \ln(\ln \xi) \Big|_2^b \rightarrow +\infty, \quad \begin{matrix} b \rightarrow +\infty \\ 2 \end{matrix}$$

което всичко е доказано.

Упражнение 1

1. Докажете равенствата

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix\xi}}{1+i\xi} d\xi = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

При $x = 0$ интегралът е очевидно разходящ. Този резултат показва, че формулата за обръщане остава в сила, въпреки че $(1+i\xi)^{-1} \notin L^1(\mathbb{R}^1)$.

Упътване. За да се убедите, че при $x \neq 0$ интегралът е сходящ, интегрирайте по части. После използвайте теоремата за резидуумите.

2. Установете, че функцията

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha + i\lambda)^2} dx$$

принадлежи на $C^1(\mathbb{R}^1)$. След това с диференциране под знака на интеграла установете, че тя е константа. Това ще ви позволи още веднъж да пресметнете трансформацията на Фурие на функцията $e^{-|x|^2}$ без да прибегвате към теоремата на Коши.

3. Пресметнете трансформацията на Фурие на функцията $f(x) = e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}^1$.

Отг. $\hat{f}(\xi) = \frac{2}{1 + \xi^2}$.

Този резултат показва, че $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^1)$ и формулата за обръщане е приложима. Следователно

$$1/24/ \quad e^{-|x|} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2e^{ix\xi}}{1 + \xi^2} d\xi = \frac{1}{2\pi} F\left(\frac{2}{1 + \xi^2}\right).$$

Понеже $e^{-|x|}$ не е диференцируема в точката $x = 0$, 1/24/ показва, че условието $|x|^m f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ в теорема 3.2 а/ не може да се замени с изискването $|x|^m f(x)$ да клони към нула при $|x| \rightarrow \infty$.

4. Пресметнете трансформацията на Фурие на функцията

$$f(x) = e^{ix^2}, \quad x \in \mathbb{R}^1.$$

Отг. $\sqrt{\pi} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{i\xi^2}{4}}$.

У п ъ т в а н е. Допълнете показателя до точен квадрат. Така ще сведете въпроса до пресмятането на интегралите на Френел. Полученият резултат показва, че условието $\hat{f}$ да клони към нула при $|x| \rightarrow \infty$ не е необходимо, за да бъде гладка $\hat{f}$ /срав. с теорема 3.2 а/.

5. Пресметнете трансформацията на Фурие на функцията

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}^1.$$

Отг. $\frac{\sin^2 \frac{\xi}{2}}{(\xi/2)^2}$.

Отговорът показва, че $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^1)$ и следователно формулата за обръщане е приложима. Така получаваме равенството

$$F\left(\frac{\sin^2 \frac{\xi}{2}}{(\xi/2)^2}\right) = \begin{cases} 2\pi(1 - |x|), & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

6. В това упражнение е скициран най-старият извод на формулата за обръщане, който за разлика от доказателството в текста добре подчертава нейния локален характер.

1. Докажете, че $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ е сходящ и означете с d неговата стойност. Проверете, че за всяко $N > 0$ е в сила равенството $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Nx}{x} dx = d$.

2. Нека $f \in L^1(\mathbb{R}^1) \cap C^1(\mathbb{R}^1)$. Докажете формулата за обръщане

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \text{V. p.} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

У п ъ т в а н е. Разгледайте интеграла

$$\int_{-N}^N e^{ix\xi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\xi} f(y) dy \right) d\xi.$$

и разменяйки реда в интегрирането /с помощта на теоремата на Фубини/ получите равенството

$$\begin{aligned} \int_{-N}^N e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) d\xi &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin N(x-y)}{x-y} f(y) dy \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Nt}{t} f(x-t) dt. \end{aligned}$$

След това образувайте разликата

$$\begin{aligned} \int_{-N}^N e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) d\xi - 2df(x) &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin Nt}{t} (f(x-t) - f(x)) dt \\ &= 2 \int_{-A}^A \frac{f(x-t) - f(x)}{t} \sin Nt dt + 2 \int_{|t| \geq A} \frac{f(x-t) - f(x)}{t} \sin Nt dt \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Според лемата на Риман-Лебег първият интеграл клони към нула, когато $N \rightarrow \infty$. За да докажете, че и $I_2 \rightarrow 0$, използвайте оценката

$$|I_2| \leq 2 \int_{|t| \geq A} \frac{|f(x-t)|}{t} dt + 2|f(x)| \int_{|t| \geq AN} \frac{|\sin t|}{t} dt.$$

Така ще стигнете до равенството

$$f(x) = \frac{1}{2d} \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) d\xi$$

Накрая за да пресметнете d , използвайте функцията e^{-x^2}

7. Нека $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C^1(\mathbb{R}^n)$. Разсъждавайки както в предната задача, установете равенството

$$(2\pi)^n \hat{f}(x) = \lim_{\substack{N_1 \rightarrow +\infty \\ N_2 \rightarrow +\infty \\ \vdots \\ N_n \rightarrow +\infty}} \int_{-N_1}^{N_1} \dots \int_{-N_n}^{N_n} e^{i(x,\xi)} \hat{f}(\xi) d\xi,$$

в което граничните преходи се извършват последователно.

8. В последните две упражнения видяхме, че при една по-свободна интерпретация на $\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) d\xi$ обсегът на форму-

лата за обръщане може чувствително да се разшири. Сега ще направим още една стъпка в това направление. Става дума за така нареченото сумиране на Фурмиеровите интегрални процес, който ни позволява при по-общи предположения да възстановим f , ако познаваме $\hat{f}$.

Теорема. Нека $k \in L^1(\mathbb{R}^n)$ е такова, че и $\hat{k} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и освен това $\int_{\mathbb{R}^n} k(x) dx = 1$.

В такъв случай за всяко $f \in L^p \cap L^1$, $p \geq 1$ имаме

$$f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,t)} \hat{f}(t) \hat{k}(\varepsilon t) dt,$$

като граничния преход се извършва в $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Преди да започнем доказателството, ще припомним, че за всяко $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p dx = 0,$$

както се вижда например като апроксимираме f с функции от $C_c(\mathbb{R}^n)$.

Доказателство на теоремата. Да положим

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,t)} \hat{f}(t) \hat{k}(\varepsilon t) dt.$$

Понеже $e^{i(x,t)} \hat{f}(t) = \hat{f}_x(t)$, където $f_x(y) \stackrel{\text{def}}{=} f(y+x)$ с помощта на лема 3.1, стр. 282 получаваме

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x+y) \hat{h}_\varepsilon(y) dy$$

където $\hat{h}_\varepsilon(t) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{k}(\varepsilon t)$. Тъй като по предположение k и $\hat{k}$ са от $L^1(\mathbb{R}^n)$, формулата за обръщане е в сила и лесно намираме

$$\hat{h}_\varepsilon(y) = (2\pi)^n \frac{1}{\varepsilon^n} k\left(\frac{-y}{\varepsilon}\right). \text{ Така стигаме до равенството}$$

$$f'_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int f(x+y) k\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) dy = (f * k_\varepsilon)(x),$$

където, разбира се, $k_\varepsilon(y) = \frac{1}{\varepsilon^n} k\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)$.

Сега вече доказателството завършва с разсъждения, твърде близки до тези от 1.4 стр. 176. Да положим

$$\int_{\mathbb{R}^n} |k_\varepsilon(t)| dt = \int_{\mathbb{R}^n} |k(t)| dt = A.$$

Понеже $\int_{\mathbb{R}^n} k_\varepsilon(t) dt = \int_{\mathbb{R}^n} k(t) dt = 1$, получаваме

$$f'_\varepsilon(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y) - f(x)) k_\varepsilon(y) dy.$$

Следователно

$$|f'_\varepsilon(x) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)| |k_\varepsilon(y)|^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} dy$$

$$\leq A^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p |k_\varepsilon(y)| dy \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

т.е.

$$\|f'_\varepsilon - f\|_p^p = A^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) |k_\varepsilon(y)| dy,$$

където естествено

$$g(y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p dx$$

Очевидно имаме $|g(y)| \leq 2^p \|f\|_p^p$, а от друга страна, както вече отбелязахме

$$\lim_{y \rightarrow 0} g(y) = 0.$$

Тези две обстоятелства ни позволяват леко да завършим доказателството.

Наистина имаме

$$\|f'_\varepsilon - f\|_p^p \leq (2^p \|f\|_p^p \int_{|y| \geq \delta} |k_\varepsilon(y)| dy + A \sup_{|y| \leq \delta} g(y)) A^{\frac{p}{q}}.$$

Нека сега $\eta > 0$ е произволно. Да вземем $\delta = \delta(\eta)$ толкова малко, че да имаме $\sup_{|y| \leq \delta} g(y) \leq \eta$ и да го фиксираме. Понеже

$$\int_{|y| \geq \delta} |k_\varepsilon(y)| dy = \int_{|t| \geq \frac{\delta}{\varepsilon}} |k(t)| dt \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

за $\varepsilon < \varepsilon_0(\eta)$ намираме $\int_{|y| \geq \delta} |k_\varepsilon(y)| dy < \eta$, което заедно

предишното неравенство ни дава

$$\|f'_\varepsilon - f\|_p^p \leq (2^p \|f\|_p^p \eta + A \eta) A^{\frac{p}{q}}$$

и доказателството за $p > 1$ е завършено.

Случаят $p = 1$ е по-прост и ние го предоставяме на читателя.

Примери. Следните три метода за сумиране са особено популярни:

$$a/ k(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}, \quad \hat{k}(t) = \frac{\sin^2 \frac{t}{2}}{(\frac{t}{2})^2}, \quad x \in \mathbb{R}^1$$

/метод на Чезаро или метод на средните аритметични/;

$$b/ k(x) = e^{-|x|}, \quad \hat{k}(\xi) = C_n \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \quad C_n = \text{const}, \quad x \in \mathbb{R}^1$$

/метод на Абел - Поасон/;

$$в/ k(x) = e^{-|x|^2}, \quad \hat{k}(\xi) = \pi^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4}}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

/метод на Вайерщрас/

В заключение ще отбележим, че при малки допълнителни предположения за k (които са в сила за случаите а/, б/ и в/) можем да твърдим, че f_k клони към f почти навсякъде в $\mathbb{R}^n$, но доказателството е по-сложно [23].

3.2. Трансформация на Фурие в $L^2(\mathbb{R}^n)$

Теорема на Планшерел

В началото на нашия век швейцарският математик Планшерел е забелязал, че пространството $L^2(\mathbb{R}^n)$ позволява да се построи проста и симетрична теория на трансформацията на Фурие, въпреки че на пръв поглед самата дефиниция на Фуриеровия оператор изглежда затруднителна, защото ако вземем някаква функция $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, интегралът

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x, \xi)} f(x) dx$$

е общо взето разходящ. Пътят към правилната дефиниция минава през така нареченото равенство на Парсевал - едно важно тъждество, еквивалентно с вече установеното равенство /17/.

Лема 3.3. Нека φ и ψ са функции от $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. В такъв случай е в сила тъждеството

$$/25/ \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \bar{\psi}(x) dx = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi) \bar{\hat{\psi}}(\xi) d\xi,$$

където с $\bar{\psi}(x)$ сме означили конюгированото число на $\psi(x)$ и смисълът на $\bar{\hat{\psi}}$ е аналогичен.

Именно /25/ се нарича равенство на Парсевал.

Доказателство. Понеже $\bar{\psi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ можем да образуваме $F^{-1}(\bar{\psi})$, където F^{-1} е обратният оператор на Фурие. Да положим $\eta = F^{-1}(\bar{\psi})$. В такъв случай $\eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и, разбира

се, имаме $\bar{\psi} = \hat{\eta}$, т.е.

$$\begin{aligned} \eta(\xi) &= F^{-1}(\bar{\psi}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x, \xi)} \bar{\psi}(x) dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x, \xi)} \psi(x) dx = \frac{1}{(2\pi)^n} \bar{\hat{\psi}}(\xi) \end{aligned}$$

След като разполагаме с това равенство, с помощта на /17/ получаваме

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \bar{\psi}(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \hat{\eta}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi) \eta(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi) \bar{\hat{\psi}}(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

с което /25/ е доказано.

Следствие. За $\varphi = \psi \in \mathcal{S} /25/$ взема вида

$$/26/ \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^2 dx = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi,$$

което показва, че операторът на Фурие по същество запазва дължините на векторите от $L^2(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Тъждеството /26/ и обстоятелството, че $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ е навсякъде гъсто в $L^2(\mathbb{R}^n)$ /вж. следствието от теорема 1.2, стр.176/ ни позволяват да продължим трансформацията на Фурие "по непрекъснатост" в цялото $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 3.6. Нека $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ и $\{\varphi_j\} \xrightarrow{L^2} f$ е редица от елементи на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. В такъв случай и редицата $\{\hat{\varphi}_j\}$ от Фуриеровите образи на $\{\varphi_j\}$ е сходяща в $L^2(\mathbb{R}^n)$. Нейната граница зависи само от f и се нарича трансформация на Фурие на тази функция.

Доказателство. Понеже редицата $\{\varphi_\nu\}$ е сходяща в L^2 , тя е фундаментална, т.е. $\|\varphi_\nu - \varphi_\mu\|_{L^2} \rightarrow 0$, когато $\nu, \mu \rightarrow \infty$. Тъждеството

$$\|\hat{\varphi}_\nu - \hat{\varphi}_\mu\|_{L^2} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \|\varphi_\nu - \varphi_\mu\|_{L^2}$$

/вж.26/ показва, че и редицата $\{\hat{\varphi}_\nu\}$ е сходяща, защото L^2 е пълно. Да положим $\hat{f} = \lim \hat{\varphi}_\nu \in L^2$ и да вземем произволна функция $\psi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. Като извършим граничния преход $\nu \rightarrow \infty$ в тъждеството

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}_\nu(x) \psi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\nu(\xi) \hat{\psi}(\xi) d\xi$$

получаваме

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) \psi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) \hat{\psi}(\xi) d\xi,$$

което показва, че функцията $\hat{f} \in L^2$ е еднозначно определена. Наистина, ако и за $g \in L^2$ имаме

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x) \psi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) \hat{\psi}(\xi) d\xi,$$

веднага получаваме

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\hat{f}(x) - g(x)) \psi(x) dx = 0$$

и лема 2.1, стр. 182, показва, че $\hat{f} = g$ почти навсякъде в $L^2(\mathbb{R}^n)$, т.е. като елементи на L^2 $\hat{f}$ и g съвпадат.

С това теоремата е доказана.

Следствие 1. В сила е равенството на Парсевал

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Доказателство. Нека $\{\varphi_\nu\} \xrightarrow{L^2} f$, $\varphi_\nu \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. Според /26/ имаме $\|\varphi_\nu\|_{L^2}^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \|\hat{\varphi}_\nu\|_{L^2}^2$ и граничният преход $\nu \rightarrow \infty$ ни дава /28/.

Равенството на Парсевал показва, че по същество операторът на Фурие не изменя дължините на векторите в $L^2(\mathbb{R}^n)$. Ние бихме могли да се избавим от множителя $\frac{1}{(2\pi)^n}$ в /28/, ако бяхме дефинирали трансформацията на Фурие в $L^1(\mathbb{R}^n)$ чрез равенството

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,\xi)} f(x) dx,$$

както правят много автори. При тази дефиниция F наистина запазва дължините в L^2 , т.е. той е унитарен оператор в това пространство. Очевидно е, че разликата между нашата дефиниция и /29/ е несъществена.

Следствие 2. Нека $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Да означим с $\hat{f}_1$ трансформацията на Фурие на f , разглеждан като елемент от $L^1(\mathbb{R}^n)$, а с $\hat{f}_2$ неговата Фуриерова трансформация, когато го разглеждаме като елемент от $L^2(\mathbb{R}^n)$. Тогава $\hat{f}_1 = \hat{f}_2$ почти навсякъде в $\mathbb{R}^n$.

Доказателство. Както $\hat{f}_1$, така и $\hat{f}_2$ удовлетворяват /27/ и следователно съвпадат почти навсякъде. Този резултат показва, че Фуриеровия оператор, дефиниран в L^2 , е продължение на трансформацията на Фурие в L^1 .

Теорема 3.7. Трансформацията на Фурие изобразява $L^1(\mathbb{R}^n)$ еднозначно-обратимо и непрекъснато върху цялото $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Доказателство. Равенството на Парсевал $\|\hat{f}\|_{L^2} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \|f\|_{L^2}$ показва, че F е непрекъснат и еднозначно-обратим. Остава да се убедим, че образът на L^2 изпълнява цялото L^2 . За тази цел да вземем произволна функция $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ и да я апроксимираме с функции от $\mathcal{F}$. Нека например $\{\varphi_\nu\} \xrightarrow{L^2} g$.

Да положим $h_N = F^{-1}(\varphi_N)$. Тъждеството

$$\|h_N - h_M\|_{L^2} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \|\varphi_N - \varphi_M\|_{L^2}$$

показва, че редицата $\{h_N\}$ е сходяща в L^2 . Понеже $\varphi_N = F(h_N)$, самата дефиниция на трансформацията на Фурие в L^2 ни дава $g = \hat{h}$ и доказателството е завършено.

За да дефинираме трансформацията на Фурие в L^2 , ние използвахме пространството $\mathcal{S}$. Възможно е обаче да се тръгне направо от L^2 , както правят някои автори.

Теорема 3.8. Нека $f \in L^2$ и нека

$$f_N(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} f(x), & |x| \leq N \\ 0, & |x| > N. \end{cases}$$

Тогав $f_N \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ и $\hat{f} = \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{f}_N$, като граничният преход се извършва в L^2 .

Доказателство. Включването $f_N \in L^2(\mathbb{R}^n)$ е очевидно. От друга страна, неравенството на Шварц ни дава оценката

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_N(x)| dx = \int_{|x| \leq N} |f(x)| dx \leq C_N \left(\int_{|x| \leq N} |f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_N \|f\|_{L^2},$$

което показва, че наистина $f_N \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Следователно можем да образуваме интеграла

$$\hat{f}_N(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x, \xi)} f_N(x) dx = \int_{|x| \leq N} e^{-i(x, \xi)} f(x) dx.$$

Нека сега $\varepsilon > 0$ е произволно и $N_\varepsilon = N_\varepsilon(\varepsilon)$ е толкова голямо, че да имаме $\int_{|x| \geq N_\varepsilon} |f(x)|^2 dx < \varepsilon$. В такъв случай за

$N_2 > N_1 > N_\varepsilon$ получаваме неравенството

$$\|f_{N_1} - f_{N_2}\|_{L^2}^2 = \int_{N_1 \leq |x| \leq N_2} |f(x)|^2 dx < \varepsilon,$$

което показва, че $\{f_N\}$ е редица на Коши. С помощта на равенството на Парсевал $\|\hat{f}_{N_1} - \hat{f}_{N_2}\|_{L^2} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \|f_{N_1} - f_{N_2}\|_{L^2}$ заключаваме, че и редицата $\{\hat{f}_N\}$ има същото свойство и следователно е сходяща. Нека $h \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{L^2} \hat{f}_N$. Извършвайки граничния преход в тъждеството

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}_N(\xi) \psi(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f_N(x) \hat{\psi}(x) dx, \quad \psi \in \mathcal{S},$$

което е в сила, защото $f_N \in L^1$, намираме

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(\xi) \psi(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \hat{\psi}(x) dx.$$

Следователно $h = \hat{f}$.

С това теоремата е доказана. Полученият резултат често се записва във вида

$$\hat{f}(\xi) = \lim_{N \rightarrow \infty} i. m. \int_{|x| \leq N} e^{-i(x, \xi)} f(x) dx.$$

Упражнение 2

1. Нека $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $h \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Докажете равенствата:

$$a) \widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}$$

$$b) \widehat{f * h} = \hat{f} \hat{h}.$$

2. С помощта на б/ от предната задача и равенството на Парсевал докажете, че

$$\|f * h\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|h\|_{L^2}.$$

(Частен случай от неравенството на Бунг.)

3.3. Трансформация на Фурие в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Д е ф и н и ц и я 3.3. Нека $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Разпределението $\hat{u}$, дефинирано чрез равенството

$$/30/ \quad (\hat{u}, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} (u, \hat{\varphi}), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

се нарича трансформация на Фурие на u .

Т е о р е м а 3.9. Трансформацията на Фурие изобразява $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ еднозначно обратимо и непрекъснато върху цялото $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Д о к а з а т е л с т в о. Най-напред ще покажем, че дефиницията 3.3 е коректна. Понеже $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, съществува полуорма

$$\rho_{k,m}(\varphi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, |\alpha| \leq k} (1+|x|^2)^m |D^\alpha \varphi(x)|$$

такава, че

$$/31/ \quad |(u, \varphi)| \leq C_2 \rho_{k,m}(\varphi).$$

От друга страна, $\rho_{k,m}$ е непрекъсната в $\mathcal{S}$, а трансформацията на Фурие действа непрекъснато от $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Ето защо може да се намери полуорма $\rho_{3,2}$ от същия вид, за която е в сила неравенството

$$/32/ \quad \rho_{k,m}(\hat{\varphi}) \leq C_2 \rho_{3,2}(\varphi).$$

Комбинирайки /30/, /31/ и /32/, получаваме

$$/33/ \quad |(\hat{u}, \varphi)| \leq C_1 C_2 \rho_{3,2}(\varphi),$$

което показва, че наистина $\hat{u} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

За да докажем, че съответствието $u \rightarrow \hat{u}$ на $\mathcal{S}'$ в $\mathcal{S}'$ е еднозначно обратимо, да допуснем, че $\hat{u} = 0$. В такъв случай имаме $(u, \hat{\varphi}) = 0$ за всяко $\varphi \in \mathcal{S}$ и понеже трансформацията на Фурие е автоморфизъм на $\mathcal{S}$, заключаваме, че и $u = 0$, т.е. операторът $u \xrightarrow{F} \hat{u}$ на $\mathcal{S}'$ в $\mathcal{S}'$ е наистина обратим. За да се убедим, че $F(\mathcal{S}') = \mathcal{S}'$, да вземем произволно разпределение $u \in \mathcal{S}'$ и да дефинираме функционала

$$(\tilde{u}, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} (u, F^{-1}(\varphi)), \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Понеже и операторът $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{F^{-1}} \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ е непрекъснат, както по-горе се вижда, че $\tilde{u} \in \mathcal{S}'$. Самата дефиниция на $\tilde{u}$ показва, че $\tilde{u} = u$ и равенството $F(\mathcal{S}') = \mathcal{S}'$ е установено.

Остава да проверим, че изобразението

$$/34/ \quad \mathcal{S}' \xrightarrow{F} \mathcal{S}'$$

е непрекъснато¹. Случаят, когато в $\mathcal{S}'$ е въведена слабата топология, е още по-прост и ние го предоставяме на читателя.

Нека B е ограничено множество в $\mathcal{S}$ и нека

$$V = \{v \in \mathcal{S}', \sup_{\varphi \in B} |(v, \varphi)| < \varepsilon\}$$

е съответната му околност на началото в $\mathcal{S}'$. Понеже операторът $\mathcal{S} \xrightarrow{F} \mathcal{S}'$ е непрекъснат, множеството $F(B)$ е също ограничено. Нека

$$U = \{u \in \mathcal{S}', \sup_{\varphi \in F(B)} |(u, \varphi)| < \varepsilon\}$$

е околността на началото, която му отговаря. Дефиниционното равенство $(\hat{u}, \varphi) = (u, \hat{\varphi})$ показва, че от $u \in U$ следва $\hat{u} \in V$ и непрекъснатостта на оператора /34/ е доказана.

В същност и в $\mathcal{S}'$ е в сила формула за обръщане. За да можем да я запишем, имаме нужда от

Д е ф и н и ц и я 3.4. Нека $u \in \mathcal{S}'$. Разпределението $\tilde{u} \in \mathcal{S}'$ се дефинира чрез равенството

$$(\tilde{u}, \varphi) = (u, \varphi(-x)).$$

Ясно е, че наистина $\tilde{u} \in \mathcal{S}'$.

Т е о р е м а 3.10. Нека $\tilde{u} \in \mathcal{S}'$. В сила е формулата за обръщане

$$/35/ \quad \hat{\tilde{u}} = (2\pi)^n \tilde{u}.$$

¹Припомняме, че с $\mathcal{S}'_\beta$ означаваме $\mathcal{S}'$, в което е въведена силната $\beta(\mathcal{S}', \mathcal{S})$ топология /вж. стр.152/.

Доказателство. За $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ имаме

$$\widehat{\widehat{\varphi}}(x) = (2\pi)^n \varphi(-x).$$

Следователно

$$(\widehat{\widehat{u}}, \varphi) = (\widehat{u}, \widehat{\widehat{\varphi}}) = (u, \widehat{\widehat{\varphi}}) = (2\pi)^n (u, \varphi(-x)) = (2\pi)^n (\check{u}, \varphi)$$

и /35/ е доказано.

Т е о р е м а 3.11. В $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ са в сила тъждествата

$$\begin{aligned} D_j \widehat{u} &= \xi_j \widehat{u}, & j &= 1, 2, 3, \dots, n, \\ x_j \widehat{u} &= -D_j \widehat{u}, & j &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Ще припомним, че според теорема 3.3, стр.278 същите тъждества са вече доказани за $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Доказателство. От дефиницията на $\mathcal{S}'$ следва непосредствено, че щом $u \in \mathcal{S}'$, то и $D_j u \in \mathcal{S}'$, $x_j u \in \mathcal{S}'$ и изображенията

$$u \longrightarrow D_j u, \quad u \longrightarrow x_j u$$

на $\mathcal{S}'$ в $\mathcal{S}'$ са непрекъснати.

Използвайки равенството

$$D_j \widehat{\varphi} = -\xi_j \widehat{\varphi}, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

получаваме

$$\begin{aligned} (D_j \widehat{u}, \varphi) &= (D_j u, \widehat{\varphi}) = -(u, D_j \widehat{\varphi}) = (u, \xi_j \widehat{\varphi}) \\ &= (\widehat{u}, \xi_j \varphi) = (\xi_j \widehat{u}, \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{S} \end{aligned}$$

с което тъждеството

$$D_j \widehat{u} = \xi_j \widehat{u}$$

е установено.

Второто равенство се доказва аналогично.

Т е о р е м а 3.12. Трансформациите на Фурие в $L^1(\mathbb{R}^n)$ и в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ се съгласуват.

Доказателство. Ако $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, то f принадлежи и на $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ и за нейната трансформация на Фурие разполагаме с две различни дефиниции. Трябва да докажем, че те водят до един и същ резултат.

Нека $\widehat{f}_1$ е Фуриеровият образ на f , разглеждана като елемент на $L^1(\mathbb{R}^n)$. Според лема 3.1, стр.282, за всяко $\varphi \in \mathcal{S}$ имаме

$$/17/ \quad \int_{\mathbb{R}^n} f \widehat{\varphi} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}_1 \varphi d\xi,$$

т.е.

$$/36/ \quad (\widehat{f}_1, \varphi) = (f, \widehat{\varphi}).$$

От друга страна, ако $\widehat{f}_2$ е Фуриеровият образ на f , разглеждана като елемент от $\mathcal{S}'$, по дефиниция имаме

$$/37/ \quad (\widehat{f}_2, \varphi) = (f, \widehat{\varphi}), \quad \text{за всяко } \varphi \in \mathcal{S}.$$

Равенствата /36/ и /37/ показват, че $(\widehat{f}_1, \varphi) = (\widehat{f}_2, \varphi)$, т.е. $\widehat{f}_1 = \widehat{f}_2$ като разпределения. Спомняйки си дефиницията на равенство между локално сумируема функция и разпределение, веднага заключаваме, че полученото тъждество означава, че разпределението $\widehat{f}_2$ е истинска функция и съвпада с $\widehat{f}_1$.

С това доказателството е завършено.

Ко м е н т а р. Даденото доказателство ясно показва, че дефиницията на трансформацията на Фурие в $\mathcal{S}'$ /деф.3.3/ е продиктувана от желанието тъждеството /17/ да се съхрани. Тази дефиниция е едно от съществените постижения на Л.Шварц и липсва у неговите предшественици. Именно тя лежи в основата на повечето приложения на разпределенията в теорията на частните диференциални уравнения.

За да изтъкнем още по-ясно истинските съображения, довели до тази дефиниция, ще въведем едно важно понятие.

Де ф и н и ц и я 3.5. Нека X и Y са отделими локално изпъкнали пространства и нека

$$T: X \longrightarrow Y$$

е линеен и непрекъснат оператор. Нека X^* и Y^* са спрегнатите пространства на X и Y . Операторът

$${}^tT: Y^* \longrightarrow X^*,$$

който действа по правилото

$${}^tT(f)(x) = f(Tx), \quad f \in Y^*, \quad x \in X,$$

се нарича спрегнат на T и играе важна роля в редица въпроси от функционалния анализ. Ако, както в глава I, се условим да означаваме стойността на функционала $f \in Y^*$ в точката $y \in Y$ чрез $\langle y, f \rangle_Y$, а стойността на $g \in X^*$ в точката $x \in X$ чрез $\langle x, g \rangle_X$ стигаме до симетричния запис

$$\langle x, {}^tTf \rangle_X = \langle Tx, f \rangle_Y,$$

който се запомня лесно.

Сега да се върнем към дефиницията на трансформацията на Фурие в $\mathcal{S}'$. Дефиниционното равенство /30/ може да се представи във вида

$$\langle u, \varphi \rangle_{\mathcal{S}} = \langle u, \hat{\varphi} \rangle_{\mathcal{S}},$$

от който става ясно, че операторът на Фурие $\mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}'$ не е нищо друго освен спрегнатия оператор на обичайната трансформация на Фурие $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$.

Пример 1. Да пресметнем трансформацията на Фурие на функцията на Дирак $(\delta, \varphi) = \varphi(0)$, $\delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Прилагайки дефиницията, намираме

$$(\hat{\delta}, \varphi) = (\delta, \hat{\varphi}) = \hat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} 1 \cdot \varphi(x) dx = (1, \varphi),$$

т.е.

$$\hat{\delta} = 1.$$

По-общо, нека $\delta_x \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ е функцията на Дирак с носител в точката x . Както по-горе, получаваме

$$(\hat{\delta}_x, \varphi) = (\delta_x, \hat{\varphi}) = \hat{\varphi}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x, \xi)} \varphi(\xi) d\xi = (e^{-i(x, \xi)}, \varphi)$$

т.е.

$$\hat{\delta}_x = e^{-i(x, \xi)}.$$

Оказа се, че $\hat{\delta}_x$ е цяла функция! Както ще видим след малко, това не е случайно.

Пример 2. Да пресметнем трансформацията на Фурие на константата 1.

Имаме

$$\begin{aligned} (\hat{1}, \varphi) &= (1, \hat{\varphi}) = \int_{\mathbb{R}^n} 1 \cdot \hat{\varphi}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(0, \xi)} \varphi(\xi) d\xi \\ &= (2\pi)^n \varphi(0) = (2\pi)^n (\delta, \varphi), \end{aligned}$$

т.е.

$$\hat{1} = (2\pi)^n \delta,$$

като предпоследното равенство написахме въз основа на формулата за обръщане. Същият резултат следва по-лесно от /35/. Наистина

$$\begin{aligned} (\hat{1}, \varphi) &= (\hat{\hat{\delta}}, \varphi) = (\delta, \hat{\hat{\varphi}}) = (2\pi)^n (\delta, \varphi(-x)) \\ &= (2\pi)^n \varphi(0) = (2\pi)^n (\delta, \varphi). \end{aligned}$$

Пример 3. Да се пресметне трансформацията на Фурие на функцията на Хевисайд

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{за } x > 0 \\ 0, & \text{за } x < 0 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}^1.$$

Първи начин. Да разгледаме функцията

$$h_n(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq n \\ 0, & x \in (0, n), \end{cases}$$

който очевидно принадлежи на $L^1(\mathbb{R}^1)$ и следователно на $\mathcal{S}'$. Ясно

е, че $h_n \xrightarrow{\mathcal{S}'} h$. Наистина за $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ получаваме

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_n(x) \varphi(x) dx = \int_0^n \varphi(x) dx \rightarrow \int_0^{\infty} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \varphi(x) dx.$$

Понеже трансформацията на Фурие действа непрекъснато от $\mathcal{S}'$ в $\mathcal{S}'$, от този резултат следва, че $\hat{h}_n \rightarrow \hat{h}$. Да пресметнем $\hat{h}_n$. Тъй като $h_n \in L^1$, имаме

$$\hat{h}_n(\xi) = \int_0^n e^{-ix\xi} dx = \frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi} \Big|_0^n = \frac{e^{-in\xi} - 1}{-i\xi}.$$

Остава да намерим границата на $\hat{h}_n$ в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Нека $\varphi \in \mathcal{S}$. Непосредствено получаваме

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \frac{e^{-in\xi} - 1}{-i\xi} d\xi = \int_{-1}^1 \frac{e^{-in\xi} - 1}{-i\xi} \varphi(\xi) d\xi + \int_{|\xi| \geq 1} \frac{e^{-in\xi} - 1}{-i\xi} \varphi(\xi) d\xi.$$

Според лемата на Риман-Лебег

$$\int_{|\xi| \geq 1} \frac{e^{-in\xi} - 1}{-i\xi} \varphi(\xi) d\xi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{|\xi| \geq 1} \frac{\varphi(\xi)}{i\xi} d\xi.$$

От друга страна,

$$\int_{-1}^1 \frac{e^{-in\xi} - 1}{-i\xi} \varphi(\xi) d\xi = \int_{-1}^1 \frac{e^{-in\xi} - 1}{-i\xi} (\varphi(\xi) - \varphi(0)) d\xi$$

$$+ \varphi(0) \int_{-1}^1 \frac{e^{-in\xi} - 1}{-i\xi} d\xi = I_1 + \varphi(0) I_2.$$

Нак според лемата на Риман-Лебег

$$I_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\xi) - \varphi(0)}{i\xi} d\xi.$$

На края, отделяйки реалната и имагинерната част в I_2 , стигаме до равенството

$$I_2 = \int_{-1}^1 \frac{\sin n\xi}{\xi} d\xi + i \int_{-1}^1 \frac{1 - \cos n\xi}{-\xi} d\xi = \int_{-1}^1 \frac{\sin n\xi}{\xi} d\xi,$$

защото функцията $\frac{1 - \cos n\xi}{\xi}$ е нечетна.
Следователно

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-1}^1 \frac{\sin n\xi}{\xi} d\xi = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-n}^n \frac{\sin t}{t} dt = \pi.$$

Сумирайки получените резултати, намираме

$$(\hat{h}, \varphi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\hat{h}_n, \varphi) = \int_{|\xi| \geq 1} \frac{\varphi(\xi)}{i\xi} d\xi + \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\xi) - \varphi(0)}{i\xi} d\xi + \varphi(0) \pi,$$

т.е.

$$(\hat{h}, \varphi) = -i \text{V. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\xi} d\xi + \pi(\delta, \varphi)$$

или

$$\hat{h} = -i \text{V. p.} \frac{1}{\xi} + \delta \pi.$$

Втори начин. Нека $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$. Изхождайки от дефиницията, намираме

$$\begin{aligned} (\hat{h}, \varphi) &= (\hat{h}, \hat{\varphi}) = \int_0^{\infty} \hat{\varphi}(\xi) d\xi = \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} \varphi(x) dx \right) d\xi \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} \varphi(x) dx \right) d\xi = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-inx} - 1}{-ix} \varphi(x) dx \end{aligned}$$

и въпросът се сведе до пресмятането на същата граница.

Трети начин. Да разгледаме функцията

$$h_{\varepsilon}(x) = \begin{cases} e^{-\varepsilon x}, & x \geq 0, \quad \varepsilon > 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Лесно се вижда, че в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$ имаме $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_{\varepsilon} = h$. Следователно $\hat{h} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{h}_{\varepsilon}$, като границата отново се взема в $\mathcal{S}'$.

Понеже

$$\hat{h}_{\varepsilon}(\xi) = \int_0^{\infty} e^{-ix\xi} e^{-\varepsilon x} dx = \int_0^{\infty} e^{-(\varepsilon + i\xi)x} dx = \frac{1}{\varepsilon + i\xi},$$

получаваме

$$(\hat{h}, \varphi) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\varepsilon + i\xi} d\xi, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1).$$

Пресмятането на границата предоставяме на читателя.

Ще завършим тази точка с една малка модификация на дадените дефиниции. Става дума за така наречената **частична трансформация на Фурие**, която е полезно средство при изследването на диференциалните уравнения.

Дефиниция 3.6. Нека k е естествено число, по-малко от n . За всеки вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ да положим $x' = (x_1, \dots, x_k)$, $x'' = (x_{k+1}, \dots, x_n)$ и аналогично за дуалните вектори $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Операторът, дефиниран чрез равенството

$$/37/ \quad F_{n-k}(\varphi)(x', \xi'') = \int_{\mathbb{R}^{n-k}} e^{-i(x'', \xi'')} \varphi(x', x'') dx'', \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

се нарича **частична трансформация на Фурие**.

¹С други думи, използваме разлагането $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^{n-k}$

Теорема 3.13. Операторът /37/ изобразява $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ еднозначно-обратимо и непрекъснато върху цялото $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. В сила е формулата за обръщане

$$/38/ \quad \varphi(x', x'') = \frac{1}{(2\pi)^{n-k}} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} e^{i(x'', \xi'')} F_{n-k}(\varphi)(x', \xi'') d\xi'',$$

която ни дава обратния оператор F_{n-k}^{-1} .

Доказателството не се различава съществено от доказателството на теорема 3.3 и ние го предоставяме на читателя.

Дефиниция 3.7. Нека $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Разпределението $F_{n-k}(u)$, дефинирано чрез равенството

$$(F_{n-k}(u), \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} (u, F_{n-k}(\varphi)), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

се нарича **частична трансформация на Фурие на u** .

Лесно се вижда, че $F_{n-k}(u) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ и че съответствието $u \rightarrow F_{n-k}(u)$ изобразява $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ еднозначно-обратимо и непрекъснато върху цялото $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 3.14. Нека $w = u \otimes v$, където $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^k)$, $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n-k})$, $k < n$.

Тогава $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ и са в сила равенствата

$$\begin{aligned} \hat{w} &= \hat{u} \otimes \hat{v}, \\ F_k(w) &= \hat{u} \otimes v, \\ F_{n-k}(w) &= u \otimes \hat{v}, \end{aligned}$$

където с F_k сме означили частичната трансформация на Фурие спрямо променливите $x_1, \dots, x_k$.

Доказателството е директно следствие от дефинициите.

У п р а ж н е н и е 3

1. Пресметнете трансформацията на Фурие на разпределението

V. p. $\frac{1}{x}$:

а/ директно;

б/ с помощта на резултатите от пример 1 и пример 3.

2. Пресметнете трансформацията на Фурие на функцията

$$x_+ = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}^1:$$

а/ Изходжайки от равенството $x_+ = x h(x)$, където h е функцията на Хевисайд.

б/ Пресмятайки границата

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon x} x e^{-ix\xi} dx.$$

в. $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$.

Отг. $(\hat{x}_+, \varphi) = -V. p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t^2} dt + \pi i (\delta', \varphi).$

3. Проверете резултата от задача 2.

У п ъ т в а н е. Покажете, че $f(x) = x_+$ удовлетворява тъждеството $\hat{\hat{f}}(x) = 2\pi f(-x)$.

4. Нека, както обикновено,

$$\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

Докажете, че уравнението

$$-\Delta u + u = \delta$$

притежава единствено решение в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

5. Докажете, че всяко решение на уравнението на топлопроводността

$$u_t = \Delta u,$$

което е дефинирано и ограничено в $\mathbb{R}^{n+1}$, е константа. Този резултат е очевиден аналог на класическата теорема на Лиувил.

У п ъ т в а н е. Намерете всички решения на $u_t = \Delta u$, които принадлежат на $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

6. Нека $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ и нека $-\Delta u + u \in L^2(\mathbb{R}^n)$.
Докажете, че за $|\alpha| \leq 2$ и $\partial^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

7. Конструирайте функция от $C^\infty(\mathbb{R}^1) \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$, за която не съществува полином p такъв, че за всяко n да имаме $|f(n)| \leq p(n)$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

У п ъ т в а н е. Най-напред постройте неотрицателна стъпаловидна функция от $L^1(\mathbb{R}^1)$, която не се мажорира от никакъв полином.

8. Нека $\delta_\nu \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$ е функцията на Дирак с носител в точката $x = \nu$.

Докажете, че редът

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu \delta_\nu$$

е сходящ в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ тогава и само тогава, когато $|a_\nu| \leq C|\nu|^k$ където $\nu \neq 0$, а C и k са подходящи константи.

9. За какви редици $\{b_\nu\}$ редът

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} b_\nu e^{i\nu x}$$

е сходящ в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$? Намерете необходимо и достатъчно условие.

3.4. Трансформация на Фурие в $L^p(\mathbb{R}^n)$

Неравенство на Хаусдорф-Йънг

Тъй като за $p \geq 1$ $L^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ дефиниция 3.3 е приложима към функциите от $L^p(\mathbb{R}^n)$ стига да ги отъждествим

с разпределенията, които им съответствуват. Естествено възниква въпросът - за кои показатели операторът на Фурие съпоставя на елементите от L^p истински функции. Частичен отговор на този въпрос ни дава

Т е о р е м а 3.15. Нека $1 \leq p \leq 2$. Тогава трансформацията на Фурие изобразява елементите от $L^p(\mathbb{R}^n)$ в истински /локално сумируеми/ функции.

Д о к а з а т е л с т в о. Ако $p = 1$ или $p = 2$ няма какво да доказваме. Да вземем $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < 2$ и да въведем множествата

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R}^n, |f(x)| \geq 1\}, E_2 = \{x \in \mathbb{R}^n, |f(x)| < 1\}$$

и функциите

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E_1 \\ 0, & x \in E_2 \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E_2 \\ 0, & x \in E_1 \end{cases}$$

Очевидно f_1 и f_2 са дефинирани почти навсякъде в $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяват релацията

$$/39/ \quad f = f_1 + f_2.$$

Веднага се вижда, че $f_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ а $f_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Наистина имаме

$$|f_1| \leq |f_1|^p \leq |f|^p \in L^1(\mathbb{R}^n),$$

$$|f_2|^2 \leq |f_2|^p \leq |f|^p \in L^1(\mathbb{R}^n),$$

с което твърдението е доказано.

Разлагането /39/ ни позволява да дефинираме трансформацията на Фурие на f чрез равенството

$$/40/ \quad \hat{f} = \hat{f}_1 + \hat{f}_2,$$

защото f_1 и f_2 са вече дефинирани.

Очевидно е, че $\hat{f} \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ и теоремата ще бъде доказана, ако установим, че и дефиниция 3.3 води до същия резултат. То-

ва обаче е почти очевидно. Нека $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Използвайки /17/ и /27/, получаваме

$$(\hat{f}_1, \varphi) = (f_1, \hat{\varphi}), \quad (\hat{f}_2, \varphi) = (f_2, \hat{\varphi}),$$

т.е.

$$(\hat{f}, \varphi) = (\hat{f}_1, \varphi) + (\hat{f}_2, \varphi) = (f_1, \hat{\varphi}) + (f_2, \hat{\varphi}) = (f, \hat{\varphi})$$

равенство, което показва, че функцията /40/ е плътност на разпределението, до което води дефиниция 3.3.

Оказва се, че полученият резултат не може да се подобри.

Т е о р е м а 3.16. За всяко $p > 2$ в $L^p(\mathbb{R}^n)$ съществуват функции, чиито фуриерови образи са истински разпределения /т.е. не са локално сумируеми функции/.

Следващото доказателство е едно типично приложение на теоремата за затворената графика.

Д о к а з а т е л с т в о. Да допуснем противното - че съществува $p > 2$ такова, че $F(L^p(\mathbb{R}^n)) \subset L_{loc}(\mathbb{R}^n)$. В такъв случай дефиниция /3.3/ води до оператора

$$/41/ \quad F : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_{loc}(\mathbb{R}^n).$$

С помощта на теоремата за затворената графика ще докажем, че изображението /41/ е непрекъснато. Понеже $L^p(\mathbb{R}^n)$ и $L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ са пространства на Фреше, теоремата е приложима./

И така, да въведем Декартовото произведение

$$\mathcal{H} = L^p(\mathbb{R}^n) \times L_{loc}(\mathbb{R}^n),$$

което също е пространство на Фреше /вж. стр.123/ и да разгледаме графиката

$$\Gamma(F) = \langle f, \hat{f} \rangle, \quad f \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

на оператора /41/. Трябва да докажем, че $\Gamma(F)$ е затворено подмножество на $\mathcal{H}$. Нека $\{\langle f_n, \hat{f}_n \rangle\}$ е редица от елементи на Γ , която клони в $\mathcal{H}$ към някаква точка $\langle f, g \rangle \in \mathcal{H}$. Нека $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ е фиксирано. По дефиниция имаме

$$(f_v, \varphi) = (f_v, \hat{\varphi})$$

или по-подробно

$$/42/ \quad \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}_v(\xi) \varphi(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f_v(x) \hat{\varphi}(x) dx,$$

защото $\hat{f}_v$ и f_v са локално сумируеми. Понеже $f_v \rightarrow f$ в $L^p(\mathbb{R}^n)$, а $\hat{f}_v \rightarrow g$ в $L_{loc}(\mathbb{R}^n)$, обстоятелството, че

φ е с компактен носител ни позволява да извършим граничния преход в /42/ и да получим

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) \varphi(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \hat{\varphi}(x) dx,$$

т.е.

$$(g, \varphi) = (f, \hat{\varphi}), \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n).$$

От друга страна, според дефиниция 3.3 за всяко $\psi \in \mathcal{F}$ имаме

$$(\hat{f}, \psi) = (f, \hat{\psi}).$$

Понеже $D(\mathbb{R}^n)$ е навсякъде гъсто в $L_{loc}(\mathbb{R}^n)$, от последните две равенства следва, че $g = \hat{f}$ почти навсякъде в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\langle f, g \rangle = \langle f, \hat{f} \rangle$ в $\mathcal{H}$ и графиката на оператора /41/ се оказва затворена. Следователно той е непрекъснат. Това означава обаче /теорема 2.19, стр.34/, че каквато и да бъде непрекъснатата полуорма q , дефинирана в $L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ при подходящ избор на константата C ще

бъде в сила неравенството

$$/43/ \quad q(\hat{f}) \leq C \|f\|_p$$

Лесно се вижда, че полученото неравенство е противоречиво. За простота ще се ограничим с разглеждането на едномерния случай, като съветваме читателя сам да довърши доказателството за $n > 1$.

За да опровергаем /43/ да пресметнем трансформацията на Фурие на функцията $f(x) = e^{-\alpha x^2}$, $\alpha > 0$. Като вземем пред вид /8/, стр.277, получаваме

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} e^{-ix\xi} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{\alpha}x)^2} e^{-i\sqrt{\alpha}x \frac{\xi}{\sqrt{\alpha}}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\pi} e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}}. \end{aligned}$$

Лесно се вижда, че полученото равенство

$$/44/ \quad F(e^{-\alpha x^2}) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\pi} e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}}$$

запазва своята валидност и за комплексните числа α , $\operatorname{Re} \alpha > 0$. Наистина функцията

$$h(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} e^{-ix\xi} dx,$$

където ξ е реално и фиксирано, е холоморфна в полуравнината $\operatorname{Re} \alpha > 0$, защото формалното диференциране под знака на интеграла дава

$$h'(\alpha) = - \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} e^{-ix\xi} dx$$

и подинтегралната функция се мажорира от $x^2 e^{-\varepsilon x^2}$ в полуравнината $\operatorname{Re} \alpha \geq \varepsilon > 0$. От друга страна, и функцията

$$g(\alpha) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}} e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}}, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0$$

има същото свойство. Понеже върху реалната полуос $\alpha > 0$ имаме $g(\alpha) = h(\alpha)$, теоремата за идентичност ни дава /44/ в цялата полуравнина $\operatorname{Re} \alpha > 0$.

Сега вече сме близо до целта. Да вземем полуормата

$$q(h) = \int_{-1}^1 |h(x)| dx,$$

която очевидно е непрекъсната в $L_{loc}(\mathbb{R}^1)$ и функцията

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{1+i\delta}}}{\sqrt{1+i\delta}}, \quad \delta > 0, \quad \operatorname{Re} \sqrt{1+i\delta} > 0.$$

Като се възползваме от /44/ с $\alpha = \frac{1}{1+i\delta}$, получаваме

$$\hat{f}(\xi) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{(1+i\delta)\xi^2}{4}}$$

и следователно

$$q(\hat{f}) = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)| d\xi = \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4}} d\xi = A = \text{const.}$$

От друга страна, имаме

$$\begin{aligned} \|f\|_{p_0} &= (1+\delta^2)^{-\frac{1}{4}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\delta x^2}{1+\delta^2}} dx \right)^{\frac{1}{p_0}} \\ &= (1+\delta^2)^{\frac{1}{2p_0} - \frac{1}{4}} \left(\frac{1}{\sqrt{\delta}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right)^{\frac{1}{p_0}} = C_{p_0} (1+\delta^2)^{\frac{1}{2p_0} - \frac{1}{4}}, \end{aligned}$$

т.е.

$$0 < A \leq C_{p_0} (1+\delta^2)^{\frac{1}{2p_0} - \frac{1}{4}}, \quad C_{p_0} = \text{const.}$$

Понеже $\frac{1}{2p_0} - \frac{1}{4} < 0$, дясната страна на полученото неравенство клони към нула при $\delta \rightarrow +\infty$, което противоречи на неравенството $A > 0$.

С това доказателството е завършено.

В същност теорема 3.15 не съдържа пълната истина за трансформацията на Фурие в пространствата $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq 2$. В сила е следното важно неравенство на Хаусдорф-Йънг:

Ако $1 \leq p \leq 2$ и q е спрегнатият показател на p , то

$$/45/ \quad \|\hat{f}\|_q \leq (2\pi)^{\frac{n}{2}} \|f\|_p,$$

което е частичен заместител на равенството на Парсевал.

Доказателството на /45/ изисква известна подготовка и е дадено в допълнение 1 към този параграф, в което се съдържа и друг полезен материал.

У п р а ж н е н и е 4

1. Нека $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < 2$ и нека $f = g_1 + g_2$, където $g_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Докажете, че ако $\hat{f}$ е трансформацията на Фурие на f , дефинирана чрез /40/, то

$$\hat{f} = \hat{g}_1 + \hat{g}_2,$$

без да излизате извън рамките на пространствата $L^1(\mathbb{R}^n)$ и $L^2(\mathbb{R}^n)$.

2. Нека $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Използвайки трансформацията на Фурие, докажете, че функцията

$$/46/ \quad \mathcal{H}(f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi} \text{V. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{x-t} dt$$

принадлежи на $L^2(\mathbb{R}^1)$ и $\mathcal{H}^2(f) = -f$.

С помощта на този резултат заключете, че съответствието

$$f \longrightarrow \mathcal{H}(f)$$

изобразява изометрично $L^2(\mathbb{R}^1)$ върху цялото $L^2(\mathbb{R}^1)$. Операторът /46/ се нарича трансформация на Хилберт.

У п ъ т в а н е. Пресметнете трансформацията на Фурие на функцията

$$\mathcal{H}_{\varepsilon, N}(f)(x) = \int_{\varepsilon \leq |x-t| \leq N} \frac{f(t)}{x-t} dt$$

и след това извършете граничния преход $\varepsilon \rightarrow 0$, $N \rightarrow +\infty$.

3. Следващото важно неравенство е известно като теорема на Марсел Рис: ако $f \in L^p(\mathbb{R}^1)$, $p > 1$, то функцията $H(f) \in L^p(\mathbb{R}^1)$ и

$$\|H(f)\|_p \leq C_p \|f\|_p.$$

а/ Използвайки резултата от задача 2 и /47/, установете, че операторът $f \rightarrow H(f)$ изобразява $L^p(\mathbb{R}^1)$ еднозначно-обратимо върху цялото $L^p(\mathbb{R}^1)$ и отново е в сила формулата за обръщане

$$H^2(f) = -f.$$

б/ Покажете с един пример, че за $p = 1$ неравенство /47/ се нарушава.

Упътване към а/. Пространството $C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ е навсякъде гъсто в $L^p(\mathbb{R}^1)$.

Упътване към б/. Пресметнете трансформацията на Хилберт на функцията

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

4. Пресметнете трансформацията на Хилберт на функцията

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}^1.$$

Упътване. Най-напред пресметнете $\hat{f}$. След това използвайте връзката между $\hat{f}$ и $H(f)$.

$$\text{Отг. } H(f) = \frac{1}{\pi} \frac{x}{1+x^2}.$$

Функцията

$$P_\varepsilon(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2}$$

се нарича ядро на Поасон за горната полуравнина в $\mathbb{R}^2$. Нейната Хилбертова трансформация

$$H(P_\varepsilon)(x) = \frac{1}{\pi} \frac{x}{\varepsilon^2 + x^2}$$

се нарича спрегнатото ядро на Поасон в $\mathbb{R}^2$.

Забележете, че $P_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}^1)$ и $\|P_\varepsilon\|_1 = 1$, но $H(P_\varepsilon) \notin L^1(\mathbb{R}^1)$, макар че принадлежи на $L^p(\mathbb{R}^1)$ за всяко $p > 1$.

5. Нека $f \in L^p(\mathbb{R}^1)$, $g \in L^2(\mathbb{R}^1)$. Докажете равенството

$$\int_{\mathbb{R}^1} f H(g) dx = - \int_{\mathbb{R}^1} g H(f) dx.$$

Упътване. Най-напред с помощта на теоремата на Фубини установете равенството

$$\int_{\mathbb{R}^1} f H_{\varepsilon, N}(g) dx = - \int_{\mathbb{R}^1} g H_{\varepsilon, N}(f) dx,$$

където $H_{\varepsilon, N}$ е дефинирано в упътването към задача 2.

6. Нека Ω е област в $\mathbb{R}^2$ и f е измерима функция, дефинирана почти навсякъде в Ω . Нека освен това за всяко $g \in L^p(\Omega)$, където $p \geq 1$ е фиксирано, интегралът

$$F_f(g) = \int_{\Omega} g(x) f(x) dx$$

е сходящ и $\sup_{\|g\|_p \leq 1} |F_f(g)| < \infty$.

Докажете, че $f \in L^q(\Omega)$, където q е спрегнатият показател на p и

$$\|f\|_q = \sup_{\|g\|_p \leq 1} \left| \int_{\Omega} g(x) f(x) dx \right|.$$

Този резултат често се записва във вида

$$\|f\|_q \leq \sup_{\|g\|_p \leq 1} \left| \int_{\Omega} g(x) f(x) dx \right|$$

и се нарича обратно неравенство на Холдер.

У п ъ т в а н е. Ако $p \neq \infty$, използвайте, че $(L^p(\Omega))^* = L^q(\Omega)$. Случая $p = \infty$ изследвайте директно.

7. Ето две вариации върху предишната задача:

а/ Ако f е измерима функция в Ω и ако за всяко $g \in L^p(\Omega)$, $p \geq 1$, интегралът $F_f(g)$ е сходящ, докажете, че $f \in L^p(\Omega)$.

б/ Нека f е измерима в Ω и нека

$$\|F\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\|g\|_p \leq 1} |F_f(g)| < \infty, \quad p \geq 1.$$

Докажете, че ако H е навсякъде гъсто подмножество на $L^p(\Omega)$,

то

$$\|F\| = \sup_{\substack{\|g\|_p \leq 1 \\ g \in H}} |F_f(g)|.$$

Покажете с един пример, че от $|F_f(g)| < \infty$ за $\forall g \in H$ не следва, че $\|F\| < \infty$.

8. Ще скицираме доказателствата на няколко твърдения, които водят до доказателството на А7/, което дължим на Калдерон.

а/ Нека $f \in C_0^1(\mathbb{R}^1)$. Докажете, че функцията

$$/48/ \quad F(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-z} dt, \quad z = x + iy$$

е холоморфна в полуравнината $\text{Im } z > 0$ и $F(z) = O\left(\frac{1}{z}\right)$, когато $|z| \rightarrow \infty$. При допълнителното предположение $f \geq 0$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt > 0$$

$$F^p(z) = e^{p \log F(z)}, \quad p > 1$$

е холоморфна и

$$/49/ \quad \int_{-\infty}^{\infty} F^p(x+iy) dx = 0$$

за всяко $y > 0$.

У п ъ т в а н е. Нека $F(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y)$.

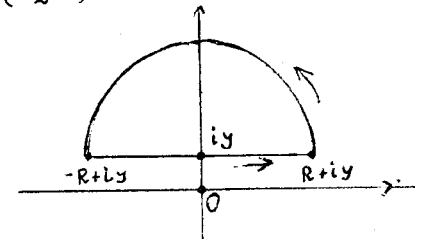
От допълнителните предположения следва, че $u(x,y) > 0$ за $y > 0$ и следователно $F(z) \neq 0$ в горната полуравнина. Ето защо можем да дефинираме еднозначен клон на $\log F(z)$, например чрез равенството

$$\log F(z) = \int_{z_0}^z \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta, \quad \text{Im } z_0 > 0$$

в цялата горна полуравнина и F^p се оказва холоморфна. Понеже имаме

$$F^p(z) = O\left(\frac{1}{z^p}\right) \quad \text{при } |z| \rightarrow \infty, \text{ като ин-}$$

тегрираме по полуокръжността с център в точката iy и радиус R (фиг. 8), приложим теоремата на Коши и извършим граничния преход $R \rightarrow \infty$, стигаме до желаното заключение.



Фиг. 8

б/ Нека $f \in L^p(\mathbb{R}^1)$, $p > 1$ и F е дефинирана чрез /48/. Покажете, че F е холоморфна в горната полуравнина и че са в сила неравенствата

$$A/ \quad \int_{-\infty}^{\infty} |u(x,y)|^p dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx, \quad y > 0;$$

$$B/ \quad \int_{-\infty}^{\infty} |v(x,y)|^p dx \leq A_p \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx, \quad y > 0;$$

$$B/ \quad \int_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)|^p dx \leq A_p \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx, \quad y > 0,$$

където $u(x,y) = \text{Re } F(x+iy)$, $v(x,y) = \text{Im } F(x+iy)$, $1 < p < 3$, а A_p е достатъчно голяма константа.

У п ъ т в а н е. В същност неравенствата А/, Б/, В/ са вер-

ни за всяко $p > 1$, но методът на Калдерон е приложим за $p \in (1, 3)$. При доказателството без ограничение на общността можем да предположим, че f е реална, неотрицателна и с компактен носител, защото всяка функция от $L^p(\mathbb{R}^2)$ може да се апроксимира с линейни комбинации на функции с тези свойства. Щом f е реална, имаме

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) P_y(x-t) dt + i \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \tilde{P}_y(x-t) dt \\ = u(x, y) + i v(x, y),$$

където

$$P_y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \tilde{P}_y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}$$

са съответно ядрото и спрегнатото ядро на Пуасон. Сега е ясно, че А/ следва веднага от теоремата на Йънг /стр.167/, защото $\|P_y\|_1 = 1$. Понеже А/ и Б/ заедно дават В/, остава да докажем Б/. Именно тази главна трудност е преодоляна остроумно от Калдерон, който завършва доказателството, като комбинира тъждеството /49/ с неравенството

$$/50/ \quad |v|^p \leq C_1 u^p - C_2 \operatorname{Re} w^p, \quad 1 < p < 3,$$

валидно за всяко комплексно число $w = u + i v$, $u > 0$ при подходящ избор на константите $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$. Наистина /49/ и /50/ ни дават

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |v(x, y)|^p dx \leq C_1 \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x, y)|^p dx - C_2 \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} F^p(x + iy) dx \\ = C_1 \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x, y)|^p dx,$$

защото последният интеграл е нула.

Следователно остава да се докаже /50/.

У п ъ т в а н е. Понеже /50/ е хомогенно, то се свежда до неравенството

$$/51/ \quad |\sin \theta|^p \leq C_1 (\cos \theta)^p - C_2 \cos p \theta, \quad |\theta| \leq \frac{\pi}{2} \\ p \in (1, 3).$$

Нека p е фиксирано. Съществува $\varepsilon = \varepsilon(p)$ такова, че от $\frac{\pi}{2} - \varepsilon \leq |\theta| \leq \frac{\pi}{2}$ следва $-\cos p \theta > 0$. Следователно можем да намерим $C_2 > 0$, за което $-C_2 \cos p \theta \geq 1$ за $\frac{\pi}{2} - \varepsilon \leq |\theta| \leq \frac{\pi}{2}$ и /51/ е в сила за такива θ , каквото и да бъде $C_1 > 0$, защото $\cos \theta \geq 0$ за $|\theta| \leq \frac{\pi}{2}$. От друга страна, имаме $\cos \theta > 0$ за $|\theta| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ и като вземем C_1 толкова голямо, че да имаме $C_1 (\cos \theta)^p > C_2 + 1$ за $|\theta| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, завършваме доказателството на /51/.

б/ След като разполагаме с Б/, можем да сравним функциите

$$v(x, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \tilde{P}_\varepsilon(x-t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t f(x-t)}{t^2 + \varepsilon^2} dt$$

и

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \int_{|x-t| \geq \varepsilon} \frac{f(t)}{x-t} dt = \frac{1}{\pi} \int_{|t| \geq \varepsilon} \frac{f(x-t)}{t} dt$$

при предположение, че $f \in L^p(\mathbb{R}^1)$, $1 < p < 3$.

Очевидно имаме

$$v(x, \varepsilon) - f_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) \frac{1}{\varepsilon} K\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) dt,$$

където

$$\pi K(t) = \begin{cases} \frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{t}, & \text{за } |t| \geq 1 \\ \frac{t}{1+t^2}, & \text{за } |t| < 1. \end{cases}$$

Понеже $\mathcal{K}$ е ограничена около началото и $\mathcal{K}(t) = \frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{t}$
 $= \frac{-1}{t(1+t^2)} = O\left(\frac{1}{t^3}\right)$ при $|t| \rightarrow \infty$, заключаваме, че

$\mathcal{K} \in L^1(\mathbb{R}^1)$. Следователно неравенството на Ънг ни дава
 $\|v(x, \varepsilon) - f_\varepsilon(x)\|_p \leq \|f\|_p \left\| \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{K}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right\|_1 = \|f\|_p \|\mathcal{K}\|_1,$

откъдето с помощта на Б/ получаваме

$$\|f_\varepsilon\|_p \leq \|v(x, \varepsilon)\|_p + \|f\|_p \|\mathcal{K}\|_1 \leq (A_p^{\frac{1}{p}} + \|\mathcal{K}\|_1) \|f\|_p,$$

за $1 < p < 3$.

г/ Доказателството на неравенството

$$\|f_\varepsilon\|_p \leq C_p \|f\|_p, \quad p \geq 2,$$

което следва, илюстрира много добре начина, по който обратното не-
 равенство на Хьолдер обикновено се използва.

Нека $p \geq 2$ и q е неговият спрегнат показател. Понеже
 $q \in (1, 2]$ според вече доказаното за всяко $q \in L^q(\mathbb{R}^1)$ имаме

$$\|g_\varepsilon\|_q \leq C_q \|g\|_q.$$

Да вземем произволна функция $f \in L^p(\mathbb{R}^1)$ и да образуваме функцията

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x), & \text{за } |x| \leq N \\ 0, & \text{за } |x| > N. \end{cases}$$

Очевидно имаме

$$(f_N)_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{|x-t| \geq \varepsilon} \frac{f_N(t)}{x-t} dt = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varepsilon \leq |x-t| \leq N} \frac{f(t)}{x-t} dt.$$

Веднага се вижда, че $(f_N)_\varepsilon(x) = O\left(\frac{1}{x}\right)$ при $|x| \rightarrow \infty$.
 Следователно $(f_N)_\varepsilon \in L^p(\mathbb{R}^1)$ и теоремата на Фубини ни дава
 тъждеството

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f_N)_\varepsilon(x) g(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} f_N(x) g_\varepsilon(x) dx.$$

Сега вече, използвайки обратното неравенство на Хьолдер /зад. 6/,
 получаваме

$$\begin{aligned} \|(f_N)_\varepsilon\|_p &= \sup_{\|g\|_q \leq 1} \left| \int_{-\infty}^{\infty} (f_N)_\varepsilon g dx \right| = \sup_{\|g\|_q \leq 1} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f_N g_\varepsilon dx \right| \\ &\leq \sup_{\|g\|_q \leq 1} \|f_N\|_p \|g_\varepsilon\|_q \leq \sup_{\|g\|_q \leq 1} C_q \|f_N\|_p \|g\|_q \leq C_q \|f\|_p. \end{aligned}$$

От друга страна, обаче $(f_N)_\varepsilon(x) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f_\varepsilon(x)$, а неравен-

ството на Хьолдер ни дава

$$|(f_N)_\varepsilon(x)| \leq C_\varepsilon \|f_N\|_p \leq C_\varepsilon \|f\|_p,$$

което показва, че при фиксирано ε редицата $\{(f_N)_\varepsilon\}$ е равно-
 мерно ограничена. Ето защо теоремата на Лебег ни позволява да из-
 вършим граничния преход $N \rightarrow \infty$ в неравенството

$$\|(f_N)_\varepsilon\|_{L^p(-T, T)} \leq C_q \|f\|_p$$

при всяко фиксирано $T > 0$ и да получим

$$\|f_\varepsilon\|_{L^p(-T, T)} \leq C_q \|f\|_p, \quad p \geq 2,$$

откъдето, разбира се, следва

$$\|f_\varepsilon\|_p \leq C_q \|f\|_p, \quad p \geq 2,$$

което искаме да докажем.

д/ Използвайки неравенството

$$\|f_\varepsilon\|_p \leq C_p \|f\|_p, \quad p > 1,$$

установете съществуването на границата $\mathcal{H}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon$ в $L^p(\mathbb{R}^1)$

за всяко $f \in L^p(\mathbb{R}^1)$, както и неравенството

$$\|\mathcal{H}(f)\|_p \leq C_p \|f\|_p, \quad p > 1.$$

У п ъ т в а н е. Нека най-напред $f \in C_0^1(\mathbb{R}^1)$ и нека за определеност $\text{supp } f \subset (-N, N)$. Понеже

$$\int_{\varepsilon \leq |t| \leq N+|x|} \frac{f(x-t)-f(x)}{t} dt = f(x) \int_{\varepsilon \leq |t| \leq N+|x|} \frac{dt}{t} = 0$$

имаме

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon \leq |t| \leq N+|x|} \frac{f(x-t)-f(x)}{t} dt,$$

откъдето се вижда, че

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \int_{|t| \leq N+|x|} \frac{f(x-t)-f(x)}{t} dt,$$

защото f удовлетворява условието на Липшиц. От друга страна, за $|x| \geq 2N$ имаме $|f_\varepsilon(x)| \leq \frac{A}{|x|}$ стига $A > 0$ да е достатъчно голямо, а за $|x| \leq 2N$ използвайки представянето

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon \leq |t| \leq 3N} \frac{f(x-t)-f(x)}{t} dt,$$

получаваме $|f_\varepsilon(x)| \leq 6NM$, където $M = \sup_{\mathbb{R}^1} |f'(x)|$.

Комбинирайки тези неравенства, докажете, че

$$|f_\varepsilon(x)| \leq \frac{B}{1+|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^1$$

с достатъчно голямо $B > 0$. Това неравенство ще ви даде възможност да приложите теоремата на Лебег и да заключите, че границата $\lim f_\varepsilon$ съществува в $L^p(\mathbb{R}^1)$. След това, използвайки, че елементите на $C_0^1(\mathbb{R}^1)$ са навсякъде гъсто в $L^p(\mathbb{R}^1)$, докажете, че $\mathcal{H}(f)$ съществува и в общия случай.

Изследването на многомерния аналог на трансформацията на Хилберт е далеч не тривиална задача, решена от Зигмунд и Калдерон

през 1958 г. Доказаното от тях неравенство играе важна роля в теорията на частните диференциални уравнения.

9. С помощта на обратното неравенство на Хьолдер докажете неравенствата Б/ и В/ от б/ и за $p \geq 3$.

3.5. Трансформация на Фурие в $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)^1$.

Теорема на Винер - Пели - Шварц

Т е о р е м а 3.17. Нека $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, т.е. u е разпределение с компактен носител. Тогава $\hat{u}$ е обикновена функция. Нещо повече - $\hat{u}$ е холоморфна функция, дефинирана в цялото $\mathbb{C}^n$ и удовлетворява равенството

$$\hat{u}(\zeta) = (u_x, e^{-i(x, \zeta)}), \quad \zeta \in \mathbb{C}^n$$

Д о к а з а т е л с т в о. Според теорема 2.12, стр. 219 u има вида

$$u = \sum_{\alpha} \partial^{\alpha} f_{\alpha},$$

където f_{α} са непрекъснати функции с компактни носители и сумата е крайна. Понеже $\partial^{\alpha} = i^{|\alpha|} D^{\alpha}$, получаваме

$$u = \sum_{\alpha} i^{|\alpha|} D^{\alpha} f_{\alpha}$$

и теорема 3.11 ни дава

$$152/ \quad \hat{u} = \sum_{\alpha} i^{|\alpha|} D^{\alpha} \hat{f}_{\alpha} = \sum_{\alpha} i^{|\alpha|} \zeta^{\alpha} \hat{f}_{\alpha}.$$

От друга страна, $f_{\alpha} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, защото е непрекъсната функция с компактен носител. Тъй като трансформацията на Фурие в $\mathcal{F}'(\mathbb{R}^n)$ е продължение на тази в $L^1(\mathbb{R}^n)$ /теорема 3.12/, имаме

¹Очевидно е, че $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{F}'(\mathbb{R}^n)$.

$$/53/ \quad \hat{f}_\alpha(\zeta) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x, \zeta)} f_\alpha(x) dx = \int_{\Omega} e^{-i(x, \zeta)} f_\alpha(x) dx$$

където Ω е ограничена област в $\mathbb{R}^n$, съдържаща $\text{supp } f_\alpha$. От това равенство непосредствено се вижда, че $\hat{f}_\alpha$ е цяла функция на n -те комплексни променливи $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$, защото можем безбройно много пъти да диференцираме под знака на интеграла. Да запишем /53/ във вида $\hat{f}_\alpha(\zeta) = (f_\alpha(x), e^{-i(x, \zeta)})$ и да заместим в /52/. Получаваме

$$\begin{aligned} \hat{u}(\zeta) &= \sum_{\alpha} i^{|\alpha|} \zeta^\alpha (f_\alpha, e^{-i(x, \zeta)}) \\ &= \sum_{\alpha} (f_\alpha, i^{|\alpha|} \zeta^\alpha e^{-i(x, \zeta)}) \\ &= \sum_{\alpha} (-1)^{|\alpha|} (f_\alpha, \partial_x^\alpha e^{-i(x, \zeta)}) \\ &= \sum_{\alpha} (\partial_x^\alpha f_\alpha, e^{-i(x, \zeta)}), \end{aligned}$$

т.е.

$$\hat{u}(\zeta) = (u_x, e^{-i(x, \zeta)}),$$

с което теоремата е доказана.

Цялата функция $\hat{u}$ се нарича трансформация на Фурие - Лаплас на разпределението u . Оказва се, че целите функции, които са образи на разпределения с компактен носител, допускат просто описание. То се дава от важната теорема на Винер - Пели - Шварц, която ще докажем по-долу.

Д е ф и н и ц и я 3.8. Нека $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ е вектор от $\mathbb{C}^n$ и нека $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ е цяла функция. Ще казваме, че

f е цяла функция от експоненциален тип, ненадминаващ σ , ако на всяко $\varepsilon > 0$ можем да съпоставим положителна константа A_ε такава, че за всяко $z \in \mathbb{C}^n$ да бъде в сила неравенството

$$|f(z)| \leq A_\varepsilon e^{(\sigma + \varepsilon)|z|},$$

$$\text{където } |z| = \left(\sum_{j=1}^n |z_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Теоремата на Винер - Пели - Шварц, която ни интересува, е аналог на следната класическа

Т е о р е м а на В и н е р и П е л и. Една цяла функция от експоненциален тип $\leq \sigma$ принадлежи на $L^2(\mathbb{R}^n)$ тогава и само тогава, когато е Фуриеров образ на функция от $L^2(\mathbb{R}^n)$ с носител в кълбото $|x| \leq \sigma$.

Доказателство на тази теорема е дадено в допълнение 2 към този параграф. Нейният аналог, открит и доказан от Шварц, описва Фуриеровите образи на разпределенията от $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ и се формулира по следния начин:

Т е о р е м а 3.18 /Теорема на Винер - Пели - Шварц/

1/ Цялата функция $f(\zeta)$ е трансформация на Фурие - Лаплас на някакво разпределение с носител в кълбото $S_A = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq A\}$ тогава и само тогава, когато съществуват константи $C > 0$ и N , за които

$$/54/ \quad |f(\zeta)| \leq C (1 + |\zeta|)^N e^{A|\text{Im } \zeta|}, \quad \zeta \in \mathbb{C}^n.$$

2/ Цялата функция $f(\zeta)$ е трансформация на Фурие - Лаплас на някаква функция от $C_0^\infty(S_A)$ тогава и само тогава, когато за всяко естествено N съществува константа C_N такава, че неравенството

$$/55/ \quad |f(\zeta)| \leq C_N (1 + |\zeta|)^{-N} e^{A|\text{Im } \zeta|}, \quad \zeta \in \mathbb{C}^n$$

да бъде в сила.

Доказателството, което следва, е заимствано от [27].

Доказателство. Нека $u \in E'(\mathbb{R}^n)$. За да докажем необходимостта на /54/, ще използваме факта, че всяко разпределение с компактен носител е от краен ред. Следователно съществуват константи $C > 0$ и $N > 0$ такива, че за всяко $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ имаме

$$/56/ \quad |(u, \varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq N} \max_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha \varphi|.$$

Нека

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & x < \frac{1}{2} \\ 0, & x > 1 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}^1$$

е функция от $C^\infty(\mathbb{R}^1)$. Тогава функцията

$$\varphi_\zeta(x) = e^{-i(x, \zeta)} \psi(|\zeta|(|x| - A))$$

принадлежи на $D(\mathbb{R}^n)$ при фиксирано ζ и съвпада с $e^{-i(x, \zeta)}$ в някаква околност на кълбото S_A . Следователно

$$/57/ \quad |\hat{u}(\zeta)| = |(u, e^{-i(x, \zeta)})| \\ = |(u, \varphi_\zeta(x))| \leq C \sum_{|\alpha| \leq N} \max |\partial_x^\alpha \varphi_\zeta(x)|$$

като последното неравенство написахме въз основа на /56/. Като вземем пред вид, че φ_ζ е различно от нула само за $|x| \leq A + \frac{1}{|\zeta|}$ и че производните на ψ са ограничени, от /57/ получаваме

$$|\hat{u}(\zeta)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq N} (1+|\zeta|)^N \max_{|x| \leq A + \frac{1}{|\zeta|}} |e^{-i(x, \zeta)}| \\ \leq C_2 (1+|\zeta|)^N \max_{|x| \leq A + \frac{1}{|\zeta|}} e^{(x, \operatorname{Im} \zeta)} \leq C_2 (1+|\zeta|)^N e^{(A + \frac{1}{|\zeta|})|\operatorname{Im} \zeta|} \\ \leq e C_2 (1+|\zeta|)^N e^{A|\operatorname{Im} \zeta|}.$$

(Тук $\operatorname{Im} \zeta = (\operatorname{Im} \zeta_1, \operatorname{Im} \zeta_2, \dots, \operatorname{Im} \zeta_n)$.) С това необходимостта на /54/ е установена.

За да докажем, че /55/ е необходимо, да допуснем, че

$$f(\zeta) = \int_{S_A} e^{-i(\zeta, x)} \varphi(x) dx, \quad \text{където } \varphi \in C_0^\infty(S_A),$$

т.е. че $f = \hat{\varphi}$. За всеки мултииндекс α имаме

$$\zeta^\alpha f(\zeta) = \int_{S_A} \zeta^\alpha e^{-i(\zeta, x)} \varphi(x) dx \\ = (-1)^{|\alpha|} \int_{S_A} D_x^\alpha (e^{-i(x, \zeta)}) \varphi(x) dx = \int_{S_A} e^{-i(x, \zeta)} D_x^\alpha \varphi(x) dx,$$

като последното равенство получихме с интегриране по части. От него следва непосредствено

$$|\zeta^\alpha f(\zeta)| \leq e^{A|\operatorname{Im} \zeta|} \int_{S_A} |D^\alpha \varphi(x)| dx = C e^{A|\operatorname{Im} \zeta|}$$

и необходимостта на /55/ е доказана.

Остава да докажем, че условията /54/ и /55/ са и достатъчни.

Нека сега f е цяла функция, която удовлетворява /55/. Като вземем $N = n+1$ се убеждаваме, че рестрикцията на f върху $\mathbb{R}^n$ принадлежи на $L^1(\mathbb{R}^n)$ и следователно можем да образуваме нейната обратна трансформация на Фурие

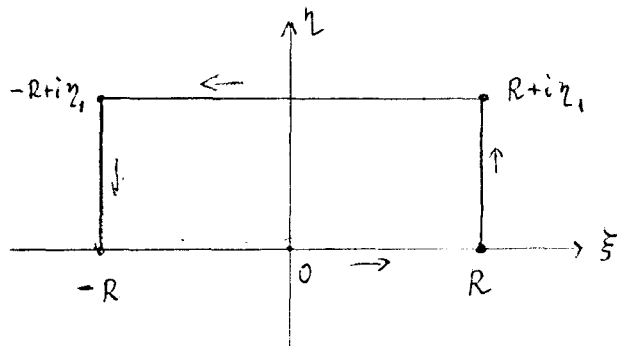
$$/58/ \quad \varphi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x, \xi)} f(\xi) d\xi.$$

Неравенството /55/ ни позволява безбройно много пъти да диференцираме под знака на интеграла. Следователно $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Остава да оценим размерите на $\supp \varphi$. За тази цел с помощта на теоремата на Коши /подинтегралната функция в /58/ е аналитична!/ ще покажем, че за всяко $\eta \in \mathbb{R}^n$ имаме

$$/59/ \quad \varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x, \xi + i\eta)} f(\xi + i\eta) d\xi.$$

За да се ориентираме в обстановката да разгледаме случая $n=1$.

И така, нека f е цяла функция на комплексната променлива $\zeta = \xi + i\eta$, $\zeta \in \mathbb{C}^1$, удовлетворяваща /55/. Интегрирайки по правоъгълника, изобразен на фиг.6



Фиг.6

след граничния преход $R \rightarrow +\infty$ получаваме

$$/60/ \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x, \xi)} f(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi + i\eta_1) e^{i(x, \xi + i\eta_1)} d\xi,$$

защото интегралите по отвесните отсечки клонят към нула. Наистина, с помощта на /55/ получаваме

$$\left| \int_{-R}^{R+i\eta_1} e^{i(x, \zeta)} f(\zeta) d\zeta \right| \leq |\eta_1| \max_{\zeta \in [R, R+i\eta_1]} |e^{i(x, \zeta)} f(\zeta)|$$

$$\leq |\eta_1| \max |f(\zeta)| e^{-x \operatorname{Im} \zeta} \leq C_1 |\eta_1| e^{|\zeta| |\eta_1|} \frac{e^{A|\eta_1|}}{1+R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Понеже и интегралът по другата отвесна отсечка се оценява по същия начин, /60/ е доказано.

Сега да се върнем към общия случай. Имаме $f(\zeta) = f(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ и при фиксирани $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{k-1}, \zeta_{k+1}, \dots, \zeta_n$ получаваме цяла функция на ζ_k , удовлетворяваща едномерния вариант на /55/. Схващайки интеграла

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x, \xi)} f(\xi) d\xi$$

като n -кратен, прилагайки последователно /60/, получаваме /59/.

Сега вече сме близо до целта. От /59/ следва непосредствено

$$|\varphi(x)| \leq \frac{1}{(2\pi)^n} e^{-(x, \eta)} C_{n+1} e^{A|\eta|} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{(1+|\xi|)^{n+1}} = C e^{-(x, \eta) + A|\eta|}.$$

Нека сега $x \neq 0$. Като вземем $\eta = t \frac{x}{|x|}$, получаваме

$$|\varphi(x)| \leq C e^{-t \frac{(x, x)}{|x|} + tA} = C e^{t(A - |x|)},$$

откъдето, оставяйки t да клони към $+\infty$, заключаваме, че от $|x| > A$ следва $\varphi(x) = 0$. С това включването $\operatorname{supp} \varphi \subset S_A$ и достатъчността на /55/ са установени.

За да докажем, че и /54/ е достатъчно, ще забележим, че от /54/ следва $f \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$ и следователно $f = \hat{u}$, където $u \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$, защото трансформацията на Фурие е автоморфизъм на $\mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$. Нека $\chi \in C_0^\infty(S_A)$ е неотрицателна функция, подчинена на изискването

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi(x) dx = 1. \text{ Да положим}$$

$$u_\varepsilon = u * \chi_\varepsilon, \quad \text{където} \quad \chi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \text{ Кон-волуцията е дефинирана, защото } \chi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Както ще се убедим в следващата точка 3.6, $u_\varepsilon \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ и е в сила равенството

$$\hat{u}_\varepsilon = \hat{u} \hat{\chi}_\varepsilon = \hat{\chi}(\varepsilon \zeta) f(\zeta), \quad \varepsilon > 0.$$

Понеже $\text{supp } \chi \subset \{|x| \leq 1\}$, според вече доказаната част на теоремата имаме

$$|\hat{\chi}(\zeta)| \leq C_k \frac{e^{|\text{Im } \zeta|}}{(1+|\zeta|)^k},$$

за всяко естествено k . Следователно

$$|\hat{u}_\varepsilon(\zeta)| = |\hat{\chi}(\varepsilon \zeta) f(\zeta)| \leq C_{\varepsilon, N, k} \frac{e^{(A+\varepsilon)|\text{Im } \zeta|}}{(1+|\zeta|)^{k-N}},$$

което показва, че $1/55/$ (с $A+\varepsilon$ вместо A) е налице, защото N е фиксирано, а k е на наше разположение. Следователно, като се възползваме от достатъчността на $1/55/$, заключаваме, че

$\text{supp } u_\varepsilon \subset \mathcal{S}_{A+\varepsilon}$. Оттук веднага следва, че $\text{supp } u \subset \mathcal{S}_A$. Наистина, нека $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ е функция, за която $\text{supp } \varphi \cap \mathcal{S}_A = \emptyset$. Да вземем $\varepsilon_0 > 0$ толкова малко, че да имаме $\text{supp } \varphi \cap \mathcal{S}_{A+\varepsilon_0} = \emptyset$. Това може да се направи,

защото разстоянието между компактните множества $\mathcal{S}_A$ и $\text{supp } \varphi$ е положително. Следователно

$$(u_\varepsilon, \varphi) = 0$$

за всяко $\varepsilon \leq \varepsilon_0$. Като оставим ε , $\varepsilon < \varepsilon_0$ да клони към нула в това равенство, получаваме $(u, \varphi) = 0$, тъй като $u_\varepsilon \rightarrow u$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Наистина имаме

$$(u_\varepsilon, \varphi) = (u * \chi_\varepsilon, \varphi) = (u, (\chi_\varepsilon, \varphi(x+y))),$$

а от друга страна

$$(\chi_\varepsilon, \varphi(x+y)) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \varphi(x+y) dx =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} \chi\left(\frac{-t}{\varepsilon}\right) \varphi(y-t) dt = \check{\chi}_\varepsilon * \varphi$$

и според теорема 1.2, стр.174 $\check{\chi}_\varepsilon * \varphi \rightarrow \varphi$ в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Ето защо

$$(u_\varepsilon, \varphi) = (u, \check{\chi}_\varepsilon * \varphi) \rightarrow (u, \varphi),$$

с което равенството $(u, \varphi) = 0$ е установено.

Понеже $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ беше подчинена на единственото допълнително условие $\text{supp } \varphi \cap \mathcal{S}_A = \emptyset$, релацията $\text{supp } u \subset \mathcal{S}_A$, а заедно с нея и теоремата, е доказана.

У п р а ж н е н и е 5

1. Докажете още веднъж, че полиномите

$$1/a/ \quad \sum a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^m$$

образуват навсякъде гъсто множество в $C^\infty(\mathbb{R}^{n+m})$, като реализирате следния план: допуснете противното и с помощта на теоремата на Хан-Банах конструирайте ненулев линеен функционал

$u \in (C^\infty(\mathbb{R}^{n+m}))^*$, за който имаме

$$1/b/ \quad (u, p) = 0$$

за всеки полином p от вида $1/a/$. Според теорема 2.13, стр.221 обаче $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^{n+m})$.

Чрез подходяща интерпретация на $1/b/$ покажете, че цялата функция $\hat{u}$ се анулира тъждествено.

2. Нека f и g са функции от $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и нека $D^\alpha f = D^\alpha g$ за някакъв мултииндекс α . Използвайки трансформацията на Фурие, докажете, че $f \equiv g$.

3. Определете общия вид на разпределенията от $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ с носител в началото с помощта на теоремата на Винер-Пели-Шварц.

3.6. Връзка между конволюцията и трансформацията на Фурие

Представа за съдържанието на тази точка ни дава следната елементарна

Т е о р е м а 3.19. Нека $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Тогава

$$/61/ \quad \widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}.$$

Д о к а з а т е л с т в о. Неравенството

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

/стр.167/ показва, че функцията

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy$$

принадлежи на $L^1(\mathbb{R}^n)$. Понеже очевидно

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} |f(x-y) g(y)| dx dy < \infty,$$

разменяйки реда в интегрирането, получаваме

$$\hat{h}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x, \xi)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy \right) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x, \xi)} f(x-y) dx \right) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(y+t, \xi)} f(t) dt \right) dy = \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi),$$

К.Т.Д.Д.

С л е д с т в и е 1. За $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ са в сила съотношенията

$$a/ \quad \widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g};$$

$$б/ \quad \widehat{f g} = \frac{1}{(2\pi)^n} \hat{f} * \hat{g}.$$

Очевидно, трябва да докажем само б/. Като намерим Фуриеровите образи на двете страни в това равенство, с помощта на очевидното

тждество $\hat{h}(x) = (2\pi)^n \hat{h}(-x)$, $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ получаваме

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \widehat{f * g} = \frac{1}{(2\pi)^n} \hat{f} \hat{g} = (2\pi)^n \hat{f}(-x) \hat{g}(-x) = \widehat{f g},$$

с което всичко е доказано.

Макар че а/ и б/ са равносилни б/ се използва много по-често.

С л е д с т в и е 2. Ако $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, отново е в сила /61/.

Д о к а з а т е л с т в о. Според неравенството на Йънг /стр. 167/ $f * g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, така че трансформацията на Фурие има смисъл.

Да въведем функцията

$$g_N = \begin{cases} g, & |x| \leq N \\ 0, & |x| > N. \end{cases}$$

Очевидно $g_N \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ и следователно

$$\widehat{f * g_N} = \hat{f} \hat{g}_N.$$

Извършвайки граничния преход в това неравенство, получаваме /61/.

За да можем да обобщим теорема 3.19, трябва поне до известна степен да изучим конволюцията в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. За да не се налага да прекъсваме изложението, ще започнем с няколко леми, някои от които представляват самостоятелен интерес.

Л е м а 3.3 /Неравенство на Петре/ Нека x и y са точки от $\mathbb{R}^n$, а s е произволно реално число. В та-

къв случай е в сила неравенството

$$/62/ \quad (1+|x|^2)^S \leq 2^{|S|} (1+|x-y|^2)^{|S|} (1+|y|^2)^S.$$

Доказателство. Имаме

$$|x| \leq |x-y| + |y|,$$

откъдето с очевидни преобразования получаваме

$$|x|^2 \leq 2(|x-y|^2 + |y|^2)$$

и

$$1 + |x|^2 \leq 2(1 + |x-y|^2)(1 + |y|^2).$$

Ако S е положително, повдигайки на S -та степен, получаваме /62/. Ако S е отрицателно, според вече доказаното имаме

$$(1+|x|^2)^{-S} \leq 2^{-S} (1+|x-y|^2)^{-S} (1+|y|^2)^{-S},$$

т.е.

$$(1+|y|^2)^S \leq 2^{-S} (1+|x-y|^2)^{-S} (1+|x|^2)^S,$$

което е тъкмо /62/ с разменени x и y .

Сега за удобство на читателя ще припомним една дефиниция.

Дефиниция 3.9. Една функция $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ се нарича с умерен ръст, когато за всеки мултииндекс α съществува естествено число k_α такова, че в $\mathbb{R}^n$ е в сила оценката

$$|D^\alpha f(x)| \leq C_\alpha (1+|x|^2)^{k_\alpha}.$$

Линейното пространство, образувано от функциите с умерен ръст, се означава с $\mathcal{O}_M$, а неговите елементи се наричат мултипликатори на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. В упражненията към стр.214 е скицирана следната

Теорема 3.20. Нека $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Да разгледаме изображението

$$A : \varphi \rightarrow a\varphi$$

на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ в $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. В такъв случай $A(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$ тогава и само тогава, когато $a \in \mathcal{O}_M$. Нещо повече, от $a \in \mathcal{O}_M$ следва, че A е непрекъснато.

Тази теорема обяснява названието на елементите от $\mathcal{O}_M$.

За нас ще бъде важно следното очевидно следствие от тази теорема.

Лема 3.4. Нека $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Тогава операторът $\varphi \rightarrow h * \varphi$ действа от $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и е непрекъснат.

Доказателство. Според следствие 1 от теорема 3.19 имаме

$$\widehat{h * \varphi} = \hat{h} \hat{\varphi},$$

което показва, че $h * \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и лемата следва моментално, защото операторът на Фурие е непрекъснат. Друго доказателство е скицирано в упражненията.

Лема 3.5. Елементите на $D(\mathbb{R}^n)$ са навсякъде гъсто в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Доказателство. Най-напред ще установим, че $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ е разположено навсякъде гъсто в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. После, използвайки този резултат, ще докажем лемата в цялата ѝ общност.

И така, нека $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ и нека

$$f_v(x) = f\left(\frac{x}{v}\right), \text{ където}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| \geq 2 \end{cases}$$

е функция от $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ще покажем, че $f_v u \rightarrow u$ в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, в което за простота ще разглеждаме слабата топология. Нека φ е произволен елемент от $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Имаме

$$(f_v u, \varphi) = (u, f_v \varphi) \rightarrow (u, \varphi),$$

защото според лема 2.2, стр.189 $f_v \varphi \xrightarrow{Y} \varphi$.

С това гъстотата на $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ е установена.

Нека сега $\nu \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ и $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ е многократно използваната камбановидна функция, дефинирана на стр.174. Да положим

$$\psi_\varepsilon = \psi * \chi_\varepsilon, \text{ където } \chi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

За произволно $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ имаме

$$(\psi_\varepsilon, \varphi) = (\psi * \chi_\varepsilon, \varphi) = (\psi, (\chi_\varepsilon(y), \varphi(x+y))).$$

Нека

$$\psi_\varepsilon(x) \stackrel{\text{def}}{=} (\chi_\varepsilon(y), \varphi(x+y)) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} \chi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) \varphi(x+y) dy$$

$$= \int_{|t| \leq 1} \chi(t) \varphi(x + \varepsilon t) dt.$$

Не е трудно да се провери, че при $\varepsilon \rightarrow 0$ $\psi_\varepsilon \rightarrow \varphi$ в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Наистина имаме

$$(1 + |x|^2)^k (\partial^\alpha \psi_\varepsilon(x) - \partial^\alpha \varphi(x)) = (1 + |x|^2)^k \int_{|t| \leq 1} \chi(t) \partial_x^\alpha (\varphi(x + \varepsilon t) - \varphi(x)) dt.$$

Нека $\delta > 0$ е произволно. Да вземем $N > 0$ толкова голямо, че да бъде в сила неравенството

$$/63/ \quad \sup_{|x| \geq N} (1 + |x|^2)^k |\partial^\alpha \varphi(x)| < \delta.$$

При това предположение за $0 < \varepsilon < 1$, $|t| \leq 1$ получаваме

$$\sup_{|x| \geq N+1} (1 + |x|^2)^k |\partial_x^\alpha \varphi(x + \varepsilon t)| \leq \sup_{|x| \geq N+1} \left(\frac{1 + |x|^2}{1 + |x + \varepsilon t|^2} \right)^k \sup_{|x| \geq N+1} (1 + |x + \varepsilon t|^2)^k |\partial_x^\alpha \varphi(x + \varepsilon t)|$$

$$\leq \delta \sup_x \left(\frac{1 + |x|^2}{1 + |x + \varepsilon t|^2} \right)^k \leq \delta 2^k (1 + |\varepsilon t|^2)^k \leq 4^k \delta.$$

като, разбира се, използвахме и неравенството на Петре. От /63/ и /64/ веднага следва

$$\sup_{|x| \geq N+1} (1 + |x|^2)^k |\partial^\alpha (\psi_\varepsilon(x) - \varphi(x))| \leq (4^k + 1) \delta \int_{|t| \leq 1} \chi(t) dt = (4^k + 1) \delta,$$

а неравенството

$$\sup_{|x| \leq N+1} (1 + |x|^2)^k |\partial^\alpha (\psi_\varepsilon(x) - \varphi(x))| < \delta$$

следва при достатъчно малко $\varepsilon > 0$, защото функцията

$(1 + |x|^2)^k \partial_x^\alpha (\varphi(x + \varepsilon t) - \varphi(x))$ е равномерно непрекъснатата в множеството $|t| \leq 1$, $|x| \leq N+1$.

Тъй като очевидно $\psi_\varepsilon = \psi * \chi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, лема 3.5 е доказана. Сега вече можем да се заемем с обобщенията на теорема 3.19.

Д е ф и н и ц и я 3.10. Нека $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Конволюцията $u * \psi$ дефинираме чрез равенството

$$/65/ \quad (u * \psi, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} (u_x, (\psi(y), \varphi(x+y))), \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Понеже

$$(\psi(y), \varphi(x+y)) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) \varphi(x+y) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(-t) \varphi(x-t) dt = (\check{\psi} * \varphi)(x)$$

и изображението $\varphi \rightarrow \check{\psi} * \varphi$ на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ е непрекъснато /лема 3.4/, дефиницията е коректна и $u * \psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Т е о р е м а 3.21. Ако $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, току-що дефинираната конволюция $u * \psi$ е безкрайно гладка функция и освен това е в сила твърдението

$$/66/ \quad (u * \psi)(x) = (u_y, \psi(x-y)).$$

Нещо повече $u * \psi \in \mathcal{O}_M$ и за всяко α имаме

$$\partial^\alpha (u * \psi) = \partial^\alpha u * \psi = u * \partial^\alpha \psi.$$

Доказателство. Да положим временно

$$h(x) = (u_y, \psi(x-y))$$

и да изучим функцията h . От $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ следва непосредствено

$$h(x) \leq C \sup_{y \in \mathbb{R}^n} (1+|y|^2)^k |\partial_y^\alpha \psi(x-y)|$$

с подходящи константи C , α и k . Оттук с неравенството на Петре получаваме

$$\begin{aligned} /67/ \quad |h(x)| &\leq C 2^k (1+|x|^2)^k \sup_{y \in \mathbb{R}^n} (1+|x-y|^2)^k |\partial_y^\alpha \psi(x-y)| \\ &= C_2 (1+|x|^2)^k. \end{aligned}$$

За да покажем, че h е гладка функция, остава да забележим, че за всяко фиксирано x диференциално частно

$$\Delta_h(y) = \frac{\varphi(x + l_\nu h - y) - \varphi(x - y)}{h}, \quad h \neq 0$$

$$l_\nu = (\underbrace{0 \dots 0}_{\nu-1}, 1, 0 \dots 0), \quad \nu = 1, 2, \dots, n$$

клони към $\frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}(x-y)$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

За тази цел е достатъчно да представим $\Delta_h(y)$ във вида

$$\Delta_h(y) = \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}(x + t h l_\nu - y) dt$$

и да разсъждаваме както в последната част от доказателството на лема 3.5. Така получаваме

$$\begin{aligned} \partial^\alpha h(x) &= (u_y, \partial_x^\alpha \psi(x-y)) = (-1)^{|\alpha|} (u_y, \partial_y^\alpha \psi(x-y)) \\ &= (\partial^\alpha u, \psi(x-y)). \end{aligned}$$

От това тъждество и от /67/ веднага следва, че $h \in \mathcal{O}_M$.

За да завършим доказателството на теоремата остава да се убедим, че

$$h(x) = (u * \psi)(x).$$

Нека най-напред $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. В такъв случай, изхождайки от деф.2.19, за всяко $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ получаваме

$$(u * \psi, \varphi) = (u_x, (\psi(y), \varphi(x+y))),$$

равенство, което показва, че при допълнителното предположение $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ деф.2.19 и деф.3.10 се съгласуват. ($\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ е навсякъде гъсто в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$). Този резултат ни позволява да приложим теорема 2.24 /стр.253/ и да заключим, че

$$(u * \psi)(x) = (u_y, \psi(x-y)).$$

Сега да разгледаме общия случай; $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ и $\{f_\nu\}$ е редицата от срязващи функции, използвана в доказателството на лема 3.5. Имаме

$$\begin{aligned} h_\nu(x) &\stackrel{\text{def}}{=} ((f_\nu u) * \psi)(x) = (f_\nu u, \psi(x-y)) \\ &= (u_y, f_\nu(y) \psi(x-y)), \end{aligned}$$

защото $f_\nu u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Да извършим граничния преход $\nu \rightarrow \infty$. От една страна, за всяко $\varphi \in \mathcal{S}$ имаме

$$\begin{aligned} /68/ \quad (h_\nu, \varphi) &= ((f_\nu u) * \psi, \varphi) = (f_\nu u, (\psi(y), \varphi(x+y))) \\ &= (u_x, f(\frac{x}{\sqrt{\nu}})(\psi(y), \varphi(x+y))) \rightarrow (u_x, (\psi(y), \varphi(x+y))) = (u * \psi, \varphi) \end{aligned}$$

защото, както веднага се вижда,

$$f(\frac{x}{\sqrt{\nu}})(\psi(y), \varphi(x+y)) \rightarrow (\psi(y), \varphi(x+y)).$$

От друга страна, изхождайки от равенството

$$h_\nu(x) = (u_y, f_\nu(y) \psi(x-y)),$$

лесно получаваме оценката

$$/69/ \quad |h_\nu(x)| \leq C (1+|x|^2)^k$$

с подходящи константи k и C , които не зависят от ν /сравнете с извода на /67/. Понеже $h_\nu(x) \rightarrow h(x) = (u_\nu, \psi(x-y))$ при всяко фиксирано x , /69/ ни дава възможност да приложим теоремата на Лебег и за всяко $\varphi \in \mathcal{S}$ да получим

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} (h_\nu, \varphi) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} h_\nu(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} h(x) \varphi(x) dx = (h, \varphi),$$

равенство, което заедно с вече установената релация /68/ доказва /66/.

С това теоремата е доказана.

Теорема 3.22. Нека $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\nu \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ и $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. В сила са равенствата

$$\begin{aligned} \text{а/ } \widehat{u * \psi} &= \widehat{\psi} \widehat{u}, \\ \text{б/ } \widehat{\psi u} &= \frac{1}{(2\pi)^n} \widehat{u} * \widehat{\psi}, \\ \text{в/ } \widehat{u * \nu} &= \widehat{u} \widehat{\nu}. \end{aligned}$$

Доказателство. Нека $\{u_j\}$ е редица от елементи на $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, която апроксимира u в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ /вж. лема 3.5/. Използвайки следствие 1 от теорема 3.19, получаваме

$$u_j * \psi = \widehat{u_j} \widehat{\psi}.$$

Нека сега $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Имаме

$$\begin{aligned} (u_j * \psi, \varphi) &= (u_j * \psi, \widehat{\varphi}) = (u_j, (\psi(y), \widehat{\varphi}(x+y))) \\ &\rightarrow (u, (\psi(y), \widehat{\varphi}(x+y))) = (\widehat{u} * \psi, \varphi), \end{aligned}$$

защото

$$(\psi(y), \widehat{\varphi}(x+y)) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) \widehat{\varphi}(x+y) dy \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

От друга страна, имаме

$$\begin{aligned} (\widehat{u_j} \widehat{\psi}, \varphi) &= (\widehat{u_j}, \widehat{\psi} \varphi) = (\widehat{u_j}, \widehat{\psi \varphi}) \\ &\rightarrow (\widehat{u}, \widehat{\psi \varphi}) \end{aligned}$$

и понеже

$$\begin{aligned} (\widehat{u}, \widehat{\psi \varphi}) &= (\widehat{u}, \widehat{\psi} \varphi) \\ &= (\widehat{u} \widehat{\psi}, \varphi), \end{aligned}$$

равенството

$$\text{а/ } \widehat{u * \psi} = \widehat{u} \widehat{\psi}$$

е доказано. Що се касае до б/, то се получава веднага от а/ чрез трансформация на Фурие.

Да докажем в/. Най-напред трябва да се убедим, че конволюцията $u * \nu$, дефинирана чрез равенството

$$(u * \nu, \varphi) = (u_x, (\nu_y, \varphi(x+y))), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

/деф. 2.19/ има смисъл и за $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

За целта е достатъчно да докажем следната

Лема 3.6. Нека $\nu \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Тогава от $\varphi \in \mathcal{S}$ следва $\nu * \varphi \in \mathcal{S}$ и съответствието $\varphi \rightarrow \nu * \varphi$ на $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}$ е непрекъснато.

Доказателство. Според а/ имаме

$$\widehat{\nu * \varphi} = \widehat{\nu} \widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

защото $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, а както показва теоремата на Винер-Пели-Шварц $\widehat{\nu} \in \mathcal{O}_M$.

Следователно

$$\nu * \varphi = F^{-1}(\widehat{\nu} \widehat{\varphi}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

и понеже изображението

$$\varphi \longrightarrow F^{-1}(\hat{\nu} \hat{\varphi})$$

е композиция от непрекъснати изображения, лемата е доказана.

Сега да се върнем към доказателството на в/.

За момент да въведем функцията $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x) \in \mathcal{S}$. Според лема 3.6 имаме

$$g(x) \stackrel{\text{def}}{=} (\nu * \check{\varphi})(x) = (\nu_{\check{y}}, \check{\varphi}(x-y)) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

т.е.

$$g(x) = (\nu_{\check{y}}, \varphi(-x+y)) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

В такъв случай и $g(-x) = (\nu_{\check{y}}, \varphi(x+y)) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и понеже операторите

$$\varphi \longrightarrow \check{\varphi}$$

и

$$\varphi \longrightarrow \nu * \check{\varphi}, \quad \nu \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n),$$

действащи от $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}$ са непрекъснати, релацията $u * \nu \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ е доказана.

$$\text{Нека сега } \nu_{\check{e}} = \nu * \chi_{\check{e}}, \text{ където } \chi_{\check{e}}(x) = \frac{1}{\check{e}^n} \chi\left(\frac{x}{\check{e}}\right) \text{ и}$$

χ е камбановидната функция от стр. 174. Очевидно имаме $\nu_{\check{e}} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и

$$\hat{\nu}_{\check{e}}(\xi) = \hat{\nu}(\xi) \hat{\chi}_{\check{e}}(\xi) = \hat{\nu}(\xi) \hat{\chi}(\xi \check{e}).$$

Понеже според а/, което е вече доказано, имаме

$$\widehat{u * \nu_{\check{e}}} = \hat{u} \hat{\nu}_{\check{e}},$$

остава да извършим граничния преход $\check{e} \longrightarrow 0$ в това равенство.

Нека $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ е такова, че $\hat{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Имам

$$\begin{aligned} (\widehat{u * \nu_{\check{e}}}, \varphi) &= (\widehat{u * \nu_{\check{e}}}, \hat{\varphi}) = (u, (\nu_{\check{e}}, \hat{\varphi}(x+y))) \\ &= (\nu_{\check{e}}, (u_x, \hat{\varphi}(x+y))) \longrightarrow (\nu, (u_x, \hat{\varphi}(x+y))), \end{aligned}$$

защото разпределенията $\{\nu_{\check{e}}\}$ имат равномерно ограничени носители и $(u_x, \hat{\varphi}(x+y)) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Накрая, използвайки тъждеството

$$(\nu_{\check{y}}, (u_x, \hat{\varphi}(x+y))) = (u_x, (\nu_{\check{y}}, \hat{\varphi}(x+y))),$$

което е в сила, защото ν и $\hat{\varphi}$ са с компактни носители /теорема 2.23/, получаваме

$$\lim_{\check{e} \rightarrow 0} (\widehat{u * \nu_{\check{e}}}, \varphi) = (u * \nu, \hat{\varphi}) = (\widehat{u * \nu}, \varphi)$$

при допълнителното предположение $\hat{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

От друга страна, имаме

$$(\hat{u} \hat{\nu}_{\check{e}}, \varphi) = (\hat{u} \hat{\nu} \hat{\chi}_{\check{e}}, \varphi) = (\hat{u} \hat{\nu}, \hat{\chi}_{\check{e}} \varphi)$$

и понеже при $\check{e} \longrightarrow 0$,

$$\hat{\chi}_{\check{e}} \varphi \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$$

/проверете!/, получаваме

$$\lim_{\check{e} \rightarrow 0} (\hat{u} \hat{\nu}_{\check{e}}, \varphi) = (\hat{u} \hat{\nu}, \varphi).$$

Тъй като елементите $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, за които $\hat{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ са навсякъде гъсто в $\mathcal{S}$, равенството

$$\widehat{u * \nu} = \hat{u} \hat{\nu}$$

е установено и теорема 3.22 е доказана. Тя ни позволява незабавно да получим един аналог на теорема 2.23

Теорема 3.23. Нека $\nu \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, а φ и ψ са елементи от $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. В такъв случай

$$\begin{aligned} (u * \varphi) * \psi &= u * (\varphi * \psi), \\ (u * \nu) * \psi &= u * (\nu * \psi). \end{aligned}$$

Доказателство. Достатъчно е да приложим оператора на Фурие към двете страни на доказуемите равенства.

Лема 3.6. естествено води до следния въпрос: кои са разпределенията $\{\nu\} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, за които от $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ следва $\nu * \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и изображението

$$\varphi \rightarrow \nu * \varphi$$

на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ е непрекъснато?

Разпределенията с това свойство се наричат конволutori на $\mathcal{S}$, а традиционното означение на линейното пространство, образувано от тях, е $\mathcal{O}'_c$.

З а б е л е ж к а. Буквата $\mathcal{O}$ напомня за оператора $\varphi \rightarrow \nu * \varphi$, който всеки конволтор поражда, а $\mathcal{C}$ - че става дума за конволюция. Накрая вместо $\mathcal{O}_c$ пишем $\mathcal{O}'_c$, за да бъде ясно, че разглеждаме и разпределения. Означението $\mathcal{O}_M$ на пространството на мултипликаторите е продиктувано от подобни съображения.

Структурата на $\mathcal{O}'_c$ лесно се изследва с трансформацията на Фурие.

Т е о р е м а 3.24. В сила са следните твърдения:

$$1/ \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{O}'_c.$$

$$2/ \nu \in \mathcal{O}'_c \text{ тогава и само тогава, когато } \hat{\nu} \in \mathcal{O}_M.$$

3/ Всяко $\nu \in \mathcal{O}'_c$ притежава следното свойство: за всяко естествено число m съществуват непрекъснати функции

$\{f_\alpha\} \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ такива, че да имаме

$$170/ \nu = \sum_{|\alpha| \leq k_m} \partial^\alpha f_\alpha$$

и

$$|f_\alpha(x)| \leq C_\alpha (1+|x|^2)^{-m}.$$

Обратно, ако ν има това свойство, то е конволтор.

Доказателство 1/ е точно съдържанието на лема 3.6. Да докажем 2/.

Нека $\nu \in \mathcal{O}'_c$. Понее по дефиниция $\mathcal{O}'_c \subset \mathcal{S}'$ с трансформацията на Фурие намираме

$$\nu * \varphi = \hat{\nu} \hat{\varphi} \in \mathcal{S}$$

за всяко $\varphi \in \mathcal{S}$, защото $\nu * \varphi \in \mathcal{S}$ по предположение. Тъй като

всяко от изображенията

$$\hat{\varphi} \xrightarrow{F^{-1}} \varphi \rightarrow \nu * \varphi \xrightarrow{F} \hat{\nu} \hat{\varphi}$$

е непрекъснато, излезе, че операторът

$$\hat{\varphi} \rightarrow \hat{\nu} \hat{\varphi},$$

който действа от $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}$ е непрекъснат, т.е. $\hat{\nu} \in \mathcal{O}_M$.

Доказателството, че от $\hat{\nu} \in \mathcal{O}_M$ следва $\nu \in \mathcal{O}'_c$ оставяме за читателя.

Остава да докажем 3/. Нека $\nu \in \mathcal{O}'_c$. Тогава $\hat{\nu} \in \mathcal{O}_M \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Да вземем произволно естествено m и толкова голямо $k = k_m$, че да имаме

$$(71) \quad \frac{|\partial^\alpha \hat{\nu}|}{(1+|x|^2)^k} \leq \frac{C_m}{(1+|x|^2)^m}, \text{ за } |\alpha| \leq 2m,$$

с подходяща константа C_m . Това може да се направи според дефиницията на $\mathcal{O}_M$.

Да положим

$$h = \frac{\hat{\nu}}{(1+|x|^2)^k}, \text{ т.е. } \hat{\nu} = (1+|x|^2)^k h.$$

Понее очевидно $h \in \mathcal{S}'$ можем да вземем обратната трансформация на Фурие и да получим

$$172/ \nu = (I - \Delta)^k F^{-1}(h),$$

където $\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$. Остава да проверим, че $f \stackrel{\text{def}}{=} F^{-1}h$

притежава необходимите свойства. Имаме

$$f(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)} h(x) dx,$$

$$\begin{aligned} (1+|\xi|^2)^m f(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \{(I - \Delta_x)^m e^{i(x,\xi)}\} h(x) dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)} (I - \Delta_x)^m h(x) dx, \end{aligned}$$

като последното неравенство получим с интегриране по части, което е възможно благодарение на /71/. Така получим

$$(1+|\xi|^2)^m |f(\xi)| \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |(I-\Delta)^m h(x)| dx \\ \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1+|x|^2)^n} = \text{const},$$

което показва, че представянето /72/ има необходимите свойства.

Обратно, нека сега ν е разпределение, за което /70/ е възможно с произволно m . Ще покажем, че $\nu \in \mathcal{O}'_c$. Наистина нека $\varphi \in \mathcal{S}$, и нека $P_{q,\beta}$ е една от полунормите, дефиниращи топологията в $\mathcal{S}$. Нека

$$\nu = \sum_{|\alpha| \leq k_q} \partial^\alpha f_\alpha, \text{ където } |f_\alpha(x)| \leq C_\alpha (1+|x|^2)^{-n-q}$$

Очевидно е, че $\nu \in \mathcal{S}'$. Имаме

$$(\nu * \varphi)(x) = \sum_{|\alpha| \leq k_q} (\partial^\alpha f_\alpha * \varphi)(x) = \sum_{|\alpha| \leq k_q} (f_\alpha * \partial^\alpha \varphi)(x) \\ = \sum_{|\alpha| \leq k_q} \int_{\mathbb{R}^n} f_\alpha(y) \partial^\alpha \varphi(x-y) dy$$

Да положим

$$h_\alpha(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f_\alpha(y) \partial^\alpha \varphi(x-y) dy.$$

С помощта на неравенството на Петре получаваме

$$P_{q,\beta}(h_\alpha) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^q |\partial^\beta h_\alpha(x)| \\ \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^q |f_\alpha(y)| |\partial^{\alpha+\beta} \varphi(x-y)| dy$$

$$\leq C_\alpha \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1+|x|^2)^q}{(1+|y|^2)^{n+q}} |\partial^{\alpha+\beta} \varphi(x-y)| dy \\ \leq 2^q C_\alpha \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1+|x-y|^2)^q}{(1+|y|^2)^n} |\partial^{\alpha+\beta} \varphi(x-y)| dy \\ \leq C_{q,\alpha,\beta} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dy}{(1+|y|^2)^n} = \text{const}.$$

Понеже α беше произволно, неравенството

$$P_{q,\beta}(\nu * \varphi) < +\infty$$

е установено. Тъй като и полунормата $P_{q,\beta}$ е произволна, доказателството е завършено.

В заключение ще отбележим, че елементите на $\mathcal{O}'_c$ са конволютори и на разпределенията от $\mathcal{S}'$.

Теорема 3.25. Нека $\nu \in \mathcal{O}'_c$, $u \in \mathcal{S}'$. Тогава конволюцията $u * \nu$ е дефинирана и изображението

$$u \longrightarrow u * \nu$$

действува непрекъснато от $\mathcal{S}'$ в $\mathcal{S}'$. В сила е и тъждеството

$$/73/ \quad \widehat{u * \nu} = \hat{u} \hat{\nu}.$$

Доказателство. Както и трябва да се очаква, $u * \nu$ дефинираме чрез равенството

$$/74/ \quad (u * \nu, \varphi) = (u_x, (\hat{\nu}_y, \varphi(x+y))), \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

С помощта на /66/ намираме

$$(\hat{\nu}_y, \varphi(x+y)) = (\nu * \check{\varphi})(-x) \in \mathcal{S},$$

което показва, че $u * \nu$ е наистина дефинирана и принадлежи на

$\mathcal{S}'$. Непо повече, ясно е, че изображението

$$u \longrightarrow u * v$$

на $\mathcal{S}'$ в $\mathcal{S}'$ е непрекъснато (за простота разглеждаме слабата топология в $\mathcal{S}'$). Остава да установим /73/.

Нека $\{u_j\} \subset \mathcal{S}'$ е редица, която апроксимира u в $\mathcal{S}'$. Изхождайки от равенството

$$\widehat{u_j * v} = \hat{u}_j \hat{v}$$

да докажем и /73/. Наистина, нека $\varphi \in \mathcal{S}$ е произволно. Имаме

$$\begin{aligned} (u_j * v, \varphi) &= (u_j * v, \hat{\varphi}) = (u_j, (\hat{v}_y, \hat{\varphi}(x+y))) \\ &\longrightarrow (u, (\hat{v}_y, \hat{\varphi}(x+y))) = (u * v, \varphi), \end{aligned}$$

защото $(\hat{v}_y, \hat{\varphi}(x+y)) \in \mathcal{S}$. От друга страна,

$$(\hat{u}_j \hat{v}, \varphi) = (\hat{u}_j, \hat{v} \varphi) \longrightarrow (\hat{u}, \hat{v} \varphi) = (\hat{u} \hat{v}, \varphi),$$

защото $\hat{u}_j \longrightarrow \hat{u}$ в $\mathcal{S}'$, а $\hat{v} \varphi \in \mathcal{S}$ понеже $\hat{v} \in \mathcal{O}_M$.

С това доказателството е завършено.

Упражнение 6

1. Нека $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Докажете, че $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

а/ с неравенството на Петре;

б/ изхождайки от представянето

$$(f * g)(x) = \int_{|y| \leq \frac{|x|}{2}} f(x-y) g(y) dy + \int_{|y| \geq \frac{|x|}{2}} f(x-y) g(y) dy.$$

По същия начин покажете, че от $f \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, следва, че $f * g \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$.

3.7. Вълнов фронт. Основни свойства

Макар и въведено неотдавна /Сато 1969 г. за хиперфункции, Хьормандер 1971 г. за разпределения/ понятието вълнов фронт вече оказва чувствително влияние върху много дялове от теорията на частните диференциални уравнения. Неразполагайки с необходимия математически апарат /псевдодиференциални оператори/ тук ще се ограничим с обсъждането на дефиницията, като загатнем за две важни приложения в самата теория на разпределенията и докажем няколко елементарни твърдения, които донякъде дават представа как се работи с това понятие.

Нека Ω е област в $\mathbb{R}^n$ и нека $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ съвпада с някаква безкрайно гладка функция в достатъчно малка околност на точката $x_0 \in \Omega$. Нека $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ е функция, тъждествено равна на единица около x_0 и с достатъчно малък носител. Тогава $v = \varphi u \in C_0^\infty(\Omega)$ - свойство, което според теоремата на Винер-Пели-Шварц е равносильно с изискването за всяко $N > 0$ да имаме

$$|v(\xi)| \leq \frac{C_N}{(1+|\xi|)^N}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

с достатъчно голяма константа C_N . Ако u не е гладка около x_0 , не е изключено все пак да съществуват направления в $\mathbb{R}_\xi^n$ около които /75/ остава вярно. Мисълта да изследваме тези "регулярни" направления се оказва изключително полезна и води до понятието вълнов фронт. Свойствата на разпределенията, които естествено се описват с вълнови фронтове, се наричат и микролокални.

Дефиниция 3.11. Нека Ω е област в $\mathbb{R}^n$ и нека $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Двойката $(x_0, \xi_0) \in \Omega \times (\mathbb{R}_\xi^n \setminus \{0\})$ се нарича регулярно насочена, когато съществува разпределение $v \in \mathcal{E}'(\Omega)$, съвпадащо с u в достатъчно малка околност на x_0 и число $\varepsilon > 0$ такива, че за всяко $N > 0$ да имаме

$$|\hat{u}(\xi)| \leq \frac{C_N}{(1+|\xi|)^N}$$

в конуса

$$/76/ \quad \Gamma_{\xi_0, \varepsilon} = \left| \frac{\xi}{|\xi|} - \frac{\xi_0}{|\xi_0|} \right| < \varepsilon,$$

стига константата $C_N > 0$ да бъде достатъчно голяма.

Ясно е, че множеството от регулярно насочените двойки е отворено. Неговото допълнение в $\Omega \times (\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\})$ се нарича вълнов фронт или сингулярен спектр на разпределението u и се бележи с $WF(u)$.

Имайки пред вид теоремата на Винер-Пели-Шварц, не е трудно да се досетим, че множествата $WF(u)$ и $\text{sing supp } u$ са тясно свързани. Това наистина е така и именно тази връзка прави вълновия фронт важен инструмент при изследването на особеностите или гладкостта на решенията на диференциалните уравнения. Преди да изясним този въпрос обаче целесъобразно е да направим малък разбор на дефиницията. Най-напред ще покажем, че изборът на помощното разпределение v не е съществен. За удобство ще започнем малко по-отдалече.

Лема 3.7. Нека $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ удовлетворява неравенство от вида

$$/77/ \quad |v(x)| \leq C_p (1+|x|)^p, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

и нека освен това всяка ненулева точка y от конуса

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R}^n, \left| \frac{x}{|x|} - \frac{x_0}{|x_0|} \right| < \delta \right\}$$

притежава конична околност $\Gamma_{y, \varepsilon}$, в която е в сила оценката

$$/78/ \quad |v(x)| \leq \frac{C_N}{(1+|x|)^N},$$

за всяко $N > 0$.

В такъв случай за всяко $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ конволюцията $W = v * g$ има същото свойство.

Доказателство. Очевидно е, че $W \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Нека $y_0 \in C$, $y_0 \neq 0$ и нека в конуса

$$\Gamma_\varepsilon = \left\{ x \in \mathbb{R}^n, \left| \frac{x}{|x|} - \frac{y_0}{|y_0|} \right| < \varepsilon \right\} \subset C$$

е в сила /78/. Имаме

$$W(x) = \int_{\Gamma_\varepsilon} g(x-z) v(z) dz + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Gamma_\varepsilon} g(x-z) v(z) dz = I_1 + I_2.$$

Първият интеграл се оценява съвсем просто. Наистина, като вземем пред вид елементарното неравенство

$$/79/ \quad (1+|x|) \leq (1+|x-z|)(1+|z|), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad z \in \mathbb{R}^n$$

и дефиницията на Γ_ε , за всяко $N > 0$ получаваме

$$(1+|x|)^N |I_1(x)| \leq C'_N C''_N \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{(1+|x|)^N dz}{(1+|x-z|)^N (1+|z|)^{N+n+1}}$$

$$\leq C'_N C''_N \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dz}{(1+|z|)^{n+1}} = A_N = \text{const},$$

т.е.

$$/80/ \quad |I_1(x)| \leq \frac{A_N}{(1+|x|)^N}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

За оценката на I_2 са необходими допълнителни съображения. Нека x и z са единични вектори съответно от Γ_ε и $\mathbb{R}^n \setminus \Gamma_\varepsilon$. Понеже множествата

$$S_1 = \overline{\Gamma_\varepsilon} \cap \{|x|=1\} \quad \text{и} \quad S_2 = (\mathbb{R}^n \setminus \Gamma_\varepsilon) \cap \{|x|=1\}$$

са компактни и нямат общи точки, за скаларното произведение (x, z) получаваме оценката

$$\sup_{\substack{x \in S_1 \\ z \in S_2}} (x, z) \leq 1 - \alpha < 1, \quad 0 < \alpha < 1,$$

от която веднага следва

$$(x, z) \leq (1-\alpha)|x||z|, \quad x \in \Gamma_{\frac{\varepsilon}{2}}, \quad z \in \mathbb{R}^n \setminus \Gamma_{\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Оттук с лека преработка намираме

$$\begin{aligned} |x-z|^2 &= |x|^2 - 2(x, z) + |z|^2 \geq |x|^2 - 2(1-\alpha)|x||z| + |z|^2 \\ &= (1-\alpha)(|x|-|z|)^2 + \alpha(|x|^2 + |z|^2) \geq \frac{\alpha}{2}(|x|+|z|)^2, \end{aligned}$$

т.е.

$$|x|+|z| \leq \beta|x-z|, \quad x \in \Gamma_{\frac{\varepsilon}{2}}, \quad z \in \mathbb{R}^n \setminus \Gamma_{\frac{\varepsilon}{2}}$$

с подходяща константа β .

Сега вече всичко е ясно. За $x \in \Gamma_{\frac{\varepsilon}{2}}$ получаваме

$$\begin{aligned} (1+|x|)^N |I_2(x)| &\leq C_{p,N} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Gamma_{\frac{\varepsilon}{2}}} \frac{(1+|x|)^N (1+|z|)^p dz}{(1+|x-z|)^{2N+p+n+1}} \\ &\leq C_{p,N} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Gamma_{\frac{\varepsilon}{2}}} \frac{(1+|x-z|)^N (1+|z|)^{p+N} dz}{(1+|x-z|)^{2N+p+n+1}} \\ &\leq C_{p,N,\beta} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dz}{(1+|x|+|z|)^{n+1}} \leq C_{p,N,\beta} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dz}{(1+|z|)^{n+1}} \end{aligned}$$

неравенство, което заедно с /80/ доказва лемата.

С л е д с т в и е. Нека $u \in D'(\Omega)$, $\varphi \in D(\Omega)$, тогава $WF(\varphi u) \subset WF(u)$.

Д о к а з а т е л с т в о. Нека $(x_0, \xi) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ е регулярно насочена двойка за u .

Достатъчно е да установим, че тя е регулярна насочена и за φu . Нека $v \in \mathcal{E}'(\Omega)$ е разпределението, съвпадащо с u в достатъчно малка околност на x_0 , за което

$$|\hat{v}(\xi)| \leq \frac{C_N}{(1+|\xi|)^N}$$

за всяко N , в някакъв конус Γ_{ξ_0} с ос ξ_0 . Понеже $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, теоремата на Винер - Пели - Шварц ни дава

$$|\hat{v}(\xi)| \leq A_p (1+|\xi|)^p$$

с подходящи константи p и A_p , а $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Накрая според теорема 3.22 б/ имаме

$$\widehat{\varphi v} = \frac{1}{(2\pi)^n} \hat{\varphi} * \hat{v}$$

и прилагайки лема 3.7, веднага заключаваме, че (x_0, ξ_0) е регулярно насочена двойка и за φu .

С това следствието от лема 3.7 е доказано. То показва, че при търсенето на регулярните направления в точката x_0 /а оттам и при определението на $WF(u)$ / можем да се ограничим с разглеждането на разпределения от вида φu , където $\varphi \in D(\Omega)$ е функция, тъждествено равна на единица в достатъчно малка околност на точката x_0 .

Дойде време да опишем връзката между $WF(u)$ и $\sin g \supp u$.

Т е о р е м а 3.26. Нека $u \in D'(\Omega)$ и нека

$$\pi_1: \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \longrightarrow \Omega$$

е проекцията, която действа по правилото $\pi_1(x, \xi) = x$. Тогава

$$\pi_1(WF(u)) = \sin g \supp u.$$

Д о к а з а т е л с т в о. Нека $x_0 \in \sin g \supp u$ и нека $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ е функция, тъждествено равна на единица около x_0 с толкова малък носител, че да имаме $\varphi u \in D(\Omega)$. Тогава според теоремата на Винер - Пели - Шварц всяка двойка от вида (x_0, ξ) , $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ е регулярно насочена и следователно $x_0 \in \pi_1(WF(u))$. Така докажахме включването

$$\pi_1(WF(u)) \subset \sin g \supp u.$$

Нека сега $x_0 \in \pi_1(WF(u))$. Тогава всички двойки (x_0, ξ) , $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ са регулярно насочени. Да вземем $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $|\xi| = 1$. Според самата дефиниция на регулярно насочена двойка съществуват конус Γ_ξ с ос ξ и функция $\varphi_\xi \in D(\Omega)$, тъждествено равна на единица около x_0 и такава, че

$$|(\varphi_\xi \hat{u})(\eta)| \leq \frac{C_N}{(1+|\eta|)^N}, \quad \eta \in \Gamma_\xi$$

за всяко N . Да означим с G_ξ сечението на Γ_ξ с единичната сфера $S: |\xi| = 1$. Понеже S е компактна, съществуват краен брой области G_{ξ_j} , $j = 1, 2, \dots, k$, които покриват S .

След тази констатация да въведем функцията

$$\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{j=1}^k \varphi_{\xi_j}$$

Ясно е, че $\varphi \in D(\Omega)$ и е тъждествено равна на единица около x_0 . С помощта на лема 3.7 се убеждаваме, че

$$|(\varphi \hat{u})(\eta)| \leq \frac{A_N}{(1+|\eta|)^N}, \quad \eta \in \mathbb{R}^n$$

с подходяща константа A_N . Сега теоремата на Винер - Пели - Шварц показва, че $\varphi u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, т.е. $x_0 \in \text{sing } g \text{ supp } u$. Така установихме релацията

$$\text{sing } g \text{ supp } u \subset \pi_1(WF(u))$$

и доказателството е завършено.

Следващата елементарна теорема позволява в някои случаи да направим известни заключения за разположението на $WF(u)$, без да прибягваме до някаква сръзваща функция.

Теорема 3.27. Нека $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ а $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ е затворен конус с център в началото. Ако $\hat{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \Gamma)$ и освен това за всяко $N > 0$ е в сила оценката

$$|\hat{u}(\xi)| \leq \frac{C_N}{(1+|\xi|)^N}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \Gamma,$$

то

$$\pi_2(WF(u)) \subset \Gamma,$$

където проекцията

$$\pi_2: \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

действува по правилото $\pi_2(x, \xi) = \xi$.

Доказателство. Нека $\xi_0 \in \Gamma$. Трябва да покажем, че каквато и да бъде точката $x_0 \in \mathbb{R}^n$, съществува функция $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, която е тъждествено равна на единица около x_0 и е такава, че $\varphi \hat{u}$ намалява при $|\xi| \rightarrow \infty$ по-бързо от всяка степен на $\frac{1}{|\xi|}$ в достатъчно тесен конус Γ_{ξ_0} с ос ξ_0 . Нека $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ е функция, която е положителна около точката x_0 и освен това е така избрана, че $\hat{g} \in D(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp } \hat{g} \subset \{|\xi| \leq 1\}$. /Вж. зад.1 от следващото упражнение./ Според теорема 3.22 б/ и теорема 3.21 имаме

$$g \hat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \hat{u} * \hat{g} = \frac{1}{(2\pi)^n} (\hat{u}_\eta, \hat{g}(\xi - \eta)) \in \mathcal{O}_M.$$

Сега да оставим ξ да се мени в толкова тесен конус Γ_{ξ_0} , че да имаме $\overline{\Gamma_{\xi_0}} \cap \overline{\Gamma} = \{0\}$ и $R > 0$ е толкова голямо, че за $|\xi| > R$ кълбото $|\xi - \eta| \leq 1$ да не се пресича с $\overline{\Gamma}$. В такъв случай за $|\xi| > R$ и произволно N получаваме

$$|(1+|\xi|)^N (g \hat{u})(\xi)| \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{|\xi-\eta| \leq 1} (1+|\xi|)^N |\hat{u}(\eta)| |\hat{g}(\xi-\eta)| d\eta$$

$$\leq C_N \int_{|\xi-\eta| \leq 1} \frac{(1+|\xi|)^N d\eta}{(1+|\eta|)^{N+n+1} (1+|\xi-\eta|)^N} \leq C_N \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\eta}{(1+|\eta|)^{n+1}}$$

т.е.

$$|\hat{g}u(\xi)| \leq \frac{C'_N}{(1+|\xi|)^N}$$

за $\xi \in \Gamma_{\xi_0}$. Сега да вземем такова $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, че да имаме $hg \equiv 1$ в достатъчно малка околност на x_0 и да положим $\varphi = hg$. Тъй като според теорема 3.22 б/ имаме

$$\hat{\varphi}u = \hat{h}\hat{g}u = \frac{1}{(2\pi)^n} \hat{h} * \hat{g}u$$

и $\hat{g}u \in \mathcal{O}_M$, прилагайки отново лема 3.7, стигаме до желаното заключение, защото ξ_0 беше произволна точка от $\mathbb{R}^n \setminus \Gamma$.

Упражнение 7

1. Постройте неотрицателна функция $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, която е положителна в околност на дадена точка x_0 и освен това $\text{supp } \hat{g} \subset \{|\xi| \leq 1\}$.

Упътване. Използвайте равенството $\hat{g}_1 \hat{g}_2 = \widehat{g_1 * g_2}$, $g_1 \in \mathcal{S}$, $g_2 \in \mathcal{S}$.

2. Нека $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Покажете, че

$$WF(D^\alpha u) \subset WF(u)$$

какъвто и да бъде мултииндексът α . Убедете се с един пример, че тези множества могат и да не съвпадат.

3. Докажете, че границата

$$T = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{1}{x+i\varepsilon}.$$

съществува в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$ и пресметнете $WF(T)$.

Упътване. $T = V.p \frac{1}{x} - i\pi\delta$.

3.8. Рестрикция на разпределение върху хиперравнина. Умножение на разпределения

Нека Ω е област в $\mathbb{R}^n$ и S е гладка $n-1$ -мерна повърхнина¹. Самата постановка на граничните задачи на математическата физика предизвиква желанието разумно да дефинираме рестрикцията или, както по-често се казва - следата върху S на произволен елемент от $\mathcal{D}'(\Omega)$. Веднага се вижда обаче, че без допълнителни предположения за гладкост такива опити са безнадеждни. За да се убедим в това да означим с u една функция, дефинирана почти навсякъде в Ω , която е локално сумируема и е тъждествено равна на единица върху S . След това да дефинираме функцията v по следния начин:

$$v = \begin{cases} u, & x \in \Omega \setminus S \\ 0, & x \in S. \end{cases}$$

Понеже S има Лебегова мярка нула, u и v съвпадат като елементи от $L_{loc}(\Omega)$; толкова повече съвпадат и разпределенията

$$\varphi \longrightarrow (u, \varphi), \quad \varphi \longrightarrow (v, \varphi),$$

които u и v пораждат. Въпреки това според дефиницията на u и v имаме $u|_S = 1$, $v|_S = 0$.

Оказва се, че възможността или невъзможността да дефинираме $u|_S$ е свързано с разположението на $WF(u)$. За да се ориентираме в обстановката, да разгледаме един пример.

Нека

$$181/ \quad Y(x) = \begin{cases} 1, & x_n > 0 \\ 0, & x_n \leq 0 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

е функцията на Хевисайд. Току-що констатирахме, че е невъзможно да дефинираме $Y|_{x_n=0}$ в рамките на $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Да видим как се

¹ Предполагаме, че $\Omega \cap S \neq \emptyset$.

отразява това обстоятелство на $WF(Y)$. Да означим с H хиперравнината $x_n = 0$. Понеже $\text{sing supp } Y = H$ в $WF(Y)$ ще се състои само от двойки от вида (x_0, ξ) където $x_0 \in H$. Нека x_0 е такава точка, а $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ е функция, тъждествено равна на единица около x_0 . Имаме

$$(\widehat{\varphi Y})(\xi) = \int_{x_n \geq 0} e^{-i(x, \xi)} \varphi(x) dx,$$

$$\xi_n (\widehat{\varphi Y})(\xi) = i \int_{x_n \geq 0} \frac{\partial}{\partial x_n} (e^{-i(x, \xi)}) \varphi(x) dx$$

$$= -i \int_{x_n \geq 0} e^{-i(x, \xi)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x) dx - i \int_{x_n=0} e^{-i(x', \xi')} \varphi(x', 0) dx'$$

$$= I_1(\xi) + I_2(\xi),$$

където естествено $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$,

$$\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}).$$

От това тъждество веднага се вижда, че двойката (x_0, l_n) ,

$l_n = \underbrace{(0, 0, \dots, 1)}_{n-1 \text{ пъти}}$ се съдържа в $WF(Y)$. Наистина да вземем

такова $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, че $\text{supp } \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}$ да лежи в множе-

ството $|x_n| \geq \delta$ при достатъчно малко $\delta > 0$. Тогава $I_1(\xi) = O\left(\frac{1}{|\xi|^N}\right)$

за всяко $N > 0$, както можем да се убедим с интегриране по части или пък като се позовем на по-простата част от теоремата на Винер - Пели - Шварц. От друга страна, равенството

$$I_2(\lambda l_n) = -i \int_{x_n=0} \varphi(x', 0) dx' = \text{const} \neq 0$$

показва, че $I_2(\lambda l_n) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow +\infty$, т.е. $(x_0, l_n) \in WF(Y)$.

Предоставяйки на читателя окончателното определяне на $WF(Y)$, използвайки вече въведените означения, ще пристъпим към доказателството на следната

Теорема 3.28. Нека $u \in D'(\Omega)$ и хиперравнината $H = \{x \in \mathbb{R}^n, x_n = 0\}$ пресича Ω . Ако двойките (x, l_n) , $x \in H$, са регулярно насочени, рестрикцията $u|_H$ може да се дефинира по такъв начин, че за $u \in C(\Omega)$ да получим

$$u|_H = u(x', 0), \quad (x', 0) \in \Omega \cap H.$$

Доказателство. Нека $x_0 \in H$. Достатъчно е да дефинираме $\varphi u|_H$, където $\varphi \in D(\Omega)$ е функция, тъждествено равна на единица около x_0 , защото можем да се възползваме от подходящо разлагане на единицата. Да положим за краткост $v = \varphi u$. Понеже

$$v \in \mathcal{E}'(\Omega) \subset \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \text{ имаме}$$

$$/82/ \quad |\hat{v}(\xi)| = C_p (1 + |\xi|)^p, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

с подходящи константи p и C_p .

Понеже направлението l_n е регулярно, при достатъчно малко $\delta > 0$ в конуса

$$\Gamma: |\xi'|^2 \leq \delta^2 \xi_n^2$$

ще имаме

$$/83/ \quad |\hat{v}(\xi)| \leq \frac{C_N}{(1 + |\xi|)^N} \leq \frac{C_N}{(1 + |\xi_n|)^N}$$

за всяко $N > 0$. Понеже извън Γ имаме $|\xi_n| \leq \frac{1}{\delta} |\xi'|$ от /82/ получаваме

$$/84/ \quad |\hat{v}(\xi)| \leq C_p (1 + |\xi_n| + |\xi'|)^p \leq C_{p, \delta} (1 + |\xi'|)^p \\ \leq C'_{p, \delta} \frac{(1 + |\xi'|)^{p+2}}{(1 + |\xi_n|)^2}.$$

Обединявайки /83/ с $N = 2$ и /84/ получаваме оценката

$$/85/ \quad |\hat{v}(\xi)| \leq \frac{A(1+|\xi|)^{p+2}}{(1+|\xi_n|)^2}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

с достатъчно голяма константа A .

След тази подготовка да разгледаме функцията

$$w(\xi', x_n) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+i(x_n, \xi_n)} \hat{v}(\xi', \xi_n) d\xi_n,$$

т.е. обратната трансформация на Фурие спрямо ξ_n . Един поглед върху /85/ показва, че w е непрекъсната и

$$h \stackrel{\text{def}}{=} w|_{x_n=0} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n-1}).$$

Следователно можем да образуваме разпределението

$g = F^{-1}(h) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n-1})$, където в случая F означава трансформацията на Фурие в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n-1})$. Ясно е, че g е търсената релативна.

З а б е л е ж к а. От очевидното съотношение $WF(\partial^\alpha u) \subset WF(u)$ следва, че при предположенията в теоремата всяко от разпределенията $\partial^\alpha u$ притежава следа върху $\mathcal{H}$.

В този си вид доказаната теорема няма особена стойност, но след подходяща "микролокализация" от нея се получава принципно важен резултат [38] [39].

*
* * *

Друга важна задача, която възниква в квантовата теория на полето, е задачата за целесъобразната дефиниция на произведение на две разпределения при възможно най-общи предположения /вече видяхме в 2.4, стр. 206/, че без допълнителни предположения целесъобразна дефиниция не съществува. Ако $\text{sing supp } u \cap \text{sing supp } v = \emptyset$, лесно се вижда, че съществува произведение $uv \in \mathcal{D}'(\Omega)$, което

то в случай, че едно от разпределенията u и v е гладка функция, съвпада с произведението, въведено с деф. 2.7 /вж. следващото упражнение/. Оказва се обаче, че и сега понятието вълнов фронт може да бъде полезно. По-точно в сила е следната теорема:

Ако $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ са такива, че множеството $(x, \xi_1 + \xi_2)$, където $x \in \mathbb{R}^n$, $(x, \xi_1) \in WF(u)$.

$(x, \xi_2) \in WF(v)$ не съдържа нито една двойка от вида $(x, 0)$, произведение $(u, v) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ може да се дефинира чрез равенството

$$/86/ \quad (u, v) = \frac{1}{(2\pi)^n} F^{-1}(\hat{u} * \hat{v}) = \frac{1}{(2\pi)^n} F^{-1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi) \hat{v}(\eta - \xi) d\xi \right).$$

С помощта на разсъждения, подобни на тези от лема 3.7, може да се докаже, че интегралът в /86/ е абсолютно сходящ и функцията, която той дефинира, е елемент от $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Доказателството може да се види например в т. II на [7], откъдето е заимствуван материалът, изложен в 3.7.

У п р а ж н е н и е 8

1. Пресметнете вълновия фронт на функцията на Хевисайд, дефинирана чрез /81/.

Отг. $WF(y) = (x, l_n)$, където $x \in \mathcal{H}$

2. Пресметнете вълновия фронт на функциите $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$, където

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{ако } x > 0, \quad y > 0, \\ 0, & \text{в противен случай} \end{cases}$$

и

$$g(x, y, z) = \begin{cases} 1, & \text{ако } x > 0, \\ 0, & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

3. Нека $f \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$. Убедете се, че ако $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, произведението fu може да се дефинира чрез деф. 2.7, стр. 205

и изображението $u \longrightarrow fu$ на $\mathcal{F}'(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{F}'(\mathbb{R}^n)$ е непрекъснато.

4. Нека Ω е област в $\mathbb{R}^n$ и $\{U_i\}$, $i \in I$, е фамилия от отворени множества, която покрива Ω . Конструирайте редица от безкрайно гладки функции $\{\psi_j\}$, $j = 1, 2, 3, \dots$, която притежава следните свойства:

1. Всяко ψ_j принадлежи на $C_0^\infty(U_i \cap \Omega)$ за някакво $i = i(j)$ и освен това $0 \leq \psi_j(x) \leq 1$ за $x \in \mathbb{R}^n$.

$$2. \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(x) = 1 \text{ в } \Omega.$$

3. Всеки компакт $K \subset \Omega$ се пресича с носителите на краен брой от функциите $\{\psi_j\}$.

Всяка такава редица се нарича локално крайно разлагане на единицата в Ω , подчинено на покритието $\{U_i\}$.

У п ъ т в а н е. Нека

$$K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \dots \subset \Omega$$

е редица от компакти, която изчерпва Ω . (Припомняме, че това между другото означава, че $K_j \subset K_{j+1}$, където K_{j+1} е вътрешността на K_{j+1} .) Нека $G_j = K_j \setminus K_{j-1}$, за $j \geq 3$ и $G_2 = K_2$. Понеже G_j е компактно, разсъждавайки както при доказателството на теорема 1.3, стр.177, можем да конструираме крайна фамилия $\mathcal{N}_j$ от функции със следните свойства:

а/ Всяка функция от $\mathcal{N}_j$, $j \geq 3$ принадлежи на $C_0^\infty(U_i \cap (K_{j+1} \setminus K_{j-1}))$ за някакво $i = i(j)$ и взема стойности между 0 и 1. Всяка функция от $\mathcal{N}_2$ принадлежи на $C_0^\infty(U_i \cap K_2)$, за някакво i и взема стойности между 0 и 1.

б/ За всяко $x \in G_j$ съществува поне една функция от $\mathcal{N}_j$, която е тъждествено равна на единица в някаква околност на тази точка.

Да наредим функциите от

$$\mathcal{N} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{j=2}^{\infty} \mathcal{N}_j$$

в една редица по такъв начин, че за $j = 2, 3, \dots$, всяка функция от $\mathcal{N}_j$ да има по-малък номер от коя да е функция от $\mathcal{N}_{j+1}$, $j = 2, 3, \dots$.

Нека

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$$

е получената редица. Да положим

$$\psi_1 = \varphi_1, \quad \psi_2 = \varphi_2(1 - \varphi_1), \dots, \quad \psi_j = \varphi_j \prod_{k=1}^{j-1} (1 - \varphi_k).$$

Проверете, че редицата $\{\psi_j\}$ е търсената.

5. Нека Ω е област в $\mathbb{R}^n$, а $u \in D'(\Omega)$, $v \in D'(\Omega)$ са такива, че $\text{sing supp } u \cap \text{sing supp } v = \emptyset$.

Дефинирайте произведението uv по такъв начин, че ако u или v е функция от $C^\infty(\Omega)$, да се получи произведението от деф.2.7.

Докажете, че $\text{sing supp } (uv) \subset \text{sing supp } u \cup \text{sing supp } v$. Ако $w \in D'(\Omega)$ е такова, че

$$(\text{sing supp } u \cup \text{sing supp } v) \cap \text{sing supp } w = \emptyset,$$

установете, че $(uv)w = (vu)w = u(vw)$.

У п ъ т в а н е. Използвайте разлагането на единицата, построено в зад.4.

3.9. Хомогенни и периодични разпределения.

Сумационна формула на Поасон

Смяната на променливите е една от основните операции в анализа. Тук ще разгледаме този въпрос в рамките на теорията на разпределенията, като се ограничим с най-простия, но твърде важен случай, когато смяната е линейна.

Нека $u \in D'(\mathbb{R}^n)$, а $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ е линеен оператор, който действа еднозначно обратимо. За да стигнем до правилната дефиниция на разпределението $u \circ T$, както обикновено най-напред ще разгледаме случая, когато u е обикновена функция.

И така, нека $u \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$. Интерпретирайки u като елемент от $D'(\mathbb{R}^n)$, получаваме

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(Tx) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} u(y) \varphi(T^{-1}y) |\det T^{-1}| dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(y) \varphi(T^{-1}y)}{|\det T|} dy.$$

Изхождайки от това твърдение, стигаме до следната

Д е ф и н и ц и я 3.12. Ако $u \in D'(\mathbb{R}^n)$, а $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ е линеен и обратим оператор, композицията $u \circ T$ дефинираме с равенството

$$(u \circ T, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \left(u, \frac{\varphi \circ T^{-1}}{|\det T|} \right), \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^n),$$

където $\det T$ е детерминантата на матрицата, чрез която се представя T спрямо стандартната база в $\mathbb{R}^n$.

Веднага се вижда, че $u \circ T$ е наистина разпределение и операторът

$$/87/ \quad u \longrightarrow u \circ T$$

е непрекъснат автоморфизъм на всяко от пространствата $D'_0(\mathbb{R}^n)$, $D'_\beta(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{L}'_0(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{L}'_\beta(\mathbb{R}^n)$.

Спомняйки си дефиницията на спрегнат оператор /стр. 301/, бихме могли да кажем, че операторът /87/ е спрегнатият на оператора

$$\varphi \longrightarrow \frac{\varphi \circ T^{-1}}{|\det T|},$$

който действа от $D(\mathbb{R}^n)$ в $D(\mathbb{R}^n)$, съответно от $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Дефиниция 3.12 ни позволява да разглеждаме разпределения, които се трансформират просто от елементите на дадена група от изображения на $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$.

Д е ф и н и ц и я 3.13. Нека $\lambda > 0$ е положително число и нека $T_\lambda: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ е хомотетията $x \rightarrow \lambda x$. Едно разпределение $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ се нарича хомогенно от степен m , ако за всяко $\lambda > 0$ е в сила равенството

$$/88/ \quad u \circ T_\lambda = \lambda^m u$$

или по-подробно

$$(u, \varphi \circ \frac{T_\lambda}{\lambda}) = \lambda^{m+n} (u, \varphi), \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n).$$

Съображенията, които изтъкнахме в началото на тази точка, водят и до следната

Д е ф и н и ц и я 3.14. Нека $h \in \mathbb{R}^n$ и нека $\tau_h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ е трансляцията $x \rightarrow x - h$. Ако $u \in D'(\mathbb{R}^n)$, разпределението $u \circ \tau_h$ дефинираме чрез равенството

$$(u \circ \tau_h, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} (u, \varphi \circ \tau_h), \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^n).$$

Разпределенията, за които

$$/89/ \quad u \circ \tau_h = u$$

се наричат периодични с период h .

Не е трудно да се установи, че разпределенията от $D'(\mathbb{R}^n)$ с n линейно независими периода образуват линейно пространство - алгебрично и топологично изоморфно с $\mathcal{T}'_n$ /вж. упр. 9/.

Следващите теореми ни дават възможност да говорим за трансформация на Фурие на периодични и хомогенни разпределения.

Т е о р е м а 3.29. Всички хомогенни разпределения имат умерен ръст /т.е. са елементи на $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ /.

Теорема 3.30. Всички периодични разпределения от $D'(\mathbb{R}^n)$ с n линейно независими периоди са с умерен ръст.

Доказателство на теорема 3.29. Нека u е хомогенно разпределение от m -та степен и B е кълбото $|x| < 2$ в $\mathbb{R}^n$. Според дефиницията на разпределение за всяко $\varphi \in C_0^\infty(B)$ имаме

$$/90/ \quad |(u, \varphi)| \leq C_1 \sum_{|\alpha| \leq k} \max_B |\partial^\alpha \varphi(x)|,$$

с подходящи константи $C_1 = C_1(B)$ и $k = k(B)$. Нека сега $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ е произволна, но фиксирана. Да вземем $R = R(\varphi) > 1$ толкова голямо, че носителят на функцията $\Psi(x) = \varphi(Rx)$ да се съдържа в B . В такъв случай от /88/ и /90/ получаваме

$$|(u, \varphi)| = R^{n+m} |(u, \Psi)| \leq C_1 R^{n+m} \sum_{|\alpha| \leq k} \max_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha \Psi|,$$

т.е.

$$/91/ \quad |(u, \varphi)| \leq C_1 R^{n+m+k} \sum_{|\alpha| \leq k} \max_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

със същите константи $C_1 = C_1(B)$, $k = k(B)$ и $R = R(\varphi)$, зависещо само от $\text{supp } \varphi$. (Очевидно можем да вземем за $R(\varphi)$ разстоянието между началото на координатната система и най-отдалечената от него точка на $\text{supp } \varphi$.)

От /91/ лесно следва, че $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Наистина нека $f \in C_0^\infty(B)$ е неотрицателна функция, тъждествено равна на единица в някаква околност на кълбото $|x| \leq 1$. Да означим с $\mathbb{Z}^n$ решетката, образувана от n -мерните вектори с целочислени координати и да въведем функцията

$$/92/ \quad g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} f(x-l), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Очевидно е, че $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, защото когато x описва някакво ограничено множество, само краен брой от членовете на реда

/92/ са различни от нула. Освен това, от дефиницията на f следва, че g е положително за всяко $x \in \mathbb{R}^n$. Да положим

$$\theta(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Понеже $g(x-l) = g(x)$ за всяко $l \in \mathbb{Z}^n$, получаваме

$$/93/ \quad \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \theta(x-l) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \frac{f(x-l)}{g(x-l)} = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \frac{f(x-l)}{g(x)} = 1.$$

Някои автори наричат всяка функция, която удовлетворява условие от вида /93/ периодично разлагане на единицата.

Нека сега $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ е произволно. Имаме

$$(u, \varphi) = (u, \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \theta(x-l) \varphi(x)) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} (u, \theta(x-l) \varphi).$$

откъдето следва

$$/94/ \quad |(u, \varphi)| \leq \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} |(u, \theta(x-l) \varphi(x))|.$$

Остава да оценим събираемите в /94/. Да положим за краткост $\Psi_l(x) = \theta(x-l) \varphi(x)$. Понеже носителят на Ψ_l се съдържа в кълбото $|x-l| \leq 2$, можем да използваме /91/ с $R = |l| + 2$. Получаваме

$$|(u, \Psi_l)| \leq C_1 (|l| + 2)^{n+m+k} \sum_{|\alpha| \leq k} \max_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha \Psi_l(x)|,$$

откъдето с помощта на неравенството /вж. /24/, стр. 217/

$$\max_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha \Psi_l| \leq \int_{\text{supp } \Psi_l} |\partial^{\alpha+\rho} \varphi(x)| dx, \quad \rho = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{Z}^n$$

намираме

$$|(u, \psi_l)| \leq C_1 (|l|+2)^{n+m+k} \sum_{|\beta| \leq k+n} \int_{|x-l| \leq 2} |\partial^\beta \psi_l(x)| dx$$

/95/

$$\leq C_2 (|l|+2)^{m+n+k} \sum_{|\beta| \leq k+n} \int_{|x-l| \leq 2} |\partial^\beta \varphi(x)| dx,$$

като последното неравенство получихме с помощта на формулата на Лайбниц, съобразявайки, че производните на $\theta(x-l)$ са ограничени с константи, независещи от l . Остава да забележим, че всяко x от кълбото $|x-l| \leq 2$ удовлетворява неравенството

$|x| \geq |l| - 2$ и за $|l| \geq 6$ имаме $|l| - 2 \geq \frac{1}{2}(|l|+2)$. Следователно

$$/96/ (|l|+2)^{m+n+k} \int_{|x-l| \leq 2} |\partial^\beta \varphi(x)| dx$$

$$\leq 2^{m+n+k} \int_{|x-l| \leq 2} (1+|x|)^{n+m+k} |\partial^\beta \varphi(x)| dx.$$

След всичко това от /94/, /95/ и /96/ получаваме

$$|(u, \varphi)| \leq C_2 2^{m+n+k} \sum_{|\beta| \leq k+n} \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \int_{|x-l| \leq 2} (1+|x|)^{m+n+k} |\partial^\beta \varphi(x)| dx$$

/97/

$$\leq C_2 2^{m+n+k} \sum_{|\beta| \leq k+n} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{n+m+k} |\partial^\beta \varphi(x)| dx,$$

понеже при фиксирано $l \in \mathbb{Z}^n$ само краен брой от кълбата се пресичат и този краен брой не зависи от l . Тъй като полуноормата в дясната страна на /97/ е непрекъсната в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, доказателството на теорема 3.29 е завършено.

Доказателство на теорема 3.30. Нека $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ има n линейно независими периоди $h_1, h_2, \dots, h_n$. Без ограничение на общността можем да предположим, че $h_\nu = e_\nu$,

$\nu = 1, 2, \dots, n$, където $e_1, e_2, \dots, e_n$ е стандартната база в $\mathbb{R}^n$. Нека $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ е такава, че

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \theta(x+l) = 1.$$

Използвайки /89/ с $h = e_\nu$, $\nu = 1, 2, \dots, n$, получаваме

$$/98/ (u, \varphi) = (u, \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \theta(x+l) \varphi(x)) = (u, \theta(x) \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \varphi(x-l)).$$

Да въведем оператора

$$\pi : \varphi \rightarrow \sum_{l \in \mathbb{R}^n} \varphi(x-l)$$

(периодизация на φ). С негова помощ можем да представим /98/ във вида

$$/99/ (u, \varphi) = (u, \theta \pi(\varphi))$$

и понеже θ е с компактен носител, от това твърдение получаваме оценката

$$|(u, \varphi)| \leq C_1 \sum_{|\alpha| \leq k} \max_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha (\theta \pi(\varphi))|$$

/100/

$$\leq C_2 \sum_{|\alpha| \leq k} \max_{x \in \text{supp } \theta} |\partial^\alpha \pi(\varphi)|$$

с константи C_1 и k , зависещи само от θ .

Остава да покажем, че полуноормата в дясната страна на /100/ е непрекъсната в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Ще установим един малко по-общ резултат.

Л е м а 3.8. Нека α е фиксиран мултииндекс. Полуноормата

$$p_{\alpha}(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\mathbb{R}^n} |\partial^{\alpha} \pi(\varphi)|$$

е дефинирана и непрекъсната в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Д о к а з а т е л с т в о. Нека $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Очевидно имаме

$$(1+|x-l|)^{n+1} |\partial^{\alpha} \varphi(x-l)| \leq \sup_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{n+1} |\partial^{\alpha} \varphi(x)| \stackrel{\text{def}}{=} q_{\alpha}(\varphi),$$

откъдето получаваме

$$/101/ \quad \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} |\partial^{\alpha} \varphi(x-l)| \leq q_{\alpha}(\varphi) \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \frac{1}{(1+|x-l|)^{n+1}}.$$

Понеже редът $\sum_{l \in \mathbb{Z}^n} (1+|x-l|)^{-n-1}$ е равномерно сходящ в $\mathbb{R}^n$

/зад. 1 от следващото упражнение/, неговата сума ще бъде непрекъсната и ограничена в $\mathbb{R}^n$, защото очевидно притежава n -линейно независими периоди. Тъй като непрекъснатостта на p_{α} следва веднага от /101/ теорема 3.30 е доказана.

Т е о р е м а 3.31. Нека $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ е линеен и обратим оператор, а $\tau_h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ е трансляцията $x \rightarrow x-h$.

В такъв случай за $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ са в сила равенствата

$$/102/ \quad \widehat{u \circ T} = \frac{1}{|\det T|} \widehat{u} \circ ({}^t T)^{-1}$$

$$/103/ \quad \widehat{u \circ \tau_h} = e^{-i(\xi, h)} \widehat{u},$$

като произведението в /103/ се схваща в смисъла на деф.2.7, стр.205

($e^{-i(\xi, h)} \in \mathcal{O}_M!$), а с ${}^t T$ е означен спрегнатият оператор на T , въведен с деф.3.5, стр.301. В случая понеже базата в $\mathbb{R}^n$ е фиксирана, можем да отъждествим T с матрицата, която го представя. Тогава ${}^t T$ се отъждествява с транспонираната матрица.

Д о к а з а т е л с т в о. Прилагайки дефинициите, получаваме

$$(\widehat{u \circ T}, \varphi) = (u \circ T, \hat{\varphi}) = (u, \frac{\hat{\varphi} \circ T^{-1}}{|\det T|}),$$

а от друга страна,

$$\begin{aligned} (\hat{\varphi} \circ T^{-1})(\xi) &= \hat{\varphi}(T^{-1}\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(T^{-1}\xi, x)} \varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\xi, {}^t T^{-1}x)} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\xi, y)} \varphi({}^t T y) |\det T| dy \\ &= |\det T| (\varphi \circ {}^t T)(\xi). \end{aligned}$$

Следователно

$$(\widehat{u \circ T}, \varphi) = (u, \varphi \circ {}^t T) = (\widehat{u}, \varphi \circ {}^t T).$$

Да положим за момент $Q = ({}^t T)^{-1}$. В такъв случай получаваме

$$\begin{aligned} (\widehat{u \circ T}, \varphi) &= (\widehat{u}, \varphi \circ Q^{-1}) = |\det Q| \left(\widehat{u}, \frac{\varphi \circ Q^{-1}}{|\det Q|} \right) \\ &= |\det Q| \widehat{u} \circ Q, \end{aligned}$$

което е точно /102/, защото очевидно $|\det Q| = \frac{1}{|\det T|}$.

Остава да докажем /103/. Директното прилагане на дефиницията ни дава

$$/104/ \quad (\widehat{u \circ \tau_h}, \varphi) = (u \circ \tau_h, \hat{\varphi}) = (u, \hat{\varphi} \circ \tau_h).$$

От друга страна, имаме

$$(\hat{\varphi} \circ \tau_h)(\xi) = \hat{\varphi}(\xi+h) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x, \xi+h)} \varphi(x) dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x, \xi)} e^{-i(x, h)} \varphi(x) dx = (\hat{g} \varphi)(\xi),$$

където за по-голяма яснота сме положили $g(x) = e^{-i(x, h)}$. За-
мествайки в /104/, намираме

$$(\hat{u} \circ \hat{T}_h, \varphi) = (u, \hat{g} \varphi) = (\hat{u}, g(\xi) \varphi(\xi)) = (g(\xi) \hat{u}, \varphi),$$

което е точно /103/. Теорема 3.31 е доказана.

С л е д с т в и е 1. Нека $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ е хомогенно от сте-
пен m . Тогава $\hat{u}$ е хомогенно от степен $-m - n$.

Д о к а з а т е л с т в о. Дефиниционното равенство
 $u \circ T_\lambda = \lambda^m u$ ни дава $\hat{u} \circ \hat{T}_\lambda = \lambda^m \hat{u}$, откъдето с по-
мощта на /102/ получаваме

$$\lambda^m \hat{u} = \frac{1}{\lambda^n} \hat{u} \circ T_{\frac{1}{\lambda}},$$

т.е.

$$\hat{u} \circ T_{\frac{1}{\lambda}} = \lambda^{m+n} \hat{u}$$

или, което е същото

$$\hat{u} \circ T_\mu = \mu^{-m-n} \hat{u}, \quad \mu > 0,$$

защото $\lambda > 0$ беше произволно.

С това доказателството е завършено.

С л е д с т в и е 2. Ако разпределението $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ е ин-
вариантно относно ортогоналните трансформации, то и $\hat{u}$ има съдо-
то свойство.

Д о к а з а т е л с т в о. Нека $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ е ор-
тогонален линейен оператор.

Изхождайки от равенството $u \circ T = u$, получаваме

$$\hat{u} = \hat{u} \circ \hat{T} = \hat{u} \circ (\hat{T})^{-1} = \hat{u} \circ T, \text{ к.т.д.д.,}$$

защото за ортогоналните оператори /или матрици/ са в сила тъжде-
ствата

$$|\det T| = 1, \quad ({}^t T)^{-1} = T.$$

Периодичните разпределения намират ефектно приложение при из-
вода на класическата сумационна формула на Поасон.

**Т е о р е м а 3.32 /Поасон/. За всяко $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ е в
сила тъждеството**

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \varphi(l) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \hat{\varphi}(2\pi l).$$

Доказателството, което следва, почива върху една лема, която
до известна степен характеризира Фуриеровите образи на периодич-
ните разпределения.

Л е м а 3.9. Нека $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ е периодично с периоди
 $h e_1, h e_2, \dots, h e_n$, където h е константа, а
 $e_1, e_2, \dots, e_n$ е стандартната база в $\mathbb{R}^n$. Тогава $\hat{u}$ има вида

$$\hat{u} = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} c_l \frac{\delta_{2\pi l}}{h}, \quad c_l = \text{const},$$

където константите c_l зависят от u .

Д о к а з а т е л с т в о. Нека $\omega \in \mathbb{R}^n$ е период на u . От
равенството $u \circ T_\omega = u$ с помощта на /103/ получаваме

$$e^{-i(\xi, \omega)} \hat{u} = \hat{u}, \text{ т.е. } (e^{-i(\xi, \omega)} - 1) \hat{u} = 0.$$

От това равенство веднага следва, че носителят на $\hat{u}$ се съдържа в
подмножеството на $\mathbb{R}^n_\xi$, образувано от корените на уравнението
 $e^{-i(\xi, \omega)} = 1$, в случая множеството от точките на хиперравнините

$$(\xi, \omega) = 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Нека сега $\xi \in \text{supp } \hat{u}$. Като вземем последователно
 $\omega = h e_j, j = 1, 2, \dots, n$, за $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ получаваме

$$\xi_j = \frac{2k\pi}{h}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \text{ т.е. } \xi = \frac{2\pi}{h} l,$$

където $l \in \mathbb{Z}^n$. Сега вече не е трудно да се види, че $\hat{u}$ има вида

$$\hat{u} = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} c_l \delta_{\frac{2\pi}{h} l}$$

Наистина, нека точката $l \in \mathbb{Z}^n$ е фиксирана и нека q_l е кълбоото $|x - \frac{2\pi}{h} l| < 1$. Да разгледаме разпределението

$$v_l \stackrel{\text{def}}{=} q_l \hat{u},$$

където $q_l \in C_0^\infty(O_l)$ и е тъждествено равно на единица в по-малкото кълбо $K_l: |x - \frac{2\pi}{h} l| < \frac{1}{2}$. Ясно е, че $\hat{u}$ и v_l съвпадат в K_l . Понее носителът на v_l се състои от една единствена точка, теорема 2.14, стр.224 ни дава

$$v_l = \sum_{\alpha} a_{\alpha, l} \partial^\alpha \delta_{\frac{2\pi}{h} l},$$

където сумата е крайна. Оттук, понеже уравненията $e^{-i(\xi, h e_j)} = 1$ имат прости корени, леко следва, че само коефициентът $a_{0, l}$ може да бъде различен от нула [зад.2 от следващото упражнение]. Понее очевидно

$$\hat{u} = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} v_l$$

[проверете!], равенство /106/ е установено.

Доказателство на теорема 3.32. Да разгледаме функционала

$$u \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \delta_{hl}, \quad h = \text{const},$$

т.е.

$$(u, \varphi) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \varphi(hl), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Както показва /101/ [приложено за $\alpha = 0$], $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Тъй като $he_1, he_2, \dots, he_n$ са периоди на u , лема 3.9 е приложима и ни води до равенството

$$\hat{u} = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} c_l \delta_{\frac{2\pi}{h} l},$$

където константите c_l подлежат на определяне. Нека g_l е функцията от /107/. От /110/ следва

$$(\hat{u}, g_l) = c_l \left(\delta_{\frac{2\pi}{h} l}, g_l \right) = c_l g_l \left(\frac{2\pi}{h} l \right) = c_l,$$

което показва, че c_l се определят еднозначно от $\hat{u}$. Да вземем сега $h = \sqrt{2\pi}$. При този избор на h от /109/ и /110/ получаваме

$$u = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \delta_{\sqrt{2\pi} l},$$

$$\hat{u} = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} c_l \delta_{\sqrt{2\pi} l}$$

От /111/ следва

$$u e^{-i\sqrt{2\pi}(l_0, x)} = u$$

за всеки вектор $l_0 \in \mathbb{Z}^n$. Наистина имаме

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \left(\delta_{\sqrt{2\pi} l}, e^{-i\sqrt{2\pi}(l_0, x)} \varphi \right) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} e^{-i2\pi(l, l_0)} \varphi(\sqrt{2\pi} l)$$

$$= \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \varphi(\sqrt{2\pi} l) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} (\delta_{\sqrt{2\pi} l}, \varphi),$$

защото за всяко $l \in \mathbb{Z}^n$ числото (l, l_0) е цяло. На свой ред от /112/ следва, че и $\hat{u}$ е периодична с период $\sqrt{2\pi} l_0$. За да се

убедим в това, да фиксираме $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Последователно получаваме

$$\begin{aligned} (\hat{u}, \varphi) &= (u, \hat{\varphi}) = (u e^{-i\sqrt{2\pi}l_0, x}, \varphi) = (u, e^{-i\sqrt{2\pi}l_0, x} \hat{\varphi}) \\ &= (u, \hat{\varphi} \circ \tau_{\sqrt{2\pi}l_0}) = (\hat{u}, \varphi \circ \tau_{\sqrt{2\pi}l_0}) = (\hat{u} \circ \tau_{-\sqrt{2\pi}l_0}, \varphi), \end{aligned}$$

т.е.

$$/113/ \quad \hat{u} = \hat{u} \circ \tau_{-\sqrt{2\pi}l_0},$$

с което периодичността на $\hat{u}$ е установена.

$$\text{Понеже } \delta_{\sqrt{2\pi}l - \sqrt{2\pi}l_0} = \delta_{\sqrt{2\pi}(l - l_0)} \text{ и коефициенти-}$$

те в /112/ са еднозначно определени, /113/ ни дава $c_l = c_{l - l_0}$,

т.е. $c_l = c = \text{const}$, защото векторът $l_0 \in \mathbb{Z}^n$ беше съвсем

произволен. След като разполагаме с този резултат, сравнявайки /111/ и /112/ стигаме до важното равенство

$$/114/ \quad \hat{u} = cu,$$

от което следва $\hat{\hat{u}} = c\hat{u} = c^2u$. От друга страна, имаме

$\hat{\hat{u}} = (2\pi)^n \hat{u}$ /формула /35/, стр.299/ и понеже от /111/ следва $\hat{u} = u$, намираме $c^2 = (2\pi)^n$, защото очевидно u е различно от нула. За да определим знака на c , да вземем Гаусовата

функция $f(x) = e^{-|x|^2}$. Както видяхме в 3.1, стр.277, имаме

$$\hat{f}(\xi) = \pi^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4}} \text{ и следователно}$$

$$(\hat{u}, f) = (u, \hat{f}) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(\sqrt{2\pi}l) > 0.$$

Тези неравенства заедно със /114/ показват, че $c > 0$. Така

$$\text{получихме } c = (2\pi)^{\frac{n}{2}}.$$

Нека сега $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ е произволно. Според /114/ имаме

$$(u, \hat{\varphi}) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} (u, \varphi), \text{ т.е.}$$

$$/115/ \quad \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \hat{\varphi}(\sqrt{2\pi}l) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \varphi(\sqrt{2\pi}l).$$

Ако приложим това тъждество към функцията $\psi(x) = \varphi\left(\frac{x}{\sqrt{2\pi}}\right)$,

получаваме

$$/116/ \quad \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \hat{\varphi}(2\pi l) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \varphi(l),$$

което искаме да докажем. Известни са и други тъждества, равностойни със /115/ и /116/. Например, ако приложим /116/ към функцията

$\psi(x) = \varphi(x+y)$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $y \in \mathbb{R}^n$, получаваме

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}^n} e^{i(y, 2\pi l)} \hat{\varphi}(2\pi l) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \varphi(y+l).$$

Сумационната формула на Поасон, която установихме, има важни

приложения в различни клонове на анализа. Например равенството

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-tn^2} = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{t}}, \quad t > 0,$$

което се получава, като приложим /116/ към функцията e^{-tx^2} , играе важна роля в теорията на θ -функциите. Едно интересно приложение на един аналог на /116/ в теорията на числата се съдържа в [30], стр.21-24. Друго доказателство на /116/ /при по-общи предположения/ може да се намери в [23].

Упражнение 9

1. За какви показатели $s \geq 0$ редът

$$1/ \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \frac{1}{(1+|x-l|)^s}$$

е сходящ в $\mathbb{R}^n$?

У п ъ т в а н е. Самата структура на общия член показва, че е достатъчно да изследваме сходимостта на реда само за такива $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, за които $0 \leq x_j \leq 1$, $j = 1, 2, \dots, n$. Следователно задачата се свежда до изследването на реда

$$1/2/ \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} (1+|l|)^{-s}$$

За да се справите с последния, означете с $N(k)$ броя на точките от $\mathbb{Z}^n$, които лежат по контура на куба $Q_k: |x_j| \leq k$, $j = 1, 2, \dots, n$. С индукция по n установете съотношението $N(k) = O(k^{n-1})$, което ще позволи да сведете задачата до изследването на реда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{n-1}}{(1+k)^s}$$

и да заключите, че редовете 1/1/ и 1/2/ са сходящи за $s > n$.

2. Нека $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ е такова, че $fu = 0$, където $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ е от вида

$$f(x) = \prod_{j=1}^n \psi_j(x_j), \text{ където } \psi_j \neq 0, \text{ за } x_j \neq 0,$$

$$\psi_j(0) = 0, \psi_j'(0) \neq 0, \text{ за } j = 1, 2, \dots, n.$$

Докажете, че $u = c\delta$, $c = \text{const}$.

У п ъ т в а н е. Изхождайки от дефиницията, установете, че наистина $\text{supp } u = \{0\}$. Този факт заедно с теорема 2.14 ще ви даде възможност да заключите, че u има вида

$$u = \sum_{\alpha} c_{\alpha} \partial^{\alpha} \delta,$$

където сумата е крайна. Остава да се убедите, че всички коефициенти освен c_0 са нули.

За да вникнете в естеството на въпроса, започнете със случая $n = 1$. Допуснете за определеност, че

$$1/3/ u = \sum_{j=0}^k c_j \delta^{(j)}, \quad c_k \neq 0, \quad k > 0,$$

и въведете функцията $\varphi_k(x) = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \ell(x)$, където $\ell \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ и е тъждествено равна на единица в някаква околност на началото. Понеже $\psi_1 u \equiv 0$, имаме $(u, \psi_1 \varphi_k) = 0$ и 1/3/ ни дава

$$1/4/ c_k (\psi_1 \varphi_k)^{(k)}(0) = 0,$$

защото $\psi_1 \varphi_k$ има в началото нула от ред, по-голям или равен на k . Като разкриете скобите в 1/4/, ще видите, че $c_k = 0$, което противоречи на предположението $c_k \neq 0$.

За да се справите с общия случай, забележете, че за $\delta \in D'(\mathbb{R}^n)$ $\delta = \delta^1 \otimes \delta^2 \otimes \dots \otimes \delta^n$, където $\delta^i \in D'(\mathbb{R}^1)$ са едномерните функции на Дирак и разглеждайте функции $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$,

които имат вида $\varphi(x) = \prod_{j=1}^n \varphi_j(x_j)$, $\varphi_j \in D(\mathbb{R}^1)$. Свойствата на тензорното произведение ще ви позволят да стигнете до вече разгледания случай $n = 1$.

3. Нека $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ е хомогенно разпределение от m -та степен. Докажете, че разпределенията $\frac{\partial u}{\partial x_j}$, $j = 1, \dots, n$ са хомогенни от степен $m - 1$, а разпределенията $x_j u$ — от $m + 1$ степен.

Установете тъждеството на Ойлер

$$\sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = m u.$$

У п ъ т в а н е. За да стигнете до уравнението на Ойлер, диференцирайте равенството $(u, \varphi(\frac{x}{\lambda})) = \lambda^{n+m}(u, \varphi)$ спрямо λ при фиксирано $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ и след това положете $\lambda = 1$.

4. За какви редци $\{a_\nu\}$ редът

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu e^{i\nu x}$$

е сходящ в $D'(\mathbb{R}^1)$? Намерете необходимо и достатъчно условие.

У п ъ т в а н е. Допуснете, че редът е сходящ и означете сумата му с u . След това установете равенството

$$a_\nu = \frac{1}{2\pi} (u, e^{-i\nu x} \theta(x)),$$

където $\theta \in D(\mathbb{R}^1)$ и е такова, че

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \theta(x+2k\pi) = 1, \quad x \in \mathbb{R}^1.$$

5. Да означим за момент с $D'_\pi(\mathbb{R}^n)$ периодичните разпределения с периоди $\pi l_1, \pi l_2, \dots, \pi l_n$, където както в текста

$\{l_j\}$ е стандартната база в $\mathbb{R}^n$. В това упражнение е скицирано доказателство на твърдението, че пространствата $\mathcal{F}'_n$ /вж. стр.270/ и $D'_\pi(\mathbb{R}^n)$ са топологично и алгебрично изоморфни. За простота ще се ограничим с разглеждането на случая $n = 1$.

а/ Докажете, че операторът $\varphi \xrightarrow{\pi} \pi(\varphi)$, където

$$\pi(\varphi)(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(x+2k\pi)$$

изобразява непрекъснато $D(\mathbb{R}^1)$ в $\mathcal{F}'$ /за деф. вж.стр.266 /.От този факт следва, че неговият спрегнат ${}^t\pi$, който действа по правилото

$$({}^t\pi u, \varphi) = (u, \pi\varphi),$$

изобразява непрекъснато $\mathcal{F}'$ в $D'_\pi(\mathbb{R}^1)$.

б/ Нека $\theta \in D(\mathbb{R}^1)$ е такова, че

$$15/ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \theta(x+2k\pi) = 1, \quad x \in \mathbb{R}^1.$$

Проверете, че операторът $f \xrightarrow{\theta} \theta f$ изобразява непрекъснато $\mathcal{F}$ в $D(\mathbb{R}^1)$. Следователно неговият спрегнат ${}^t\theta$, дефиниран чрез равенството

$$({}^t\theta u, f) = (u, \theta f),$$

изобразява непрекъснато $D'(\mathbb{R}^1)$ в $\mathcal{F}'$.

в/ Докажете, че изображенията

$$\mathcal{F}' \xrightarrow{{}^t\theta {}^t\pi} \mathcal{F}', \quad D'(\mathbb{R}^1) \xrightarrow{{}^t\pi {}^t\theta} D'(\mathbb{R}^1),$$

които според а/ и б/ са непрекъснати, имат следните свойства: първото от тях е идентитет, а рестрикцията на ${}^t\pi {}^t\theta$ в $D'_\pi(\mathbb{R}^1)$ е идентитет. Следователно

$$D'_\pi(\mathbb{R}^1) \xrightarrow{{}^t\theta} \mathcal{F}'$$

е търсеният изоморфизъм. Неговият обратен е ${}^t\pi$.

За образец ще докажем част от твърдението. Нека $u \in D'_\pi(\mathbb{R}^1)$, $\varphi \in D(\mathbb{R}^1)$. Тогава имаме

$$(u, \theta(x) \varphi(x+2k\pi)) = (u, \theta(x-2k\pi) \varphi(x)).$$

Като имаме това пред вид, получаваме

$$({}^t\pi {}^t\theta u, \varphi) = ({}^t\theta u, \pi(\varphi)) = (u, \theta \pi(\varphi)) = (u, \theta(x) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(x+2k\pi))$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (u, \theta(x) \varphi(x + 2k\pi)) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (u, \theta(x - 2k\pi) \varphi(x))$$

$$= (u, \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \theta(x - 2k\pi) \varphi(x)) = (u, \varphi).$$

Бсички суми бяха крайни, така че в същност въпросът за сходимост не възниква никъде.

г/ В а/ видяхме, че операторът $\varphi \rightarrow \pi(\varphi)$ действа непрекъснато от $D(\mathbb{R}^1)$ в $\mathcal{P}$. Покажете, че с помощта на равенството

$$(\pi(u), \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} (u, \pi(\varphi))$$

той се продължава до непрекъснато изображение на $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^1)$ в $\mathcal{D}'_{\pi}(\mathbb{R}^1)$. Проверете равенствата

$$16/ \quad \pi(D) = \mathcal{P}, \quad \pi(\mathcal{E}') = \mathcal{D}'_{\pi},$$

като комбинирате този резултат с резултата от в/, заключете, че за всяко $v \in \mathcal{P}'$ съществува $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^1)$ такава, че $v = {}^t\theta \pi(u)$. С други думи, всяко периодично разпределение произхожда от разпределение с компактен носител. Докажете, че ако $v = {}^t\theta \pi(u)$, $u, \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^1)$, то

$$17/ \quad (v, f)_{\mathcal{P}} = (u, f)_D, \quad \forall f \in \mathcal{P}.$$

Знакът $(u, f)_D$ показва, че u действа на f като елемент от $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^1)$. В частния случай, когато u и v са сумируеми функции, 17/ - взема вида

$$18/ \quad \int_{-\pi}^{+\pi} v(x) f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) f(x) dx.$$

У п ъ т в а н е. За да проверите 16/, вземете пред вид, че ако $w \in \mathcal{P}$ (съответно на $\mathcal{D}'_{\pi}$) и $\theta \in D(\mathbb{R}^1)$ удовлетворява 15/, то $\theta w \in D$ (съответно на $\mathcal{E}'$) и $w = \pi(\theta w)$. За да няма

неясноти, ще проверим 17/. Ако $f \in \mathcal{P}$, имаме

$$({}^t\theta \pi(u), f)_{\mathcal{P}} = (\pi(u), \theta f)_D = (u, \pi(\theta f))_{D'} = (u, f)_{D'},$$

защото от $f \in \mathcal{P}$ следва $\pi(\theta f) = f$.

6. Нека $k \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ и е хомогенна от степен $-n$. Нека освен това

$$\int_{|x|=1} k(x) ds = 0.$$

Такива функции /обикновено без изискването за непрекъснатост/ се наричат сингулярни ядра на Зигмунд - Калдерон. Очевидно е, че може да се представи във вида

$$k(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^n},$$

където Ω е хомогенна от нулева степен и

$$19/ \quad \int_{|x|=1} \Omega(x) ds = 0.$$

Докажете, че ако k има изброените свойства, границата

$$(\mathcal{V}.p.k, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ |x| \geq \varepsilon}} \int k(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$$

съществува и така дефинираният функционал $\mathcal{V}.p.k$ е разпределение от $\mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$. Докажете, че ако $k \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ и границата

$$10/ \quad \hat{k}(\xi) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \int_{\varepsilon \leq |x| \leq N} e^{-i(x, \xi)} k(x) dx$$

съществува и $\widehat{\mathcal{V}.p.k} = \hat{k}(\xi)$, където $\widehat{\mathcal{V}.p.k}$ е Фуриеровият образ на $\mathcal{V}.p.k$ в $\mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$.

У п ъ т в а н е. За да докажете първото твърдение, използвайте равенството

$$\int_{|x| \geq \varepsilon} k(x) \varphi(x) dx = \int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} k(x) (\varphi(x) - \varphi(0)) dx$$

$$+ \int_{|x| \geq 1} k(x) \varphi(x) dx,$$

което следва от /9/. За да установите, че границата /10/ съществува, използвайте аналогично разлагане.

За да се справите с $\int_{1 \leq |x| \leq N} e^{-i(x, \xi)} k(x) dx,$ използ-

звайте тъждеството

$$\xi_j e^{-i(x, \xi)} = -\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} e^{-i(x, \xi)}.$$

и няколко пъти интегрирайте по части. Вземете пред вид, че и производните на k са хомогенни.

3.10. Аналитично продължение на разпределения. Един пример

Д е ф и н и ц и я 3.15. Нека G е област в комплексната равнина, а X е линейно и отделимо локално изгънало пространство над полето $\mathbb{C}$ на комплексните числа. Една функция

$$f : G \longrightarrow X$$

се нарича слабо аналитична, ако за всеки линеен функционал $F \in X^*$ числовата функция

$$z \longrightarrow F(f(z))$$

е холоморфна в G .

За нас най-важни са случаите, когато X съвпада с някое от пространствата $D'(\Omega)$ и $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (Ω - област в $\mathbb{R}^n$).

Понеже $D'(\Omega)$ и $\mathcal{S}'$ са рефлексивни [7], т.1/ стигаме до следната

Д е ф и н и ц и я 3.16. Едно изображение

$$/117/ \quad u : G \longrightarrow D'(\Omega) \quad (\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$$

е слабо аналитично в G , ако за всяко фиксирано $\varphi \in D(\Omega)$ ($\varphi \in \mathcal{S}$) числовата функция

$$/118/ \quad z \longrightarrow (u(z), \varphi)$$

е холоморфна в G . Нашата цел тук е да докажем следната

Т е о р е м а 3.33. Нека $\mathcal{H}$, $\mathcal{H} \supset G$ е област в комплексната равнина и нека за всяко фиксирано $\varphi \in D(\Omega)$ ($\varphi \in \mathcal{S}$) функцията /118/ се продължава аналитично в $\mathcal{H}$. Тогава и изображението /117/ се продължава до слабо-аналитична функция

$$\mathcal{H} \longrightarrow D'(\Omega) \quad (\mathcal{S}').$$

Д о к а з а т е л с т в о. Най-напред ще докажем, че слабата граница

$$u'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(z+h) - u(z)}{h},$$

която по предположение съществува, е също слабо аналитична в G .

Нека z_0 е точка от G и $\{h_\nu\} \rightarrow 0$ е редица от комплексни числа, такава, че $h_\nu \neq 0$ и $z_0 + h_\nu \in G$ за $\nu = 1, 2, 3, \dots$ Каквато и да бъде функцията $\varphi \in D(\Omega)$ ($\varphi \in \mathcal{S}$), границата

$$\lim_{h_\nu \rightarrow 0} \left(\frac{u(z_0 + h_\nu) - u(z_0)}{h_\nu}, \varphi \right)$$

съществува по условие. Като оставим φ да се мени, получаваме линеен функционал, който ще означим с $u'(z_0)$.

Сега теорема 5.7, гл. I показва, че $u'(z_0) \in D'(\Omega)$ ($\mathcal{F}'$).
Понеже $z_0 \in G$ беше произволно, като го оставим да опише G , получаваме изображение

$$G \xrightarrow{u'} D'(\Omega) (\mathcal{F}'),$$

което очевидно е слабо аналитично, защото при фиксирано $\varphi \in D(\Omega)$ ($\varphi \in \mathcal{F}$) функцията $z \rightarrow (u'(z), \varphi)$ е производна на холоморфната функция $z \rightarrow (u(z), \varphi)$. Повтаряйки няколко пъти това разсъждение, виждаме, че всяка от производните

$$u^{(v)} : G \rightarrow D'(\Omega) (\mathcal{F}) \quad v = 1, 2, 3, \dots$$

е слабо аналитична.

Сега вече сме близо до целта. Нека $z_0 \in G$ и $\delta > 0$ са такива, че кръгът $K: |z - z_0| < \delta$ се съдържа в H , но не се съдържа в G . За всяко фиксирано φ редът

$$/118/ \quad \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(u^{(v)}(z_0), \varphi)}{v!} (z - z_0)^v$$

е сходящ в K , понеже функцията $z \rightarrow (u(z), \varphi)$ е холоморфна в H и $K \subset H$. Ако означим с (u, φ) сумата на /118/, както по-горе се убеждаваме, че функционалът $\varphi \rightarrow (u, \varphi)$ е разпределение, защото парциалните суми на /118/ имат това свойство. Понеже изображението

$$u : K \rightarrow D'(\Omega) (\mathcal{F})$$

очевидно съвпада с u в $K \cap G$, ние успяхме да продължим u в $G \cup K$. Останалото е ясно.

Следващият важен пример е разглеждан от Адамар дълго преди създаването на теорията на разпределенията.

Да разгледаме функцията

$$x_+^{\lambda-1} = \begin{cases} x^{\lambda-1}, & x > 0 \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

която за $\operatorname{Re} \lambda > 0$ може да се схваща като разпределение от

$\mathcal{F}'(\mathbb{R}^1)$, защото за всяко $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^1)$ интегралът

$$(u(\lambda), \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} (x_+^{\lambda-1}, \varphi) = \int_0^{\infty} x^{\lambda-1} \varphi(x) dx$$

е сходящ. Да потърсим аналитично продължение на u . Нека все още $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Имаме

$$\begin{aligned} (u(\lambda), \varphi) &= \int_0^1 x^{\lambda-1} \varphi(x) dx + \int_1^{\infty} x^{\lambda-1} \varphi(x) dx \\ &= \int_0^1 x^{\lambda-1} (\varphi(x) - \varphi(0)) dx + \frac{\varphi(0)}{\lambda} + \int_1^{\infty} x^{\lambda-1} \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Виждаме, че полученият израз има смисъл за $\operatorname{Re} \lambda > -1, \lambda \neq 0$ и е аналитична функция на λ , ако $\varphi \in \mathcal{F}'(\mathbb{R}^1)$ е фиксирано. Следователно той ни дава търсеното аналитично продължение. Нещо повече, по същия начин получаваме тъждеството

$$\begin{aligned} (u(\lambda), \varphi) &= \int_0^1 x^{\lambda-1} \left(\varphi(x) - \sum_{v=0}^{k-1} \frac{\varphi^{(v)}(0) x^v}{v!} \right) dx \\ &+ \sum_{v=0}^{k-1} \frac{\varphi^{(v)}(0)}{v!} \frac{1}{\lambda+v} + \int_1^{\infty} x^{\lambda-1} \varphi(x) dx, \end{aligned}$$

което ни позволява да продължим u аналитично в полуравнината $\operatorname{Re} \lambda > -k$, от която са изрязани точките $\lambda = 0, -1, -2, \dots, -k+1$.

Понеже k е произволно, по този начин успяхме да продължим функцията $\lambda \rightarrow u(\lambda)$ до мероморфна функция в $\mathbb{C}$ с полюси в точките $\lambda = 0, -1, -2, \dots$.

При всяко λ , което не е полюс, $u(\lambda)$ е разпределение от $\mathcal{F}'(\mathbb{R}^1)$.

Същата идея води и до аналитично продължение на разпределението $u(\lambda) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, с плътност $|x|^{\lambda-n}$, $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Наистина, за $\operatorname{Re} \lambda > 0$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ имаме

$$(u(\lambda), \varphi) = \int_{|x| \leq 1} \frac{\varphi(x) - \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\partial^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} x^\alpha}{|x|^{\lambda-n}} dx + \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\partial^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} c_\alpha + \int_{|x| \geq 1} \frac{\varphi(x)}{|x|^{\lambda-n}} dx,$$

където

$$c_\alpha = \int_{|x| \leq 1} \frac{x^\alpha}{|x|^{\lambda-n}} dx = \int_0^1 r^{|\alpha|+\lambda-1} dr \int_{|y|=1} y^\alpha d\sigma_n = \frac{1}{|\alpha|+\lambda} \int_{|y|=1} y^\alpha d\sigma_n$$

($d\sigma_n$ е елементът на лицето на единичната сфера в $\mathbb{R}^n$). Понеже

$$\int_{|y|=1} y^\alpha d\sigma_n = 0, \text{ ако } \alpha \text{ има поне една нечетна компонента}$$

/зад.1 от следващото упражнение/, полученото тъждество позволява да продължим $u(\lambda)$ аналитично в полуравнината $\operatorname{Re} \lambda > -k-1$, от която са изрязани тези от точките $0, -2, -4, \dots -2S, \dots$, които лежат в нея. Понеже числото k е на наше разположение, продължаваме $u(\lambda)$ до мероморфна функция в $\mathbb{C}$ с прости полюси в точките

$$\lambda = 0, -2, -4, \dots, -2k, \dots$$

Ако с $\Gamma(\lambda)$ означим Ойлеровата Гама функция, можем да твърдим, че функцията $\frac{u(\lambda)}{\Gamma(\frac{\lambda}{2})}$ се продължава до цяла функция в $\mathbb{C}$, защото полюсите на $u(\lambda)$ и нулите на $\frac{1}{\Gamma(\frac{\lambda}{2})}$ взаимно се унищожават ([31], стр. 338).

Нашата следваща задача е да пресметнем Фуриеровата трансформация на $u(\lambda)$ за $\lambda \neq 0, -2, -4, \dots$ ($u(\lambda) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$). Ще започнем с най-простия случай $-n < \lambda - n < 0$, т. е. $0 < \lambda < n$, когато функцията $|x| \rightarrow |x|^{\lambda-n}$ има интегрируема особеност в началото. Нека отново χ е камбановидната функция от стр.167. Имаме

$$|x|^{\lambda-n} = \chi(x) |x|^{\lambda-n} + (1 - \chi(x)) |x|^{\lambda-n} = f_1(x) + f_2(x).$$

Първото събираемо е локално интегрируема функция с компактен носител — следователно $\hat{f}_1$ е аналитична. За нас е важно да установим, че $\hat{f}_2$ е непрекъснатата функция в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. За тази цел ще отбележим, че за $|x| > 1$ имаме

$$f_2(x) = |x|^{\lambda-n}$$

и ще диференцираме. Тъждеството

$$\Delta f_2(x) = A(n, \lambda) |x|^{\lambda-n-2}, \quad |x| > 1, \quad A(n, \lambda) = \text{const}$$

показва, че за достатъчно голямо k $\Delta^k f_2 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и сле-

дователно $\widehat{\Delta^k f_2}$ е непрекъснатата. Сега вече с помощта на равенството $\hat{f}_2(\xi) = - \frac{\widehat{\Delta^k f_2}(\xi)}{|\xi|^{2k}}$ заключаваме, че и $\hat{f}_2$ е непрекъснатата в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Сумирайки получените резултати, виждаме, че функцията

$$g \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{|x|^{\lambda-n}} \text{ е непрекъснатата в } \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ за } 0 < \lambda < n. \text{ Спом-}$$

няйки си за следствия 1 и 2 от теорема 3.31, заключаваме, че g е хомогенна от степен $-\lambda$ и е инвариантна относно ортогонални трансформации. Следователно

$$g(\xi) = g(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = |\xi|^{-\lambda} g\left(\frac{\xi_1}{|\xi|}, \frac{\xi_2}{|\xi|}, \dots, \frac{\xi_n}{|\xi|}\right) \\ = |\xi|^{-\lambda} g(1, 0, 0, \dots, 0).$$

/За да получим последното равенство, използвахме ортогонална трансформация, която изобразява точката $\left(\frac{\xi_1}{|\xi|}, \dots, \frac{\xi_n}{|\xi|}\right)$ в $(1, 0, 0, \dots, 0)$./ И така

$$g(\xi) = C(\lambda, n) |\xi|^{-\lambda}.$$

Остава да пресметнем $C(\lambda, n)$. Понеже и $|\xi|^{-\lambda}$ е локално интегруема, като поставим $\varphi(x) = e^{-|x|^2}$ в тъждеството

$$(\widehat{u(\lambda)}, \varphi) = (u(\lambda), \widehat{\varphi}), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

стигаме до равенството

$$C(\lambda, n) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-|\xi|^2}}{|\xi|^\lambda} d\xi = \pi^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\lambda-n} e^{-\frac{|x|^2}{4}} dx,$$

откъдето се определя $C(\lambda, n)$.

Да опростим малко полученото тъждество. Използвайки полярни координати, намираме

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-|\xi|^2}}{|\xi|^\lambda} d\xi = \sigma_n \int_0^\infty r^{-\lambda} e^{-r^2} r^{n-1} dr = \frac{\sigma_n}{2} \int_0^\infty t^{\frac{-\lambda+n-1}{2}} e^{-t} \frac{dt}{\sqrt{t}} \\ = \frac{\sigma_n}{2} \int_0^\infty t^{\frac{n-\lambda}{2}-1} e^{-t} dt = \frac{\sigma_n}{2} \Gamma\left(\frac{n-\lambda}{2}\right),$$

където σ_n е лицето на единичната сфера. Вторият интеграл се преработва аналогично и ние получаваме

$$C(\lambda, n) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{2^{-\lambda} \Gamma\left(\frac{n-\lambda}{2}\right)},$$

т.е.

$$/119/ \quad \frac{\widehat{u(\lambda)}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2^{-\lambda}} \frac{u(n-\lambda)}{\Gamma\left(\frac{n-\lambda}{2}\right)}, \quad 0 < \lambda < n,$$

защото очевидно $u(n-\lambda) = |\xi|^{-\lambda}$.

Сега остава да припомним, че както видяхме по-горе, $\frac{u(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)}$ се

продължава аналитично до цяла функция. От дефиницията тривиално

следва, че тогава и $\frac{\widehat{u(\lambda)}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)}$ има това свойство. Понеже и функ-

цията в дясната страна на /119/ се продължава до цяла функция /тя е от същия вид/, теоремата за единственост показва, че /119/ е в сила за всяко $\lambda \in \mathbb{C}$.

С това нашата задача е решена.

У п р а ж н е н и е 10

1. Нека $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ е мултииндекс с поне една нечетна компонента. Покажете, че

$$\int_{|x|=1} x^\alpha d\sigma_n = 0.$$

У п ъ т в а н е. Ако α_j е нечетно, използвайте, че $|x| = 1$ е симетрична относно хиперравнината $x_j = 0$ и си послужете с подходящо подобрени Риманови суми.

2. Изходвайки от равенството

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = \pi^{\frac{n}{2}}$$

пресметнете лицето на сферата $|x| = 1$.

У п ъ т в а н е. Използвайте полярни координати.

$$\text{Отг. } \sigma_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}.$$

Резултатът може да се опрости. Ако $n = 2p$, то $\Gamma(\frac{n}{2}) = \Gamma(p) = (p-1)!$. За $n = 2p+1$ получаваме

$$\Gamma(\frac{n}{2}) = \Gamma(p + \frac{1}{2}) = (p - \frac{1}{2})(p - \frac{3}{2}) \dots \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}} \frac{(2p-1)!}{(p-1)!},$$

защото

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = 2 \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

3. Нека G е област в комплексната равнина, а X е Хаусдорфово локално изпъкнало пространство над $\mathbb{C}$. Функцията

$$u : G \longrightarrow X$$

се нарича **силно аналитична**, ако за всяко $z_0 \in G$ границата

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(z_0+h) - u(z_0)}{h}, \quad h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad z_0+h \in G$$

съществува.

Ако X е секвенциално пълно, докажете, че всяка слабо аналитична функция

$$u : G \longrightarrow X$$

е и силно аналитична.

У п ъ т в а н е. Нека $z_0 \in G$ и нека $r > 0$ е толкова малко, че кръгът $K : |z - z_0| < r$ да се съдържа в G . Да положим

$$\Delta_u(h) = \frac{u(z_0+h) - u(z_0)}{h}, \quad 0 < h \leq r.$$

Докажете, че множеството

$$\Omega_{h,k}(z_0) = \frac{\Delta_u(h) - \Delta_u(k)}{h-k}, \quad h \neq k, \quad 0 < |h| \leq \frac{r}{2}, \quad 0 < |k| \leq \frac{r}{2}$$

е ограничено в X . За тази цел вземете $l \in X^*$, въведете аналитичната функция $f(z) \stackrel{\text{def}}{=} l(u(z))$, $z \in G$ и с помощта на интегралната формула на Коши установете неравенството

$$\left| \frac{\Delta_f(h) - \Delta_f(k)}{h-k} \right| \leq C \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|,$$

за $0 < |h| \leq \frac{r}{2}$, $0 < |k| \leq \frac{r}{2}$, $h \neq k$. После използвайте теорема 6.4, стр.147 и теорема 2.20, стр.36.

4. Нека $\{u_\nu\} \subset \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ е слабо сходяща редица от разпределения с равномерно ограничени носители и нека N_ν е редът на u_ν .

1. Докажете, че редицата $\{N_\nu\}$ е ограничена.

2. Установете, че редицата от цели функции

$$\hat{u}_\nu(\xi) = (u_\nu, e^{-i(\cdot, \xi)}), \quad \nu = 1, 2, 3, \dots$$

е равномерно сходяща върху всеки компакт в $\mathbb{C}^n$.

У п ъ т в а н е към 1. Допуснете противното и потърсете противоречие с факта, че силната и слабата сходимост на редиците в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ съвпадат.

Допълнение 1. Теорема за изпъкналост на Рис-Торин. Неравенство на Хаусдорф-Йънг. Нека (X, μ) и (Y, ν) са пространства с изброимо-адитивни положителни мерки¹ и нека S_X и S_Y са линей-

¹Вж. например [6], стр.264-293 или [30], стр. 282 - 294.

Читателите, които не искат да се задълбочават в общата теория на

ните пространства от стъпаловидните комплексни функции, дефинирани съответно в X и Y . Ще припомним, че една функция $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ се нарича стъпаловидна, когато има вида

$$1/1 \quad f(x) = \sum c_j \chi_j(x), \quad c_j \neq 0,$$

където сумата е крайна, c_j са комплексни числа, а χ_j са характеристични функции на някакви μ -измерими множества E_j такива, че $E_i \cap E_j = \emptyset$ при $j \neq i$ и всяко E_j има крайна мярка.

Д е ф и н и ц и я 1. Нека

$$T: \mathcal{S}_X \longrightarrow \mathcal{S}_Y$$

е линеен оператор. Казваме, че T е от тип (p, q) , $p \geq 1, q \geq 1$, ако за всяка стъпаловидна функция $f \in \mathcal{S}_X$ е в сила неравенство от вида

$$1/2 \quad \|Tf\|_{q, \nu} \leq M \|f\|_{p, \mu}, \quad M = \text{const},$$

където естествено

$$\|f\|_{p, \mu} = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in \mathcal{S}_X$$

$$\|g\|_{q, \nu} = \left(\int_Y |g(y)|^q d\nu \right)^{\frac{1}{q}}, \quad g \in \mathcal{S}_Y.$$

Понеже $\mathcal{S}_X$ е навсякъде гъсто в $L^p(X, \mu)$ всеки оператор от тип (p, q) може да се продължи по непрекъснатост до еднозначно определен линеен оператор

$$T: L^p(X, \mu) \longrightarrow L^q(Y, \nu),$$

който удовлетворява 1/2 за всяко $f \in L^p(X, \mu)$.

мярката, могат да си мислят, че X и Y са области съответно в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$, а μ и ν са Лебеговите мерки в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$.

Следващата теорема на Рис и Торин е една от най-простите и най-важни теореми за интерполиране и е породила цял клон от анализа /за обобщения вижте том II на [7] и [28] /.

Т е о р е м а на Р и с - Т о р и н. Нека

$$T: \mathcal{S}_X \longrightarrow \mathcal{S}_Y$$

е линеен оператор едновременно от тип $\left(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\beta_1}\right)$ и $\left(\frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\beta_2}\right)$,

където точките $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2)$ лежат в квадрата $0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1$. Нека за определеност

$$\|Tf\|_{\frac{1}{\beta_i}} \leq M_i \|f\|_{\frac{1}{\alpha_i}}, \quad i=1,2, \quad f \in \mathcal{S}_X.$$

Тогава T е и от тип $\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right)$, където

$$1/3 \quad \begin{aligned} \alpha &= \alpha(t) = (1-t)\alpha_1 + t\alpha_2, \\ \beta &= \beta(t) = (1-t)\beta_1 + t\beta_2, \end{aligned} \quad 0 < t < 1$$

и освен това

$$1/4 \quad \|Tf\|_{\frac{1}{\beta}} \leq M_1^{1-t} M_2^t \|f\|_{\frac{1}{\alpha}}, \quad f \in \mathcal{S}_X.$$

З а б е л е ж к а. Ако означим с M_t нормата на T като оператор, действащ от $L^{\alpha(t)}(X, \mu)$ в $L^{\beta(t)}(Y, \nu)$, 1/4 показва, че е в сила неравенството

$$1/5 \quad \ln M_t \leq (1-t) \ln M_1 + t \ln M_2,$$

т.е. $\ln M_t$ е изпъкнала функция на t -обстоятелство, което е важно в редица приложения. От друга страна, според 1/3 и множеството от реципрочните стойности на числата p и q , за които T е от тип (p, q) е изпъкнало. Оттук и названието теорема за изпъкналост на Рис-Торин.

Преди да се заемем с доказателството, ще припомним едно полезно обобщение на принципа за максимума на модула на аналитичните функции. Става дума за така наречената

Теорема за трите прави. Да означим с G ивицата $0 < \operatorname{Re} z < 1$ и да разгледаме функцията $f: G \rightarrow \mathbb{C}$, която е холоморфна в G и непрекъсната в $\bar{G}$. Нека освен това в G е в сила неравенството

$$|f(z)| \leq A e^{b|z|}$$

с положителни константи A и b . Да предположим накрая, че f е ограничена върху контурните прави $\operatorname{Re} z = 0$ и $\operatorname{Re} z = 1$ и да положим

$$M_0 = \sup_{y \in \mathbb{R}^1} |f(iy)|, \quad M_1 = \sup_{y \in \mathbb{R}^1} |f(1+iy)|.$$

Тогава f е ограничена в цялата ивица и

$$M_x \leq M_0^{1-x} M_1^x, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

където естествено

$$M_x = \sup_{y \in \mathbb{R}^1} |f(x+iy)|.$$

Доказателство. Да въведем помощната функция

$$g_\varepsilon(z) = f(z) e^{\varepsilon z^2 + \lambda z},$$

където $\varepsilon > 0$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ са константи. Непосредствено получаваме

$$\begin{aligned} |g_\varepsilon(z)| &\leq A e^{b|z|} e^{\varepsilon(x^2 - y^2) + \lambda x} \\ &\leq B_\varepsilon e^{b|y| - \varepsilon y^2}, \quad (B_\varepsilon = \text{const}, z = x + iy), \end{aligned}$$

откъдето се вижда, че $g_\varepsilon(x + iy) \rightarrow 0$ при $|y| \rightarrow \infty$ и то равномерно относно $x \in [0, 1]$. ($\varepsilon > 0$ остава фиксирано).

Нека $z_0 \in G$. Да вземем $N = N(z_0)$ толкова голямо, че точката z_0 да се съдържа в правоъгълника $G_N = G \cap \{|y| \leq N\}$ и освен това да бъдат в сила неравенствата

$$|g_\varepsilon(x + iN)| < \min(M_0, M_1 e^\lambda), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Като приложим принципа за максимума към G_N , получаваме

$$|g_\varepsilon(z_0)| \leq \max(M_0, M_1 e^{\lambda + \varepsilon}),$$

откъдето след граничния преход $\varepsilon \rightarrow 0$ следва неравенството

$$|f(z_0)| \leq \max(M_0 e^{-\lambda x_0}, M_1 e^{(1-x_0)\lambda})$$

Остава да изберем λ по такъв начин, че величината в дясно да

бъде минимална. За $\lambda = \ln \frac{M_0}{M_1}$ получаваме

$$|f(z_0)| \leq M_0^{1-x_0} M_1^{x_0}$$

и понеже точката $z_0 = x_0 + iy_0$ беше произволна, доказателството е завършено.

Сега вече можем да се заемем с доказателството на теоремата на Рис-Торин. Доказателството, което следва, е взето от [29], и по принцип не се различава от доказателството на самия Торин [28].

З а б е л е ж к а. Първоначално теоремата е била доказана от М.Рис през 1926 г. при допълнителното предположение $\beta \leq \alpha$ и от Торин в общия случай през 1938 г. Доказателството на Торин слага началото на така наречения комплексен метод за интерполиране.

Доказателство. Нека числата α и β , дефинирани чрез /3/, са фиксирани и нека най-напред $\alpha > 0$, $\beta \neq 1$. Имайки пред вид равенството /зад. 7, б/, стр 318/

$$\|Tf\|_{\frac{1}{\beta}} = \sup_y \left| \int g(Tf) dv \right|, \quad g \in \mathcal{S}_y, \quad \|g\|_{\frac{1}{1-\beta}} = 1$$

($\frac{1}{1-\beta}$ е спрегнатият показател на $\frac{1}{\beta}$), достатъчно е да докажем неравенството

$$\sup_g \left| \int_y g(Tf) dv \right| \leq M_1^{1-t} M_2^t,$$

за $f \in S_X$, $\|f\|_{\frac{1}{\alpha}} = 1$, $g \in S_Y$, $\|g\|_{\frac{1}{1-\beta}} = 1$.

Да фиксираме две функции f и g с такива свойства и да разгледаме интеграла

$$I = \int_Y g(Tf) d\nu.$$

Нека за определеност

$$f(x) = \sum_j a_j \chi_j(x), \quad a_j \neq 0,$$

$$g(y) = \sum_k b_k \chi_k(y), \quad b_k \neq 0,$$

където, разбира се, и двете суми са крайни.

Нека $a_j = |a_j| e^{iu_j}$, $b_k = |b_k| e^{iv_k}$ е тригонометричният вид на a_j и b_k . Да въведем функциите

$$F_Z(x) = \sum_j e^{iu_j} |a_j|^{\frac{\alpha(z)}{\alpha}} \chi_j(x),$$

/6/

$$G_Z(y) = \sum_k e^{iv_k} |b_k|^{\frac{1-\beta(z)}{1-\beta}} \chi_k(y),$$

където

$$\alpha(z) = (1-z)\alpha_1 + z\alpha_2$$

/7/

$$\beta(z) = (1-z)\beta_1 + z\beta_2.$$

Самата дефиниция на F_Z и G_Z ни дава

$$TF_Z = \sum_j e^{iu_j} |a_j|^{\frac{\alpha(z)}{\alpha}} (T\chi_j)(y)$$

и

$$\begin{aligned} \Phi(z) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_Y G_Z(y) (TF_Z)(y) d\nu \\ &= \sum_{j,k} e^{iu_j} e^{iv_k} |a_j|^{\frac{\alpha(z)}{\alpha}} |b_k|^{\frac{1-\beta(z)}{1-\beta}} \int_Y \chi_k(y) (T\chi_j)(y) dy, \end{aligned}$$

откъдето непосредствено се вижда, че $\Phi(z)$ е линейна комбинация на експоненти и следователно е цяла функция на z . Нещо повече, Φ е ограничена в ивицата $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$, защото всяка от експонентите $|a_j|^{\frac{\alpha(z)}{\alpha}}$ и $|b_k|^{\frac{1-\beta(z)}{1-\beta}}$ има това свойство. Остава да оценим Φ върху контурните прави $x=0$ и $x=1$. Понеже неравенството на Хьолдер ни дава

$$\begin{aligned} |\Phi(z)| &\leq \|TF_Z\|_{\frac{1}{\beta_2}} \|G_Z\|_{\frac{1}{1-\beta_1}} \\ &\leq M_1 \|F_Z\|_{\frac{1}{\alpha_1}} \|G_Z\|_{\frac{1}{1-\beta_1}}, \end{aligned}$$

трябва да концентрираме вниманието си върху

$$\|F_Z\|_{\frac{1}{\alpha_1}} \quad \text{и} \quad \|G_Z\|_{\frac{1}{1-\beta_1}} \quad \text{при } x=0 \text{ и } x=1.$$

Използвайки /6/, непосредствено получаваме

$$\begin{aligned} \|F_Z\|_{\frac{1}{\alpha_1}}^{\frac{1}{\alpha_1}} &= \int_X |F_Z|^{\frac{1}{\alpha_1}} d\mu = \sum_j \left(\int_{E_j} |F_Z|^{\frac{1}{\alpha_1}} d\mu \right) \\ &= \sum_j \left(\int_{E_j} \left\{ |a_j|^{\frac{\alpha(x)}{\alpha}} \right\}^{\frac{1}{\alpha_1}} d\mu \right), \end{aligned}$$

където $E_j \subset X$ е множеството, чиято характеристична функция е χ_j .

Нека сега $x=0$. Понеже $\alpha(0) = \alpha_1$, имаме

$$\left\{ |a_j| \frac{\alpha(0)}{\alpha} \right\}_{\alpha_1}^{\frac{1}{\alpha}} = |a_j|_{\frac{1}{\alpha}},$$

т.е.

$$\|F_z\|_{\frac{1}{\alpha_1}}^{\frac{1}{\alpha}} = \sum_j |a_j|_{\frac{1}{\alpha}}^{\frac{1}{\alpha}} \mu(E_j) = \|f\|_{\frac{1}{\alpha}}^{\frac{1}{\alpha}} = 1.$$

(Припомняме, че по условие имаме $\|f\|_{\frac{1}{\alpha}} = 1$) Равенството

$\|G_z\|_{\frac{1}{1-\beta_1}} = 1$ за $z = iy$ се проверява съвсем аналогично. Получиме $|\Phi(iy)| \leq M_1$. Неравенството $|\Phi(1+iy)| \leq M_2$ се доказва по същия начин с помощта на оценката

$$|\Phi(z)| \leq \|TF_z\|_{\frac{1}{\beta_2}} \|G_z\|_{\frac{1}{1-\beta_2}} \leq M_2 \|F_z\|_{\frac{1}{\alpha_2}} \|G_z\|_{\frac{1}{1-\beta_2}}.$$

Следователно предположенията на теоремата за трите прави са налице и ние получаваме

$$|\Phi(t)| = \left| \int G_t(y) (TF_t)(y) dy \right| \leq M_1^{1-t} M_2^t,$$

т.е.

$$\left| \int g(Tf) dy \right| \leq M_1^{1-t} M_2^t,$$

защото очевидно $F_t = f$, $G_t = g$.

Сега обратното неравенство на Холдер ни дава

$$\|TF\|_{\frac{1}{\beta}} \leq M_1^{1-t} M_2^t \text{ за } \|f\|_{\frac{1}{\alpha}} = 1, f \in \mathcal{S}_X$$

и доказателството в случай $\alpha > 0$, $\beta \neq 1$ е завършено.

Ако $\alpha = 0$, то сигурно $\beta \neq 1$, защото от $\alpha = 0$, $\beta = 1$ следва $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$, т.е. $(\alpha_1, \beta_1) = (\alpha_2, \beta_2)$ противно на предположението. Ако $\alpha = 0$, можем да вземем $F_z = f$ и да разсъждаваме както по-горе. За G_z запазваме старата дефиниция. Ако пък $\beta = 1$ полагаме $G_z = g$, а F_z дефинираме както в текста.

С това теоремата на Рис-Торин е доказана.

ПРИЛОЖЕНИЕ. Неравенство на Хаусдорф-Иънг. Да вземем $(X, \mu) = (Y, \nu) = (\mathbb{R}^n, dx)$, където dx е Лебеговата мярка, а T е трансформацията на Фурие, която в момента считаме дефинирана само върху множеството $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^n}$ на съналовидните функции с компактен носител. (Лесно се установява, че $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^n}$ е навсякъде гъсто в $L^p(\mathbb{R}^n)$ за всяко $p \geq 1$.)

Нонеже

$$\|\hat{f}\|_{\infty} \leq \|f\|_1, \\ \|\hat{f}\|_2 = (2\pi)^n \|f\|_2,$$

операторът на Фурие има едновременно тип $(1, \infty)$ и $(2, 2)$. Образувайки $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ намираме

$$\alpha = (1-t) \cdot 1 + t \frac{1}{2} = 1 - \frac{t}{2},$$

$$\beta = (1-t) \cdot 0 + t \frac{1}{2} = \frac{t}{2},$$

т.е. T е от тип $(\frac{2}{2-t}, \frac{2}{t})$, $0 \leq t \leq 1$.

Когато t описва интервала $[0, 1]$, $p = \frac{2}{2-t}$ описва $[1, 2]$, докато спрегнатият показател $q = \frac{2}{t} \in [2, +\infty)$. Следователно получаваме оценката

$$\|\hat{f}\|_q \leq (2\pi)^{nt} \|f\|_p,$$

т.е.

$$\|\hat{f}\|_q \leq (2\pi)^{\frac{2n}{t}} \|f\|_p, \quad 1 \leq p \leq 2, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

защото $t = \frac{2}{q}$.

С това неравенството на Хаусдорф-Иънг е установено. След като разполагаме с този резултат, не е трудно да намерим всички показатели p и q , за които трансформацията на Фурие е от тип (p, q) .

И така, нека $p \geq 1$, $q \geq 1$ са такива, че

$$/8/ \quad \| \hat{f} \|_q \leq C_{pq} \| f \|_p,$$

за всяка проста функция f с компактен носител или все едно, за всяко $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Понеже от $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ следва, че и функцията $g_\lambda(x) = f(\lambda x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ за всяко $\lambda > 0$ и освен

$$\text{това } \hat{g}_\lambda(\xi) = \frac{1}{\lambda^n} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right), \text{ прилагайки /8/ към двойката}$$

$$g_\lambda, \hat{g}_\lambda, \text{ получаваме}$$

$$\lambda^{-n + \frac{n}{q}} \| \hat{f} \|_q \leq C_{pq} \lambda^{-\frac{n}{p}} \| f \|_p,$$

т.е.

$$\| \hat{f} \|_q \leq C_{pq} \lambda^{n - \frac{n}{p} - \frac{n}{q}} \| f \|_p,$$

което показва, че /8/ може да бъде вярно само, когато $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, защото $\lambda > 0$ е произволно.

Да допуснем сега, че /8/ е в сила за някаква двойка (p_0, q_0) , $\frac{1}{p_0} + \frac{1}{q_0} = 1$, $p_0 > 2$ и нека $f \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$. Да означим с $\hat{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ Фуриеровият образ на f , получен чрез прилагането на деф.3.3, стр.298.

Нека $\{f_\nu\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ е редица, такава, че $f_\nu \xrightarrow{L^{p_0}} f$ и толкова повече $f_\nu \xrightarrow{\mathcal{S}'} f$ ($\mathcal{S}'$ е навсякъде гъсто в L^{p_0}). Понеже трансформацията на Фурие действа непрекъснато от $\mathcal{S}'$ в $\mathcal{S}'$, заключаваме, че $\hat{f}_\nu \xrightarrow{\mathcal{S}'} \hat{f}$. От друга страна обаче, според /8/ имаме

$$\| \hat{f}_\nu - \hat{f}_\mu \|_{q_0} \leq C_{p_0 q_0} \| f_\nu - f_\mu \|_{p_0},$$

което показва, че $\hat{f}_\nu$ е сходяща и в L^{q_0} към някаква функция $g \in L^{q_0}$. Понеже имаме и $g = \lim_{\mathcal{S}'} \hat{f}_\nu$ (топологичната в $\mathcal{S}'$ е по-слаба от тази в L^{q_0}), заключаваме, че $\hat{f} = g \in L^{q_0}$, т.е. из-

лезе, че образът на L^{p_0} , $p_0 > 2$ се съдържа в $L^{q_0} \subset L^{p_0}_{loc}(\mathbb{R}^n)$, което противоречи на теорема 3.16.

По такъв начин установихме, че операторът на Фурие е от тип (p, q) тогава и само тогава, когато $1 \leq p \leq 2$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Допълнение 2. Няколко теореми от идеиния кръг на Винер и Пели. В това допълнение са доказани две класически теореми на Винер и Пели и други резултати, тясно свързани с тях. Фактите са добре известни и за всяка от теоремите разполагаме с различни доказателства [32], [33], [34], [23], [35], [36]. Методът в текста е елементарен и се прилага по един и същ начин при доказателството на всички теореми, като броят на променливите е без значение. Основната идея е проста - разглеждайки подходяща примитивна, предварително установяване, че разглежданата функция е ограничена в $\mathbb{R}^n$, после разсъждаваме както при доказателството на теоремата на Винер-Пели-Шварц. По-богатата колекция от родствени теореми се съдържа в [7], т. II.

За удобство на читателя ще припомним една дефиниция.

Дефиниция 1. Нека $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ е цяла функция. Казваме, че f е от ред $\leq p$, ако за всяко $\varepsilon > 0$ може да се намери константа A_ε такава, че неравенството

$$/1/ \quad |f(z)| \leq A_\varepsilon e^{|z|^{p+\varepsilon}}$$

е в сила в $\mathbb{C}^n$.

Тук, разбира се, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, $z_j \in \mathbb{C}$ и $|z| = \left(\sum_{j=1}^n |z_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Цели функции, за които за някакво $\sigma \geq 0$ и за произволно $\varepsilon > 0$ имаме

$$/2/ \quad |f(z)| \leq B_\varepsilon e^{(\sigma+\varepsilon)|z|}, \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad B_\varepsilon = \text{const},$$

се наричат цели функции от експоненциален тип $\leq \sigma$. Множеството от всички такива функции ще означаваме с E_σ^n .

Сега можем да формулираме класическата теорема на Винер и Нели.

Теорема 1. Силна форма. / Една функция от E_σ^n принадлежи на $L^2(\mathbb{R}^n)$ тогава и само тогава, когато има вида

$$13/ \quad f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x, \xi)} g(x) dx,$$

където $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ и се анулира тъждествено извън кълбото $S_\sigma: |x| \leq \sigma$.

С други думи, f е трансформация на Фурие на функция от $L^2(\mathbb{R}^n)$ с носител в S_σ .

Теорема 2. Слаба форма на теоремата на Винер и Нели. Нека $f \in E_\sigma^n$ и удовлетворява условията

$$14/ \quad \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx < \infty,$$

$$15/ \quad |f(\xi)| \leq M e^{\sigma |Im \xi|}, \quad \xi \in \mathbb{C}^n, \quad M = const.$$

В такъв случай f има вида 13/ с някакво $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, което е нула извън S_σ .

Сравнявайки теорема 1 и теорема 2, веднага забелязваме, че в теорема 2 има едно допълнително условие, което я прави значително по-проста. Както ще видим сега, тя може да се докаже точно както теоремата на Винер-Нели-Шварц.

Доказателство на теорема 2. Нека $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ е камбановидната функция, въведена на стр. 174. Според най-простата част от теоремата на Винер-Нели-Шварц за всяко $N > 0$ имаме

$$16/ \quad |\hat{\chi}(\xi)| \leq \frac{A_N}{(1+|\xi|^2)^N} e^{|Im \xi|}, \quad \xi \in \mathbb{C}^n,$$

понеже носителът на χ се намира в кълбото $|x| \leq 1$. Да въведем функцията

$$17/ \quad g_\epsilon(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x, \xi)} \hat{\chi}(\epsilon \xi) f(\xi) d\xi, \quad \epsilon > 0.$$

Неравенствата 15/ и 16/ ни позволяват да приложим теоремата на Коши /ср. с разсъжденията на стр. 330/ и да получим

$$18/ \quad g_\epsilon(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x, \xi + i\eta)} \hat{\chi}(\epsilon(\xi + i\eta)) f(\xi + i\eta) d\xi$$

за произволно $\eta \in \mathbb{R}^n$. От 18/ с помощта на 16/ и 15/ намираме непосредствено

$$|g_\epsilon(x)| \leq \frac{1}{(2\pi)^n} M A_{n+1} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-(x, \eta)} e^{\epsilon |\eta|} e^{\sigma |\eta|}}{(1 + \epsilon |\xi|)^{n+1}} d\xi$$

$$19/ \quad = C_{n, \epsilon} e^{-(x, \eta)} e^{(\sigma + \epsilon) |\eta|}.$$

Нека сега x е произволна, но фиксирана точка от $\mathbb{R}^n$ с $|x| > \sigma$. Да вземем $\epsilon > 0$ толкова малко, че да имаме $|x| > \sigma + \epsilon$ и да го фиксираме. След всичко това да положим $\eta = t \frac{x}{|x|}$, $t > 0$. При този избор на η 19/ ни дава

$$10/ \quad |g_\epsilon(x)| \leq C_{n, \epsilon} e^{-t|x|} e^{(\sigma + \epsilon)t} = C_{n, \epsilon} e^{t(\sigma + \epsilon - |x|)}$$

Извършвайки граничния преход $t \rightarrow +\infty$ в това неравенство, заключаваме, че $g_\epsilon(x) = 0$, т.е. $\text{supp } g_\epsilon \subset \{|x| \leq \sigma\}$, защото точката x беше подчинена на единственото условие $|x| > \sigma$.

За да завършим доказателството, да въведем и функцията

$$11/ \quad g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x, \xi)} f(\xi) d\xi.$$

Понеже $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, теоремата на Планшерел показва, че и $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Използвайки равенството на Парсевал, от /7/ и /11/ получаваме

$$/12/ \quad \|g_\varepsilon - g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\chi}(\varepsilon\xi) - 1|^2 |f(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Като вземем пред вид, че $\chi(0) = 1$ и $|\hat{\chi}(\varepsilon\xi)| \leq 1$ за $\xi \in \mathbb{R}^n$, извършвайки граничния преход $\varepsilon \rightarrow 0$ в /12/, виждаме, че $g = \lim_{L^2} g_\varepsilon$, откъдето следва включването

$\text{supp } g \subset \{|x| \leq \sigma\}$, защото функциите g_ε имат това свойство. Накрая, изхождайки от /11/ с формулата за обръщане, получаваме

$$/13/ \quad f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,\xi)} g(x) dx \\ = \int_{|x| \leq \sigma} e^{-i(x,\xi)} g(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Понеже $f(\xi)$ и $F(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{|x| \leq \sigma} e^{-i(x,\xi)} g(x) dx$ са

цели функции, съвпадащи върху $\mathbb{R}^n$, теоремата за идентичност ни дава $F(\xi) = f(\xi)$ и в $\mathbb{C}^n$, т.е. /13/ е в сила в цялото $\mathbb{C}^n$.

С това доказателството е завършено. Очевидно е, че всяка функция от вида /3/ принадлежи на E_σ^n .

Нашата следваща задача е да редуцираме теорема 1 до теорема 2. За тази цел имаме нужда от една модна теорема от комплексния анализ. Става дума за класическия

Принцип на Фрагмен-Линдelfоф. Нека G е отворен ъгъл с големина $\frac{\pi}{\alpha}$, $\alpha > \frac{1}{2}$, разположен в комплексната равнина $\mathbb{C}$. Нека $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ е холморфна в G и непрекъсната в $\bar{G}$. Ако освен това в G е в сила оценката

$$/14/ \quad |f(z)| \leq A e^{\beta|z|^p}, \quad 0 < \beta < \alpha, A = \text{const}, \beta = \text{const}$$

и върху контура на G имаме $|f(z)| \leq M$, то

$$/15/ \quad |f(z)| \leq M$$

в целия ъгъл G .

Доказателство. Без ограничение на общостта можем да предположим, че G има вида

$$G: |\arg z| < \frac{\pi}{2\alpha}.$$

Да въведем функцията

$$F(z) = e^{-\varepsilon z^\gamma} f(z), \quad z \in \bar{G},$$

където $\varepsilon > 0$ и $\gamma \in (\beta, \alpha)$ са фиксирани.

Нека z_0 е фиксирана точка от G . Да вземем $R > |z_0|$ и да разгледаме $|F(z)|$ върху дъгата $l_R = G \cap \{|z| = R\}$. Очевидно имаме

$$/16/ \quad |F(z)|_{l_R} = e^{-\varepsilon R^\gamma \cos \varphi \gamma} |f(z)|_{l_R} \leq A e^{-\varepsilon R^\gamma \cos \varphi \gamma} e^{\beta R^p},$$

където $\varphi = \arg z$. Тъй като от $z \in G$ следва $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2\alpha}$, за-

близваме, че $\cos \varphi \gamma \geq \cos \frac{\pi \gamma}{2\alpha} > 0$, защото $\frac{\pi \gamma}{2\alpha} < \frac{\pi}{2}$.

Това неравенство заедно с $\beta < \gamma$ показва, че показателят в /16/ клони към $-\infty$ при $R \rightarrow +\infty$. Ето защо можем да вземем $R > |z_0|$ толкова голямо, че да имаме

$$/17/ \quad \max_{l_R} |F(z)| < M.$$

Да фиксираме едно такова R и да разгледаме F в областта $G \cap \{|z| < R\}$.

Върху лъчите $\arg z = \pm \frac{\pi}{2\alpha}$ имаме

$$|F(z)| \leq M e^{-\varepsilon R^{\alpha} \cos \frac{\pi \alpha}{2}} \leq M,$$

което заедно със /17/ ни позволява да приложим принципа за максимума и да заключим, че

$$|F(z_0)| \leq M, \text{ т.е. } |f(z_0)| \leq M |e^{\varepsilon z_0^{\alpha}}|.$$

Остава ни да оставим ε да клони към нула и да получим неравенството $|f(z_0)| \leq M$.

Понеже z_0 беше произволна точка от G , доказателството е завършено.

З а б е л е ж к а. Възможни са и други формулировки на тази важна теорема. Читателят вероятно е забелязал, че и теоремата за трите прави, доказана в приложение 1, е твърдение от същия тип. С цената на малко усложнение в доказателството може да се установи, че теоремата остава в сила, ако заменим /14/ с по-слабото изискване за всяко $\delta > 0$ в G да бъде в сила неравенството

$$|f(z)| \leq A_{\delta} e^{\delta |z|^{\alpha}}.$$

/вж. [37], стр.188/.

Накрая остава да отбележим, че доказателството и резултатът се запазват, ако разгледаме функции, дефинирани в области от вида $G \cap \{|z| > R\}$ стига, разбира се, по цялата граница да имаме $|f(z)| \leq M$.

Сега вече можем да се заемем с нашата основна задача. С оглед в края на краищата да получим и едно усиление на теоремата на Винер-Пели-Шварц ще работим при предположения малко по-общи от тези, които позволяват да сведем теорема 1 към теорема 2.

Л е м а 1. Нека $f \in E_{\sigma}^1$ /вж.деф.1/ и нека върху реалната ос имаме

$$/18/ \quad |f(x)| \leq M(1+|x|)^m,$$

където $M > 0$ и $m \geq 0$ са константи. В такъв случай неравенството

$$/19/ \quad |f(z)| \leq \lambda^{\frac{m}{2}} M (1+|z|)^m e^{\sigma |Im z|}$$

е в сила в цялата комплексна равнина.

Д о к а з а т е л с т в о . Да разгледаме помощната функция

$$F_{\varepsilon}(z) = \frac{f(z)}{(i+z)^m} e^{(\sigma+2\varepsilon)iz}$$

в полуравнината $Im z \geq 0$. Очевидно имаме

$$/20/ \quad |F_{\varepsilon}(x)| = \frac{|f(x)| |e^{(\sigma+2\varepsilon)ix}|}{(1+x^2)^{\frac{m}{2}}} \leq \frac{M(1+|x|)^m}{(1+x^2)^{\frac{m}{2}}} \leq \lambda^{\frac{m}{2}} M$$

за всяко реално x . От друга страна, с помощта на оценката

$$|f(z)| \leq A_{\varepsilon} e^{(\sigma+\varepsilon)|z|}, \quad z \in \mathbb{C}$$

($f \in E_{\sigma}^1$!) за $z = iy$, $y \geq 0$ намираме

$$/21/ \quad |F_{\varepsilon}(iy)| = \frac{A_{\varepsilon} e^{(\sigma+\varepsilon)y}}{(1+y)^m} \cdot e^{-(\sigma+2\varepsilon)y} = A_{\varepsilon} \frac{e^{-\varepsilon y}}{(1+y)^m} \leq A_{\varepsilon}.$$

Сега е време да въведем и величината $M_{\varepsilon} = \sup_{y \geq 0} |F_{\varepsilon}(iy)| \leq A_{\varepsilon}$,

от която ще имаме нужда след малко и да отбележим, че /20/ и /21/, взети заедно, показват, че F_{ε} е ограничена по контура на всеки от ъглите

$$G_1: 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad G_2: \frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \pi.$$

Тъй като в горната полуравнина очевидно е в сила неравенство-

то

$$/22/ \quad |F_{\varepsilon}(z)| = \frac{|f(z)| e^{-(\sigma+2\varepsilon)y}}{((1+y)^2 + x^2)^{\frac{m}{2}}} \leq |f(z)| \leq A_{\varepsilon} e^{(\sigma+\varepsilon)|z|},$$

в която $z = x + iy$, остава ни последователно да приложим принципа на Фригмен-Линдelfоф в G_1 и G_2 и да получим

$$/23/ \quad |F_{\varepsilon}(z)| \leq \max(2^{\frac{m}{2}} M, M_{\varepsilon})$$

в цялата горна полуравнина $Im z \geq 0$. Не е трудно да се види,

че в същност $M_{\varepsilon} \leq 2^{\frac{m}{2}} M$. За да се убедим в това, да допуснем обратното и да вземем пред вид, че според /21/ $\lim_{y \rightarrow \infty} F_{\varepsilon}(iy) = 0$ и следователно съществува точка $y_0 \geq 0$, за която

$$|F_{\varepsilon}(iy_0)| = M_{\varepsilon}. \text{ Ако } y_0 = 0 \text{ очевидно имаме } M_{\varepsilon} \leq M \leq 2^{\frac{m}{2}} M.$$

В случая $y_0 > 0$ казва, че холоморфната функция F_{ε} достига своя максимум в $Im z \geq 0$ във вътрешна точка на тази област, т.е. тя е константа. Ако $F_{\varepsilon} = const$ обаче, неравенството $M_{\varepsilon} = |F_{\varepsilon}(iy_0)|$

$> 2^{\frac{m}{2}} M$ е явно невъзможно. По такъв начин неравенството

$$M_{\varepsilon} \leq 2^{\frac{m}{2}} M \quad \text{е установено и /23/ ни дава}$$

$$/24/ \quad |F_{\varepsilon}(z)| \leq 2^{\frac{m}{2}} M, \quad Im z \geq 0,$$

т.е.

$$/25/ \quad |f(z)| \leq 2^{\frac{m}{2}} M |i+z|^m e^{(\sigma+2\varepsilon)|Im z|}, \quad Im z \geq 0,$$

откъдето, оставяйки ε да клони към нула, получаваме

$$/26/ \quad |f(z)| \leq 2^{\frac{m}{2}} M (1+|z|)^m e^{\sigma|Im z|}$$

в горната полуравнина. Като приложим това неравенство към цялата функция $g(z) \stackrel{\text{def}}{=} f(-z)$, заключаваме, че то е вярно за всяко z .

С това лема 1 е доказана.

Следващата лема е n -мерен аналог на лема 1 и дава значително по-груба оценка, но за нашите цели е напълно достатъчна.

Лема 2. Нека $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ е цяла функция от E_{σ}^n и нека върху $\mathbb{R}^n$ е в сила неравенството

$$/27/ \quad |f(x)| \leq M (1+|x|)^m, \quad M > 0, \quad m \geq 0.$$

В такъв случай имаме

$$/28/ \quad |f(z)| \leq 2^{\frac{m}{2}} M (1+|z|)^m e^{\sigma|Im z|}$$

в цялото $\mathbb{C}^n$.

Доказателство. Нека $z_0 = x_0 + iy_0$ е произволна точка от $\mathbb{C}^n$ и нека ортогоналната матрица B е така избрана, че да имаме $B^{-1}y_0 = (h, 0, 0, \dots, 0)$, където, разбира се, $h = |y_0|$. Такава матрица съществува, защото ортогоналната група действително транзитивно върху сферите в $\mathbb{R}^n$ с център в началото. Да положим

$$/29/ \quad \zeta_0 = B^{-1}z_0, \quad \xi_0 = Re \zeta_0, \quad \eta_0 = Im \zeta_0.$$

В такъв случай изборът на B ни осигурява равенството

$\eta_0 = (h, 0, 0, \dots, 0)$. За да можем да изведем лема 2 от лема 1, остава да въведем и вектора

$$/30/ \quad \zeta = \zeta(\tau) = (\tau, \xi_{2,0}, \dots, \xi_{n,0}) \in \mathbb{C}^n,$$

където $\xi_{\nu,0}$, $\nu = 2, 3, \dots, n$ са съответните компоненти на $\xi_0 = Re \zeta_0$, а $\tau \in \mathbb{C}$ е комплексна променлива. Като приложим лема 1 към цялата функция $g(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} f(B\zeta(\tau)) \in E_{\sigma}^1$, получаваме

$$/31/ \quad |g(\tau)| \leq C_{z_0} (1+|\tau|)^m e^{\sigma|Im \tau|},$$

където

$$C_{z_0} = 2^{\frac{m}{2}} \sup_{\tau \in \mathbb{R}^1} \frac{|g(\tau)|}{(1+|\tau|)^m}$$

с константа евентуално зависеща от z_0 . Остава да оценим ζ_0 . Очевидните неравенства

$$\begin{aligned} \sup_{\tau \in \mathbb{R}^1} \frac{|g(\tau)|}{(1+|\tau|)^m} &= \sup_{\tau \in \mathbb{R}^1} \frac{|f(B\zeta(\tau))|}{(1+B\zeta(\tau))^m} \cdot \frac{(1+B\zeta(\tau))^m}{(1+|\tau|)^m} \\ &\leq \sup_{\zeta \in \mathbb{R}^n} \frac{|f(B\zeta)|}{(1+B\zeta)^m} \sup_{\tau \in \mathbb{R}^1} \frac{(1+B\zeta(\tau))^m}{(1+|\tau|)^m} \\ &\leq M \sup_{\tau \in \mathbb{R}^1} \frac{(1+B\zeta(\tau))^m}{(1+|\tau|)^m} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{1+B\zeta(\tau)}{1+|\tau|} &= \frac{1+|\zeta(\tau)|}{1+|\tau|} \leq \frac{1+|\tau| + \left(\sum_{j=2}^n \xi_{j,0}^2\right)^{\frac{1}{2}}}{1+|\tau|} \\ &\leq \frac{1+|\tau|+|\xi_0|}{1+|\tau|} \leq 1+|\xi_0| \leq 1+|\xi_0| = 1+|z_0| \end{aligned}$$

заедно с /31/ ни дават

$$/32/ \quad |g(\tau)| \leq 2^{\frac{m}{2}} M (1+|\tau|)^m (1+|z_0|)^m e^{\sigma |Im \tau|}$$

за всяко $\tau \in \mathbb{C}$. Да поставим в /32/ $\tau = \tau_0 = \xi_{1,0} + i h$. Тъй като според /29/ и /30/

$$\zeta(\tau_0) = (\xi_{1,0}, \xi_{2,0}, \dots, \xi_{n,0}) + i(h, 0, 0, \dots, 0) = B^{-1} z_0,$$

получаваме

$$|g(\tau_0)| = |f(z_0)| \leq 2^{\frac{m}{2}} M (1+|\tau_0|)^m (1+|z_0|)^m e^{\sigma |h|},$$

откъдето, като вземем пред вид, че $|h| = |y_0| = |Im z_0|$

$$\text{и } |\tau_0| = \sqrt{\xi_{1,0}^2 + h^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n \xi_{j,0}^2 + h^2} = |B^{-1} z_0| = |z_0|,$$

намираме окончателната оценка

$$/33/ \quad |f(z_0)| \leq 2^{\frac{m}{2}} M (1+|z_0|)^{2m} e^{\sigma |Im z_0|}.$$

Понеже точката $z_0 \in \mathbb{C}^n$ беше съвсем произволна, доказателството на лема 2 е завършено.

Л е м а 3. Нека $f \in E_{\sigma}^n$ и нека

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx < \infty.$$

В такъв случай f е ограничена в $\mathbb{R}^n$.

Д о к а з а т е л с т в о. Да разгледаме цялата функция

$$/34/ \quad F(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{z_1} \int_0^{z_2} \dots \int_0^{z_n} f(w_1, w_2, \dots, w_n) dw_1 \dots dw_n,$$

дефинирана по този начин в цялото $\mathbb{C}^n$. Лесно се вижда, че $F \in E_{\sigma}^n$.

Наистина, нека точката $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $z \neq 0$ е произволна, но фиксирана. В n -кратния интеграл /34/ да направим субституцията

$$/35/ \quad w_j = t_j z_j, \quad 0 \leq t_j \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

/Теоремата на Коши ни позволява без ограничение на общостта да предполагаме, че интегрирането в /34/ става тъкмо по отсечките

/35/./ Получаваме

$$\begin{aligned} |F(z)| &= \left| \prod_{j=1}^n z_j \int_0^1 \dots \int_0^1 f(t_1 z_1, \dots, t_n z_n) dt_1 \dots dt_n \right| \leq \\ &= |z|^n \int_{\substack{0 \leq t_j \leq 1 \\ 1 \leq j \leq n}} |f(tz)| dt \leq A_{\varepsilon} |z|^n \int_{\substack{0 \leq t_j \leq 1 \\ 1 \leq j \leq n}} e^{(\sigma+\varepsilon)|tz|} dt \leq \\ &= A_{\varepsilon} |z|^n e^{(\sigma+\varepsilon)|z|} = A_{\varepsilon} e^{(\sigma+\varepsilon)|z| + n \ln |z|}. \end{aligned}$$

Оттук за $|z| \geq R(\varepsilon)$ намираме

$$|F(z)| \leq A_\varepsilon e^{(\sigma+2\varepsilon)|z|}.$$

Следователно, ако константата B_ε е достатъчно голяма, имаме

$$|F(z)| \leq B_\varepsilon e^{(\sigma+2\varepsilon)|z|}, \quad z \in \mathbb{C}^n$$

и включването $F \in E_\sigma^n$ е установено. От друга страна, F е очевидно ограничена в $\mathbb{R}^n$.

За да се убедим в това, да вземем произволно $x = (x_1, \dots, x_n)$ от $\mathbb{R}^n$ и в /34/ отново да интегрираме по отсечката с краища 0 и x . Като положим

$$w_j = \varepsilon_j t_j, \quad \varepsilon_j = \text{sign } x_j, \quad 0 \leq t_j \leq |x_j|,$$

получаваме

$$\begin{aligned} /36/ \quad |F(x)| &\leq \int_0^{|x_1|} \dots \int_0^{|x_n|} |f(\varepsilon_1 t_1, \dots, \varepsilon_n t_n)| dt_1 \dots dt_n \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)| dt = \text{const}, \end{aligned}$$

защото $\varepsilon_j = \pm 1$ и интегрирането в /36/ става върху част от $\mathbb{R}^n$.

По този начин установихме, че F е наистина ограничена в $\mathbb{R}^n$. Това обстоятелство ни позволява да приложим лема 2 ($cm=0$) и да получим неравенството

$$/37/ \quad |F(z)| \leq M e^{\sigma|Im z|}, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Сега вече сме съвсем близо до целта. Нека отново $x \in \mathbb{R}^n$ е фиксирано.

Интегралната формула на Коши ни дава

$$/38/ \quad f(x) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|z_1-x_1|=\varepsilon} \dots \int_{|z_n-x_n|=\varepsilon} \frac{F(z_1, \dots, z_n) dz_1 \dots dz_n}{\prod_{j=1}^n (z_j - x_j)^2},$$

защото очевидно $f(z) = \partial^\alpha F(z)$, $\alpha = (1, 1, \dots, 1)$.

Понеже окръжностите $C_j: |z_j - x_j| = \varepsilon$, по които интегрираме, имат центрове $x_j \in \mathbb{R}^1$, от $z_j \in C_j$ следва $|Im z_j| \leq \varepsilon$ и с помощта на /37/ незабавно получаваме

$$/39/ \quad |F(z)| \leq M e^{\sigma n \varepsilon}$$

за всяко $z = (z_1, \dots, z_n)$ такова, че $z_j \in C_j, j=1, 2, \dots, n$. Комбинирайки /38/ и /39/ намираме

$$/40/ \quad |f(x)| \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \frac{M e^{\sigma n \varepsilon}}{\varepsilon^{2n}} (2\pi \varepsilon)^n = M \cdot \frac{e^{\sigma n \varepsilon}}{\varepsilon^n},$$

в което положителното число ε е произволно. В частност като изберем $\varepsilon = \frac{1}{6}$, получаваме

$$/41/ \quad |f(x)| \leq M 6^n e^n, \quad \text{т.е.}$$

неравенство от Бернщайнов тип /вж.упражненията/, което не е точно, но за нас е напълно достатъчно.

С това доказателството на лема 3 е завършено и ние можем да се заемем с доказателството на теоремата на Винер и Пели /теор.1/.

Нека $f \in E_\sigma^n \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Като приложим лема 3 към функ-

цията $g(z) \stackrel{\text{def}}{=} f^2(z) \in E_{2\sigma}^n$, веднага заключаваме, че g , а следователно и f е ограничена в $\mathbb{R}^n$. Следователно лема 2 (с $m=0$) ни дава

$$|f(z)| \leq M e^{\sigma|Im z|}, \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

където $M = \sup_{\mathbb{R}^n} |f(x)|$.

По този начин показахме, че теорема 1 и теорема 2 са еквивалентни и нашата цел е постигната.

Заслужава да се отбележи, че по същия начин се получават и други важни резултати.

Теорема 3. Нека $f \in E_{\sigma}^n \cap L^p(\mathbb{R}^n)$, където $1 \leq p \leq 2$. В такъв случай имаме

$$f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\xi, x)} g(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{C}^n,$$

където $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и $\text{supp } g \subset \{|t| \leq \sigma\}$.

Тази важна теорема дължим на Поля и Планшерел за $1 < p < 2$ и на Боас за $p = 1$ и $n = 1$. В случаи, че $p = 2$ отново се връщаме към теоремата на Винер и Пели.

Доказателство. Нека най-напред $f \in E_{\sigma}^n \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ и $\chi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ е камбановидната функция от стр.174. Според лема 3 f е ограничена върху $\mathbb{R}^n$. Да положим

$$M = \sup_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \text{ и да въведем функцията}$$

$$/42/ \quad g_{\varepsilon}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x, \xi)} \hat{\chi}(\varepsilon \xi) f(\xi) d\xi.$$

Един поглед върху /6/, стр.406 заедно с лема 2 ни води до оценката

$$/43/ \quad |f(\xi) \hat{\chi}(\varepsilon \xi)| \leq M C_{n+1} \frac{e^{(\sigma+\varepsilon)|\text{Im} \xi|}}{(1+|\varepsilon \xi|)^{n+1}},$$

която показва, че теоремата на Коши е приложима и ние отново получаваме

$$/44/ \quad g_{\varepsilon}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x, \xi + i\eta)} f_{\varepsilon}(\xi + i\eta) d\xi,$$

където сме положили за краткост $f_{\varepsilon}(\xi) = f(\xi) \hat{\chi}(\varepsilon \xi)$. От /44/ и /43/ непосредствено следва неравенството

$$/45/ \quad |g_{\varepsilon}(x)| \leq \frac{1}{(2\pi)^n} M C_{n+1} e^{-(x, \eta) + (\sigma+\varepsilon)|\eta|} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{(1+|\xi|)^{n+1}},$$

с чиято помощ, както при доказателството на теорема 2, заключаваме, че $\text{supp } g_{\varepsilon} \subset \{|x| \leq \sigma + \varepsilon\}$.

Остава да въведем функцията

$$/46/ \quad g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x, \xi)} f(\xi) d\xi$$

($f \in L^1(\mathbb{R}^n)$) и да се възползваме от неравенството

$$/47/ \quad |g_{\varepsilon}(x) - g(x)| \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(\xi)| |\hat{\chi}(\varepsilon \xi) - 1| d\xi,$$

което незабавно следва от /42/ и /46/. Понеже $|\hat{\chi}(\varepsilon \xi) - 1| \leq 2$ за $\xi \in \mathbb{R}^n$, извършвайки граничния преход $\varepsilon \rightarrow 0$ в /47/, заключаваме, че g_{ε} равномерно клони към g в $\mathbb{R}^n$ и следователно е непрекъснатата функция с носител в кълбото $|x| \leq \sigma$. Използвайки формулата за обръщане (f и g са функции от L^1), получаваме

$$/48/ \quad f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x, \xi)} g(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Понеже и двете функции в /48/ са цели, равенството се запазва и в $\mathbb{C}^n$ и доказателството в случая $p = 1$ е завършено.

Да се върнем сега към общия случай. Нека $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap E_{\sigma}^n$, $1 \leq p \leq 2$. Не е трудно да се види, че функцията

$$f_{\varepsilon}(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} f(\xi) \hat{\chi}(\varepsilon \xi) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap E_{\sigma+\varepsilon}^n$$

при всяко фиксирано $\varepsilon > 0$. Наистина, $\hat{\chi} \in L^q(\mathbb{R}^n)$ при всяко $q \geq 1$, а $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ и неравенството на Холдер решава въпроса. Включването $f_{\varepsilon} \in E_{\sigma+\varepsilon}^n$ е очевидно. Следователно според вече доказаното имаме

$$/49/ \quad f_{\varepsilon}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\xi, x)} h_{\varepsilon}(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{C}^n,$$

където h_ε е непрекъснатата в $\mathbb{R}^n$ функция с носител в кълбото $|x| \leq \sigma + \varepsilon$. Сега формулата за обръщане ни дава

$$/50/ \quad h_\varepsilon(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x, \xi)} f_\varepsilon(\xi) d\xi,$$

т.е. $h_\varepsilon(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \hat{f}_\varepsilon(-x)$ и неравенството на Хаусдорф-

Йнг е приложимо. Получаваме

$$/51/ \quad \|h_\varepsilon - h_\delta\|_q \leq \frac{1}{(2\pi)^n} (2\pi)^{\frac{2n}{q}} \|f_\varepsilon - f_\delta\|_p, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

което показва, че при $\varepsilon \rightarrow 0$ редицата $\{h_\varepsilon\}$ е сходяща в $L^q(\mathbb{R}^n)$. Извършвайки граничния преход $\varepsilon \rightarrow 0$ в равенството

$$f_\varepsilon(\xi) = \int_{|x| \leq \sigma + \varepsilon} e^{-i(\xi, x)} h_\varepsilon(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{C}^n,$$

което е само по-подробен запис на /49/, намираме

$$/52/ \quad f(\xi) = \int_{|x| \leq \sigma} e^{-i(\xi, x)} h(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\xi, x)} h(x) dx,$$

където $h \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{L^q} h_\varepsilon$.

С това доказателството на теорема 3 е завършено.

С л е д с т в и е. Нека $f \in E_\sigma^n \cap L^p(\mathbb{R}^n)$, където $p \geq 1$. Тогава $f(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Д о к а з а т е л с т в о. Ако $1 \leq p \leq 2$, твърдението следва от лемата на Риман-Лебег. Ако пък $p > 2$, прилагаме същото разсъждение към функцията $f^{[p]}$, където $[p]$ е цялата част на p .

З а б е л е ж к а. Ако f и h са функциите от /52/, в сила е равенството

$$h(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x, \xi)} f(\xi) d\xi.$$

Наистина от $h \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $q \geq 1$ и $\text{supp } h \subset \{|x| \leq \sigma\}$ следва, че $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и формулата за обръщане е приложима.

Заслужава да се отбележи, че лема 2 позволява да докажем с лекота и следния усилен вариант на теоремата на Винер-Пели-Шварц.

Т е о р е м а 4 /Шварц/. Нека $f \in E_\sigma^n$ и върху $\mathbb{R}^n$ имаме

$$/53/ \quad f(\xi) = O(|\xi|^m), \quad m \geq 0$$

при $|\xi| \rightarrow \infty$. Тогава $f(\xi) = \hat{u}(\xi)$, където u е разпределение с носител в кълбото $|x| \leq \sigma$.

Д о к а з а т е л с т в о. С помощта на лема 2 от /53/ получаваме

$$|f(\xi)| \leq M(1+|\xi|)^{2m} e^{\sigma |Im \xi|}, \quad \xi \in \mathbb{C}^n$$

с подходяща константа M и теорема 4 се свежда до теоремата на Винер-Пели-Шварц, доказана в текста.

Ще завършим това допълнение с една теорема на Винер и Пели, която отдавна е станала класическа и както теорема 1 е породила обширна литература. За простота ще се ограничим с разглеждането на едномерния случай. Читателите, които се интересуват от многомерния вариант, могат да се обърнат към гл. III на [23].

Ще започнем с едно предварително разглеждане.

Да означим с $\mathbb{R}_-^2$ полуравнината $Im \xi < 0$ и да разгледаме функцията $f: \mathbb{R}_-^2 \rightarrow \mathbb{C}$, дефинирана чрез равенството

$$/54/ \quad f(\xi) = \int_0^\infty e^{-ix\xi} g(x) dx, \quad g \in L^2[0, +\infty).$$

Лесно се вижда, че f е холоморфна в $\mathbb{R}_-^2$. Наистина нека ξ се мени в полуравнината $Im \xi \leq -\varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Формалното диференциране дава

$$f'(\xi) = - \int_0^{\infty} i x e^{-i x \xi} g(x) dx,$$

а очевидно неравенство

$$\begin{aligned} | -i x e^{-i x \xi} g(x) | &\leq e^{x \operatorname{Im} \xi} x |g(x)| \leq \\ &\leq e^{-\varepsilon x} x |g(x)| \in L^1[0, +\infty) \end{aligned}$$

показва, че диференцирането е законно и холоморфността на f е установена. Да въведем функцията $f_{\eta}: \xi \rightarrow f(\xi + i\eta)$, където $\eta < 0$ е фиксирано. Очевидно имаме

$$f_{\eta}(\xi) = \int_0^{\infty} e^{-i x \xi} e^{x \eta} g(x) dx$$

и равенството на Парсевал ни дава

$$/55/ \quad \|f_{\eta}\|_{L^2(-\infty, +\infty)} = \sqrt{2\pi} \|e^{x\eta} g\|_{L^2[0, +\infty)} \leq \sqrt{2\pi} \|g\|_{L^2[0, +\infty)},$$

защото от $x \geq 0$, $\eta < 0$ следва $e^{x\eta} \leq 1$.

Забележително е, че обратно от /55/ следва /54/.

Т е о р е м а 5 /Винер и Пели/. Нека $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ е холоморфна и нека за всяко $\eta < 0$ имаме

$$/56/ \quad \|f_{\eta}\|_{L^2(-\infty, +\infty)} \leq A = \text{const.}$$

Тогата е в сила /54/ с такова $g \in L^2[0, +\infty)$, че

$$\|g\|_{L^2[0, +\infty)} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} A. \text{ Нещо повече, границата } \lim_{\eta \rightarrow 0} f_{\eta} \text{ съществува в } L^2(\mathbb{R}^1) \text{ и съвпада с Фуриеровата транс-}$$

формация на g .

Ще започнем доказателството с една лема.

Л е м а 4. Функцията f от теоремата е ограничена в ивицата

$$G_{a,b}: a \leq \operatorname{Im} \xi \leq b < 0$$

с константа, евентуално зависеща от a и b .

Д о к а з а т е л с т в о. Ръководейки се от съображенията, вече използвани при доказателството на лема 3, да разгледаме функцията

$$/57/ \quad F(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} f^2(w) dw, \quad \xi_0 = \frac{a+b}{2} i,$$

която очевидно е холоморфна в $\mathbb{R}^2$. Ще докажем, че F е ограничена в по-широката ивица $G_{a-\delta, b+\delta}$, където $\delta > 0$ е толкова малко, че да имаме $b + \delta < 0$. За тази цел да въведем константата

$$/58/ \quad B = \int_{a-\delta}^{b+\delta} |f(it)|^2 dt, \quad t - \text{реално}$$

и да вземем произволна точка $\xi = \xi + i\eta \in G_{a-\delta, b+\delta}$. Теоремата на Коши ни дава

$$/59/ \quad F(\xi) = \int_{\xi_0}^{i\eta} f^2(w) dw + \int_{i\eta}^{\xi+i\eta} f^2(w) dw,$$

където интегрирането се извършва по съответните отсечки. От /56/, /58/ и /59/ следва непосредствено

$$/60/ \quad |F(\xi)| \leq B + A^2, \quad \xi \in G_{a-\delta, b+\delta}$$

и ограничеността е установена. От /60/ с формулата на Коши

$$f^2(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-\xi|=\delta} \frac{F(w)dw}{(w-\xi)^2}, \quad \xi \in G_{a,b}$$

намираме

$$|f(\zeta)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{A^2 + B}{\delta^2} \cdot 2\pi\delta = \frac{A^2 + B}{\delta}$$

и лемата е доказана. След като разполагаме с нея, завършваме доказателството, разсъждавайки приблизително както в теорема 2 и 3.

Доказателство на теорема 5. Да разгледаме функцията

$$/61/ \quad g_{\delta, \varepsilon}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x, \xi)} \hat{\chi}(\varepsilon(\xi + i\delta)) f_{\delta}(\xi) d\xi,$$

където $\varepsilon > 0$ и $\delta < 0$ са фиксирани, $f_{\delta}(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} f(\xi + i\delta)$, а $\chi \in C_0^\infty(0, 1)$ е неотрицателна функция, нормирана с условието

$$\int_0^1 \chi(t) dt = 1. \text{ Да преработим равенството}$$

$$\zeta \hat{\chi}(\zeta) = \zeta \int_0^1 e^{-i\zeta x} \chi(x) dx$$

с интегриране по части. Предполагайки, че $\eta = \operatorname{Im} \zeta \leq 0$, с помощта на тъждеството $-i\zeta e^{-i\zeta x} = \frac{\partial}{\partial x} (e^{-i\zeta x})$ получаваме

$$|\zeta \hat{\chi}(\zeta)| = \left| i \int_0^1 e^{-i\zeta x} \chi'(x) dx \right| \leq$$

$$\leq \int_0^1 e^{\eta x} |\chi'(x)| dx \leq \int_0^1 |\chi'(x)| dx = \text{const.}$$

Оттук и от очевидното неравенство

$$/62/ \quad |\hat{\chi}(\zeta)| \leq \int_0^1 e^{\eta x} \chi(x) dx \leq \int_0^1 \chi(x) dx = 1, \quad \eta \leq 0,$$

намираме

$$/63/ \quad |\hat{\chi}(\zeta)| \leq \frac{C}{1+|\zeta|}, \quad C = \text{const}$$

в цялата полуравнина $\operatorname{Im} \zeta \leq 0$. Сега става ясно, че подинтегралната функция в /61/ принадлежи на $L^1(\mathbb{R}^1)$ и следователно $g_{\delta, \varepsilon}$ е непрекъсната. Нещо повече, /63/ и лема 4, взети заедно, ни позволяват да приложим отново теоремата на Коши към контура, изобразен на фиг. 6, стр. 330 и от /61/ да получим

$$/64/ \quad g_{\delta, \varepsilon}(x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix(\xi + i\eta)} \hat{\chi}(\varepsilon(\xi + i\delta + i\eta)) f_{\delta}(\xi + i\eta) d\xi,$$

където $\eta < 0$ е произволно. От /64/ и /63/ намираме непосредствено

$$|g_{\delta, \varepsilon}(x)| \leq \frac{1}{2\pi} e^{-x\eta} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\chi}(\varepsilon(\xi + i\eta + i\delta))| |f_{\delta}(\xi + i\eta)| d\xi$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} C e^{-x\eta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f_{\delta}(\xi + i\eta)| d\xi}{1 + \varepsilon |\xi + i\eta|}$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} C e^{-x\eta} A \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{(1 + \varepsilon |\xi|)^2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

т.е.

$$/65/ \quad |g_{\delta, \varepsilon}(x)| \leq C_{\varepsilon} e^{-x\eta}.$$

Като оставим η да клони към $-\infty$ при фиксирани ε, δ и $x < 0$, от /65/ получаваме $g_{\delta, \varepsilon}(x) = 0$, за $x < 0$. След като направихме тази констатация, да се върнем към /64/ и да го препишем във вида

$$/66/ \quad e^{x\eta} g_{\delta, \varepsilon}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \hat{\chi}(\varepsilon(\xi + i\delta + i\eta)) f_{\delta}(\xi + i\eta) d\xi,$$

откъдето незабавно следва решаващото равенство

$$\begin{aligned} /67/ \quad & \hat{\chi}(\xi + i\delta + i\eta) f(\xi + i\eta + i\delta) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} e^{x\eta} q_{\delta, \varepsilon}(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-ix\xi} e^{x\eta} q_{\delta, \varepsilon}(x) dx. \end{aligned}$$

Сега вече сме близо до целта. Прилагайки към /61/ равенството на Парсевал, намираме

$$\begin{aligned} /68/ \quad & \|q_{\delta, \varepsilon}\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\chi}(\xi + i\delta)) f_{\delta}(\xi)|^2 d\xi \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_{\delta}(\xi)|^2 d\xi \leq \frac{1}{2\pi} A^2 = \text{const}, \end{aligned}$$

тъй като според /62/ имаме $|\hat{\chi}(\xi)| \leq 1$, когато $\text{Im } \xi \leq 0$.

И така, L^2 -нормите на функциите от фамилията $\{q_{\delta, \varepsilon}\}$ се оказва равномерно ограничени. Следователно слабата компактност на единичното кълбо в $L^2(\mathbb{R}^1)$ /теорема 3.8, стр.92/ ни позволява да изберем слабо сходяща редица $\{q_{\delta_j, \varepsilon_j}\}$, такава, че

$\delta_j \rightarrow 0$, $\varepsilon_j \rightarrow 0$. Нека $q \in L^2(\mathbb{R}^1)$ е слабата граница на $\{q_{\delta_j, \varepsilon_j}\}$. Очевидно $\text{supp } q \subset [0, +\infty)$. Да поставим

$\delta = \delta_j$, $\varepsilon = \varepsilon_j$ в /67/ и да извършим граничния преход $j \rightarrow \infty$. Получаваме

$$/69/ \quad f(\xi + i\eta) = \int_0^{\infty} e^{-ix\xi} e^{x\eta} q(x) dx, \quad \eta < 0,$$

защото за $\eta < 0$ функцията $e^{-ix\xi} e^{x\eta} \in L^2[0, +\infty)$.

Понеже $e^{-ix\xi} e^{x\eta} = e^{-ix(\xi + i\eta)}$, можем да представим /69/

във вида

$$/70/ \quad f(\xi) = \int_0^{\infty} e^{-ix\xi} q(x) dx, \quad \text{Im } \xi < 0$$

и равенството /54/ е установено.

За да докажем и второто твърдение в теоремата, да дефинираме функцията

$$/71/ \quad f_0(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} e^{-ix\xi} q(x) dx.$$

Изхождайки от /70/ с $\xi = \xi + i\eta$, $\eta < 0$ и /71/, с равенството на Парсевал получаваме

$$\|f(\xi + i\eta) - f_0(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R}^1)} = \sqrt{2\pi} \|(e^{x\eta} - 1) q(x)\|_{L^2[0, +\infty)},$$

т.е.

$f_0 = \lim_{L^2} f_{\eta}$ при $\eta \rightarrow 0$, $\eta < 0$ и доказателството на теоремата е завършено.

У п р а ж н е н и я

1. Анализирайте доказателството на теорема 5 и установете, че вместо функцията χ , използвана в текста, бихме могли отново да вземем обичайната камбановидна функция с носител в интервала $(-1, 1)$.

2. Това упражнение е посветено на класическото неравенство на Бернщайн, което гласи следното: ако $f \in E_{\sigma}^n$ и ако $\sup_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \leq M$, то

$$/72/ \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right| \leq \sigma M, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Нещо повече, ако f взема реални стойности за $x \in \mathbb{R}^n$, имаме

$$/73/ \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\text{grad } f| \leq \sigma M.$$

Лесно се вижда, че е достатъчно да докажем /72/ в едномерния случай. Наистина, да предположим, че /72/ е вярно за функции от E_σ^1 и $f \in E_\sigma^n$ е ограничена върху $\mathbb{R}^n$. Като приложим този резултат към функцията

$$g(z) \stackrel{\text{def}}{=} f(x_1, \dots, x_{j-1}, z, x_{j+1}, \dots, x_n),$$

където числата $x_\nu \in \mathbb{R}^1$, $\nu \neq j$ са фиксирани, получаваме /72/ в общия случай. За да стигнем до /73/, да приложим /72/ към функцията

$$g(z) = f(y_1(z), \dots, y_n(z)) \in E_\sigma^1,$$

където $y_j(z) = x_j + \alpha_j z$,

а числата α_j , x_j са реални и фиксирани и $\sum_{j=1}^n \alpha_j^2 \leq 1$.

Очевидно имаме

$$g'(0) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_j) \alpha_j$$

и понеже

$$\sup_{\mathbb{R}^1} |g(t)| \leq M,$$

/72/ ни дава

$$/74/ \quad \left| \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \alpha_j \right| \leq \sigma M,$$

в което $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ е произволна точка от $\mathbb{R}^n$.

От /74/ за $\alpha_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) |(\text{grad } f)(x)|^{-1}$ получаваме

$$\left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sigma M,$$

което е тъкмо /73/.

И така, достатъчно е да докажем следната теорема: ако $f \in E_\sigma^1$ и $|f(x)| \leq M$ за $x \in \mathbb{R}^1$, то

$$|f'(x)| \leq \sigma M$$

върху реалната ос. За да установите този резултат, разгледайте интеграла

$$I_k = \int_{C_k} \frac{f(z) dz}{z^2 \cos \sigma z},$$

където C_k е границата на квадрата

$$-\frac{\pi k}{\sigma} \leq x \leq \frac{\pi k}{\sigma}, \quad -\frac{\pi k}{\sigma} \leq y \leq \frac{\pi k}{\sigma},$$

$k = 1, 2, 3, \dots$ и интегрирането се извършва в посока противна на движението на часовниковата стрелка. Като вземете пред вид неравенството

$$|f(z)| \leq M e^{\sigma |Im z|},$$

което ни дава лема 3, леко ще установите, че $I_k \rightarrow 0$, когато $k \rightarrow \infty$. От друга страна, I_k веднага се пресмята с теоремата за резидуумите. Като изпълните тази програма, ще стигнете до равенството

$$/75/ \quad f'(0) = \frac{4\sigma}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k f\left(\frac{2k+1}{\sigma} \frac{\pi}{2}\right)}{(2k+1)^2},$$

което за $f(z) = \sin \sigma z$ взема вида

$$/76/ \quad 1 = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Като оцените почленно събираемите в /75/ и вземете пред вид /76/, ще получите

$$|f'(0)| \leq \sigma M.$$

Остава да се приложи този резултат към функцията

$$g(z) \stackrel{\text{def}}{=} f(z + x_0) \in E_\sigma^1, \text{ където } x_0 \in \mathbb{R}^1 \text{ е фиксирано.}$$

3. Докажете следния вариант на теоремата на Фрагмен-Линдельоф: нека G е ивицата $a < \operatorname{Re} z < b$ и $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ е функция, холоморфна в G и непрекъсната в $\bar{G}$. Нека освен това са в сила неравенствата

$$|f(z)| \leq A e^{B|z|^k}, \quad z \in G$$

и

$$|f(z)| \leq M$$

по границата на G (A, B, k и M са положителни константи).

Докажете, че

$$|f(z)| \leq M$$

в цялата ивица.

У п ъ т в а н е. Разгледайте функцията

$$F(z) = f(z) e^{\varepsilon z^{2p}},$$

където $\varepsilon > 0$ и $2p > k$ са фиксирани, като p е естествено и четно число. После разсъждавайте както при доказателството на теоремата за трите прави, дадено в допълнение I към този параграф.

4. Докажете следния вариант на теорема 5: Нека $\mathbb{R}_-^2$ е полуравнината $\operatorname{Im} z < 0$ и нека $f: \mathbb{R}_-^2 \rightarrow \mathbb{C}$ е холоморфна и освен това

$$|f(z)| \leq A e^{B|z|^k},$$

за $z \in \mathbb{R}_-^2$.

По-нататък да допуснем, че съществуват две редици $\{a_\nu\}$ и

$\{b_\nu\}$ от отрицателни числа, такива, че

$$b_\nu < a_\nu, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} b_\nu = -\infty, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x + ia_\nu)|^2 dx \leq C, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x + ib_\nu)|^2 dx \leq C = \text{const},$$

за $\nu = 1, 2, \dots$. При тези предположения установете, че f има вида

$$f(z) = \int_0^{\infty} e^{-iz\xi} q(\xi) d\xi, \quad q \in L^2[0, +\infty)$$

и освен това границата $\lim_{y \rightarrow 0} f_y$ съществува в $L^2(\mathbb{R}^1)$ и е равна на $\hat{q}$. Тук както в текста $f_y(x) = f(x + iy)$ по дефиниция.

У п ъ т в а н е. С помощта на зад.3 установете, че f е ограничена в ивицата

$$b_\nu \leq \operatorname{Im} z \leq a_\nu, \quad \nu = 1, 2, 3, \dots$$

и после разсъждавайте както в текста.

5. Нека отново $f: \mathbb{R}_-^2 \rightarrow \mathbb{C}$ е холоморфна и за всяко $\eta < 0$ имаме

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\xi + i\eta)|^p d\xi \leq A = \text{const},$$

където $1 \leq p \leq 2$.

Докажете, че

$$f(\xi) = \int_0^{\infty} e^{-ix\xi} q(x) dx, \quad \operatorname{Im} \xi < 0,$$

където

$$q \in L^2[0, +\infty).$$

У п ъ т в а н е. Най-напред намерете интегрално представяне на функцията

$$F_\eta(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} f(\xi) \cdot \hat{X}(\eta\xi), \quad \eta > 0, \operatorname{Im} \xi < 0,$$

като подражавате на доказателството на теорема 5, дадено в текста. На съответното място заменете равенството на Парсевал с неравенството на Хаусдорф-Йънг. Накрая извършете граничния преход $\varphi \longrightarrow 0$ в интегралната формула.

Глава трета

ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 1. Фундаментални решения

1.1. Един критерий за хипоелиптичност

Ролята на функцията $\frac{1}{|x|}$, $x \in \mathbb{R}^3$ в теорията на Лапласовото уравнение

$$\Delta_3 u = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$$

е добре известна от елементарния курс по частни диференциални уравнения. Ако

$$1/ \quad P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

е ненулев диференциален оператор с постоянни коефициенти, съвсем естествено възниква въпросът съществува ли функция, която да замества в неговата теория функцията $|x|^{-1}$. Още преди възникването на теорията на разпределенията са били известни аналозите на $|x|^{-1}$ за други важни уравнения, например за вълновото уравнение и за уравнението на топлопроводността. Тези примери са подсказали какво трябва да се търси, но едва строгата дефиниция на Дираковата δ -функция прави постановката на въпроса съвсем ясна.

Д е ф и н и ц и я 1.1. Едно разпределение $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ се нарича фундаментално решение на оператора 1/, ако удовлетворява нехомогенното уравнение
2/ $P(D)u = \delta$,
където, както обикновено, $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ е Дираковата функция с носител точката $x = 0$.

За да се убедим, че сме на прав път, трябва да проверим, че функцията $|x|^{-1}$, евентуално умножена с подходяща константа, е фундаментално решение на оператора Δ_3 .

Т е о р е м а 1.1. Функцията $-\frac{1}{4\pi|x|}$ е фундаментално решение на оператора на Лаплас в $\mathbb{R}^3$.

Д о к а з а т е л с т в о. Най-напред да забележим, че функцията $x \rightarrow -(4\pi|x|)^{-1}$ е локално сумируема и следователно се съдържа в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$. Нещо повече, тя принадлежи и на $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$, понеже $|x|^{-1} \rightarrow 0$, когато $|x| \rightarrow +\infty$. За да докажем теоремата, да вземем $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ и да пресметнем

$(\Delta_3 \frac{1}{|x|}, \varphi)$. Прилагайки дефиницията на диференцирането в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$, получаваме

$$\begin{aligned} /3/ \quad (\Delta_3 \frac{1}{|x|}, \varphi) &= (\frac{1}{|x|}, \Delta_3 \varphi) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\Delta_3 \varphi}{|x|} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} \frac{\Delta_3 \varphi}{|x|} dx, \end{aligned}$$

където $R > 0$ е толкова голямо, че носителът на φ да се съдържа в кълбото $|x| < R$. Остава да преработим последния интеграл. Като вземем пред вид, че $\Delta_3 \frac{1}{|x|} = 0$ в $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, с помощта на формулата на Грийн получаваме

$$\begin{aligned} /4/ \quad \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} \frac{\Delta_3 \varphi}{|x|} dx &= \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} \left(\frac{\Delta_3 \varphi}{|x|} - \varphi(x) \Delta_3 \left(\frac{1}{|x|} \right) \right) dx \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{|x|=\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds - \int_{|x|=\varepsilon} \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|x|} \right) ds, \end{aligned}$$

защото φ се анулира тъждествено в достатъчно малка околност на сферата $|x| = R$. Понеже нормалата в /4/ е насочена към точка-

та $x = 0$, имаме

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|x|} \right) \Big|_{x=\varepsilon} = -\frac{1}{\varepsilon^2} \quad / [4], \text{ стр.135/}$$

и /4/ взема вида

$$/5/ \quad \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} \frac{\Delta_3 \varphi}{|x|} dx = \frac{1}{\varepsilon} \int_{|x|=\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds - \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{|x|=\varepsilon} \varphi(x) ds$$

Да извършим граничния преход $\varepsilon \rightarrow 0$ в това тъждество.

Като положим $\sup_{|x| \leq 1} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right| = M$, получаваме

$$\frac{1}{\varepsilon} \left| \int_{|x|=\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds \right| \leq \frac{1}{\varepsilon} \max_{|x|=\varepsilon} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right| 4\pi\varepsilon^2 \leq 4\pi\varepsilon M \rightarrow 0 \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

От друга страна, за всяко $\delta > 0$ съществува $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ такова, че от $|x| < \varepsilon(\delta)$ следва $|\varphi(x) - \varphi(0)| < \delta$. Ето защо имаме

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^2} \left| \int_{|x|=\varepsilon} \varphi(x) ds - 4\pi\varepsilon^2 \varphi(0) \right| &= \frac{1}{\varepsilon^2} \left| \int_{|x|=\varepsilon} (\varphi(x) - \varphi(0)) ds \right| \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} 4\pi\varepsilon^2 \delta = 4\pi\delta, \end{aligned}$$

стига ε да бъде по-малко от $\varepsilon(\delta)$. Така установихме равенството

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{|x|=\varepsilon} \varphi(x) ds = 4\pi\varphi(0),$$

което заедно с /3/, /4/ и /5/ показва, че наистина

$$(\Delta_3 \frac{1}{|x|}, \varphi) = -4\pi\varphi(0) = -4\pi(\delta, \varphi),$$

т.е. че $-\frac{1}{4\pi|x|}$ е фундаментално решение на Δ_3 .

Оказва се, че всеки ненулев диференциален оператор с постоянни коефициенти притежава фундаментално решение. Този важен факт, установен независимо от Малгранж и Еренпрайс през 1953 г., е бил един от първите резултати, които са показали, че теорията на разпределенията има право на съществуване. Отлагайки за известно време доказателството на тази важна теорема, ще отбележим, че най-дълбоките свойства на оператора $P(D)$ непосредствено се отразяват на неговото фундаментално решение. Тук ще докажем няколко прости теореми, които свързват разрешимостта на уравнението

$$/6/ \quad P(D)u = f, \quad f \in D'(\Omega)$$

и гладкостта на евентуалното решение със свойствата на фундаменталното решение.

Теорема 1.2. Нека $P(D)$ е ненулев оператор с постоянни коефициенти. Тогава уравнението /6/ е разрешимо за всяко $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

Доказателство. Нека E е фундаментално решение на оператора $P(D)$. Такова съществува според теоремата на Малгранж-Еренпрайс. Да въведем разпределението

$$/7/ \quad u \stackrel{\text{def}}{=} E * f,$$

което е наистина дефинирано, защото f е с компактен носител. Използвайки свойствата на конволюцията, непосредствено получаваме

$$P(D)u = P(D)(E * f) = (P(D)E) * f = \delta * f = f$$

и доказателството е завършено.

Следствие 1. Нека Ω е област в $\mathbb{R}^n$ и $f \in D'(\Omega)$. Ако $\Omega' \subset \Omega$ е произволна подобласт на Ω , уравнението /6/ е разрешимо в $D'(\Omega')$.

Доказателство. Понеже $\overline{\Omega'}$ е компактно множество, което се съдържа в Ω , съществува функция $g \in C_0^\infty(\Omega)$, която е тъждествено равна на единица в някаква околност на $\overline{\Omega'}$. Спо-

ред теорема 1.2 уравнението

$$/8/ \quad P(D)u = gf$$

е разрешимо в $D'(\mathbb{R}^n)$, защото можем да считаме, че $gf \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Нека $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ удовлетворява /8/. Тогава рестрикцията на u в Ω' принадлежи на $D'(\Omega')$ и е решение на /6/.

Следствие 2. Нека Ω е област в $\mathbb{R}^n$ и $f \in D'(\Omega)$ е разпределение, което може да се продължи до разпределение $\tilde{f} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Тогава уравнението /6/ е разрешимо в $D'(\Omega)$.

Доказателство. Рестрикцията на разпределението $u = \tilde{f} * E$ в $D'(\Omega)$ е търсеното решение.

В частност следствие 2 показва, че ако $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$, уравнението /6/ е разрешимо във всяка ограничена област $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, защото можем да положим

$$\tilde{f} = \begin{cases} f, & x \in \Omega \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases}$$

Забележка. Ако Ω е ограничена област в $\mathbb{R}^n$, за да си осигурим разрешимостта на /6/ в $D'(\Omega)$, е достатъчно да предположим, че f може да се продължи до разпределение в $\tilde{\Omega}$, където $\tilde{\Omega}$ е някаква област, която съдържа Ω , защото след това можем да си послужим със срязваща функция, както в следствие 1. Задача 4 от стр. 196 показва обаче, че и това не винаги е възможно. От друга страна, съществуват други методи, които водят до значително усилване на теорема 1.2. Става дума за резултатите, свързани с т.н. "Р-изпъкналост", за които читателят трябва да се обърне към [27] или [40].

Като допълнение към теорема 1.2 заслужава да се отбележи, че всяко решение на /6/ с компактен носител непременно има вида /7/. Наистина, ако $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ удовлетворява /6/, получаваме

$$u = \delta * u = P(D)E * u = E * P(D)u = E * f,$$

с което всичко е доказано.

Ще завършим обсъждането на теорема 1.2, като забележим, че желанието да решим уравнението /6/ при възможно най-общи предположения за f , естествено ни води до мисълта да търсим фундаментални решения с възможно "най-малки" носители, защото тогава конволюцията M ще бъде дефинирана за по-широка класа от функции f . От тази гледна точка най-ценни ще бъдат фундаменталните решения с компактни носители. Лесно се вижда обаче, че такива не съществуват. /Зад.1 от следващото упражнение./

ж
ж ж

Да разгледаме отново уравнението

$$/6/ \quad P(D)u = f$$

и да предположим, че за всяко $f \in D'(\Omega)$ съществува поне едно решение $u \in D'(\Omega)$. Естествено е да се запитае какво става с решението u , когато гладкостта на f се повишава. Фундаменталните решения се оказват твърде полезни при изследването и на този въпрос.

Целесъобразно е да започнем с една дефиниция.

Д е ф и н и ц и я 1.2. Нека Ω е област в $\mathbb{R}^n$ и нека коефициентите a_α на диференциалния оператор

$$/9/ \quad P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha, \quad x \in \Omega$$

са функции от $C^\infty(\Omega)$. Казваме, че операторът /9/ е х и п о - е л и п т и ч е н, ако за всяка подобласт $\Omega' \subset \Omega$ и за всяко разпределение $u \in D'(\Omega')$ от $P(x, D)u \in C^\infty(\Omega')$ следва, че и $u \in C^\infty(\Omega')$.

С други думи, $P(x, D)$ е хипоелиптически, ако

$$\text{sing supp } u \subset \text{sing supp } Pu$$

за всяко $u \in D'(\Omega)$.

Т е о р е м а 1.3. /Лоран Шварц/. Нека $P(D)$ е оператор с постоянни коефициенти. Тогава $P(D)$ е хипоелиптически тогава и само тогава, когато притежава фундаментално решение $E \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ / $P(D)$ е оператор с n независими променливи/.

Д о к а з а т е л с т в о. Най-напред ще докажем, че условието е необходимо. Нека $P(D)$ е хипоелиптически и E е негово фундаментално решение. /Такова съществува според теоремата на Малгранж - Еренпрайс./ Понеже $\delta \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, уравнението

$$P(D)E = \delta$$

показва, че $E \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, защото $P(D)$ е хипоелиптически по предположение. Ако E' е някакво друго фундаментално решение на $P(D)$, очевидното равенство $P(D)(E - E') = 0$ показва, че $E - E' \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, т. е. E и E' имат еднаква особеност.

Остава да докажем, че условието е и достатъчно.

И така, нека $E \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ е фундаментално решение на $P(D)$ и $u \in D'(\Omega)$ е решение на уравнението

$$P(D)u = f, \quad f \in D'(\Omega).$$

Нека освен това $f \in C^\infty(\sigma)$, където $\sigma \subset \Omega$ е околност на някаква точка $x_0 \in \Omega$. Достатъчно е да докажем, че и $u \in C^\infty(q)$, където q е някаква евентуално по-малка околност на x_0 . За да бъдем конкретни, да предположим, че σ е кълбото $|x - x_0| < \varepsilon$ и да означим с g някаква функция от $C_0^\infty(\sigma)$, която е тъждествено равна на единица в по-малкото кълбо

$$\sigma' : |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Прилагайки формулата на Лайбниц, получаваме

$$/10/ \quad P(D)(gu) = gP(D)u + L_g(u),$$

където L_g е диференциален оператор с коефициенти, зависели само от производните на g . Ето защо $L_g \equiv 0$ в σ' .

Сега е време да използваме фундаменталното решение, с което разполагаме. Понеже gu е с компактен носител, можем да обрнем ме конволюцията $E * gu$ и да получим

$$P(D)(E * gu) = (P(D)E) * gu = \delta * gu.$$

От друга страна обаче имаме $P(D)(E * gu) = E * P(D)gu$, т.е. стигнахме до важното равенство

$$/11/ \quad gu = E * P(D)gu.$$

Сега вече сме близо до целта. Нека $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ е функция с носител в кълбото $|x| \leq \delta$, която е тъждествено равна на единица в концентричното кълбо $|x| \leq \frac{\delta}{2}$. Да препишем /11/ във вид

$$/12/ \quad gu = (\varphi E) * P(D)gu + ((1-\varphi)E) * P(D)gu.$$

Понеже $(1-\varphi)E \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, а $P(D)gu \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, теорема 2.24, стр.253 ни позволява да заключим, че $((1-\varphi)E) * P(D)gu \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. /Не забравяйте, че gu е с компактен носител!/ Остава да изследваме първото събираемо в дясната страна на /12/. Като вземем пред вид /10/, получаваме

$$(\varphi E) * P(D)gu = (\varphi E) * (gP(D)u) + (\varphi E) * L_g(u).$$

Тъй като $gP(D)u = gf \in C_0^\infty(O)$, а $\varphi E \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ имаме $(\varphi E) * (gP(D)u) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. От друга страна, теорема 2.21, стр.251 ни дава включването

$$/13/ \quad \begin{aligned} \text{supp}((\varphi E) * L_g(u)) &\subset \text{supp}(\varphi E) + \text{supp} L_g(u) \\ &\subset \{x \in \mathbb{R}^n, |x| \leq \delta\} + \text{supp} L_g(u). \end{aligned}$$

Като си спомним, че $L_g(u) \equiv 0$ в O' , виждаме, че $\text{supp} L_g(u)$ се съдържа в $\mathbb{R}^n \setminus O'$. Да вземем $\delta < \frac{\varepsilon}{4}$ и да го фиксираме.

Един поглед върху /13/ ни позволява да заключим, че

$$\text{supp}\{(\varphi E) * L_g(u)\} \subset \mathbb{R}^n \setminus O',$$

където O'' е кълбото $|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{4}$. /Направете чертеж!/
 Иначе, че $(\varphi E) * L_g(u)$ се анулира тъждествено в O'' и в частност принадлежи на $C^\infty(O'')$. С това доказателството е завършено, важното gu и u очевидно съпадат в O' .

Критерият за хипоелиптичност, който току-що доказахме, допуска една полезна модификация.

Дефиниция 1.3. Нека $P(D)$ е оператор с постоянни коефициенти, действащ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. едно разпределение $H \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ се нарича параметрикс на $P(D)$, ако

$$P(D)H - \delta \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Параметриксът е почти толкова полезен, колкото и самото фундаментално решение, но в повечето случаи се построява по-просто. До голяма степен именно желанието да се конструира параметрикс за все по-широки класове от диференциални оператори с променливи коефициенти е породило теорията на псевдодиференциалните оператори и интегралните оператори на Фурие.

В сила е следната

Теорема 1.4. Ако $P(D)$ притежава параметрикс $H \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, то той е хипоелиптичен.

Доказателство. Достатъчно е да положим $P(D)H = \delta + h$, където $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и да разсъждаваме както при доказателството на теорема 1.3. Подробностите оставяме за читателя.

Дефиниция 1.4. Нека отново Ω е област в $\mathbb{R}^n$ и

$$/14/ \quad P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

е линеен оператор, чиито коефициенти a_α са аналитични функции в Ω .

Операторът /14/ се нарича аналитично хипоелиптичен, ако за всяка подобласт $\Omega' \subset \Omega$ и за всяко разпределение $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ от изискването $P(x, D)u$ да бъ-

де аналитична функция в Ω' следва, че u е аналитична в същата област.

Припомняме, че една функция f на променливата $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ се нарича аналитична, ако принадлежи на $C^\infty(\Omega)$ и се развива в степенен ред

$$/15/ \quad f(x) = \sum_{\alpha} \frac{\partial^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha$$

в подходяща околност на произволна точка $x_0 \in \Omega$. Понеже редът /15/ от само себе си излиза абсолютно и равномерно сходен близо до x_0 , тъждеството /15/ ни позволява да продължим f до холоморфна функция на комплексната променлива $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ в достатъчно малка околност $O_{x_0} \subset \mathbb{C}^n$ на всяка точка $x_0 \in \Omega$. /Считаме, че $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$, следователно и $\Omega \subset \mathbb{C}^n$./ Нещо повече, с лемата на Хайне-Борел веднага се убеждаваме, че за всеки компактен $K \subset \Omega$ съществува област $G_K \subset \mathbb{C}^n$, $K \subset G_K \cap \mathbb{R}^n$, в която f е аналитично продължима.

Дефиниция 1.5. Нека $P(D)$ е с постоянни коефициенти. Едно разпределение $\mathcal{H} \in D'(\mathbb{R}^n)$ се нарича аналитичен параметрикс, ако $\mathcal{H}$ е аналитична функция в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, а функцията $P(D)\mathcal{H} - \delta$ е аналитична в $\mathbb{R}^n$.

Сега можем да формулираме

Теорема 1.5. Ако операторът $P(D)$ притежава аналитичен параметрикс, той е аналитично хипоелиптически.

Доказателството на теоремата се опира на следната

Лема 1.1. Нека $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $f \in D'(\mathbb{R}^n)$ като носителът на v се съдържа в кълбото $B: |x| < \delta$, а f е аналитична в някаква област $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Тогава конволюцията $v * f$ е аналитична в областта $\Omega_\delta = \{x \in \Omega, \rho(x, \partial\Omega) > \delta\}$, където както обикновено с $\rho(x, \partial\Omega)$ сме означили разстоянието между x и границата на Ω .

Доказателство. Понеже $v \in \mathcal{E}'(B)$, теорема 2.12, стр.220 ни позволява да представим v във вида

$$v = \sum_{\alpha} \partial^\alpha v_\alpha,$$

където сумата е крайна, а v_α са непрекъснати функции от $C_0(B)$. Очевидно имаме

$$/16/ \quad v * f = \sum_{\alpha} \partial^\alpha v_\alpha * f = \sum_{\alpha} \partial^\alpha (v_\alpha * f).$$

Достатъчно е да установим аналитичността в Ω_δ на едно от събираемите в /16/. Понеже $v_\alpha \in C_0(B)$, според теорема 1.2, стр. 174 за $\varepsilon < \varepsilon_0$, средните функции $v_{\alpha, \varepsilon} \stackrel{\text{def}}{=} v_\alpha * \chi_\varepsilon$ принадлежат на $D(B)$ и при $\varepsilon \rightarrow 0$ клонят равномерно към v_α в $\mathbb{R}^n$. Обстоятелството, че $v_{\alpha, \varepsilon} \in D(B)$ заедно с теорема 2.24, стр. 253 ни води до представянето

$$/17/ \quad (v_{\alpha, \varepsilon} * f)(y) = (f, v_{\alpha, \varepsilon}(y - x)) \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Нека сега y_0 е произволна точка от Ω_δ . Да вземем толкова малко кълбо $O_{y_0}: |y - y_0| \leq \delta$, че то да се съдържа в Ω_δ . Самата дефиниция на Ω_δ показва, че от $y - x \in B$, $y \in O_{y_0}$ следва релацията $x \in K \subset \Omega$, където K е подходящ компактен. Нека $l \in D(\Omega)$ е функция, тъждествено равна на единица в някаква околност на K . Понеже $\text{supp } v_{\alpha, \varepsilon} \subset B$ за $y \in O_{y_0}$ /17/ взема вида

$$/18/ \quad \begin{aligned} (v_{\alpha, \varepsilon} * f)(y) &= (v_{\alpha, \varepsilon} * lf)(y) \\ &= (fl, v_{\alpha, \varepsilon}(y - x)) = \int_{|y - x| \leq \delta} f(x) l(x) v_{\alpha, \varepsilon}(y - x) dx, \end{aligned}$$

защото $\text{supp } v_{\alpha, \varepsilon}(y - x) \subset \{|y - x| \leq \delta\}$, а функцията fl е непрекъсната в $\mathbb{R}^n$. Като извършим граничния преход $\varepsilon \rightarrow 0$ в това равенство, получаваме

$$/19/ \quad (\nu_\alpha * f)(y) = \int_{|y-x| \leq \delta} f(x) l(x) \nu_\alpha(y-x) dx, \quad y \in \Omega_{y_0}$$

Наистина, от една страна, $\nu_{\alpha, \varepsilon}$ клони равномерно към ν_α , а от друга - носителите на $\nu_{\alpha, \varepsilon}$ са равномерно ограничени и следователно $\nu_{\alpha, \varepsilon} * f \longrightarrow \nu_\alpha * f$ в $D'(\mathbb{R}^n)$ /теорема 2.26, стр.257/. Нищо не ни пречи да запишем /19/ във вида

$$\begin{aligned} /20/ \quad (\nu_\alpha * f)(y) &= \int_{|y-x| \leq \delta} f(x) \nu_\alpha(y-x) dx \\ &= \int_{|t| \leq \delta} f(y-t) \nu_\alpha(t) dt, \end{aligned}$$

понеже, както вече отбелязахме, от $y \in \Omega_{y_0}$ и от $|x-y| \leq \delta$ следва, че $x \in K$, а там l е тъждествено равна на единица. Както читателят навярно предчувства, доказателството на лемата е почти завършено. Наистина релациите $t \in \bar{B} = \{|t| \leq \delta\}$, $y \in \Omega_{y_0} \subset \Omega_\delta$ ни дават $y-t \in \Omega_{y_0} - \bar{B} \subset \Omega$, а f е аналитична в Ω . Нека F е аналитичното продължение на f , дефинирано в някаква област $G \subset \mathbb{C}^n$, съдържаща Ω . Тогава $\int_{|t| \leq \delta} F(y-t) \nu_\alpha(t) dt$ е търсеното аналитично продължение на $\nu_\alpha * f$, защото очевидно можем да диференцираме под знака на интеграла спрямо всяка от координатите на вектора $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$.

Тъй като от аналитичността на $\nu_\alpha * f$ очевидно следва, че и $\partial^\alpha (\nu_\alpha * f)$ е аналитична, доказателството на лема 1.1 е завършено. Точката $y_0 \in \Omega_\delta$ беше съвсем произволна, а ние конструирахме аналитично продължение на $\nu * f$ в околност на тази точка.

Сега вече можем да започнем доказателството на теорема 1.5.

Доказателство. Нека $\mathcal{H}$ е аналитичният параметрис на $P(D)$. Да положим $h = P(D)\mathcal{H} - \delta$. Функцията h е аналитична в $\mathbb{R}^n$ по предположение. Нека Ω е произволна област в $\mathbb{R}^n$ и нека $u \in D'(\Omega)$ е решение на уравнението

$$P(D)u = f, \quad f \in D'(\Omega).$$

Достатъчно е да докажем, че ако f е аналитична в околност на някаква точка $x_0 \in \Omega$, то и u е аналитична в евентуално по-малка околност на същата точка. /Аналитичността е локално свойство./ За конкретност да предположим, че f е аналитична в кълбо $\mathcal{O}_\varepsilon$: $|x - x_0| < 2\varepsilon$ и, използвайки теоремата на Коши-Ковалевска, да построим аналитично решение u_1 на уравнението $P(D)u_1 = f$, дефинирано в достатъчно малка околност на x_0 . Това може да се направи като прекараме през x_0 хиперравнина, която не е характеристична за $P(D)$ и зададем върху нея нулеви данни на Коши /за подробности вж. [41] или [42]/. Нехарактеристична хиперповърхнина съществува, защото $P(D)$ е ненулев /нулевият оператор не притежава параметрис/. Намалявайки, ако е необходимо, числото ε , можем да си мислим, че и u_1 е дефинирано в $\mathcal{O}_\varepsilon$: $|x - x_0| < 2\varepsilon$. Да положим $v = u - u_1$. Тогава имаме $P(D)v = 0$ в $\mathcal{O}_\varepsilon$. Да вземем $q \in D(\mathcal{O}_\varepsilon)$, тъждествено равна на единица в някаква околност на по-малкото кълбо $\mathcal{O}'_\varepsilon$: $|x - x_0| \leq \varepsilon$ и да разгледаме разпределението $qv \in \mathcal{E}'(\mathcal{O}'_\varepsilon)$. Очевидно имаме

$$P(D)(qv) = qP(D)v + L_q(v) = L_q(v) \in \mathcal{E}'(\mathcal{O}'_\varepsilon),$$

чиито коефициенти са тъждествено равни на нула в $\mathcal{O}'_\varepsilon$. Понеже $qv \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, можем да образуваме конволюцията $\mathcal{H} * qv$ и да получим

$$\begin{aligned} /21/ \quad P(D)(\mathcal{H} * (qv)) &= (P(D)\mathcal{H}) * (qv) = (\delta + h) * (qv) \\ &= \delta * (qv) + h * (qv) = qv + h * (qv). \end{aligned}$$

Тъй като h е аналитична в $\mathbb{R}^n$, а qv е с компактен носител,

лема 1.1 показва, че $h * (g\nu)$ е аналитична в $\mathbb{R}^n$. От друга страна обаче имаме

$$P(D)(H * (g\nu)) = H * P(D)(g\nu) = H * L_g(\nu),$$

което заедно с /21/ ни дава

$$g\nu = H * L_g(\nu) - h * (g\nu).$$

За да докажем, че $g\nu$ е аналитична около x_0 , достатъчно е да докажем, че $H * L_g(\nu)$ има това свойство. Нека $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ е функция с носител в кълбото $|x| \leq \delta$, $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$, тъждествено равна на единица за $|x| < \frac{\delta}{2}$. Имаме

$$H * L_g(\nu) = (\varphi H) * L_g(\nu) + ((1-\varphi)H) * L_g(\nu).$$

Както при доказателството на теорема 1.3 се вижда, че първото събираемо вдясно се анулира близо до точката x_0 . Остава да изследваме второто събираемо. Понеже носителът на $L_g(\nu)$ се съдържа във венеца $\varepsilon < |x - x_0| < 2\varepsilon$, можем да пишем

$$L_g(\nu) = \sum_{\alpha} \partial^{\alpha} w_{\alpha},$$

където w_{α} са непрекъснати функции с носители в същия венец и сумата е крайна. По такъв начин получаваме

$$\begin{aligned} ((1-\varphi)H) * L_g(\nu) &= \sum_{\alpha} \partial^{\alpha} \left\{ ((1-\varphi)H) * w_{\alpha} \right\} \\ &= \sum_{\alpha} \partial^{\alpha} \left\{ \int_{\varepsilon \leq |x-x_0| \leq 2\varepsilon} ((1-\varphi)H)(y-x) w_{\alpha}(x) dx \right\}. \end{aligned}$$

Да оставим y да се мени в кълбото $|y - x_0| < \frac{\varepsilon}{4}$ и да разгледаме едно от събираемите в последната сума. Имаме

$$\begin{aligned} &\int_{\varepsilon \leq |x-x_0| \leq 2\varepsilon} ((1-\varphi)H)(y-x) w_{\alpha}(x) dx \\ &= \int_{\varepsilon \leq |x-x_0| \leq 2\varepsilon} H(y-x) w_{\alpha}(x) dx, \end{aligned}$$

Следващо от $|y - x_0| < \frac{\varepsilon}{4}$, $|x - x_0| \geq \varepsilon$ следва, че

$$|y - x| \geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{4} > \frac{\varepsilon}{2} > \delta, \text{ а там } \varphi \text{ е тъждествено нула.}$$

Понеже H е аналитична в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, последният интеграл е аналитичен в $|y - x_0| < \frac{\varepsilon}{4}$ и доказателството е завършено.

В частност според тази теорема $P(D)$ е аналитично хипоелип-тичен, ако притежава фундаментално решение, което е аналитично в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Ще завършим тази точка с две теореми, които оправдават употребата на термините "хипоелип-тичен" и "аналитично хипоелип-тичен". Ще припомним една дефиниция.

Д е ф и н и ц и я 1.6. Един оператор

$$P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha} D^{\alpha}, \quad a_{\alpha} = \text{const}$$

се нарича елип-тичен, ако полиномът

$$/22/ \quad P_m(\xi) = \sum_{|\alpha| = m} a_{\alpha} \xi^{\alpha},$$

който се нарича главен символ на $P(D)$, не се анулира в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Понеже P_m е хомогенен, имаме

$$/23/ \quad m |\xi|^m \leq |P_m(\xi)| \leq M |\xi|^m,$$

където

$$m = \min_{|\xi|=1} |P_m(\xi)| > 0, \quad M = \max_{|\xi|=1} |P_m(\xi)|.$$

Т е о р е м а 1.6. Всеки елип-тичен оператор с постоянни коефициенти е хипоелип-тичен.

Преди да започнем доказателството ще установим една проста лема.

Л е м а 1.2. Нека k е естествено число. Операторите $P(D)$ и $P^k(D)$ са едновременно хипоелиптически или нехипоелиптически.

Д о к а з а т е л с т в о. Ако $k = 1$ няма какво да доказваме. Нека лемата е вярна за $k_0 - 1$. За да докажем, че тя е вярна и за $k = k_0$, да допуснем, че $P^{k_0}(D)$ е хипоелиптически и да означим с $u \in D'(\Omega)$ едно решение на уравнението

$$/24/ \quad P(D)u = f, \quad f \in D'(\Omega).$$

Трябва да докажем, че ако $f \in C^\infty(O)$, където O е подобласт на Ω , то и $u \in C^\infty(O)$. За тази цел е достатъчно да приложим оператора P^{k_0-1} към /24/ и да получим

$$/25/ \quad P^{k_0}(D)(u) = P^{k_0-1}(f).$$

Тъй като $P^{k_0-1}(f) \in C^\infty(O)$ и $P^{k_0}(D)$ е хипоелиптически по предположение, от /25/ следва $u \in C^\infty(O)$, т.е. $P(D)$ е хипоелиптически. Сега да предположим, че $P(D)$ е хипоелиптически и да вземем едно решение $u \in D'(\Omega)$ на уравнението

$$/26/ \quad P^{k_0}(D)u = f, \quad f \in D'(\Omega) \cap C^\infty(O), \quad O \subset \Omega.$$

Трябва да докажем, че $u \in C^\infty(O)$. Понеже $P(D)$ е хипоелиптически, представяйки /26/ във вида

$$/27/ \quad P(D)(P^{k_0-1}(D)u) = f,$$

заклучаваме, че $P^{k_0-1}(D)u \in C^\infty(O)$, т.е. $u \in C^\infty(O)$, защото според индуктивната хипотеза $P(D)$ и $P^{k_0-1}(D)$ са хипоелиптически едновременно.

С това лемата е доказана.

Д о к а з а т е л с т в о на т е о р е м а 1.6. Нека $P(D)$ е елиптически оператор. Достатъчно е да конструираме някакъв параметрикс $H \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Както ще видим, това се достига учудващо просто. Да представим $P(D)$ във вида

$$P(D) = P_m(D) + P_{m-1}(D),$$

където $P_{m-1}(D)$ е диференциален оператор от ред $\leq m-1$. Очевидната оценка

$$|P_{m-1}(\xi)| \leq C |\xi|^{m-1}, \quad |\xi| \geq 1$$

и /23/ показват, че имаме

$$/28/ \quad |P(\xi)| \geq C_1 |\xi|^m, \quad \text{за } |\xi| \geq R,$$

където C , C_1 и R са подходящи положителни константи. Сега е ясно, че без ограничение на общността можем да предположим, че

$$/29/ \quad \int_{|\xi| \geq R} \frac{d\xi}{|P(\xi)|} < \infty,$$

защото в противен случай, опирайки се на лема 1.2, вместо $P(D)$ ще разглеждаме $P^k(D)$, където k е достатъчно голямо. Нека $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ е функция със следните свойства:

$$/30/ \quad \chi(\xi) = \begin{cases} 0, & |\xi| \leq R \\ 1, & |\xi| \geq R+1, \end{cases}$$

където R е числото от /28/ и /29/. Ще покажем, че функцията

$$/31/ \quad H(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\chi(\xi) e^{i(x, \xi)} d\xi}{P(\xi)}$$

е търсеният параметрикс. Надяваме се, че мотивите да разгледаме H са ясни. От /30/ и /29/ веднага следва, че H е дефинирана и непрекъсната в $\mathbb{R}^n$. За да проверим, че тя е параметрикс на $P(D)$, да вземем $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ и да пресметнем $(P(D)H, \varphi)$. Изхождайки от дефиницията, намираме

$$/32/ \quad (P(D)H, \varphi) = (H, P(-D)\varphi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\chi(\xi) e^{i(x, \xi)} d\xi}{P(\xi)} \right\} P(-D)\varphi(x) dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\chi(\xi)}{P(\xi)} \left(\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x, \xi)} P(-D) \varphi(x) dx \right) d\xi,$$

защото теоремата на Фубини ни позволява да разменим реда в интегрирането. Като вземем пред вид, че вътрешният интеграл не е нищо друго освен обратната трансформация на Фурие на функцията $P(-D) \varphi$, с интегриране по части получаваме

$$/33/ \quad F^{-1}(P(-D) \varphi)(\xi) = P(\xi) F^{-1}(\varphi)(\xi)$$

(сравнете с /10/, стр.278, от които леко следва /33/ поради тясната връзка между F и F^{-1}). Като заместим в /32/, намираме

$$\begin{aligned} /34/ \quad (P(D)H, \varphi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\chi(\xi)}{P(\xi)} P(\xi) F^{-1}(\varphi)(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi(\xi) F^{-1}(\varphi)(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} F^{-1}(\varphi)(\xi) d\xi - \int_{\mathbb{R}^n} (1-\chi(\xi)) F^{-1}(\varphi)(\xi) d\xi \\ &= \varphi(0) - \int_{\mathbb{R}^n} (1-\chi(\xi)) F^{-1}(\varphi)(\xi) d\xi = \varphi(0) - I. \end{aligned}$$

Остава да изследваме последния интеграл. Имаме

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} (1-\chi(\xi)) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x, \xi)} \varphi(x) dx \right) d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x, \xi)} (1-\chi(\xi)) d\xi \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) F^{-1}(1-\chi)(x) dx = (F^{-1}(1-\chi), \varphi). \end{aligned}$$

Обединявайки този резултат с /34/, получаваме

$$/35/ \quad P(D)H = \delta + F^{-1}(1-\chi),$$

защото $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ беше произволно.

Понеже от $1-\chi \in D(\mathbb{R}^n)$ следва $F^{-1}(1-\chi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$,

/35/ показва, че H е наистина параметрикс.

За да се убедим, че $H \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ да разгледаме функцията

$$\frac{|x|^{2k}}{(2\pi)^n} \int_{|\xi| \leq N} \frac{e^{i(x, \xi)} \chi(\xi)}{P(\xi)} d\xi, \quad k - \text{естествено.}$$

$$\text{Като използваме тъждеството } x_j e^{i(x, \xi)} = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \xi_j} e^{i(x, \xi)},$$

след $N \rightarrow \infty$ многократно интегриране по части, с граничния преход

$$/36/ \quad |x|^{2k} H(x) = \frac{(-1)^k}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x, \xi)} \Delta^k \left(\frac{\chi(\xi)}{P(\xi)} \right) d\xi,$$

защото от /29/ следва, че граничните членове клонят към нула (Δ , както обикновено е Лапласиана в $\mathbb{R}^n$). Лесно се вижда /например индуктивно/, че

$$/37/ \quad \Delta^k \left(\frac{\chi(\xi)}{P(\xi)} \right) = O \left(\frac{1}{|\xi|^{m+2k}} \right) \text{ при } |\xi| \rightarrow \infty,$$

където m е степента на P . Тази релация показва, че в /36/ можем да диференцираме поне $2k$ пъти под знака на интеграла. Следователно

$$|x|^{2k} H(x) \in C^{2k}(\mathbb{R}^n), \text{ т.е. } H \in C^{2k}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

Понеже естественото число k беше произволно, релацията $H \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, а заедно с нея и теоремата е доказана.

Пълно описание на хипоелиптичните оператори с постоянни коефициенти е дадено от Хьормандер [27]. Една от възможните формулировки на неговия резултат е следната:

Нека $P(D)$ е оператор с постоянни коефициенти и нека $G \subset \mathbb{C}^n$ е множеството от корените на уравнението $P(\xi) = 0$. Оказва се, че $P(D)$ е хипоелиптичен тогава и само тогава, когато от $\xi \in G$, $|\xi| \rightarrow \infty$ следва, че и $|Im \xi| \rightarrow \infty$.

Следващата теорема изяснява връзката между елиптичността и аналитичната хипоелиптичност.

Т е о р е м а 1.7. Един линейен диференциален оператор с постоянни коефициенти е аналитично хипоелиптичен тогава и само тогава, когато е елиптичен.

Тази теорема остава извън рамките на тази книга /вж. [27]/. Ще отбележим само, че бихме могли да докажем аналитичната хипоелиптичност на елиптичните оператори, като докажем, че параметриксът /31/ е аналитичен. Това може да се постигне поне по два различни начина. Първият от тях е технически прост [43], но се използва теоремата на Стокс в $\mathbb{C}^n$. Задача 5 от следващото упражнение дава представа за това доказателство. Вторият метод, който води до същия резултат е напълно елементарен, но технически сложен [40], [43] /.

У п р а ж н е н и е 1

1. Нека $P(D)$ е линейен оператор с постоянни коефициенти. Докажете, че той не притежава фундаментално решение с компактен носител.

У п ъ т в а н е. Допуснете противното и направете трансформация на Фурие. Ще получите $P(\xi) \hat{E}(\xi) = 1$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, където $\hat{E}$ е Фуриеровият образ на предполагаемото фундаментално решение. Убедете се, че това равенство е в сила и в $\mathbb{C}^n$ и стигнете до противоречие с факта, че всеки полином има поне една комплексна нула.

2. Нека $P(D)$ е ненулев линейен диференциален оператор с постоянни коефициенти и E е негово фундаментално решение. Докажете че всяко решение $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ на уравнението $P(D)u = 0$, за което конволюцията $E * u$ съществува, се анулира тъждествено.

3. Нека $P(D)$ е операторът от предишната задача. Установете че от $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $P(D)u = 0$ следва $u = 0$ по два начина:

- а/ чрез директно прилагане на трансформацията на Фурие и
- б/ като следствие от зад. 2.

4. Докажете, че нито един оператор $P(D)$ с постоянни коефициенти не притежава две различни фундаментални решения с носители, които се съдържат от един и същ изпъкнал конус с център в началото.

У п ъ т в а н е. Допуснете противното и се възползвайте от зад. 2. Става дума за конус, който не се редуцира до пространство или полупространство./

5. Нека

$$P(z) = \sum_{\nu=0}^m a_{\nu} z^{m-\nu}, \quad a_0 \neq 0; \quad z \in \mathbb{C}^1, \quad m \geq 2,$$

а

$$\chi(\xi) = \begin{cases} 0, & |\xi| \leq R \\ 1, & |\xi| \geq R+1 \end{cases}$$

е функция от $C^{\infty}(\mathbb{R}^1)$. Нека освен това R е толкова голямо, че нулите на полинома P лежат в кръга $|z| < R$.

Докажете, че функцията

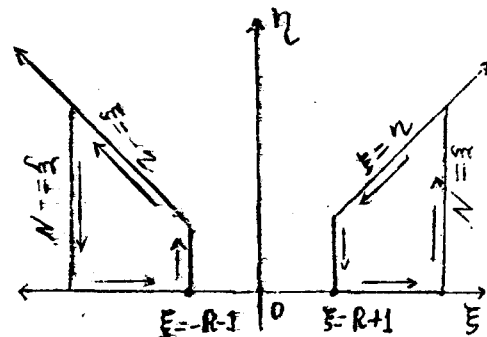
$$H(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi(\xi)}{P(\xi)} e^{ix\xi} d\xi$$

е аналитична в $\mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$.

У п ъ т в а н е. Имаме

$$H(x) = \int_{|\xi| \leq R+1} \frac{\chi(\xi)}{P(\xi)} e^{ix\xi} d\xi + \int_{|\xi| \geq R+1} \frac{e^{ix\xi}}{P(\xi)} d\xi = I_1(x) + I_2(x).$$

Първият интеграл очевидно дефинира цяла функция на x , защото интеграционният интервал е краен. За да докажете, че I_2 е аналитичен в $\mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$, фиксирайте $x_0 > 0$ и приложете теоремата на Коши към контура, изобразен на фиг. 9. Покажете, че за



Фиг. 9

$x \in \left[\frac{x_0}{2}, \frac{3x_0}{2} \right]$ интегралите по отсечките

$$\xi = \pm N, \quad 0 \leq \eta \leq N$$

клонят към нула при $N \rightarrow \infty$ и извършете граничния преход. Ще получите

$$I_2(x) = \int_{\xi_1 + \xi_2} \frac{e^{ix\xi}}{P(\xi)} d\xi.$$

Какво разбираме под $\xi_1 + \xi_2$ е ясно от чертежа. Покажете, че последният интеграл е холоморфна функция на x в достатъчно малка комплексна околност на x_0 . За $x_0 < 0$ направете аналогична конструкция.

6. Нека $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ е такова разпределение, че за всяко $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ да имаме $P(D)(u * \varphi) = \varphi$.

Докажете, че $P(D)u = \delta$.

У п ъ т в а н е. Разгледайте $\chi_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^n} \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, където χ е камбановидната функция от стр. 174. Образувайте разпределението $u_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} u * \chi_\varepsilon$ и в равенството

$$P(D)u_\varepsilon = \chi_\varepsilon$$

оставете ε да клонят към нула.

1.2. Фундаментални решения на обикновените диференциални уравнения

Нека

$$/38/ \quad L(x) = x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x$$

е линеен диференциален оператор с коефициенти $a_k \in C^\infty(a, b)$, където (a, b) е отворен интервал в $\mathbb{R}^1$, безразлично дали е краен или безкраен. В курсовете по обикновени диференциални уравнения се доказва съществуването на фундаментална система $\{x_\nu\}$,

$$x_\nu \in C^\infty(a, b), \quad \nu = 1, 2, \dots, n \text{ от решения на } L(x) = 0.$$

Нещо повече, ако коефициентите на /38/ са аналитични в (a, b) , и функциите от фундаменталната система имат това свойство. Тук нашата задача е да конструираме фундаментално решение на /38/.

И така, да предположим, че (a, b) съдържа точката $t = 0$ и да разгледаме уравнението

$$/39/ \quad L(x) = \delta, \quad \delta \in D'(a, b).$$

Ръководейки се от познанията си по обикновени диференциални уравнения, ще се опитаме да решим тази задача с метода на Лагранж. Да потърсим решение на /39/ от вида

$$/40/ \quad u = \sum_{\nu=1}^n c_\nu x_\nu,$$

където c_ν са разпределения от $D'(a, b)$, подлежащи на определяне. (Разпределението /40/ е наистина дефинирано, защото $x_\nu \in C^\infty(a, b)$.) Както в курсовете по ОДУ стигаме до системата

$$/41/ \quad \sum_{\nu=1}^n c'_\nu x_\nu^{(k)} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-2$$

$$\sum_{\nu=1}^n c'_\nu x_\nu^{(n-1)} = \delta,$$

която в $\Omega \stackrel{\text{def}}{=} (a, b) \setminus \{0\}$ се редуцира до хомогенната система

$$/42/ \quad \sum_{j=1}^n c_j' x_j^{(k)} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Не е трудно да се види, че от /42/ следват равенствата $c_j' = 0$ в Ω , $j = 1, 2, 3, \dots, n$.

Наистина да привлечем на помощ детерминантата на Вронски

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & \dots & x_n(t) \\ x_1'(t) & \dots & x_n'(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \dots & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

и да означим с $A_{ij}(t)$ аджингираното количество на елемента $x_j^{(i)}$ в тази детерминанта. Очевидно е, че $A_{ij} \in C^\infty(a, b)$. Да умножим i -тото уравнение на /42/ с A_{ij} и да съберем получените равенства. Намираме

$$/43/ \quad c_j' W = 0 \text{ в } \Omega, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

откъдето следва $c_j' = 0$ в Ω , защото W не се анулира в (a, b) .

Наистина, нека $\varphi \in D(\Omega)$ е произволно. Тогава и

$$\psi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\varphi}{W} \in D(\Omega) \text{ и } /43/ \text{ ни дава } (c_j' W, \psi) = (c_j', \varphi) = 0,$$

т.е. наистина $c_j' = 0$ в Ω . Сега вече резултатът от зад. 3, стр. 202 показва, че c_j е константа във всеки от интервалите $(a, 0)$ и $(0, b)$. С това c_j е напълно определено като елемент от $D'(a, b)$. Остава да пресметнем c_j' . За тази цел да пресметнем производната в $D'(a, b)$ на функцията

$$h = \begin{cases} \alpha, & 0 < t < b \\ \beta, & a < t < 0. \end{cases}$$

/Както видяхме, всяка от функциите c_j има този вид./

Нека $\varphi \in D(a, b)$. Имаме

$$\begin{aligned} (h', \varphi) &= -(h, \varphi') = -\beta \int_a^0 \varphi'(t) dt - \alpha \int_0^b \varphi'(t) dt \\ &= -\beta \varphi(0) + \alpha \varphi(0) = (\alpha - \beta) (\delta, \varphi), \end{aligned}$$

т.е.

$$h' = (\alpha - \beta) \delta.$$

Използвайки този резултат, намираме

$$c_j' = a_j \delta, \quad a_j = \text{const} \text{ и } /41/ \text{ взема вида}$$

$$\left(\sum_{j=1}^n a_j x_j^{(k)} \right) \delta = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-2,$$

/44/

$$\left(\sum_{j=1}^n a_j x_j^{(n-1)} \right) \delta = \delta,$$

т.е.

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-2,$$

/45/

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j^{(n-1)}(0) = 1.$$

От направеното разискване е ясно, че както и да избираме функциите

$$c_j(t) = \begin{cases} \alpha_j, & t > 0, \\ \beta_j, & t < 0, \end{cases}$$

линейната комбинация

$$X(t) = \sum_{j=1}^n c_j(t) x_j(t)$$

ще бъде фундаментално решение на /38/, стига системата /45/, където $a_j = \alpha_j - \beta_j$ да бъде удовлетворена.

По този начин намерихме безбройно много фундаментални решения, не всички от които са съществено различни. В частност, ако $\{x_j\}$ е фундаментална система от решения на /38/, такава, че

$$x_j^{(k)}(0) = \begin{cases} 0, & k \neq j-1 \\ 1, & k = j-1, \end{cases}$$

системата /45/ взема вида

$$a_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad a_n \cdot 1 = 1,$$

което означава, че функциите

$$/46/ \quad X_1(t) = Y(t)x_n(t) \text{ и } X_2(t) = -Y(-t)x_n(t),$$

където

$$Y(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

е функцията на Хевисайд, са фундаментални решения на /38/. Фундаменталните решения /46/ като най-прости се използват най-често.

Ще завършим с една теорема, която подчертава качествената страна на получените резултати.

Т е о р е м а 1.8. Фундаменталните решения на кой да е оператор от вида /38/ са локално сумируеми функции. Ако коефициентите на оператора зависят от параметри, фундаменталните решения зависят от тях по начина, по който зависят от параметрите елементите на фундаменталната система $\{x_j\}$, която се използва в /46/.

Наистина, за фундаменталните решения /46/ твърдението е очевидно. Ако x е произволно фундаментално решение, достатъчно е да образуваме разликата $X_1 - x$ и да забележим, че $L(X_1 - x) = 0$. Според задача 1 от следващото упражнение $X_1 - x \in C^\infty(a, b)$ и следователно е линейна комбинация на елементи от фундаменталната система.

П р и м е р 1. Фундаменталните решения на уравненията с постоянни коефициенти се намират особено просто. За образец да на-

мерим фундаменталните решения от вида /46/ за уравнението $x'' + a^2 x = 0, \quad a > 0$.

Понеже функцията

$$x(t) = A \cos at + B \sin at$$

е общо решение на това уравнение, решението, за което $x(0) = 0, x'(0) = 1$ има вида

$$x(t) = \frac{\sin at}{a}.$$

Следователно

$$X_1(t) = Y(t) \frac{\sin at}{a}, \quad X_2(t) = -Y(-t) \frac{\sin at}{a},$$

са търсените фундаментални решения.

У п р а ж н е н и е 2

1. Нека

$$/47/ \quad L(x) = x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x$$

е оператор, чиито коефициенти a_j са безкрайно гладки /аналитични/ в някакъв интервал (a, b) . Докажете, че L е хипоелиптическич /съответно аналитично хипоелиптическич/.

У п ъ т в а н е. Най-напред редуцирайте задачата до изследване на хомогенното уравнение $L(u) = 0$. После разсъждавайте индуктивно. В случая $n = 1$ извлекете необходимия ви резултат от зад.3, стр.202. За да направите индуктивната стъпка от $n-1$ към n вземете едно разпределение $u \in \mathcal{D}'(c, d)$, $(c, d) \subset (a, b)$ и фиксирайте произволна точка $t_0 \in (c, d)$. После с помощта на теоремата за съществуване конструирайте безкрайно гладко /аналитично/ решение x_0 такова, че $x_0(t_0) \neq 0$. След това разгледайте разпределението $v \stackrel{\text{def}}{=} \frac{u}{x_0(t)}$, което е дефинирано в достатъчно малка околност на t_0 . Използвайки, че $u = x_0 v$ удовлетворява /47/, докажете, че v е решение на подходящо диференциално

уравнение с безкрайно гладки /аналитични/ коефициенти. Накрая остава да вземете пред вид, че уравнението за v се свежда до уравнение от $n-1$ ред.

1.3. Фундаментални решения на операторите на Коши - Риман, Лаплас и Шрьодингер. Фундаментално решение и задача на Коши за уравнението на топлопроводността

Трансформацията на Фурие е мощно средство за изследване на частните диференциални уравнения. В частност тя е незаменим инструмент при конструирането на фундаментални решения на уравненията с постоянни коефициенти. Ние ще демонстрираме силата на този инструмент като намерим фундаменталните решения на уравненията на математическата физика.

Теорема 1.9. Функцията $\frac{1}{\pi(x+iy)}$ е фундаментално решение на оператора на Коши - Риман

$$/48/ \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Преди да се заемем с доказателството на теоремата ще отбележим, че ако $f \in L_{loc}(\Omega)$ удовлетворява уравнението $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ (Ω е област в $\mathbb{R}^2$), то като положим $f = P + iQ$ и отделим реалната и имажинерната част в тъждеството $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, получаваме

$$/49/ \quad \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= -\frac{\partial P}{\partial y}, \end{aligned}$$

т.е. уравнението $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ се оказва еквивалентно с класическата

система на Коши - Риман - факт, който обяснява названието на оператора /48/. За да разберем произхода на възприетото означение да положим

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy$$

и да изразим формално производните $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$ чрез производните спрямо z и $\bar{z}$. Стигаме до релацията /48/, която се схваща като дефиниция на символа $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$.

След тези предварителни бележки да се заемем с въпроса по същество. Трябва да решим уравнението

$$/51/ \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \delta.$$

Да предположим, че $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ е едно негово решение и да направим трансформация на Фурие. Означавайки както обикновено с ξ и η дуалните променливи, с помощта на тъждествата от теорема 311, стр.300, намираме

$$\frac{1}{2} (i \xi \hat{u} - \eta \hat{u}) = 1, \quad \text{т.е.} \quad \hat{u} = \frac{-2i}{\xi + i\eta}.$$

Очевидно е, че функцията

$$v \stackrel{\text{def}}{=} \frac{-2i}{\xi + i\eta}$$

е локално сумируема и принадлежи на $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$. Следователно

$$/52/ \quad u \stackrel{\text{def}}{=} F^{-1} \left(\frac{-2i}{\xi + i\eta} \right),$$

(F^{-1} е обратната трансформация на Фурие в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$) ще бъде фундаментално решение на /51/. По този начин стигнахме до задачата да намерим експлицитен израз за разпределението /52/. Тъй като $v \in L^1(\mathbb{R}^2)$, директното пресмятане на /52/ е невъзможно. Ръководейки се от съображения за непрекъснатост, да разгле-

даме функцията

$$v_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \frac{-2ie^{-\varepsilon\sqrt{\xi^2+\eta^2}}}{\xi+i\eta}, \quad \varepsilon > 0,$$

която принадлежи на $L^1(\mathbb{R}^2)$ и при $\varepsilon \rightarrow 0$ очевидно клони към v в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$. Понеже операторът $F^{-1}: \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ е непрекъснат, при $\varepsilon \rightarrow 0$ имаме $u = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F^{-1}(v_\varepsilon)$. Тъй

като $F^{-1}(v_\varepsilon)$ се пресмята просто, стигаме до търсения израз за u . /Сравнете с пример 3, стр.303-306 и задача 2 от следващото упражнение./

Сега да реализираме тази програма. Преминавайки към полярни координати, получаваме

$$\begin{aligned} F^{-1}(v_\varepsilon) &= \frac{-2i}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{i(x\xi+\eta y)} e^{-\varepsilon\sqrt{\xi^2+\eta^2}}}{\xi+i\eta} d\xi d\eta \\ &= \frac{-i}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^\infty e^{[i(x\cos\theta+y\sin\theta)-\varepsilon]\rho} \rho d\rho \right] e^{-i\theta} d\theta. \end{aligned}$$

Вътрешният интеграл се пресмята моментално. Имаме

$$\int_0^\infty e^{[i(x\cos\theta+y\sin\theta)-\varepsilon]\rho} \rho d\rho = \frac{1}{\varepsilon - i(x\cos\theta + y\sin\theta)},$$

следователно стигнахме до равенството

$$/53/ \quad F^{-1}(v_\varepsilon) = \frac{-i}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\theta} d\theta}{\varepsilon - i(x\cos\theta + y\sin\theta)}.$$

Този интеграл се пресмята с теоремата за резидуумите. Преди да направим стандартната субституция $z = e^{i\theta}$ /която, разбира се, директно води до целта/, удобно е да преработим малко подинтегралната функция. Като положим $x = t \cos \varphi$, $y = t \sin \varphi$, получаваме

$$/54/ \quad I_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\theta} d\theta}{\varepsilon - i(x\cos\theta + y\sin\theta)} = \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\theta} d\theta}{\varepsilon - it\cos(\varphi - \theta)}.$$

Да въведем новото променливо $\omega = \varphi - \theta$. Използвайки периодичността на подинтегралната функция, намираме

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= - \int_\varphi^{\varphi-2\pi} \frac{e^{i(\omega-\varphi)} d\omega}{\varepsilon - it\cos\omega} = e^{-i\varphi} \int_{-2\pi}^0 \frac{e^{i\omega} d\omega}{\varepsilon - it\cos\omega} \\ &= e^{-i\varphi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\omega} d\omega}{\varepsilon - it\cos\omega}. \end{aligned}$$

Сега вече можем да положим $z = e^{-i\omega}$. Предполагайки, че $t \neq 0$, получаваме

$$\begin{aligned} /55/ \quad I_\varepsilon &= \frac{e^{-i\varphi}}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{\varepsilon - \frac{it}{2}(z + \frac{1}{z})} = \\ &= \frac{ze^{-i\varphi}}{i} \int_{|z|=1} \frac{z dz}{2\varepsilon z - it(z^2 + 1)}. \end{aligned}$$

Остава да приложим теоремата за резидуумите. Като решим уравнението $z^2 + \frac{2\varepsilon i}{t} z + 1 = 0$, намираме

$$z_{1,2} = \frac{-\varepsilon i}{t} \pm \sqrt{-\left(\frac{\varepsilon}{t}\right)^2 - 1} = \frac{-\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 + t^2}}{t} i.$$

Ясно е, че коренът $z_1 = \frac{-\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + t^2}}{t} i$ лежи в единичния кръг, а $z_2 = \frac{-\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 + t^2}}{t} i$ — вън от него /квадратният корен е аритметичен/, следователно

$$\begin{aligned} /56/ \quad I_\varepsilon &= \frac{2e^{-i\varphi}}{i(-it)} \int_{|z|=1} \frac{z dz}{(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{2e^{-i\varphi}}{t} 2\pi i \operatorname{Res} z_1 \\ &= \frac{4\pi i e^{-i\varphi}}{t} \frac{z_1}{z_1 - z_2} = \frac{4\pi i e^{-i\varphi}}{t} \frac{-\varepsilon + \sqrt{t^2 + \varepsilon^2}}{2\sqrt{t^2 + \varepsilon^2}}. \end{aligned}$$

Извършвайки граничния преход $\varepsilon \rightarrow 0$, намираме

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon = \frac{2\pi i e^{-i\varphi}}{t},$$

т.е.

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F^{-1}(\nu_\varepsilon) &= \frac{-i}{2\pi^2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon = \frac{e^{-i\varphi}}{\pi t} = \frac{1}{\pi t e^{i\varphi}} \\ &= \frac{1}{\pi(x+iy)}. \end{aligned}$$

Остава да се убедим, че

$$F^{-1}(\nu_\varepsilon) \rightarrow \frac{1}{\pi(x+iy)}$$

и в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$. Това обаче веднага следва от /56/ и от теоремата на Лебег за граничен преход под знака на интеграла. Наистина имаме

$$|F^{-1}(\nu_\varepsilon)| = \left| \frac{-i}{2\pi^2} I_\varepsilon \right| \leq \frac{1}{\pi t} \frac{\sqrt{t^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon}{\sqrt{t^2 + \varepsilon^2}} \leq \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi \sqrt{x^2 + y^2}}$$

и понеже функцията $\frac{1}{\pi \sqrt{x^2 + y^2}}$ е локално сумируема и ограничена

на в областта $x^2 + y^2 \geq 1$, доказателството е завършено. В заключение ще отбележим, че директната проверка на твърдението в теоремата е тривиално /зад.1/. При такъв подход обаче остава неясно как сме стигнали до това фундаментално решение.

Комбинирайки теорема 1.8 с теорема 1.3 и с теорема 1.5, стигаме до следния резултат.

Теорема 1.10. Операторът на Коши-Риман е хипоелиптически и аналитично хипоелиптически. В частност всяко решение

$f \in D'(\Omega)$ на хомогенното уравнение $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ е истинска аналитична функция в областта Ω .

Теорема 1.11. Нека както обикновено

$$\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

е операторът на Лаплас в $\mathbb{R}^n$. Функциите $-\frac{1}{(n-2)\sigma_n} \frac{1}{|x|^{n-2}}$

$n \geq 3$ и $\frac{\ln |x|}{2\pi}$ ($n=2$) са негови фундаментални решения (σ_n е лицето на единичната сфера в $\mathbb{R}^n$). Следователно, Лапласианът е както хипоелиптически, така и аналитично хипоелиптически.

И сега директната проверка на твърдението е тривиална. Нашата цел тук е естествено да стигнем до формулирания резултат.

Доказателство. Най-напред ще разгледаме случая $n \geq 3$. Да предположим, че $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ е фундаментално решение. Като извършим трансформация на Фурие, от $\Delta u = \delta$ получаваме

$$/57/ \quad -|\xi|^2 \hat{u} = 1, \quad \text{т.е.} \quad \hat{u} = -\frac{1}{|\xi|^2}.$$

Понеже функцията $-\frac{1}{|\xi|^2}$ се съдържа в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (тук съществено се използва, че $n \geq 3$), разпределението $u \stackrel{\text{def}}{=} -F^{-1}\left(\frac{1}{|\xi|^2}\right)$

ще бъде фундаментално решение. Използвайки тъждеството $F^{-1}(v) = \frac{1}{(2\pi)^n} F(\check{v})$, $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ /вж. /35/, стр.

299/, с помощта на /119/, стр.393 получаваме

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{-1}{(2\pi)^n} F\left(\frac{1}{|\xi|^2}\right)(x) \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^n} \frac{2^{n-1} \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\Gamma(1)} |x|^{-n+2} \\ &= -\frac{1}{(n-2)\sigma_n} |x|^{-n+2}, \end{aligned}$$

където σ_n е лицето на единичната сфера в $\mathbb{R}^n$.

Случаят $n=2$ е по-сложен. Както и по-рано, получаваме

$u = -\frac{1}{|\xi|^2}$, но сега тази функция не е локално сумируема и

следователно не принадлежи на $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$. Ето защо трябва да потърсим някаква регуляризация /вж.стр.195/ на $-\frac{1}{|\xi|^2}$, която удо-

влетворява /57/. В същност всички регуляризации на $-\frac{1}{|\xi|^2}$ се съдържат в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$, но не всяка от тях е решение на /57/. Спомняйки си, че в 3.10, стр.390 чрез аналитично продължение дефинираме разпределението $u(\lambda) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ с плътност $|x|^{\lambda-n}$,

$\lambda \neq 0, -2, -4, \dots$ и пресметнахме неговата трансформация на Фурие, естествено е да се опитаме да използваме този резултат.

Понеже $u(\lambda)$ има полюс в точката $\lambda=0$ (т.е. разпределение с плътност $|x|^{-2}$ не е дефинирано в цялото $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$), естествено е да разглеждаме $u(\varepsilon) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ с плътност $|x|^{\varepsilon-2}$,

$\varepsilon > 0$. Да припомним, че по дефиниция имаме

$$\begin{aligned} (u(\varepsilon), \varphi) &= \\ &= \int_{|x| \leq 1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{|x|^{2-\varepsilon}} dx + \frac{2\pi}{\varepsilon} \varphi(0) + \int_{|x| \geq 1} \frac{\varphi(x)}{|x|^{2-\varepsilon}} dx, \end{aligned}$$

а от друга страна, /119/, стр.393 ни дава

$$\hat{u}(\varepsilon) = \frac{2^\varepsilon \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \pi}{\Gamma\left(\frac{2-\varepsilon}{2}\right)} |\xi|^{-\varepsilon}.$$

Всичко това заедно с тъждеството

$$\hat{\hat{u}}(\varepsilon) = (2\pi)^2 \check{u}(\varepsilon) = (2\pi)^2 u(\varepsilon)$$

/в случая $\check{u} = u$, защото функцията $|x|^{2-\varepsilon}$ е четна/ ни дава

$$(2\pi)^2 (u(\varepsilon), \varphi) = (\hat{\hat{u}}(\varepsilon), \varphi) = (\hat{u}(\varepsilon), \hat{\varphi})$$

$$= \frac{2^\varepsilon \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \pi}{\Gamma\left(\frac{2-\varepsilon}{2}\right)} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\hat{\varphi}(\xi)}{|\xi|^\varepsilon} d\xi, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2),$$

т.е.

$$(2\pi)^2 \left\{ \int_{|x| \leq 1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{|x|^{2-\varepsilon}} dx + \frac{2\pi}{\varepsilon} \varphi(0) + \int_{|x| \geq 1} \frac{\varphi(x)}{|x|^{2-\varepsilon}} dx \right\}$$

/58/

$$= \frac{2}{\varepsilon} 2^\varepsilon \pi \frac{\Gamma\left(\frac{\varepsilon+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-\varepsilon}{2}\right)} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\hat{\varphi}(\xi)}{|\xi|^\varepsilon} d\xi.$$

Да положим за краткост

$$/59/ \quad a(\varepsilon) = 2^\varepsilon \frac{\Gamma\left(\frac{\varepsilon+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-\varepsilon}{2}\right)}$$

и използвайки тъждеството

$$\varphi(0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \hat{\varphi}(\xi) d\xi,$$

да препишем /58/ във вида

$$\begin{aligned} /60/ \quad (2\pi)^2 \left\{ \int_{|x| \leq 1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{|x|^{2-\varepsilon}} dx + \int_{|x| \geq 1} \frac{\varphi(x)}{|x|^{2-\varepsilon}} dx \right\} \\ = 2\pi \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\xi|^{-\varepsilon} - 1}{\varepsilon} \hat{\varphi}(\xi) d\xi + 2\pi \frac{a(\varepsilon) - 1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\hat{\varphi}(\xi)}{|\xi|^\varepsilon} d\xi. \end{aligned}$$

Остава ни да извършим граничния преход $\varepsilon \rightarrow 0$ в това тъждество. Както показва /59/, $a(\varepsilon)$ е аналитична функция на ε близо до

точката $\varepsilon = 0$ и тъй като $a(0) = 1$, границата $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{a(\varepsilon) - 1}{\varepsilon}$

съществува. Понеже нейната стойност не ни интересува, да я означим с C . По-нататък очевидно имаме

$$\frac{|\xi|^{-\varepsilon} - 1}{\varepsilon} = \frac{e^{-\varepsilon \ln |\xi|} - 1}{\varepsilon} \rightarrow -\ln |\xi| \quad \xi \neq 0$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. За да извършим граничния преход в /60/, ще използваме теоремата на Лебег. Нека $\varepsilon \leq 1$.

Теоремата за крайните нараствания ни дава

$$\frac{e^{-\varepsilon \ln |\xi|} - 1}{\varepsilon} = -\ln |\xi| e^{-t \ln |\xi|}, \quad 0 < t < \varepsilon \leq 1,$$

откъдето следва оценката

$$\left| \frac{e^{-\varepsilon \ln |\xi|} - 1}{\varepsilon} \right| \leq \begin{cases} \ln |\xi|, & \text{за } |\xi| \geq 1 \\ \frac{|\ln |\xi||}{|\xi|}, & \text{за } |\xi| \leq 1, \end{cases}$$

която заедно с очевидното неравенство

$$e^{-\varepsilon \ln |\xi|} \leq \begin{cases} 1, & |\xi| \geq 1 \\ \frac{1}{|\xi|}, & |\xi| \leq 1 \end{cases}$$

ни позволява да извършим граничния преход в /60/. Получаваме

$$\begin{aligned} (2\pi)^2 \left\{ \int_{|x| \leq 1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{|x|^2} dx + \int_{|x| \geq 1} \frac{\varphi(x)}{|x|^2} dx \right\} \\ = -2\pi \int_{\mathbb{R}^2} \ln |\xi| \hat{\varphi}(\xi) d\xi + 2\pi C \int_{\mathbb{R}^2} \hat{\varphi}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Понеже функцията $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ е съвсем произволна, този резултат означава, че

$$/62/ \quad F(-2\pi \ln |\xi| + 2\pi C) = (2\pi)^2 \nu$$

където ν е разпределението

$$/63/ \quad (\nu, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{|x| \leq 1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{|x|^2} dx + \int_{|x| \geq 1} \frac{\varphi(x)}{|x|^2} dx.$$

Очевидно е, че $\nu \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ и е една от регуляризиациите на функцията $\frac{1}{|x|^2}$. Веднага се вижда, че $-\nu$ удовлетворява и /57/.

Наистина $(|x|^2 \nu, \varphi) = (\nu, |x|^2 \varphi)$

$$= \int_{|x| \leq 1} \frac{|x|^2 \varphi(x) - 0}{|x|^2} dx + \int_{|x| \geq 1} \varphi(x) dx = (1, \varphi),$$

с което проверката е завършена. Този резултат, заедно с /62/ директно води до търсеното фундаментално решение. Наистина, ние

търсим разпределение $\hat{u} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$, чиято трансформация на Фурие удовлетворява уравнението $-|\xi|^2 \hat{u} = 1$. Преписвайки /62/ във вида

$$F\left(\frac{\ln|\xi|}{2\pi} - \frac{C}{2\pi}\right) = -v,$$

виждаме, че функцията

$$/64/ \quad u \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\ln|x|}{2\pi} - \frac{C}{2\pi},$$

която очевидно принадлежи на $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$, е едно фундаментално решение. Обикновено се използва фундаменталното решение $\frac{1}{2\pi} \ln|x|$,

което е по-просто и се различава от /64/ с константа, т.е. с решение на хомогенното уравнение $\Delta u = 0$.

Както вече отбелязахме в началото на тази глава, цялата теория на Лапласовото уравнение е тясно свързана с неговото фундаментално решение. Въпреки това ще направим още едно приложение.

Т е о р е м а 1.12. Нека G е ограничена област в $\mathbb{R}^n$ с граница Γ , подчинена на единственото условие да има n -мерна Лебегова мярка нула. Задачата на Дирихле

$$/65/ \quad \Delta u = 0 \text{ в } G, \quad u|_{\Gamma} = f, \quad f \in C(\Gamma)$$

е разрешима тогава и само тогава, когато в G уравнението $\Delta u = 0$ притежава функция на Грийн.

За области с достатъчно гладка граница това е една от най-старите теореми в математическата физика ([14], стр.270) и е заключителният резултат на програмата, предложена от самия Грийн. Отличителна черта на редакцията, която избрахме сега, е липсата на каквито и да било предположения за гладкост на Γ . В този вид теоремата не е достатъчно популярна. Тук ще използваме случая да предложим едно директно, съвсем елементарно доказателство.

Д о к а з а т е л с т в о. За да използваме означения, близки до тези в [14], ще разгледаме случая $n = 3$. В общия случай доказателството е аналогично.

Да означим с $\mathcal{H}$ подмножеството на $C(\Gamma)$, което се състои от онези непрекъснати функции, за които задачата /65/ е разрешима. От принципа за максимума на хармоничните функции веднага следва, че $\mathcal{H}$ е затворено в $C(\Gamma)$. (Припомняме, че естествената сходимост в $C(\Gamma)$ е равномерната.) Следователно теоремата ще бъде доказана, ако установим, че $\mathcal{H}$ е навсякъде гъсто в $C(\Gamma)$.

Следващата лема решава въпроса.

Л е м а 1.3. Нека Ω е ограничена област в $\mathbb{R}^3$. Рестрикциите върху Γ^1 на функциите от вида

$$/66/ \quad q(y) = \int_{\Omega} \frac{f(x)}{|x-y|} dx, \quad f \in C(\bar{\Omega})$$

се съдържат в $\mathcal{H}$.

Д о к а з а т е л с т в о. Нека $x \in \Gamma$ и нека

$$\Psi_x(y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|x-y|}, \quad y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{x\}.$$

Очевидно е, че рестрикцията $\Psi_x|_{\Gamma}$ принадлежи на $\mathcal{H}$. (Ако $x \in G$, това е вярно по предположение, ако $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{G}$, функцията Ψ_x е хармонична и непрекъсната в $\mathbb{R}^3 \setminus \{x\} \supset \bar{G}$.)

Ще започнем с разглеждането на случая $\Gamma \cap \bar{\Omega} = \emptyset$. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Използвайки равномерната непрекъснатост на функцията $(x, y) \rightarrow \frac{f(x)}{|x-y|}$ в $\bar{\Omega} \times \Gamma$, можем да разделим $\bar{\Omega}$ на толкова малки измерими подмножества Ω_i , $i = 1, 2, \dots, N$, че за всяко $y \in \Gamma$ да имаме

$$\left| \frac{f(x')}{|x'-y|} - \frac{f(x'')}{|x''-y|} \right| < \varepsilon$$

стига x' и x'' да принадлежат на едно и също Ω_i . Сега е ясно, че Римановите суми

¹Както по-горе Γ е границата на G .

$$S_N(y) = \sum_{i=1}^N \frac{f(x_i)}{|x_i - y|} \text{mes } \Omega_i, \quad x \in \Omega_i, \quad y \in \Gamma$$

клонят равномерно върху Γ към функцията g , дефинирана чрез /66/. Наистина имаме

$$\begin{aligned} |S_N(y) - g(y)| &= \left| \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \left(\frac{f(x_i)}{|x_i - y|} - \frac{f(x)}{|x - y|} \right) dx \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \left| \frac{f(x_i)}{|x_i - y|} - \frac{f(x)}{|x - y|} \right| dx < \varepsilon \sum_{i=1}^N \text{mes } \Omega_i \\ &= \varepsilon \text{mes } \Omega, \end{aligned}$$

с което твърдението е доказано. По този начин установихме, че в случая $\Omega \cap \Gamma = \emptyset$, $g \in H$, защото сумите S_N имаха това свойство.

Нека сега $\bar{\Omega} \cap \Gamma \neq \emptyset$ и $\varepsilon > 0$ отново е произволно. Понеже $\text{mes } \Gamma = 0$, можем да намерим такова отворено множество O_ε , че да имаме $\Gamma \subset O_\varepsilon$ и $\text{mes } O_\varepsilon < \varepsilon$. За произволно $y \in \Gamma$ имаме

$$\begin{aligned} g(y) &= \int_{\Omega \setminus O_\varepsilon} \frac{f(x)}{|x - y|} dx + \int_{\Omega \cap O_\varepsilon} \frac{f(x)}{|x - y|} dx \\ &= g_{1,\varepsilon}(y) + g_{2,\varepsilon}(y). \end{aligned}$$

Според вече доказаното $g_{1,\varepsilon} \in H$. Доказателството на лемата ще бъде завършено, ако установим, че $g_{2,\varepsilon}$ равномерно клони към нула върху Γ , когато $\varepsilon \rightarrow 0$. Обаче и това е почти очевидно. Да положим $M = \max_{\Gamma} |f|$ и да вземем $y \in \Gamma$. Имаме

$$\begin{aligned} |g_{2,\varepsilon}(y)| &\leq M \int_{\Omega \cap O_\varepsilon} \frac{dx}{|x - y|} \\ &\leq M \int_{O_\varepsilon \cap \{|x - y| \leq \sqrt{\varepsilon}\}} \frac{dx}{|x - y|} + M \int_{O_\varepsilon \cap \{|x - y| \geq \sqrt{\varepsilon}\}} \frac{dx}{|x - y|} \\ &\leq M \int_{|x - y| \leq \sqrt{\varepsilon}} \frac{dx}{|x - y|} + \frac{M}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{O_\varepsilon} dx \leq 2\pi M\varepsilon + M\sqrt{\varepsilon}, \end{aligned}$$

защото $\text{mes } O_\varepsilon < \varepsilon$. Понеже y беше произволна точка от Γ , доказателството на лемата е завършено.

Сега вече можем да се върнем към доказателството на самата теорема. Нека $\varphi \in C_0^2(\mathbb{R}^3)$ е произволна и нека $R > 0$ е толкова голямо, че $\text{supp } \varphi$ да се съдържа в кълбото $|x| < R$. Очевидно имаме ([14], стр.140)

$$\varphi(y) = \int_{|x| \leq R} \frac{(\Delta \varphi)(x) dx}{|x - y|}, \quad y \in \mathbb{R}^3$$

и според лемата $\varphi|_{\Gamma} \in H$. Понеже рестрикциите на функциите от $C_0^2(\mathbb{R}^3)$ върху Γ очевидно са навсякъде гъсто в $C(\Gamma)$, доказателството е завършено. Всяка функция от $C(\Gamma)$ може да се продължи до функция от $C_0(\mathbb{R}^3)$. Вж. [44], стр.26, [1], стр. 212. /

Друго доказателство е скицирано в упражненията.

✱

✱ ✱

Да разгледаме уравненията

$$/67/ \quad E_t = \Delta_x E, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$$

$$/68/ \quad \frac{1}{i} E_t = \Delta_x E, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1.$$

Първото от тях е уравнението на топлопроводността, чиято роля в математическата физика е добре известна. Второто е знаменитото уравнение на Шрьодингер от квантовата механика. Нашата цел е да намерим фундаментални решения на /67/ и /68/, които се съдържат в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$. Обстоятелството, че променливата t е естествено отделена от $\mathcal{S}$ ни подсеща да извършим частична трансформация на Фурие спрямо x и да сведем въпроса до решаването на обикновено диференциално уравнение.

И така, трябва да решим уравнението

$$/69/ \quad E_t = \Delta_x E + \delta(x) \otimes \delta(t),$$

където $\delta(x)$ и $\delta(t)$ са Дираковите функции съответно в $\mathbb{R}_x^n$ и $\mathbb{R}_t^1$. Ако $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ е решение на /69/, след частична трансформация на Фурие спрямо x /вж. деф. 3.7 и теорема 3.14, стр. 307/, получаваме

$$/70/ \quad \hat{E}_t(\xi, t) + |\xi|^2 \hat{E}(\xi, t) = 1(\xi) \otimes \delta(t),$$

като с $1(\xi)$ сме означили константата единица, разглеждана като функция само на ξ . Решавайки хомогенното уравнение

$$\hat{E}_t(\xi, t) + |\xi|^2 \hat{E}(\xi, t) = 0,$$

намираме

$$\hat{E}(\xi, t) = C e^{-t|\xi|^2},$$

където C е функция само на ξ . Да потърсим решение на /70/ с метода на Лагранж. Да положим $v(t, \xi) = C e^{-t|\xi|^2}$, където C е разпределение от $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$, което подлежи на определяне. Замествайки в /70/, стигаме до равенството

$$C_t e^{-t|\xi|^2} = 1(\xi) \otimes \delta(t),$$

$$\text{т.е. } C_t = e^{t|\xi|^2} 1(\xi) \otimes \delta(t) = 1(\xi) \otimes \delta(t),$$

което очевидно се удовлетворява от функцията

$$C(\xi, t) = 1(\xi) \otimes Y(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} \xi \in \mathbb{R}^n, \\ \xi \in \mathbb{R}^n. \end{matrix}$$

/Както обикновено Y е едномерната функция на Хевисайд./ Следователно функцията

$$\begin{aligned} \hat{E}(\xi, t) &= 1(\xi) \otimes Y(t) e^{-t|\xi|^2} \\ &= Y(t) e^{-t|\xi|^2} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1}) \end{aligned}$$

удовлетворява /70/. Ето защо

$$/71/ \quad E \stackrel{\text{def}}{=} F_\xi^{-1} (Y(t) e^{-t|\xi|^2})$$

е търсеното фундаментално решение. Остава да намерим явен израз за E . Тъй като за $t \neq 0$ (т.е. за почти всички стойности на t)

функцията $Y(t) e^{-t|\xi|^2} \in L^1(\mathbb{R}_\xi^n)$, можем да използваме класическата формула за обръщане. Това се вижда лесно като се възползваме от теоремата на Фубини, лема 3.1, стр. 282 и, разбира се, дефиницията на частичната трансформация на Фурие в $\mathcal{S}'$. И така,

$$E(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x, \xi)} Y(t) e^{-t|\xi|^2} d\xi$$

/72/

$$= \frac{Y(t)}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}},$$

като за да получим крайния резултат вземем пред вид равенство /44/ от стр. 313.

З а б е л е ж к а. На практика не се работи по демонстрирания начин. От теорема 1.8 веднага следва, че всички решения на обикновеното диференциално уравнение

$$/70'/ \quad \hat{E}_t(\xi, t) + |\xi|^2 \hat{E}(\xi, t) = \delta(t),$$

което се получава, като заменим дясната страна на /70/ с $\delta(t)$ са локално сумируеми функции на t . От своя страна теоремата за непрекъснатата зависимост от параметри на решенията на ОДУ показва, че всички решения на /70'/ са локално сумируеми функции на $(\xi, t)^1$.

Следователно, ако намерим функция $\hat{E}(\xi, t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$, която за почти всички $\xi \in \mathbb{R}^n$, разглеждана като елемент от $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$ е решение на /70'/, тя непременно ще удовлетворява и /70/. Наистина, нека $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$ е произволно. Имаме

$$\begin{aligned} (\hat{E}_t + |\xi|^2 \hat{E}, \varphi) &= (\hat{E}, -\varphi_t(\xi, t) + |\xi|^2 \varphi(\xi, t)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^1} \hat{E}(\xi, t) (-\varphi_t(\xi, t) + |\xi|^2 \varphi(\xi, t)) dt \right) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi, 0) d\xi = (1(\xi) \otimes \delta(t), \varphi), \end{aligned}$$

к.т.д.д.

С един поглед върху намереното фундаментално решение разбираме, че уравнението на топлопроводимостта е хипоелиптическо, но не е аналитично хипоелиптическо. Наистина, функцията /72/ принадлежи на $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$ /проверете/, но очевидно не е аналитична в $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, защото се анулира в полупространството $t < 0$, без да бъде тъждествено нула.

Едно фундаментално решение на уравнението на Шрьодингер може да се намери по съвсем същия начин. След частична трансформация на Фурие спрямо x от $\frac{1}{i} \hat{E}_t - \Delta_x \hat{E} = \delta(x, t)$ получаваме

$$/73/ \quad \frac{1}{i} \hat{E}_t + |\xi|^2 \hat{E} = i(\xi) \otimes \delta(t).$$

¹ Фактът, че /70/ е от първи ред е без значение. Ако то беше от по-висок ред, свеждайки го до нормална система, бихме стигнали до същото заключение.

Ръководейки се от вече изтъкнатите съображения, решаваме простото уравнение

$$/74/ \quad \frac{1}{i} \hat{E}_t + |\xi|^2 \hat{E} = \delta(t)$$

и получаваме

$$/75/ \quad \hat{E}(\xi, t) = i Y(t) e^{-i|\xi|^2 t}.$$

Функцията /75/ се съдържа в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ и понеже е локално сумируема, удовлетворява и /73/. Следователно

$$/76/ \quad E(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} F_\xi^{-1}(i Y(t) e^{-i|\xi|^2 t}) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$$

е фундаментално решение на Шрьодингеровото уравнение. Следвайки указанието към зад.4, стр.286, намираме

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x, \xi)} e^{-i|\xi|^2 t} d\xi = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{i\frac{\pi n}{4}} e^{-\frac{i|x|^2}{4t}}, t > 0.$$

но функцията

$$/77/ \quad \frac{i Y(t)}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{i\frac{\pi n}{4}} e^{-\frac{i|x|^2}{4t}}$$

очевидно не принадлежи на $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$, защото е неинтегруема в околност на точките от вида $(x, 0)$. Този пример красноречиво показва, че винаги когато по един или друг начин пресметнем трансформацията на Фурие на някаква локално сумируема функция, която не се съдържа в L^1 , трябва да си задаваме въпроса дали полученият резултат остава в сила и в $\mathcal{S}'$. /Вж. зад. 2 и 3 от следващото упражнение./ В случая може да се докаже /зад.4, стр.481/, че /76/ и /77/ съвпадат в $D'(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{x, 0\})$, $x \in \mathbb{R}^n$. Този резултат показва, че уравнението на Шрьодингер не е нито хипоелиптическо, нито аналитично хипоелиптическо.

Ще завършим тази точка с едно кратко обсъждане на задачата на Коши за уравнението на топлопроводимостта. Както ще видим, резултат

татът е тясно свързан с вече намереното фундаментално решение.

И така, да разгледаме граничната задача

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta_x u, \quad (x, t) \in \mathbb{R}_+^{n+1} = \mathbb{R}^n \times (0, +\infty), \\ /78/ \quad u|_{t=0} &= f, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

и да предположим, че съществува решение на тази задача, което при всяко фиксирано t принадлежи на $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. След частична трансформация на Фурие спрямо x , от /78/ получаваме

$$\begin{aligned} \hat{u}_t + |\xi|^2 \hat{u} &= 0, \quad (\xi, t) \in \mathbb{R}_+^{n+1} \\ \hat{u}(\xi, 0) &= \hat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

т.е.

$$/79/ \quad \hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi) e^{-|\xi|^2 t}, \quad t > 0.$$

Преработвайки това равенство с помощта на /71/, намираме последователно

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi) F_x(E)(\xi, t) = F_x(f * E)(\xi, t), \quad t > 0,$$

т.е.

$$/80/ \quad u(x, t) = (f * E)(x, t) = \frac{Y(t)}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y) dy,$$

равенство, което обикновено се записва във вида

$$/81/ \quad u(x, t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y) dy, \quad t > 0.$$

По такъв начин изведехме класическата формула на Пуасон /ср. [14], стр. 322/. След като разполагаме с /80/ или /81/, разсъждавайки както в [14], можем да проверим, че ако $f \in C(\mathbb{R}^n)$ и е ограничена, то $u \in C^2(\mathbb{R}_+^{n+1}) \cap C(\mathbb{R}_+^{n+1})$ и е решение на

зад. /78/. Тук за простота ще се ограничим с един по-слаб резултат. Ще покажем, че при $t \rightarrow 0$, $u(x, t) \rightarrow f$ в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Наистина, като вземем пред вид, че според /71/ имаме

$$\begin{aligned} E_x(E)(\xi, t) &= e^{-t|\xi|^2}, \quad t > 0 \quad \text{и че} \quad e^{-t|\xi|^2} \rightarrow 1 \\ \text{в } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \text{ при } t &\rightarrow 0, \text{ заключаваме, че} \\ /82/ \quad \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} E(x, t) &= \delta(x), \end{aligned}$$

като, разбира се, граничният преход се извършва в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Следователно

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} u(x, t) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} E * f = \delta * f = f,$$

к.т.д.д.

У п р а ж н е н и е 3

1. Проверете, че функциите

$$\frac{1}{\pi^2}, \quad -\frac{1}{(n-2)\omega_n} \frac{1}{|x|^{n-2}}, \quad \frac{\ln|x|}{2\pi}, \quad \frac{Y|t|}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

наистина са фундаментални решения на съответните диференциални уравнения. С тяхна помощ намерете решение на уравненията

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = f, \quad \Delta u = f, \quad u_t - \Delta_x u = f, \quad f \in \mathcal{S}$$

и след това във всеки отделен случай се постарайте да намерите минималните предположения за f , при които получената формула остава в сила.

2. В тази задача се предлага още един начин за получаване на явен израз за разпределението

$$u \stackrel{\text{def}}{=} F^{-1}\left(-\frac{2i}{\xi + i\eta}\right), \quad (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2,$$

което, както вече знаем, е фундаментално решение на оператора на Коши-Риман.

Да разгледаме редицата с общ член

$$v_{N,R} = \begin{cases} \frac{-2i}{\xi + i\eta}, & |\xi| \leq R, \quad |\eta| \leq N. \\ 0, & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

Понеже очевидно $v_{N,R} \xrightarrow{\mathcal{P}'} \frac{-2i}{\xi + i\eta}$ при $R \rightarrow +\infty$,

$N \rightarrow +\infty$ и операторът на Фурие е непрекъснат, имаме

$$u = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ N \rightarrow \infty}} F^{-1}(v_{N,R}) = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ N \rightarrow \infty}} \frac{-2i}{4\pi^2} \int_{-N}^N \int_{-R}^R \frac{e^{ix\xi} e^{i\eta y}}{\xi + i\eta} d\xi d\eta,$$

като, разбира се, граничният преход се извършва в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$.

Разсъждавайки както в [31], стр.162, получете равенство от вида

$$/83/ \quad \int_{-R}^R \frac{e^{ix\xi}}{\xi + i\eta} d\xi = f(x, \eta) + O\left(\frac{1}{R}\right), \quad x \neq 0$$

и пресметнете $f(x, \eta)$. След това вземете $N = \sqrt{R}$ и използвайки

/83/, намерете аналогичен израз за $F^{-1}(v_{\sqrt{R}, R})$, от който да се

вижда, че при фиксирани $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x \neq 0$ имаме

$$\lim_{R \rightarrow \infty} F^{-1}(v_{\sqrt{R}, R}) = \frac{1}{\pi(x + iy)}.$$

Убедете се, че този резултат е в сила в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$. За-

бележете, че съвсем не е ясно, че това равенство е вярно и в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$, защото оценката в /83/ не е равномерна относно x . За

частие тя е равномерна във всеки интервал от вида $|x| \geq \delta > 0$ -

обстоятелство, което ще ви позволи да заключите, че $u = \frac{1}{\pi(x + iy)}$

в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\})$ т.е. да получите равенството

$$u = \frac{1}{\pi(x + iy)} + \sum c_\alpha \partial^\alpha \delta,$$

където сумата е крайна и константите c_α подлежат на определяне.

Заместете в уравнението $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \delta$ и намерете всевъзможните

константи, за които се получава фундаментално решение.

3. Конструирайте редица $\{f_v\}$, $f_v \in C_0[0, 1]$, която клони към нула за всяко фиксирано x от $[0, 1]$, но не клони към нула в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$. Конструирайте редица $\{g_v\}$, $g_v \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$, която клони към нула в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$, но е разходяща за всяко $x \in \mathbb{R}^1$.

4. Установете, че функцията /77/ съвпада в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{x, 0\})$ с фундаменталното решение на уравнението на Шрьодингер като пресметнете

$$u_\varepsilon = F_\xi^{-1} \left(i y(t) e^{-(\varepsilon + it)|\xi|^2} \right), \quad \varepsilon > 0$$

и покажете, че при $\varepsilon \rightarrow 0$ редицата $\{u_\varepsilon\}$ притежава сумируема мажоранта във всяка компактна подобласт в $\mathbb{R}^{n+1}$, която не се пресича с хиперравнината $t = 0$.

5. Нека E е фундаменталното решение /72/ на уравнението на топлопроводността. Предполагайки, че функцията

$$F \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty E(x, t) dt \quad \text{съществува за почти всички стойности на } x,$$

с помощта на /82/ установете, че тя, схващана като разпределение, удовлетворява уравнението $\Delta F = -\delta$. Едва след това пресметнете въпросния интеграл /метод на спускането/.

6. В това упражнение ще скицираме едно елегантно доказателство на теорема 1.12 [45] по дух твърде близко до разсъжденията от 3.5, гл. I.

Нека μ е регулярна, изброимо адитивна мярка, дефинирана върху Борелевите множества в $\mathbb{R}^3$ /за дефинициите вж. [44]/. На μ

естествено отговаря разпределението /Радоновата мярка/ F_μ , действащо по правилото:

$$(F_\mu, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi d\mu, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3).$$

Носителят на F_μ се нарича носител и на μ .

Нека сега μ притежава изброените по-горе свойства и освен това е с компактен носител. Да разгледаме Нютоновия потенциал

$$U_\mu(\xi) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\mu}{|x - \xi|}, \quad \xi \in \mathbb{R}^3.$$

Представяйки μ като разлика на две положителни мерки с теоремата на Тонели, заключаваме, че U_μ е дефинирана почти навсякъде в $\mathbb{R}^3$ /т.е. в $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$, където $\mu(\Omega) = 0$ /. Освен това, очевидно е, че $U_\mu \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \text{supp } \mu)$ и $U_\mu(\xi) \rightarrow 0$ при $|\xi| \rightarrow \infty$.

Интерпретирайки U_μ като разпределение, действащо по правилото

$$(U_\mu, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^6} \frac{\varphi(\xi) d\xi d\mu}{|x - \xi|} = \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(\xi)}{|x - \xi|} d\xi \right) d\mu$$

непосредствено проверяваме, че е в сила тъждеството

$$\Delta U_\mu = -4\pi F_\mu,$$

което показва, че от $U_\mu = 0$ в $D'(\mathbb{R}^3)$ следва $F_\mu = 0$ в $D'(\mathbb{R}^3)$.

След тази констатация да се заемем с теорема 1.12 и отново да допуснем, че $\mathcal{H} \neq C(\Gamma)$. Използваме старите означения. Да вземем $f_0 \in C(\Gamma) \setminus \mathcal{H}$ и с помощта на теоремата на Хан-Банах /зад. 1, стр. 44/ да конструираме функционал $\phi \in C^*(\Gamma)$, който се анулира върху $\mathcal{H}$, но въпреки това $\phi(f_0) = 1$. Според една важна теорема на Рис / [44], стр. 288 или [36] / имаме

$$\phi(f) = \int_{\Gamma} f d\nu, \quad f \in C(\Gamma)$$

с подходяща мярка ν с носител върху Γ . Понеже $\phi|_{\mathcal{H}} = 0$ и $\frac{1}{|\xi - x|} \in \mathcal{H}$ за $\xi \in \Gamma$, заключаваме, че

$$\phi\left(\frac{1}{|\xi - x|}\right) = \int_{\Gamma} \frac{d\nu}{|\xi - x|} = 0, \quad \xi \in \Gamma.$$

Тъй като $\text{supp } \nu \subset \Gamma$, можем да пишем

$$\phi\left(\frac{1}{|\xi - x|}\right) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\nu}{|\xi - x|} = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma.$$

Излезе, че Нютоновият потенциал на мярката ν се анулира почти навсякъде в $\mathbb{R}^3$ и следователно в $D'(\mathbb{R}^3)$. Сега /84/ показва, че $\phi \equiv 0$ в $D'(\mathbb{R}^3)$ и следователно и в $C(\Gamma)$. Това обаче противоречи на условието $\phi(f_0) = 1$.

Използвайки скицирания метод, докажете теоремата и за $n \neq 3$.

7. Използвайки трансформацията на Фурие, намерете фундаментално решение на уравнението

$$\Delta u - k^2 u = 0, \quad k > 0, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

8. Решете същата задача за уравнението на Хелмхолц

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad k > 0, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

1.4. Фундаментално решение на вълновото уравнение. Задача на Коши

Фундаменталните решения на вълновия оператор

$$\square_n \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

са от особен интерес, защото ни помагат да разберем неговите най-съществени свойства. Както ще се убедим, те са изключително полезни и при изследването на задачата на Коши за /84/.

Нашата задача в тази точка е да намерим експлицитни изрази за фундаменталните решения на $\square_n$ за $n = 1, 2, 3$. Както може да се очаква и сега нашето основно средство ще бъде трансформацията на Фурие. Случаят $n = 1$ обаче е съвсем елементарен и допуска просто третиране чрез смяна на променливите. За да достигнем пълна яснота, ще започнем по-отдалеч.

Нека $\Omega_1 \subset \mathbb{R}_x^n$ и $\Omega_2 \subset \mathbb{R}_y^n$ са две области и нека $h: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ е безкрайно гладък дифеоморфизъм. Това означава, че съответствието $x \rightarrow h(x)$ изобразява Ω_1 върху Ω_2 еднозначно обратимо и двете функции $y = h(x)$ и $x = h^{-1}(y)$ принадлежат съответно на $C^\infty(\Omega_1)$ и $C^\infty(\Omega_2)$. С помощта на h на всяко $u \in C_0^\infty(\Omega_2)$ можем да съпоставим функцията $v = u \circ h \in C_0^\infty(\Omega_1)$. Изхождайки от равенството

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} v(x) \varphi(x) dx &= \int_{\Omega_1} u(h(x)) \varphi(x) dx \\ &= \int_{\Omega_2} u(y) \varphi(h^{-1}(y)) |J_{h^{-1}}(y)| dy \end{aligned}$$

($J_{h^{-1}}$ е Якобианът на h^{-1}), дефинираме изображението

$h^*: D'(\Omega_2) \rightarrow D'(\Omega_1)$ по правилото

$h^*: u \rightarrow u \circ h$, където

$$/85/ \quad (u \circ h, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} (u, (\varphi \circ h^{-1}) |J_{h^{-1}}(y)|), \quad \varphi \in D(\Omega_2).$$

/Сравнете с деф.3.11, стр. 366 ./

Веднага се вижда, че функционалът $u \circ h$, дефиниран чрез /85/ е наистина разпределение. Нещо повече, всяко от изображенията

$$D(\Omega_2) \xrightarrow{h^*} D(\Omega_1), \quad D'_\sigma(\Omega_2) \xrightarrow{h^*} D'_\sigma(\Omega_1), \quad D'_\beta(\Omega_2) \xrightarrow{h^*} D'_\beta(\Omega_1)$$

е непрекъснато. /Проверете! Обърнете внимание на обстоятелството, че посоките на изображенията h и h^* са различни. /Понеже $D(\Omega_1)$

е навсякъде гъсто в $D'(\Omega_1)$, правилото за диференциране на съставни функции

$$/86/ \quad \frac{\partial}{\partial x_j} (u \circ h) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial h_k}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial y_k} \circ h, \quad h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$$

остава в сила.

След тази подготовка да предположим, че $E \in D'(\mathbb{R}^2)$ удовлетворява уравнението

$$/87/ \quad E_{tt} - E_{xx} = \delta(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad t \in \mathbb{R}$$

и следвайки общоизвестната процедура [14], да разгледаме изображението $T: \mathbb{R}_{\xi, \eta}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{x, t}^2$, което действа по формулите

$$/88/ \quad T: x = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad t = \frac{\xi - \eta}{2}.$$

Да разгледаме разпределението $v \stackrel{\text{def}}{=} E \circ T \in D'(\mathbb{R}_{\xi, \eta}^2)$

Като вземем пред вид, че

$$\begin{aligned} (\delta \circ T, \varphi) &= (\delta, \varphi(x+t, x-t) |\det T^{-1}|) \\ &= 2\varphi(0, 0) = 2(\delta(\xi, \eta), \varphi) \end{aligned}$$

с помощта на /86/ получаваме

$$/89/ \quad -4 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = 2\delta(\xi, \eta), \quad \text{т.е.} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = -\frac{1}{2} \delta(\xi, \eta)$$

Да разгледаме най-напред уравнението

$$/90/ \quad u_{\xi \eta} = f(\xi, \eta), \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$$

и да фиксираме някаква точка $(\xi_0, \eta_0) \in \mathbb{R}^2$, $\xi_0 \neq 0$, $\eta_0 \neq 0$.

Чрез двукратно интегриране намираме решението

$$/91/ \quad u(\xi, \eta) = \int_{\eta_0}^{\eta} \int_{\xi_0}^{\xi} f(p, q) dp dq \in C^\infty(\mathbb{R}^2),$$

което удовлетворява и допълнителните изисквания $u|_{\eta=\eta_0} = 0$,

$\frac{\partial u}{\partial \eta}|_{\xi=\xi_0} = 0$, които наложихме само за удобство. Получената

формула ни позволява да решим и уравнението /89/. Наистина нека $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ е камбановидната функция от стр. 174 и

$$\chi_\varepsilon(\xi, \eta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\varepsilon^2} \chi\left(\frac{\xi}{\varepsilon}, \frac{\eta}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0.$$

В такъв случай функцията

$$/92/ \quad u_\varepsilon(\xi, \eta) = \int_{\eta_0}^{\eta} \int_{\xi_0}^{\xi} \chi_\varepsilon(p, q) dp dq$$

удовлетворява /90/ с $f = \chi_\varepsilon$. Веднага се вижда, че границата $u = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon$, ако съществува в $D'(\mathbb{R}^2)$, ще бъде фундаментално решение на $\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}$.

Наистина, да предположим, че u съществува и да вземем $\varphi \in D(\mathbb{R}^2)$. От една страна, имаме

$$\left(\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial \xi \partial \eta}, \varphi\right) = (\chi_\varepsilon, \varphi) \longrightarrow (\delta, \varphi),$$

а от друга - непосредствено получаваме

$$\left(\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial \xi \partial \eta}, \varphi\right) = (u_\varepsilon, \varphi_{\xi\eta}) \longrightarrow (u, \varphi_{\xi\eta}) = (u_{\xi\eta}, \varphi),$$

с което твърдението е доказано. Остава да се убедим, че границата $u = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon$ наистина съществува. За по-голяма пре-

гледност да предположим, че $\xi_0 < 0$, $\eta_0 < 0$ и да означим с P и P_0 точките (ξ, η) и (ξ_0, η_0) съответно. Сега е ясно, че в /92/ интегрирането се извършва по правоъгълника $\Omega(P, P_0)$ с диа- гнал $\overline{P_0 P}$ и страни, успоредни на координатните оси. Понеже $\Omega(P, P_0)$ съдържа началото във вътрешността си само, когато P лежи в отворения първи квадрант I_1 , веднага заключаваме, че

$$/93/ \quad u(\xi, \eta) = \begin{cases} 1, & (\xi, \eta) \in I_1 \\ 0, & (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{I_1}. \end{cases}$$

Наистина, за $P \in I_1$ и за $\varepsilon < \varepsilon_0(P)$ имаме

$$\int_{\Omega(P, P_0)} \chi_\varepsilon(p, q) dp dq = \iint_{\mathbb{R}^2} \chi_\varepsilon(p, q) dp dq = 1,$$

докато от $P \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{I_1}$ за $\varepsilon < \varepsilon_1(P)$ следва, че

$\text{supp } \chi_\varepsilon \cap \Omega(P, P_0) = \emptyset$. Като вземем пред вид очевидно- то неравенство $|u_\varepsilon(\xi, \eta)| \leq 1$, $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$, веднага заключаваме, че u е граница на u_ε и в $D'(\mathbb{R}^2)$, т.е. функцията /93/ е решение на уравнението $u_{\xi\eta} = \delta$.

Остава да разгледаме случаите, когато условието $\xi_0 < 0$, $\eta_0 < 0$ е нарушено. Да означим с I_j , $j = 1, 2, 3, 4$ съответния от- в о р е н квадрант в $\mathbb{R}^2$. С помощта на същите разсъждения на- мираме границата u и получаваме още три решения на $u_{\xi\eta} = \delta$. А именно

$$u(\xi, \eta) = \begin{cases} (-1)^{j+1}, & (\xi, \eta) \in I_j \\ 0, & (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{I_j}. \end{cases}$$

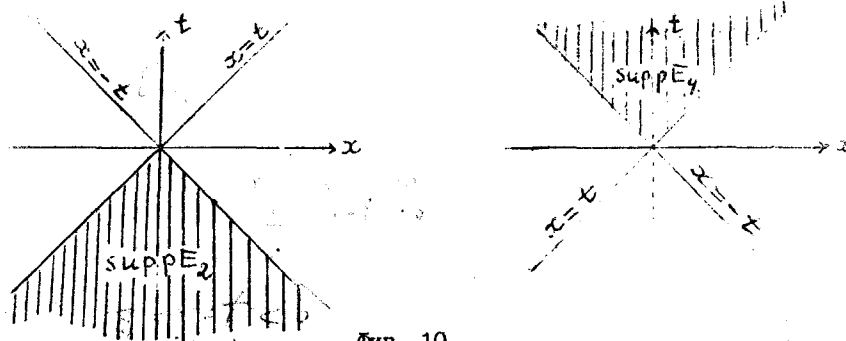
Разликата в знаците се дължи на обстоятелството, че повтор- ният интеграл /92/ е ориентиран и не винаги съвпада с двойния ин- теграл върху $\Omega(P, P_0)$. Като вземем пред вид, че функцията $-\frac{u}{2}$ удовлетворява /89/ и се върнем към старите променливи, намираме четири съществено различни фундаментални решения на вълновото уравнение. Това са функциите

$$/94/ \quad E_j(x, t) = \begin{cases} \frac{(-1)^j}{2}, & (x, t) \in T(I_j) \\ 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{T(I_j)}, \end{cases} \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

където $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ е операторът /88/.

При изследването на задачата на Коши важна роля играят E_2 и E_4 , чиито носители са изобразени на фиг.10.

От тук нататък ще означаваме E_2 и E_4 с E_- и E_+ , както е прието. От резултата, формулиран в зад.4, стр.453, следва, че не



Фиг. 10

съществува фундаментално решение на $\square_1$ с носител, който се съдържа в някакъв изпъкнал конус с връх в началото и е различен от E_1 , E_2 , E_3 и E_4 .

Сега да разгледаме случая $n = 2$. Да предположим, че $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ е решение на уравнението

$$E_{tt} - E_{x_1 x_1} - E_{x_2 x_2} = \delta(x, t), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}^1.$$

Като извършим частична трансформация на Фурие спрямо x , стигаме до уравнението

$$/95/ \quad \hat{E}_{tt} + |\xi|^2 \hat{E} = 1(\xi) \delta(t), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Решаваме уравнението

$$\hat{E}_{tt} + |\xi|^2 \hat{E} = \delta(t)$$

по метода на Лагранж при фиксирано ξ и получаваме

$$\hat{E}_+(\xi, t) = Y(t) \frac{\sin|\xi|t}{|\xi|}$$

/96/

$$\hat{E}_-(\xi, t) = -Y(-t) \frac{\sin|\xi|t}{|\xi|}.$$

/Сравнете с пример 1 от 1.3./

Понеже функциите /96/ са локално сумируеми и принадлежат на $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$, те удовлетворяват и /95/. Следователно разпределенията

$$/97/ \quad \begin{aligned} E_+(x, t) &\stackrel{\text{def}}{=} F_\xi^{-1} \left(\frac{Y(t) \sin|\xi|t}{|\xi|} \right) \\ E_-(x, t) &\stackrel{\text{def}}{=} -F_\xi^{-1} \left(\frac{Y(t) \sin|\xi|t}{|\xi|} \right) \end{aligned}$$

ще бъдат фундаментални решения на оператора $\square_2$. Остава да намерим явни изрази за E_+ и E_- . Понеже функцията

$$u_\varepsilon(\xi, t) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-\varepsilon|\xi|} Y(t) \frac{\sin|\xi|t}{|\xi|}, \quad \varepsilon > 0,$$

клонни към $Y(t) \frac{\sin|\xi|t}{|\xi|}$ в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ когато $\varepsilon \rightarrow 0$, за-

ключаваме, че $F_\xi^{-1}(u_\varepsilon) \rightarrow E_+$ в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$. Оказва се обаче,

че $F_\xi^{-1}(u_\varepsilon)$ се пресмята сравнително просто. Наистина, имаме

$$\begin{aligned} (F_\xi^{-1}(u_\varepsilon), \varphi) &= \int_{\mathbb{R}^3} u_\varepsilon(\xi, t) F_x^{-1}(\varphi)(\xi, t) d\xi dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} Y(t) \left(\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\varepsilon|\xi|} \frac{\sin|\xi|t}{|\xi|} F_x^{-1}(\varphi)(\xi, t) d\xi \right) dt \end{aligned}$$

$$/98/ \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left(Y(t) \int_{\mathbb{R}^2} F_\xi^{-1} \left(e^{-\varepsilon|\xi|} \frac{\sin|\xi|t}{|\xi|} \right) (x) \varphi(x, t) dx \right) dt,$$

където

$$F_\xi^{-1} \left(e^{-\varepsilon|\xi|} \frac{\sin|\xi|t}{|\xi|} \right) (x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\varepsilon|\xi|} \frac{\sin|\xi|t}{|\xi|} e^{i(x, \xi)} d\xi,$$

защото $u_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}_\xi^2)$ при фиксирано t . Последното равенство написаме въз основа на лема 3.1, стр.282./

Да пресметнем

$$v_\varepsilon(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(x, \xi) - \varepsilon|\xi|} \frac{\sin|\xi|t}{|\xi|} d\xi, \quad t \neq 0.$$

Понеже функцията $e^{-\varepsilon|\xi|} \frac{\sin|\xi|t}{|\xi|}$ зависи само от $|\xi|$, имаме $v_\varepsilon(x, t) = v_\varepsilon(x_1, x_2, t) = v_\varepsilon(0, |x|, t)$. Следователно, като въведем полярни координати, получаваме

$$\begin{aligned} v_\varepsilon(x, t) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{i|x|\rho \sin\theta - \varepsilon\rho} \sin\rho t d\rho d\theta = \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \left\{ e^{i(|x|\sin\theta + t)\rho} - e^{i(|x|\sin\theta - t)\rho} \right\} d\rho d\theta \\ &= + \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|x|\sin\theta + t + i\varepsilon} - \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|x|\sin\theta - t + i\varepsilon}. \end{aligned}$$

Ще пресметнем получените интегралите с теоремата за резидуумите. Нека най-напред $x \neq 0$. Като положим $z = e^{i\theta}$, намираме

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|x|\sin\theta + t + i\varepsilon} = \int_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{|x| \left(z - \frac{1}{z} \right) + t + i\varepsilon} \\ &= 2 \int_{|z|=1} \frac{dz}{|x|(z^2 - 1) + 2i(t + i\varepsilon)z} = \frac{2}{|x|} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + \frac{2i}{|x|}(t + i\varepsilon)z - 1}. \end{aligned}$$

Квадратният тричлен в знаменателя има корени $z_1 = -a + \sqrt{a^2 + 1}$ и $z_2 = -a - \sqrt{a^2 + 1}$, където $a = \frac{it - \varepsilon}{|x|}$. Трябва да разберем

кой от двата корена лежи в единичния кръг. Да разгледаме функцията

$$g(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{z^2 + 1}, \quad g(1) = \sqrt{2} > 0,$$

дефинирана по този начин в комплексната равнина, разрязана по отсечката с краища $-i$ и i . Да положим

$$g_+(iy) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(iy + x), \quad g_-(iy) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} g(iy + x),$$

$$-1 \leq y \leq 1.$$

Използвайки елементарни съображения, получаваме /вж. [46], зад. 252, стр.93/

$$g_+(iy) = \sqrt{1 - y^2}, \quad g_-(iy) = -\sqrt{1 - y^2}, \quad -1 \leq y \leq 1,$$

като и двата корена са аритметични. Лесно се вижда, че функцията $w = z + g(z)$ изобразява еднолистно дефиниционната си област в областта $|w| > 1$. Наистина, да допуснем, че $w(z_1) =$

$$= w(z_2). \text{ В такъв случай имаме и } \frac{1}{w(z_1)} = \frac{1}{w(z_2)}, \text{ т.е.}$$

$$\frac{1}{z_1 + \sqrt{z_1^2 + 1}} = \frac{1}{z_2 + \sqrt{z_2^2 + 1}}, \text{ откъдето следва}$$

$$z_1 - \sqrt{z_1^2 + 1} = z_2 - \sqrt{z_2^2 + 1}, \text{ равенство, което заедно с } w(z_1) = w(z_2) \text{ ни дава } z_1 = z_2 \text{ и еднолистността на } w \text{ е}$$

$$\text{установена. Понеже } w(i \sin \varphi) = i \sin \varphi \pm \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}$$

$$= \pm \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \text{ и } w(x) =$$

$$= x + \sqrt{x^2 + 1} \rightarrow +\infty, \text{ когато } x \rightarrow \infty, \text{ веднага заключаваме, че наистина функцията } z \rightarrow w(z) \text{ изобразява раз-}$$

$$\text{рязаната комплексна равнина във външността на единичния кръг. Тъй като в нашия случай } a = \frac{it - \varepsilon}{|x|} \text{ има ненулева реална част, при}$$

възприетата дефиниция на квадратния корен имаме $|z_2| = |a + \sqrt{a^2 + 1}| > 1$ и следователно $|z_1| = |-a + \sqrt{a^2 + 1}| = \frac{1}{|z_2|} < 1$. Сега теоремата за резидуумите ни дава

$$I_1 = \frac{4\pi i}{|x|} \operatorname{Res}_{z_1} = \frac{4\pi i}{|x|} \frac{1}{z_1 - z_2} = \frac{2\pi i}{|x|} \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}.$$

Интегралът

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|x| \sin \theta - t + i\varepsilon}$$

се пресмята по същия начин. Получаваме

$$I_2 = \frac{2\pi i}{|x|} \frac{1}{\sqrt{b^2 + 1}}, \quad b = \frac{-it - \varepsilon}{|x|}.$$

Следователно /99/ ни дава

$$\tilde{v}_\varepsilon(x, t) = \frac{1}{8\pi^2} (I_1 - I_2) = \frac{i}{4\pi|x|} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{b^2 + 1}} \right).$$

Остава да пресметнем $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{v}_\varepsilon$. Ще разгледаме два случая:

$$1/ \quad |x| > |t|$$

и

$$2/ \quad |x| < |t|.$$

В първия случай точката $\frac{it}{|x|}$ лежи върху разреза. Следователно

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{it - \varepsilon}{|x|}\right)^2}} = \frac{1}{g_-\left(\frac{it}{|x|}\right)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{t^2}{|x|^2}}}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{b^2 + 1}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{-it - \varepsilon}{|x|}\right)^2}} = \frac{1}{g_-\left(\frac{-it}{|x|}\right)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{t^2}{|x|^2}}},$$

$$\text{т.е.} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{v}_\varepsilon = 0.$$

Нека сега $|x| < |t|$, т.е. точката $\frac{it}{|x|}$ не лежи върху разреза. Проследявайки изменението на аргумента, получаваме

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{1}{i\sqrt{\left(\frac{t}{|x|}\right)^2 - 1}}, \quad \frac{1}{\sqrt{b^2 + 1}} \Big|_{\varepsilon=0} = -\frac{1}{i\sqrt{\left(\frac{t}{|x|}\right)^2 - 1}}$$

т.е.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{v}_\varepsilon = \frac{1}{2\pi|x|} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{t}{|x|}\right)^2 - 1}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{t^2 - |x|^2}}.$$

Окончателно получихме

$$\tilde{v} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{v}_\varepsilon = \begin{cases} 0, & |x| > |t| \\ \frac{1}{2\pi\sqrt{t^2 - |x|^2}}, & |t| < |x| \end{cases}$$

Разполагайки с този резултат, да се обърнем към /98/. Имаме

$$/100/ \quad \left(F_\xi^{-1}(v_\varepsilon), \varphi \right) = \int_{\mathbb{R}^3} y(t) \tilde{v}_\varepsilon(x, t) \varphi(x, t) dt.$$

За да извършим граничния преход под знака на интеграла се нуждаем от допълнителна информация за $\tilde{v}_\varepsilon$. За $|x| \geq |t|$ имаме

$$\frac{1}{|x|} \frac{1}{\left| \sqrt{1 + \left(\frac{it \pm \varepsilon}{|x|}\right)^2} \right|} = \frac{1}{\sqrt{|x|^2 + (it \pm \varepsilon)^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{|x|^2 - t^2 + \varepsilon^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{|x|^2 - t^2}}$$

$$\text{Случаят } |x| < |t| \text{ е малко по-сложен. Понеже } |x|^2 + (it \pm \varepsilon)^2 = \\ = \sqrt{(|x|^2 + \varepsilon^2 - t^2)^2 + 4t^2\varepsilon^2} \geq \sqrt{(t^2 - |x|^2 + \varepsilon^2)^2} \geq |t^2 - |x|^2|,$$

стигаме до същата оценка. Получихме

$$|\tilde{v}_\varepsilon(x, t)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{|x|^2 - t^2}}, \quad \varepsilon > 0.$$

Този резултат ни позволява да извършим граничния преход в /100/ и да получим

$$(E_+, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^3} y(t) v(x, t) \varphi(x, t) dx dt,$$

т.е.

$$/101/ E_+(x, t) = y(t) v(x, t) = \begin{cases} 0, & |x| > |t| \\ \frac{y(t)}{2\pi \sqrt{t^2 - |x|^2}}, & |x| < |t|. \end{cases}$$

Ясно е, че направените разсъждения се отнасят и за E_- . Намираме

$$E_-(x, t) = \begin{cases} 0, & |x| > |t| \\ -\frac{y(-t)}{2\pi \sqrt{t^2 - |x|^2}}, & |x| < |t|. \end{cases}$$

Обърнете внимание на обстоятелството, че носителите на E_+ и E_- се съдържат в изпъкналите конуси

$$K_+^3: |x| \leq |t|, t > 0 \quad \text{и} \quad K_-^3: |x| \leq |t|, t < 0$$

съответно.

Следвайки същата схема, можем да намерим по две фундаментални решения на $\square_n$ за всяко n . Наистина, да предположим, че $\bar{E} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ е решение на уравнението

$$E_{tt} - \Delta_x E = \delta(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^1.$$

След частична трансформация на Фурие спрямо x стигаме до уравнението

$$\hat{E}_{tt} + |\xi|^2 \hat{E} = 1(\xi) \otimes \delta(t), \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

и както по-горе намираме

$$\hat{E}_+(\xi, t) = y(t) \frac{\sin|\xi|t}{|\xi|}, \quad \hat{E}_-(\xi, t) = -y(-t) \frac{\sin|\xi|t}{|\xi|},$$

Понеже получените функции очевидно се съдържат в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$, разпределенията

$$/102/ \quad E_+(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} F_{\xi}^{-1} \left(y(t) \frac{\sin|\xi|t}{|\xi|} \right), \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

$$E_-(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} -F_{\xi}^{-1} \left(y(-t) \frac{\sin|\xi|t}{|\xi|} \right), \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

ще бъдат фундаментални решения на $\square_n$. Нашата следваща задача ще бъде да придадем явен вид на разпределенията /102/ в случая $n = 3$. За тази цел да вземем $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ и да приложим дефиницията на F_{ξ}^{-1} .

Намираме

$$/103/ \quad (E_+, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^4} y(t) \frac{\sin|\xi|t}{|\xi|} F_x^{-1}(\varphi)(\xi, t) d\xi dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\sin|\xi|t}{|\xi|} F_x^{-1}(\varphi)(\xi, t) d\xi \right) dt.$$

Понеже функцията $\frac{\sin|\xi|t}{|\xi|} \in L^1(\mathbb{R}^3)$, не можем веднага да прехвърлим F^{-1} върху нея. Да въведем функцията

$$v_N(\xi, t) = \begin{cases} \frac{\sin|\xi|t}{|\xi|}, & |\xi| \leq N \\ 0, & |\xi| \geq N. \end{cases}$$

Сега вече лема 3.1, стр.282 ни дава

$$\int_{\mathbb{R}^3} v_N F_x^{-1}(\varphi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^3} F_{\xi}^{-1}(v_N) \varphi(x, t) dx$$

$$/104/ \quad = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(2\pi)^3} \left(\int_{|\xi| \leq N} e^{i(x, \xi)} \frac{\sin|\xi|t}{|\xi|} d\xi \right) \varphi(x, t) dx.$$

Вътрешният интеграл се пресмята моментално. Тъй като $\mathcal{U}_N$ зависи само от $|\xi|$, $F_{\xi}^{-1}(\mathcal{U}_N)$ зависи само от $|x|$. Следователно

$$F_{\xi}^{-1}(\mathcal{U}_N)(x, t) = F_{\xi}^{-1}(\mathcal{U}_N)(0, 0, |x|, t)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^N \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} e^{i|x|\varrho \cos \theta} \varrho \sin t \varrho \sin \theta d\psi d\theta d\varrho$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^N q(\varrho|x|) \sin t \varrho d\varrho,$$

където

$$q(|x|\varrho) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\pi} e^{i|x|\varrho \cos \theta} \varrho \sin \theta d\theta = \frac{2 \sin |x|\varrho}{|x|}.$$

Следователно

$$F_{\xi}^{-1}(\mathcal{U}_N)(x, t) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^N \frac{\sin |x|\varrho \sin t \varrho d\varrho}{|x|}$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{\sin N(t-|x|)}{|x|(t-|x|)} - \frac{\sin N(t+|x|)}{|x|(t+|x|)} \right), \quad x \neq 0.$$

Връщайки се към /104/, получаваме

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{U}_N F_{\xi}^{-1}(\varphi) d\xi = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\sin N(t-|x|)}{|x|(t-|x|)} \varphi(x, t) dx$$

$$- \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\sin N(t+|x|)}{|x|(t+|x|)} \varphi(x, t) dx = \frac{1}{4\pi^2} I_1(N, t) - \frac{1}{4\pi^2} I_2(N, t).$$

Очевидно имаме

$$I_1(N, t) = \int_0^{\infty} \frac{\sin N(t-\varrho)}{t-\varrho} \left(\frac{1}{\varrho} \int_{|x|=\varrho} \varphi(x, t) d\sigma_{\varrho} \right) d\varrho =$$

$$= \int_0^{+\infty} h(\varrho, t) \frac{\sin N(t-\varrho)}{t-\varrho} d\varrho = \int_{-t}^{+\infty} h(\tau+t, t) \frac{\sin N\tau}{\tau} d\tau,$$

където

$$h(\varrho, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\varrho} \int_{|x|=\varrho} \varphi(x, t) d\sigma_{\varrho} = \iint_{0 \leq \theta \leq \pi} \varphi(\varrho, \theta, t) \varrho \sin \theta d\theta d\psi.$$

Границата на $I_1(N, t)$ се намира веднага. Нека $t > 0$. Имаме

$$I_1(N, t) = \int_{-t}^t \sin N\tau \frac{h(\tau+t, t) - h(t, t)}{\tau} d\tau$$

/105/

$$+ h(t, t) \int_{-t}^t \frac{\sin N\tau}{\tau} d\tau + \int_t^{+\infty} \frac{h(t+\tau, t)}{\tau} \sin N\tau d\tau.$$

Според лемата на Риман-Лебег при $N \rightarrow +\infty$ първият и последният интеграл клонят към нула, а вторият очевидно клони към $\pi h(t, t)$. Следователно

$$\lim_{N \rightarrow \infty} I_1(N, t) = \pi h(t, t) = \frac{\pi}{t} \int_{|x|=t} \varphi(x, t) d\sigma_t, \quad t > 0.$$

Границата на $I_2(N, t)$ се пресмята още по-просто. За $t > 0$ намираме

$$\lim_{N \rightarrow \infty} I_2(N, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_t^{+\infty} \frac{h(\tau-t, t)}{\tau} \sin N\tau d\tau = 0.$$

Накрая остава да вземем пред вид, че /103/ и /104/ ни дават

$$(E_+, \varphi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(t) \left(\int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{U}_N F_{\xi}^{-1}(\varphi) d\xi \right) dt$$

/106/

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\infty} (I_1(N, t) - I_2(N, t)) dt,$$

защото очевидно $Y(t) \tilde{v}_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{\sin |\xi| t}{|\xi|} Y(t)$ в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)$. За

да можем да извършим граничния преход в /106/, трябва да намерим мажоранти на $I_1(N, t)$ и $I_2(N, t)$. От /105/ получаваме непосредствено $|I_1(N, t)| \leq f_1(t)$, където

$$f_1(t) = \int_{-t}^t \left| \frac{h(\tau+t, t) - h(t, t)}{\tau} \right| d\tau$$

$$+ A |h(t, t)| + \int_t^{+\infty} \frac{|h(t+\tau, t)|}{\tau} d\tau$$

и A е подходяща константа. Тъждеството

$$\frac{h(\tau+t, t) - h(t, t)}{\tau} = \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial \lambda}(t + \lambda\tau, t) d\lambda$$

и релацията $h(q, t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ показват, че $f_1 \in L^1[0, +\infty)$. Понеже оценката

$$|I_2(N, t)| \leq \int_t^{+\infty} \frac{|h(\tau-t, \tau)|}{\tau} d\tau \in L^1[0, +\infty)$$

е очевидна, можем да извършим граничния преход в /106/ и да получим

$$/107/ \quad (E_+, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty h(t, t) dt = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \left(\frac{1}{t} \iint_{|x|=t} \varphi(x, t) d\sigma_t \right) dt,$$

където, разбира се, $d\sigma_t$ е лицевият елемент на сферата $|x| = t$.

Очевидните равенства

$$(E_-, \varphi) = - \int_{\mathbb{R}^4} y(-t) \frac{\sin |\xi| t}{|\xi|} F_x^{-1}(\varphi)(\xi, t) d\xi dt =$$

$$= - \int_{\mathbb{R}^4 \cap \{t < 0\}} \frac{\sin |\xi| t}{|\xi|} F_x^{-1}(\varphi)(\xi, t) d\xi dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}^4 \cap \{t > 0\}} \frac{\sin |\xi| t}{|\xi|} F_x^{-1}(\varphi)(\xi, -t) d\xi dt$$

заедно със /103/ и /107/ ни позволяват да заключим, че

$$/108/ \quad (E_-, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{1}{t} \int_{|x|=t} \varphi(x, -t) d\sigma_t dt$$

От /107/ и /108/ веднага се вижда, че носителите на E_+ и E_- лежат върху коничните повърхнини

/109/ K_+^4 : $|x|^2 = t^2, t \geq 0$ и K_-^4 : $|x|^2 = t^2, t \leq 0$ съответно.

Понеже нито едно от намерените фундаментални решения не е гладко в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ /за съответното n /, можем да произнесем следната

Т е о р е м а 1.13. Операторите $\square_n$, $n = 1, 2, 3$ не са нито хипоелиптически, нито аналитично хипоелиптически.

Заслужава да отбележим, че докато фундаменталните решения на $\square_1$ и $\square_2$ са локално сумируеми функции, фундаменталните решения на $\square_3$ не притежават и това свойство и са истински разпределения. Доловената закономерност не е случайна. Сингулярността на фундаменталните решения на $\square_n$ расте заедно с n .

Следващата лема играе основна роля при изследването на задачата на Коши за вълновото уравнение.

Л е м а 1.4. Фундаменталните решения /102/ притежават рестрикции

$$E_+(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_x^n), \quad E_-(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_x^n)$$

при всяко фиксирано t . Изображенията

$$/110/ \quad t \longrightarrow E_+(t), \quad t \longrightarrow E_-(t)$$

на $\mathbb{R}^1$ в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_x^n)$ са непрекъснати в $(-\infty, +\infty)$ и безкрайно гладки в интервалите $[0, +\infty)$ и $(-\infty, 0]$ съответно¹.
Нещо повече, те определят еднозначно самите фундаментални решения /102/.

Доказателство. Ще разглеждаме само E_+ , за E_- доказателството е съвсем същото. Един поглед върху дефиниционното равенство

$$/111/ \quad (E_+, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^1} \left(y(t) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\sin|\xi|t}{|\xi|} F_x^{-1}(\varphi)(\xi, t) d\xi \right) dt$$

показва, че търсената рестрикция $E_+(t)$ действа по формулата

$$/112/ \quad (E_+(t), \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\sin|\xi|t}{|\xi|} F^{-1}(\varphi)(\xi) d\xi, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_x^n)$$

при $t > 0$ и се анулира твърдествено за $t \leq 0$. Понее очевидно така дефинираният функционал $E_+(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, остава да се убедим, че функцията $t \longrightarrow E_+(t)$ на $\mathbb{R}^1/[0, +\infty)/$ в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_x^n)$ има желаните свойства. Тъй като $\mathbb{R}^1$ е метризуемо, изображението $t \longrightarrow E_+(t)$ е непрекъснато тогава и само тогава, когато е секвенциално непрекъснато. При това е безразлично дали в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_x^n)$ разглеждаме силната или слабата топология, защото според следствието от теорема 6.8, стр.158 всяка слабо сходяща редица в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_x^n)$ е и силно

¹Ако X е ЛТП и $f: [a, b] \longrightarrow X$ е някаква функция, казваме, че f е диференцируема в $t_0 \in [a, b] \subset \mathbb{R}^1$, ако границата $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h}$ съществува в X . Казваме, че $f \in C^1[a, b]$, ако така дефинираното изображение $f': [a, b] \longrightarrow X$ е непрекъснато.

сходяща. Следователно остава да докажем, че ако $t_\nu \longrightarrow t_0$ и $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_x^n)$, то $(E_+(t_\nu), \varphi) \longrightarrow (E_+(t_0), \varphi)$. Ако $t_0 < 0$ няма какво да доказваме, защото очевидно $E_+(t) \equiv 0$ за $t < 0$. За $t_0 \geq 0$ имаме

$$\lim_{t_\nu \rightarrow t_0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\sin t_\nu |\xi|}{|\xi|} F^{-1}(\varphi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\sin t_0 |\xi|}{|\xi|} F^{-1}(\varphi) d\xi$$

тъй като

$$\left| \frac{\sin|\xi|t_\nu}{|\xi|} \right| = \left| t_\nu \frac{\sin|\xi|t_\nu}{|\xi|t_\nu} \right| \leq |t_\nu| \leq 1 + t_0$$

и теоремата на Лебег е приложима. Впрочем въпросът е съвсем елементарен и може да се третира и директно. Гладкостта на функцията $t \longrightarrow E_+(t)$ се изследва по същия начин. За да докажем например, че тя принадлежи на $C^1[0, +\infty)$, за всяко $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_x^n)$ трябва да установим равенството

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\sin(t_0+h)|\xi|}{h|\xi|} - \cos t_0 |\xi| \right) F^{-1}(\varphi) d\xi = 0,$$

което е почти очевидно.

Един поглед върху /111/ показва, че наистина E_+ се определя еднозначно от функцията $t \longrightarrow E_+(t)$. С това лемата е доказана. Естествено е обаче да се опитаме да намерим явна форма за $E_+(t)$ и $E_-(t)$, която да ни дава сведения и за техните носители. Например за $n = 1, 2$ очевидно имаме

$$E_+(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |x| < t \\ 0, & |x| > t \end{cases} \quad n=1, t>0$$

$$E_+(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\sqrt{t^2-|x|^2}}, & |x| < t \\ 0, & |x| > t, \end{cases} \quad n=2, t>0$$

Аналогични равенства са в сила и за $E_-(t)$. Напишете ги! /
Виждаме, че за всяко t при $n = 1, 2$ $E_+(t)$ и $E_-(t)$ са с компактни носители. Макар че този факт е верен и за $n \geq 3$, тук поради липса на място ще разгледаме само случая $n = 3$, в който разполагаме с явни формули за E_+ и E_- /вж. /107/ и /108//.

Нека $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^4)$ е неотрицателна функция с носител в интервала $|t - t_0| < 1$, $t_0 > 0$, такава, че

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi(t) dt = 1 \text{ и нека } \chi_\varepsilon(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\varepsilon} \chi\left(\frac{t-t_0}{\varepsilon}\right).$$

Да вземем $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ и да образуваме функцията $\varphi_\varepsilon(x, t) = \chi_\varepsilon(t) \psi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$. Изхождайки от /111/, получаваме

$$(E_+, \varphi_\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(t) \chi_\varepsilon(t) (E_+(t), \psi) dt.$$

Понеже функцията $t \rightarrow (E_+(t), \psi)$ е непрекъсната, а

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi_\varepsilon(t) dt = \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \chi_\varepsilon(t) dt = 1,$$

лесно се вижда, че

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (E_+, \varphi_\varepsilon) = (E_+(t_0), \psi).$$

От друга страна, с помощта на /107/ за $\varepsilon < t_0$ получаваме

$$(E_+, \varphi_\varepsilon) = \frac{1}{4\pi} \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \chi_\varepsilon(t) \left(\frac{1}{t} \int_{|x|=t} \psi(x) d\sigma_t \right) dt$$

и понеже и функцията $t \rightarrow \frac{1}{t} \int_{|x|=t} \psi(x) d\sigma_t$

е непрекъсната, заключаваме, че

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (E_+, \varphi_\varepsilon) = \frac{1}{4\pi t_0} \int_{|x|=t_0} \psi(x) d\sigma_{t_0}.$$

По такъв начин установихме важното равенство

$$/113/ \quad (E_+(t), \psi) = \frac{1}{4\pi t} \int_{|x|=t} \psi(x) d\sigma_t, \quad t > 0,$$

от което между другото се вижда, че носителът на $E_+(t)$ е компактен и за $t > 0$ съвпада със сферата $|x| = t$. Естествено аналогичен резултат е в сила и за $E_-(t)$.

Сега вече имаме всичко необходимо, за да изследваме задачата на Коши за вълновото уравнение.

За краткост ще се ограничим със случая $n = 3$.

Да положим

$$\mathbb{R}_+^1 = \{t \in \mathbb{R}^1, t > 0\}, \quad \mathbb{R}_+^4 = \mathbb{R}_\infty^3 \times \mathbb{R}_+^1$$

и да разгледаме едностранната задача на Коши

$$\square_3 u = f(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}_+^4$$

$$/114/ \quad u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

където φ_0 и φ_1 са функции от $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, а $f \in C^2(\overline{\mathbb{R}_+^4})$ и е с носител в някакъв цилиндър от вида $|x| \leq R = \text{const}, t \geq 0$.

Да допуснем, че $u \in C^2(\mathbb{R}_+^4) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}_+^4})$ е решение на задачата /114/ и че $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_x^3)$ при всяко фиксирано $t \geq 0$. След частична трансформация на Фурие спрямо x получаваме

$$/115/ \quad \hat{u}_{tt}(\xi, t) + |\xi|^2 \hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi, t), \quad (\xi, t) \in \mathbb{R}_+^4$$

$$/116/ \quad \hat{u}(\xi, 0) = \hat{\varphi}_0(\xi), \quad \hat{u}_t(\xi, 0) = \hat{\varphi}_1(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^3.$$

Стигнахме до задачата на Коши за обикновеното диференциално уравнение /115/, в което ξ е параметър.

Уравнението /115/ се решава моментално. Понеже функцията $u_0(\xi, t) = c_1(\xi) \cos |\xi| t + c_2(\xi) \sin |\xi| t$ е общо решение на хомогенното уравнение, остава да намерим едно частно решение на /115/. Тъй като носителите на фундаменталното решение $t \rightarrow y(t) \frac{\sin |\xi| t}{|\xi|}$ на /115/ и на функцията $t \rightarrow \hat{f}(\xi, t)$ са правилно разположени (те се съдържат в $\bar{\mathbb{R}}_+^1$), конволюцията $v_0 \stackrel{\text{def}}{=} y(t) \frac{\sin |\xi| t}{|\xi|} * \hat{f}(\xi, t)$

существува и удовлетворява /115/ в $D'(\mathbb{R}_+^1)$. Очевидно имаме

$$v_0(\xi, t) = \int_0^{+\infty} y(t-\tau) \frac{\sin |\xi|(t-\tau)}{|\xi|} \hat{f}(\xi, \tau) d\tau$$

$$\int_0^t \frac{\sin |\xi|(t-\tau)}{|\xi|} \hat{f}(\xi, \tau) d\tau \in C^2[0, +\infty).$$

Следователно v_0 е истинско решение на /115/ при всяко фиксирано $\xi \in \mathbb{R}^3$. Непосредствено се вижда, че v_0 удовлетворява началните условия

$$v_0(\xi, 0) = 0, \quad \frac{\partial v_0}{\partial t}(\xi, 0) = 0.$$

Проверете, че и методът на Лагранж води до същото частно решение. Излезе, че функцията

$$\hat{u}(\xi, t) \stackrel{\text{def}}{=} u_0(\xi, t) + v_0(\xi, t)$$

е общото решение на /115/. Използвайки /116/, намираме

$$c_1(\xi) = \hat{\varphi}_0(\xi), \quad c_2(\xi) = \frac{\hat{\varphi}_1(\xi)}{|\xi|}. \quad \text{Следователно}$$

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{\varphi}_0(\xi) \cos |\xi| t + \hat{\varphi}_1(\xi) \frac{\sin |\xi| t}{|\xi|} + v_0(\xi, t)$$

е решението на задачата на Коши /115/, /116/, което търсехме. Остава да направим обратната трансформация на Фурие спрямо ξ . Според /112/ имаме

$$(E_+(t), \psi) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\sin |\xi| t}{|\xi|} F^{-1}(\psi)(\xi) d\xi, \quad \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3),$$

т.е.

$$\hat{E}_+(t)(\xi) = \frac{\sin |\xi| t}{|\xi|}.$$

Ето защо можем да пишем

$$u_0(\xi, t) = \hat{\varphi}_0(\xi) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\sin |\xi| t}{|\xi|} \right) + \hat{\varphi}_1(\xi) \frac{\sin |\xi| t}{|\xi|}$$

$$= \hat{\varphi}_0(\xi) \frac{\partial}{\partial t} \hat{E}_+(t) + \hat{\varphi}_1(\xi) \hat{E}_+(t),$$

откъдето, разбира се, следва

$$F_{\xi}^{-1}(u_0) = F_{\xi}^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\hat{\varphi}_0(\xi) \hat{E}_+(t)) \right) + F_{\xi}^{-1} (\hat{\varphi}_1(\xi) \hat{E}_+(t)).$$

Понеже $\hat{E}_+ \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, $\varphi_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, теорема 3.22, стр.342 и /113/ ни дават

$$F_{\xi}^{-1} (\hat{\varphi}_1(\xi) \hat{E}_+(t))(x) = (E_+(t) * \varphi_1)(x)$$

$$/117/ \quad = (E_+(t), \varphi_1(x-y)) = \frac{1}{4\pi t} \int_{|\eta|=t} \varphi_1(x-y) d\sigma_{\eta}.$$

За да пресметнем $F_{\xi}^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\hat{\varphi}_0(\xi) \hat{E}_+(t)) \right)$ ще отбележим,

че за произволно $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ самата дефиниция на $\frac{\partial E_+}{\partial t}$ ни дава $\left(\frac{\partial E_+}{\partial t}(t), \psi \right) = \frac{\partial}{\partial t} (E_+, \psi)$. Следователно

$$\left(F_{\xi}^{-1} \left(\frac{\partial \hat{E}_+(t)}{\partial t} \right), \psi \right) = \left(\frac{\partial \hat{E}_+(t)}{\partial t}, F_{\xi}^{-1}(\psi) \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\hat{E}_+(t), F_{\xi}^{-1}(\psi) \right).$$

Прилагайки този резултат, намираме непосредствено

$$\begin{aligned} F_{\xi}^{-1} \left(\hat{\varphi}_0(\xi) \frac{\partial \hat{E}_+}{\partial t} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} F_{\xi}^{-1} \left(\hat{\varphi}_0(\xi) \hat{E}_+(t) \right) \\ /118/ \quad &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi t} \int_{|y|=t} \varphi_0(x-y) d\sigma_t \right). \end{aligned}$$

За да завършим, трябва да пресметнем и $F_{\xi}^{-1}(\psi_0)$. Понеже при фиксирано t $\psi_0(\xi, t) \in L^1(\mathbb{R}^3)$, имаме

$$\begin{aligned} F_{\xi}^{-1}(\psi_0)(x, t) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i(x, \xi)} \psi_0(\xi, t) d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^3} e^{i(x, \xi)} \frac{\sin |\xi|(t-\tau)}{|\xi|} \hat{f}(\xi, \tau) d\xi \right) d\tau \\ &= \int_0^t F_{\xi}^{-1} \left(\hat{E}_+(t-\tau) \hat{f}(\xi, \tau) \right) d\tau \\ &= \int_0^t \left(E_+(t-\tau) * f \right)(x) d\tau \\ &= \int_0^t \frac{1}{4\pi(t-\tau)} \left(\int_{|y|=t-\tau} f(x-y, \tau) d\sigma_{t-\tau} \right) d\tau. \end{aligned}$$

/Второто равенство написаме въз основа на теоремата на Фубини./

Да положим $t - \tau = \lambda$. Получаваме

$$/119/ \quad F_{\xi}^{-1}(\psi_0)(x, t) = \int_0^t \left(\frac{1}{4\pi\lambda} \int_{|y|=\lambda} f(x-y, t-\lambda) d\sigma_{\lambda} \right) d\lambda =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{|y| \leq t} \frac{f(x-y, t-|y|)}{|y|} dy$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{|z-x| \leq t} \frac{f(z, t-|x-z|)}{|x-z|} dz.$$

Последният интеграл се нарича **закъсняващ потенциал**. Като обединим /117/, /118/ и /119/, намираме окончателната формула

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi t} \int_{|z-x|=t} \varphi_1(z) d\sigma_t$$

/120/

$$+ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi t} \int_{|z-x|=t} \varphi_0(z) d\sigma_t \right) + \frac{1}{4\pi} \int_{|z-x| \leq t} \frac{f(z, t-|z-x|)}{|z-x|} dz,$$

която за $f \equiv 0$ се превръща във формулата на Кирхоф [14]. Веднага се вижда, че повечето от ограниченията, които наложихме върху φ_0 , φ_1 и f при извода на /120/, са излишни. Непосредствено се проверява, че ако $\varphi_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $\varphi_1 \in C^2(\mathbb{R}^3)$ и $f \in C^2(\mathbb{R}_+^4)$, функцията u наистина е решение на интересувашата ни задача на Коши [14].

У п р а ж н е н и е 4

1. Проверете, че разпределенията /94/, /101/ и /107/ са наистина фундаментални решения на $\square_1$, $\square_2$ и $\square_3$.

2. Разсъждавайки както в текста, решете задачата на Коши

$$\square_2 u = f \text{ в } \mathbb{R}_+^3, \quad u|_{t=0} = \varphi_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varphi_1.$$

3. Докажете равенството

$$F_{\xi}^{-1}(V_0)(x, t) = (E_+ * \tilde{f})(x, t), \quad \text{където}$$

$$\tilde{f} = \begin{cases} f, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

а f е функцията от /119/.

4. Изследвайте задачата на Коши

$$\square_3 u = f \text{ в } \mathbb{R}^4,$$

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

У п ъ т в а н е. Най-напред предположете, че $\varphi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, $\varphi_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ и използвайте равенството $\frac{\sin|\xi|t}{|\xi|} = \hat{E}_+(t) - \hat{E}_-(t)$. След като намерите явна формула за решението, освободете се от излишните предположения.

$$\begin{aligned} \text{Отг. } u &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \varphi_0 * (E_+(t) - E_-(t)) \right\} \\ &+ \varphi_1 * \left\{ E_+(t) - E_-(t) \right\} + \left(\gamma(t)f \right) * E_+ + \left(\gamma(-t)f \right) * E_-. \end{aligned}$$

1.5. Теорема за съществуване

Т е о р е м а 1.14 /Малгранж и Бренпрайс/. Всеки ненулев диференциален оператор с постоянни коефициенти притежава фундаментално решение от $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (n е броят на независимите променливи).

Доказателството, което следва, е оригиналното доказателство на Малгранж.

Друго доказателство, построено изцяло върху трансформацията на Фурие, е дадено от Хьормандер и може да се намери в [35]. На същия автор дължим и значително по-дълбокия резултат, че всеки ненулев диференциален оператор с постоянни коефициенти притежава фундаментално решение от $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ [40], [47].

Сега да се заемем с въпроса по същество. Търсим решение на уравнението $P(D)u = \delta$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ при условие, че

$$P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha D^\alpha, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),$$

а числата c_α са реални или комплексни и поне едно от тях е различно от нула. С други думи, търсим разпределение $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ за което да имаме

$$/121/ \quad (u, P(-D)\varphi) = \varphi(0)$$

за всяко $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Идеята на Малгранж е съвършено проста: да означим с X линейното подпространство на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, което се състои от функциите от вида $\psi = P(-D)\varphi$ за някакво $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Върху X можем да дефинираме линейния функционал u , който действа по формулата

$$/122/ \quad (u, \psi) = \varphi(0).$$

Използвайки теоремата на Хан-Банах, Малгранж успява да продължи u до функционал, дефиниран и непрекъснат в цялото $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, т.е. до разпределение от $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. В такъв случай /122/ ни гарантира, че u ще бъде фундаментално решение. Сега да реализираме тази програма.

Л е м а 1.5. Ако $w \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ уравнението

$$P(D)u = w$$

притежава не повече от едно решение в $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

Д о к а з а т е л с т в о. Да допуснем, че съществуват поне две решения $u_j \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, 2$ и да положим $w = u_1 - u_2$. В такъв случай получаваме $P(D)w = 0$, което след трансформация

ния на Фурие ни дава

$$/123/ \quad P(\xi) \hat{w}(\xi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Тъй като P е ненулев полином, съществува точка $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$, в която $P(\xi_0) \neq 0$. Следователно $P(\xi) \neq 0$ в цяла околност на ξ_0 . От друга страна, според теоремата на Винер-Пели-Шварц $\hat{w}$ е цяла функция, която според /123/ се анулира в цяла околност на ξ_0 . Следователно тя се анулира тъждествено и лемата е доказана. Според тази лема при дадено $\psi \in X \subset D(\mathbb{R}^n)$, функцията φ , за която имаме $\psi = P(-D)\varphi$ е еднозначно определена. Това ни позволява да твърдим, че функционалът u , който действа в X по правилото /122/ е коректно дефиниран. За да докажем, следвайки Малгранж, че u се продължава до елемент от $D'(\mathbb{R}^n)$, достатъчно е да намерим полунорма q , дефинирана и непрекъсната в $D(\mathbb{R}^n)$, за която е в сила неравенството

$$/124/ \quad |(u, \psi)| \leq C q(\psi), \quad \psi \in X, \quad C = \text{const.}$$

Този въпрос се урежда от следната

Л е м а 1.6. Нека $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ е цяла функция, а $P: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ е ненулев полином. Да означим с T подмножеството на $\mathbb{C}^n$, което се описва от точката

$w = (e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})$, когато $\theta_1, \dots, \theta_n$ описват независимо едно от друго интервала $[-\pi, \pi]^1$. В такъв случай имаме

$$/125/ \quad |f(z)| \leq C \int_T |f(z+w) P(z+w)| d\theta, \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

където $d\theta = d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_n$ и C е подходяща константа.

Доказателство. Ще започнем с едномерния случай. Ако $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ е цяла, а Q е полином, формулата на Коши

ИТ очевидно е n -мерен тор.

ни дава

$$f(0) Q(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(z) Q(z)}{z} dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) Q(e^{i\theta}) d\theta.$$

Следователно

$$/126/ \quad |f(0) Q(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta}) Q(e^{i\theta})| d\theta.$$

Да вземем произволен полином

$$P(z) = \sum_{k=0}^m a_k z^{m-k}$$

и да положим

$$Q(z) \stackrel{\text{def}}{=} z^m \bar{P}\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^m \bar{a}_k z^k$$

Прилагайки /126/, получаваме

$$/127/ \quad |a_0 f(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |Q(e^{i\theta}) f(e^{i\theta})| d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |P(e^{i\theta}) f(e^{i\theta})| d\theta,$$

понеже очевидно $Q(0) = \bar{a}_0$ и

$$Q(e^{i\theta}) = e^{im\theta} \bar{P}(e^{-i\theta}) = e^{im\theta} \overline{P(e^{i\theta})}.$$

От /127/ лемата следва почти автоматично. Да се върнем към общия случай (т.е. $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $P: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$) и да въведем цялата функция

$$\phi(\lambda) = f(z + \lambda w), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad w \in T$$

и полинома

$$p(\lambda) = P(z + \lambda \omega), \quad (P(z) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha z^\alpha).$$

Разкривайки скобите, намираме

$$/128/ \quad p(\lambda) = \lambda^m P_m(\omega) + \dots,$$

$$\text{където } P_m(\omega) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \omega^\alpha, \text{ а събираемите в } /128/, \text{ които}$$

са означени с многоточие, съдържат λ в степен $\leq m-1$. Като приложим /127/ към ϕ и p , получаваме

$$|P_m(\omega) f(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |p(z + e^{i\theta} \omega) f(z + e^{i\theta} \omega)| d\theta,$$

откъдето след едно интегриране върху T следва неравенството

$$/129/ \quad |f(z)| \int_T |P_m(\omega)| d\varphi \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_T |(pf)(z + e^{i\theta} \omega)| d\theta d\varphi,$$

$$d\varphi = d\varphi_1 \dots d\varphi_n.$$

Разменяйки реда в интегрирането в дясната страна на /129/, намираме

$$/130/ \quad \frac{1}{2\pi} \int_T \int_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_T |(pf)(z + e^{i\theta} \omega)| d\varphi \right) d\theta$$

$$= \int_T |(pf)(z + \omega)| d\varphi.$$

Остава да вземем предвид, че величината $\int_T |P_m(\omega)| d\varphi$ е

сигурно различна от нула, защото в противен случай бихме имали

$$\int_T |P_m(\omega)|^2 d\varphi \leq M \int_T |P_m(\omega)| d\varphi = 0, \quad (M = \max |P_m|),$$

когато очевидно

$$\int_T |P_m(\omega)|^2 d\varphi = (2\pi)^n \sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha|^2 \neq 0,$$

защото по предположение P е полином от m -та степен.

$$\text{От } /129/ \text{ и } /130/ \text{ получаваме } /125/ \text{ с } C = \left(\int_T |P_m(\omega)| d\varphi \right)^{-1}$$

и лемата е доказана. Тя е основният пункт в цялото доказателство на Малгранж.

За да завършим доказателството, да се върнем към /122/, където $\psi = P(-D) \varphi$. Непосредствено получаваме

$$/131/ \quad |(u, \psi)| = |\varphi(0)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\varphi}(\xi)| d\xi,$$

където $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и $\hat{\varphi}$ е нейната Фуриерова трансформация. Понеже $\hat{\varphi}$ е цяла функция, като приложим /125/ към $\hat{\varphi}$ и към полинома $P(-\xi)$, намираме

$$/132/ \quad |\hat{\varphi}(\xi)| \leq C \int_T |P(-\xi - \omega) \hat{\varphi}(\xi + \omega)| d\omega,$$

което заедно със /131/ ни дава

$$/133/ \quad |(u, \psi)| \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \int_T |\hat{\varphi}(\xi + \omega)| d\omega d\xi,$$

тъй като $\psi = P(-D) \varphi$. Разменяйки реда в интегрирането, от /133/ получаваме

$$/134/ \quad |(u, \psi)| \leq C \int \left(\int_{T^* \mathbb{R}^n} |\hat{\psi}(\xi + w)| d\xi \right) d\theta.$$

Остава да се убедим, че полунормата в дясната страна на /134/ е непрекъсната в топологията на $D(\mathbb{R}^n)$. За тази цел ще оценим отгоре вътрешния интеграл. Имаме

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\psi}(\xi + w)| d\xi &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^{2n}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{2n} |\hat{\psi}(\xi + w)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ /135/ \quad &= C_1 \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{2n} |\hat{\psi}(\xi + w)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Понеже $\hat{\psi}(\xi + w) = F(e^{-i(x, w)} \psi(x))(\xi)$ и $\widehat{D_j \psi} = \xi_j \hat{\psi}$ за $\psi \in D(\mathbb{R}^n)$, използвайки равенството на Парсевал, намираме

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{2n} |\hat{\psi}(\xi + w)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |(1+|\xi|^2)^n \hat{\psi}(\xi + w)|^2 d\xi$$

$$\begin{aligned} /136/ \quad &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| F \left\{ (1 - \Delta_x)^n (e^{-i(x, w)} \psi(x)) \right\} (\xi) \right|^2 d\xi \\ &= (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} \left| (1 - \Delta_x)^n (e^{-i(x, w)} \psi(x)) \right|^2 dx. \end{aligned}$$

Имайки пред вид дефиницията на топологията в $D(\mathbb{R}^n)$, достатъчно е да се убедим, че полунормата в /134/ е непрекъсната в $C_0^\infty(K)$, където $K \subset \mathbb{R}^n$ е някакъв компакт. Нека R е толкова голямо, че K да се съдържа в кълбото $|x| \leq R$. Тъй като

за $w \in T$, $|x| \in R$ имаме

$$|e^{-i(x, w)}| = e^{(x, \operatorname{Im} w)} \leq e^{nR},$$

за $\psi \in C_0^\infty(K)$ с помощта на /135/ и /136/ получаваме

$$\begin{aligned} q(\psi) &\stackrel{\text{def}}{=} \int \int_{T^* \mathbb{R}^n} |\hat{\psi}(\xi + w)| d\xi d\theta \\ &\leq A \left(\int_{|x| \leq R} \sum_{|\alpha| \leq 2n} |D^\alpha \psi(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

с подходяща константа A . Понеже полунормата вдясно е очевидно непрекъсната в $C_0^\infty(K)$, непрекъснатостта на q в $D(\mathbb{R}^n)$ е установена. Сега вече, използвайки /134/, с помощта на теоремата на Хан-Банах продължаваме $\mathcal{U}$ до разпределение от $D'(\mathbb{R}^n)$. То е търсеното фундаментално решение, защото от $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ следва, че $P(-D)\varphi \in X$ и /122/ ни дава $(u, P(-D)\varphi) = \varphi(0)$.

С това доказателството на теоремата е завършено.

§ 2. Пространства на Соболев

($\mathcal{H}^s$ пространства)

2.1. Основни сведения за простран-

ствата $\mathcal{H}^{m, p}(\Omega)$ и $\mathcal{H}_0^{m, p}(\Omega)$.

Принцип на Дирихле

Нека Ω е област в $\mathbb{R}^n$. Въпреки че пространството $D'(\Omega)$ на разпределенията в Ω притежава много забележителни свойства /пълнота относно слабата сходимост, неограничена диференцируемост на неговите елементи/, то не е приспособено за изследване на граничните задачи даже за най-простите частни диференциални уравнения

/например за оператора на Лаплас/, защото, както се убедихме в 3.8, стр. 359, оставяйки в неговите рамки, не можем да говорим за рестрикция на елементите му върху множества с по-малка размерност и в частност за гранични стойности. Естествено стигаме до мисълта да разглеждаме различни подпространства на $D'(\Omega)$, тясно свързани с естеството на задачите, които ни интересуват. Хвърляйки поглед назад, не е трудно да забележим, че този подход не отразява историческото развитие. Най-важните функционални пространства са били въведени и изследвани дълго преди теорията на разпределенията да бъде създадена. Строго погледнато, тя и сега не е безусловно необходима за тяхното изследване, макар че ни дава по-ясна перспектива и в редица случаи води до целта по най-краткия път.

В тези уводни страници ще демонстрираме ползата от най-старите и най-добре изучени от Соболевите пространства $H^1(\Omega)$ и $H_0^1(\Omega)$ при изследването на задачата на Дирихле за уравнението на Лаплас¹.

За да не се повтаряме впоследствие, ще дадем две дефиниции в цялата им общност.

Д е ф и н и ц и я 2.1. Нека $p \geq 1$ и Ω е област в $\mathbb{R}^n$. Линейното подпространство на $L^p(\Omega)$, което се състои от функциите, чиито производни (в смисъл на $D'(\Omega)$) от ред $\leq m$ се съдържат в $L^p(\Omega)$, ще означаваме с $H^{m,p}(\Omega)$.

Т е о р е м а 2.1. Нормата

$$1/ \quad \|u\|_{m,p} = \left(\int_{\Omega} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u|^p \right) dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

превръща $H^{m,p}(\Omega)$ в Банахово пространство. В най-важния случай $p=2$ пространствата $H^{m,2}(\Omega)$ са Хилбертови със скалярно произведение

¹ Фактически те са били дефинирани и изследвани преди Соболев (вж. [48] или увода на [49]).

$$12/ \quad (u, v)_m = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha u \overline{D^\alpha v} dx$$

и се означават с $H^m(\Omega)$.

Д о к а з а т е л с т в о . Нека $\{u_\nu\} \subset H^{m,p}(\Omega)$ е фундаментална редица относно нормата $1/$ и $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| \leq m$ е мултииндекс. Понеже

$$13/ \quad \|D^\alpha u_\nu - D^\alpha u_\mu\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u_\nu - u_\mu\|_{m,p}$$

и пространството L^p е пълно, веднага заключаваме, че $\lim_{\nu \rightarrow \infty} D^\alpha u_\nu$ съществува в $L^p(\Omega)$. Да означим тази граница

с u_α , ако $\alpha \neq 0$ и с u , ако $\alpha = 0$. Веднага се вижда, че $u_\alpha = D^\alpha u$ в $D'(\Omega)$. Наистина, нека $\varphi \in D(\Omega)$ е произволно. Очевидно имаме $\lim_{\nu \rightarrow \infty} (D^\alpha u_\nu, \varphi) = (u_\alpha, \varphi)$,

защото сходимостта в $L^p(\Omega)$ е по-силна от тази в $D'(\Omega)$. От друга страна, прилагайки дефиницията на диференцирането в $D'(\Omega)$ непосредствено получаваме

$$(D^\alpha u_\nu, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (u_\nu, D^\alpha \varphi) \rightarrow (-1)^{|\alpha|} (u, D^\alpha \varphi) = (D^\alpha u, \varphi),$$

с което равенството $u_\alpha = D^\alpha u$ е установено.

И така, докажахме, че производните на u са функции от $L^p(\Omega)$, т.е. че $u \in H^{m,p}(\Omega)$.

Понеже за всяко α , $|\alpha| \leq m$ имаме $\|D^\alpha u_\nu - D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$,

очевидно $\|u_\nu - u\|_{m,p} \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$ и теоремата е доказана.

Д е ф и н и ц и я 2.2. Затворената обвивка на $C_0^\infty(\Omega)$

спрямо нормата $1/$ се означава с $H_0^{m,p}(\Omega)$.

Веднага се вижда, че $H_o^{m,p}(\Omega)$ е затворено подпространство на $H^{m,p}(\Omega)$ и следователно също е Банахово /Хилбертово/ пространство. За всички "нормални" области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, пространствата $H^{m,p}(\Omega)$ и $H_o^{m,p}(\Omega)$ са различни. За простота ще установим този факт само за ограничени области и то в случая $p = 2$. Следното елементарно неравенство решава въпроса.

Л е м а 2.1. (Неравенство на Фридрихс.) Нека Ω е ограничена област в $\mathbb{R}^n$ и $u \in H_o^m(\Omega)$. В такъв случай имаме

$$/4/ \quad \|u\|_{m-1}^2 \leq C(\Omega) \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^2 dx.$$

(За краткост вместо $\|u\|_{k,2}$ ще пишем $\|u\|_k$.)

Д о к а з а т е л с т в о. Нека Q е достатъчно голям куб с ръбове, успоредни на координатните оси, който съдържа Ω и $x_o = (x_{o1}, \dots, x_{on})$ е онзи връх на Q , който има най-малки координати (т.е. $x_{oj} = \min_Q x_j$). Да положим $x = (x', x_n)$,

$x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$. Нека най-напред $\varphi \in C_o^\infty(\Omega)$.
Имаме

$$\varphi(x) = \varphi(x) - \varphi(x', x_{on}) = \int_{x_{on}}^{x_n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x', t) dt,$$

откъдето следват и неравенствата

$$\begin{aligned} |\varphi(x)|^2 &\leq \left(\int_{x_{on}}^{x_n} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x', t) \right| dt \right)^2 \\ &\leq (x_n - x_{on}) \int_{x_{on}}^{x_n} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x', t) \right|^2 dt \end{aligned}$$

$$\leq d \int_{x_{on}}^{x_n} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x', t) \right|^2 dt,$$

където с d сме означили диаметъра на Ω . Като интегрираме по Q , получаваме оценката

$$\int_Q |\varphi(x)|^2 dx \leq d^2 \int_Q \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x) \right|^2 dx,$$

т.е.

$$\int_{\Omega} |\varphi(x)|^2 dx \leq d^2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x) \right|^2 dx,$$

защото носителът на φ се съдържа в Ω . Като приложим няколко пъти този резултат, намираме

$$\|\varphi\|_{m-1}^2 \leq C(\Omega) \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} |D^\alpha \varphi|^2 dx,$$

откъдето /4/ следва с граничен преход, защото функциите $\varphi \in C_o^\infty(\Omega)$ са навсякъде гъсто в $H_o^m(\Omega)$.

С това лемата е доказана.

С л е д с т в и е. Ако Ω е ограничена, пространствата $H_o^m(\Omega)$ и $H^m(\Omega)$ са различни.

Наистина, функцията $u = 1$ очевидно принадлежи на $H^m(\Omega)$, но, както показва неравенството на Фридрихс, не принадлежи на $H_o^m(\Omega)$. Не е трудно да се предвиди, че $H_o^m(\Omega)$ се състои от функции, които в някакъв обобщен смисъл се анулират върху границата на Ω . За да направим това твърдение по-приемливо, ще формулираме една теорема в това направление.

Д е ф и н и ц и я 2.3. Нека m е естествено число и Ω е ограничена област в $\mathbb{R}^n$ с граница Γ . Ще казваме, че Ω е от класа C^m , ако всяка точка $x_o \in \Gamma$ притежава n -мерна окол-

ност α_{x_0} такава, че $\Gamma \cap \alpha_{x_0}$ се задава с уравнение от вида $\phi(x) = 0$, където $\phi \in C^m(\alpha_{x_0})$ и $\text{grad } \phi \neq 0$ в α_{x_0} .

Сега вече можем да формулираме

Т е о р е м а 2.2. Нека $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ е ограничена област от класа C^m и $u \in H^m(\Omega) \cap C^m(\Omega)$. В такъв случай

$u \in H_0^m(\Omega)$ тогава и само тогава, когато $\partial^\alpha u|_\Gamma = 0$ за

$$|\alpha| \leq m-1.$$

Читателят сигурно е обърнал внимание на обстоятелството, че пространствата $H^{m,p}(\Omega)$ и $H_0^{m,p}(\Omega)$ бяха дефинирани по различен начин. Оказва се обаче, че и $H^{m,p}(\Omega)$ е затворена обвивка спрямо нормата $\| \cdot \|_{m,p}$ на подходяща класа от гладки функции.

Т е о р е м а 2.3 (Майерс и Серин). Нека $C^{m,p}(\Omega)$ е линейното подпространство на $C^m(\Omega)$, което се състои от функциите $\varphi \in C^m(\Omega)$, за които

$$1/ \quad \| \varphi \|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

В такъв случай затворената обвивка на $C^{m,p}(\Omega)$ относно нормата $\| \cdot \|_{m,p}$ съпада с $H^{m,p}(\Omega)$.

При едно малко ограничение е в сила още по-силен резултат.

Д е ф и н и ц и я 2.4. Нека $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ е ограничена област с граница Γ .

Казваме, че Ω има свойството на отсечката, ако всяка точка $x_0 \in \Gamma$ притежава отворена околност α_{x_0} за която съществува вектор $z_0 \neq 0$ такъв, че от $x_0 \in \alpha_{x_0} \cap \Omega$ следва включването $x_0 + tz_0 \in \Omega$ за $0 < t < 1$.

Грубо казано, свойството на отсечката притежават областите, които "лежат от една страна" на своята граница.

Лесно се вижда, че всяка област от класа C^1 има свойството на отсечката.

Т е о р е м а 2.4. Нека Ω е ограничена област със свойството на отсечката, а Ω' е по-голяма област, която съдържа $\overline{\Omega}$. Да означим за момент с $C_0^\infty(\Omega')|_{\overline{\Omega}}$ линейното пространство, образувано от рестрикциите на функциите от $C_0^\infty(\Omega')$ в $\overline{\Omega}$. Тогава затворената обвивка на $C_0^\infty(\Omega')|_{\overline{\Omega}}$, спрямо $\| \cdot \|_{m,p}$ съвпада с $H^{m,p}(\Omega)$.

Със свойството на отсечката е свързан още един класически резултат.

Т е о р е м а 2.5 (Лема на Релих). Нека $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ е ограничена област със свойството на отсечката, а m е естествено число. Тогава естественото вложение $H^m(\Omega) \rightarrow H^{m-1}(\Omega)$ е компактно. С други думи, от произволна безкрайна редица $\{u_\nu\} \subset H^m(\Omega)$, за която $\|u_\nu\|_m \leq A = \text{const}$, $\nu = 1, 2, 3, \dots$, може да се избере подредица $\{u_{\nu_k}\}$, сходяща в $H^{m-1}(\Omega)$.

Теорема 2.2 и 2.3 в пълния им обем и теорема 2.4 и 2.5 в частния случай, когато Ω е от класа C^m , ще бъдат доказани в точка 2.6 на този параграф. Пълните доказателства на теорема 2.4 и 2.5 могат да се намерят съответно в [50] и [51].

Сега вече можем да опишем една от възможните постановки на обобщената задача на Дирихле.

Д е ф и н и ц и я 2.4. Нека $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ е ограничена област с граница Γ и $g \in H^1(\Omega)$. Казваме, че функцията $u \in H^1(\Omega)$ е обобщено решение на задачата на Дирихле

$$1/ \quad \Delta u = f, \quad f \in L^2(\Omega), \quad u|_\Gamma = g, \quad g \in H^1(\Omega),$$

ако $u - g \in H_0^1(\Omega)$ и за всяко $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ имаме

$$16/ \quad - \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = (f, \varphi).$$

Следващата проста теорема илюстрира лекотата, с която функционалните методи водят до обобщени решения. Обикновено доказателството, че /при съответни предположения/ намереното обобщено решение е гладко, е значително по-трудно.

Т е о р е м а 2.6. Каквато и да бъде ограничената област Ω , обобщената задача /5/ има единствено решение.

Д о к а з а т е л с т в о . Ще започнем с въпроса за единственост. Нека u_1 и u_2 са две решения и $u \stackrel{\text{def}}{=} u_1 - u_2$. Тогава $u \in H_0^1(\Omega)$ и удовлетворява интегралното тъждество

$$/7/ \quad \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = 0$$

каквато и да бъде функцията $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Понеже $u \in H_0^1(\Omega)$, съществува редица $\{\varphi_j\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ такава, че $u = \lim \varphi_j$ в $H_0^1(\Omega)$ ¹. Като поставим $\varphi = \varphi_j$ в /7/ и извършим граничния преход $j \rightarrow \infty$,

получаваме
$$\sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^2 dx = 0.$$
 Сега вече неравен-

ството на Фридрихс показва, че u се анулира почти навсякъде в Ω , т.е. $u = 0$ като елемент на $H_0^1(\Omega)$. Теоремата за единственост е доказана.

За да докажем твърдението за съществуване, да положим $v = u - g$, където $u \in H^1(\Omega)$. Като заместим в /6/, получаваме

$$/8/ \quad - \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = (f, \varphi) + \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial g}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx.$$

Ясно е, че ако намерим $v \in H_0^1(\Omega)$, удовлетворяващо /8/ за всяко $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, то $u \stackrel{\text{def}}{=} v + g$ ще бъде решение на обобщената задача на Дирихле.

¹ $\varphi_j(x)$ е конюгованото число на $\varphi_j(x)$.

Да разгледаме линейния функционал

$$/9/ \quad F(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} (f, \varphi) + \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial g}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

За краткост да означим с $\|\cdot\|_0$ нормата в $L^2(\Omega)$. В такъв случай от /9/ с помощта на неравенството на Шварц получаваме

$$|F(\varphi)| \leq \|f\|_0 \|\varphi\|_0 + \|\text{grad } g\|_0 \|\text{grad } \varphi\|_0$$

$$/10/ \quad \leq C_1 \|\varphi\|_1 \leq C_2 \|\text{grad } \varphi\|_0$$

като последното неравенство написахме въз основа на неравенството на Фридрихс. В $H_0^1(\Omega)$ да въведем нормата

$$/11/ \quad h \longrightarrow \|\text{grad } h\|_0.$$

Според неравенството на Фридрихс тази норма е еквивалентна с изходната. Хвърляйки поглед към /10/, забелязваме, че то ни позволява да продължим F до непрекъснат функционал в цялото пространство $H_0^1(\Omega)$, в което разглеждаме нормата /11/. Сега вече теоремата на Рис от 3.6, стр.87 ни позволява да заключим, че F се записва като скалярно произведение, т.е. съществува елемент $v \in H_0^1(\Omega)$ такъв, че

$$F(\varphi) = (\varphi, v)_{H_0^1} = \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx.$$

/В случая, разбира се, имаме пред вид скалярното произведение, което поражда нормата /11/. Сега е ясно, че елементът $v \in H_0^1(\Omega)$ удовлетворява /8/, т.е. $u \stackrel{\text{def}}{=} v + g$ е търсеното решение на /5/.

При допълнителни предположения за f , g и Ω може да се установи, че намереното решение е класическо.

З а б е л е ж к а 1. В случая $f = 0$ /6/ взема вида

$$\sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = 0, \text{ т.е. } \int_{\Omega} u \Delta \varphi dx = 0,$$

което показва, че u удовлетворява уравнението $\Delta u = 0$ и в $D'(\Omega)$.

/В същност в теорема 2.6 е установен по-силен резултат./ Понеже операторът Δ е хипоелиптически, това означава, че u съвпада в $D'(\Omega)$ с някаква функция $u_0 \in C^\infty(\Omega)$ с други думи, u и u_0 се различават най-много върху множество с мярка нула. Това твърдение (при предположение, че $u \in L^2(\Omega)$) е било установено за пръв път от Херман Вайл през 1940 г. и е известно като "лема на Вайл". Ролята на този резултат в метода на "ортогоналната проекция", с който Вайл придава окончателен вид на една идея, използвана още от Гаус и Риман, ще стане ясна от следващите страници. Други доказателства на "лемата на Вайл" са скицирани в упражненията.

З а б е л е ж к а 2. Постановката на обобщената задача на Дирихле за общото елиптично уравнение

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) u_{x_i} + b(x) u = f(x),$$

където

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \mu |\xi|^2, \quad \mu = \text{const} > 0$$

е аналогична. Използвайки лемата на Лакс-Милграм /3.6, стр. 89/ вместо теоремата на Рис, при подходящи предположения за коефициентите леко се установява алтернативата на Фредхолм за това уравнение. Впрочем методът е приложим и за т.н. силно елиптични уравнения от ред $2m$, $m \geq 1$ ([52], [53]).

Нашата следваща цел е да изследваме още веднъж обобщената задача /5/ този път само в случая $f = 0$, като докажем класичес-

кия "принцип на Дирихле" в една от възможните му формулировки.

Макар че резултатът, който ще получим по този начин, е по-слаб от теорема 2.6, самото доказателство е интересно, защото функционира в значително по-общ контекст и дава представа за вариационните методи в теорията на частните диференциални уравнения.

Ще започнем с две лема.

Л е м а 2.2. Нека $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ е произволна област и u разпределение от $H^1(\Omega)$ такова, че $\frac{\partial u}{\partial x_j} = 0$, $j = 1, 2, \dots, n$. Тогавата $u = \text{const}$.

Д о к а з а т е л с т в о. За произволно $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ имаме $\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi\right) = 0$, $j = 1, 2, \dots, n$ и в частност

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \text{ защото и } \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \in C_0^\infty(\Omega). \text{ Тъй като } \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^2(\Omega), \text{ имаме}$$

$$0 = \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

откъдето чрез събиране получаваме

$$0 = \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = - \int_{\Omega} u \Delta \varphi dx.$$

(Последното равенство следва директно от дефиницията на диференцирането в $D'(\Omega)$.) Оказа се, че $\Delta u = 0$ в $D'(\Omega)$ и лемата на Вайл показва, че $u \in C^\infty(\Omega)$. (Вж. заб. 1 след

теорема 2.6.) Следователно $\frac{\partial u}{\partial x_j}$, $j = 1, 2, \dots, n$, съпадат почти навсякъде с класическите производни на u и равенството $u = \text{const}$ следва по обичайния начин от тъждествата $\frac{\partial u}{\partial x_j} = 0$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Друго доказателство е скицирано в упражненията.

Л е м а 2.3 (обобщено неравенство на Поанкаре). Нека $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ е ограничена област със свойството на отсечката. В такъв случай неравенството

$$\|u\|_1^2 \leq C(\Omega) \left\{ \int_{\Omega} |\text{grad } u|^2 dx + \left| \int_{\Omega} u(x) dx \right|^2 \right\}$$

е в сила за произволна функция $u \in H^1(\Omega)$.

Д о к а з а т е л с т в о. Да допуснем противното - че както и да избираме константата C , неравенството няма да бъде вярно. В такъв случай за всяко ν , $\nu = 1, 2, 3, \dots$ намираме по една функция $u_\nu \in H^1(\Omega)$, за която

$$/12/ \quad \|u_\nu\|_1^2 \geq \nu \left\{ \int_{\Omega} |\text{grad } u_\nu|^2 dx + \left| \int_{\Omega} u_\nu(x) dx \right|^2 \right\}.$$

Понеже /12/ е хомогенно, без ограничение на общността можем да предположим, че $\|u_\nu\|_1 = 1$. Сега вече от /12/ получаваме

$$\sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_\nu}{\partial x_j} \right|^2 dx \leq \frac{1}{\nu},$$

откъдето следва, че $\left\| \frac{\partial u_\nu}{\partial x_j} \right\|_0 \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$

($j = 1, 2, \dots, n$). Използвайки лемата на Релих и обстоятелството, че $\|u_\nu\|_1 = 1$, $\nu = 1, 2, 3, \dots$, можем да изберем под-

редица $\{u_{\nu_k}\}$, която е сходяща в $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$. (Това е единственото място, в което се използва, че Ω има свойството на отсечката.) Да положим $u = \lim_{L^2(\Omega)} u_{\nu_k}$. Не е трудно да се

види, че в същност $u = \lim_{H^1(\Omega)} u_{\nu_k}$. Наистина, нека $\varepsilon > 0$ е произ-

волно и $N = N(\varepsilon)$ е толкова голямо, че да имаме

$$\|u_{\nu_k} - u_{\nu_p}\|_0 < \varepsilon, \quad \left\| \frac{\partial u_{\nu_k}}{\partial x_j} \right\|_0 < \varepsilon, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

за $\nu_k > N(\varepsilon)$, $\nu_p > N(\varepsilon)$. Следователно за такива индекси получаваме

$$\begin{aligned} \|u_{\nu_k} - u_{\nu_p}\|_1 &\leq \|u_{\nu_k} - u_{\nu_p}\|_0 + \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial u_{\nu_k}}{\partial x_j} \right\|_0 + \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial u_{\nu_p}}{\partial x_j} \right\|_0 \\ &\leq \varepsilon + n\varepsilon + n\varepsilon = (2n+1)\varepsilon, \end{aligned}$$

с което сходимостта на редицата $\{u_{\nu_k}\}$ в $H^1(\Omega)$ е установена. Да положим $v = \lim_{H^1} u_{\nu_k}$. В такъв случай имаме

$$u = \lim_{L^2(\Omega)} u_{\nu_k}, \quad v = \lim_{L^2(\Omega)} u_{\nu_k},$$

понеже сходимостта в $H^1(\Omega)$ е по-силна от тази в $L^2(\Omega)$. Следователно $u = v$ в $L^2(\Omega)$, т.е. почти навсякъде в Ω . Излезе, че u и v съпадат в $D(\Omega)$ и следователно и в $H^1(\Omega)$. Сега вече сме близо до целта.

Тъй като по-горе установихме, че $\left\{ \frac{\partial u_\nu}{\partial x_j} \right\} \rightarrow 0$ в $L^2(\Omega)$

($j = 1, 2, 3, \dots, n$), лема 2.2 показва, че функцията $u = \lim_{H^1(\Omega)} u_{\nu_k} = c_0 = \text{const}$. Понеже очевидно

$$\int_{\Omega} u_{\nu_k}(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} u dx = c_0 \text{mes}(\Omega),$$

от /12/ веднага следва, че $c_0 = 0$. Това обаче е невъзможно, защото имаме $\|u\|_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|_1 = 1$.

Полученото противоречие доказва лемата. За формулировката на класическото неравенство на Поанкаре вижте упражненията.

Л е м а 2.4. Нека $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ е ограничена област със свойството на отсечката и нека $H^1(\Omega)/C$ е линейното пространство, което се получава от $H^1(\Omega)$ след факторизиране по неговото линейно подпространство, образувано от всевъзможните константи. В такъв случай $H^1(\Omega)/C$ е Хилбертово пространство с норма

$$/13/ \quad \|\tilde{u}\|_{1,C} = \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^2 dx, \quad u \in \tilde{u},$$

където u е произволна функция от класа $\tilde{u}$.

Д о к а з а т е л с т в о. Най-напред ще отбележим, че дефиницията на нормата в H^1/C е коректна, защото от $u_1 \in \tilde{u}, u_2 \in \tilde{u}$ следва $u_1 - u_2 = \text{const.}$

За да установим, че от $\|\tilde{u}\|_{1,C} = 0$ следва $\tilde{u} = 0$ да вземем произволна функция $u \in H^1(\Omega) \cap \tilde{u}$. В такъв случай /13/ ни дава $\frac{\partial u}{\partial x_j} = 0, j = 1, 2, \dots, n$ и лема 2.2 ни позволява

да заключим, че $u = \text{const.}$ Ето защо $\tilde{u}$ е нулевият елемент в H^1/C . Остава да докажем, че H^1/C е пълно. Нека $\{\tilde{u}_\nu\} \subset H^1/C$

е фундаментална редица относно нормата /13/ и нека $u_\nu \in H^1(\Omega) \cap \tilde{u}_\nu$ е така избрано, че да имаме

$$\int_{\Omega} u_\nu dx = 0, \quad \nu = 1, 2, 3, \dots$$

Прилагайки обобщеното неравенство на Поанкаре, получаваме

$$\|u_\nu\|_1^2 \leq C(\Omega) \int_{\Omega} |\text{grad } u_\nu|^2 dx,$$

което заедно с /13/ ни дава оценката

$$\|u_\nu - u_\mu\|_1^2 \leq C(\Omega) \|\tilde{u}_\nu - \tilde{u}_\mu\|_{1,C}^2$$

И така, установихме, че редицата $\{u_\nu\}$ е фундаментална в $H^1(\Omega)$. Понеже $H^1(\Omega)$ е пълно, тя е сходяща. Да означим с u нейната граница, а с $\tilde{u}$ елемента от H^1/C , който съдържа u . Очевидно имаме

$$\|\tilde{u}_\nu - \tilde{u}\|_{1,C}^2 = \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_\nu}{\partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^2 dx \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0$$

и пълнотата на H^1/C е установена.

Сега вече имаме всичко необходимо, за да установим един знаменит резултат. Става дума за това, което обикновено се нарича метод на ортогоналната проекция.

Т е о р е м а 2.7 (Х.Вайл, 1940). Нека $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ е ограничена област със свойството на отсечката. В такъв случай ортогоналното допълнение на $H_0^1(\Omega)$ в $H^1(\Omega)/C$ се състои от хармонични функции.

Теоремата показва, че ортогоналното проектиране върху $H_0^1(\Omega)$ естествено води до хармонични функции - факт, който по същество е бил известен още на Риман. Този резултат ни позволява да конструираме хармонични функции в по-обща ситуация - например върху Риманови повърхнини.

Д о к а з а т е л с т в о на т е о р е м а т а. Можем да считаме, че $H_0^1(\Omega)$ е част от $H^1(\Omega)/C$, защото от

$$u_i \in \tilde{u} \cap H_0^1(\Omega), \quad i = 1, 2, \quad \text{където } \tilde{u} \in H^1/C,$$

очевидно следва $u_1 = u_2$, а от друга страна, според неравенството на Фридрихс оригиналната норма в $H_0^1(\Omega)$ и нормата, индуцирана от /13/, са еквивалентни.

И така, нека $\tilde{u}$ е произволен елемент от H^1/C . Според стр. 84

$$/14/ \quad \tilde{u} = h + \tilde{v},$$

където $h \in H_0^1(\Omega)$, а $\tilde{v} \in H_0^1(\Omega)^\perp$. (Обърнете внимание на обстоятелството, че h е еднозначно определена, докато $\tilde{v}$ е определена само като елемент на H^1/C , т.е. с точност до константа.) Понеже $\tilde{v} \perp H_0^1(\Omega)$, тъждеството

$$/15/ \quad \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x_j} dx = 0, \quad v \in \tilde{v}$$

е в сила за всяко $w \in H_0^1(\Omega)$. В частност то е в сила и за $w = \bar{\varphi}$, където φ е произволна функция от $C_0^\infty(\Omega)$. Като поставим $w = \bar{\varphi}$ в /15/ и се възползваме от дефиницията на диференцирането в $D'(\Omega)$, стигаме до тъждеството

$$/16/ \quad \int_{\Omega} v \Delta \varphi dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

което заедно с лемата на Вайл ни позволява да заключим, че v след евентуална поправка върху множество с мярка нула се превръща в гладка хармонична функция от $H^1(\Omega)$. Вярно е и обратното: всяка хармонична функция от $H^1(\Omega)$ е ортогонална на $H_0^1(\Omega)$. Наистина от /16/ следва /15/ за всяко $w \in C_0^\infty(\Omega)$, а след граничен преход и за всяко $w \in H_0^1(\Omega)$.

С това доказателството е завършено.

С л е д с т в и е (Принцип на Дирихле). Нека $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ е ограничена област със свойството на отсечката, а f е дадена функция от $H^1(\Omega)$. Следните две задачи са еквивалентни:

а/ $v \in H^1(\Omega)$ и е решение на обобщената задача на Дирихле

$$\Delta v = 0 \text{ в } \Omega, \quad v - f \in H_0^1(\Omega);$$

$$б/ \quad v - f \in H_0^1(\Omega), \quad D(v) = \inf_h D(h), \quad h - f \in H_0^1(\Omega).$$

С други думи, v е онзи елемент от $H^1(\Omega)$, който минимизира интеграла на Дирихле

$$D(h) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial h}{\partial x_j} \right|^2 dx$$

в множеството на функциите от $H^1(\Omega)$, удовлетворяващи граничното условие $h - f \in H_0^1(\Omega)$.

Д о к а з а т е л с т в о. От теорема 2.7 веднага следва, че както зад. а/, така и зад. б/ има решение. Наистина, нека $\tilde{f} \in H^1/C$

е класът, който съдържа f . Теорема 2.7 ни дава

$$/17a/ \quad \tilde{f} = u + \tilde{v},$$

където $u \in H_0^1(\Omega)$, $\tilde{v} \in H_0^1(\Omega)^\perp$. Нека $v \in \tilde{v}$ е онзи единствен елемент от $H^1(\Omega)$, за който е в сила

$$/17б/ \quad f = u + v.$$

В такъв случай $v - f = -u \in H_0^1(\Omega)$, а от друга страна, според теорема 2.7 v е хармонична, т.е. тя удовлетворява а/. По-нататък лемата за ортогоналната проекция от стр. 84 показва, че

$$\|\tilde{v}\|_{1,C} = \inf_{w \in H_0^1(\Omega)} \|\tilde{f} - w\|_{1,C},$$

т.е.

$$/18/ \quad D(v) = \inf_{w \in H_0^1(\Omega)} D(f - w) = \inf_h D(h), \quad h - f \in H_0^1(\Omega).$$

(Последното равенство получихме чрез полагането $h = f - w$.) Излезе, че v е решение и на б/.

Остава ни да установим, че а/ и б/ са равносилни. Това обаче веднага следва от теорема 2.7 и минималното свойство на ортогоналната проекция /стр.84/.

Коментар. Историята на принципа на Дирихле е добре известна и не е лишена от трагизъм. Той е бил използван от Гаус и Риман, опровергаван от Вайерштрас и Адамар и в края на краищата реабилитиран от Хилберт. Тази история показва колко сложен понякога е пътят, който трябва да се извърви, докато една сравнително проста математическа истина излезе на бял свят.

В доказателствата форма принципът на Дирихле не би задоволил аналитиците от миналото, които са търсили истински, а не обобщени решения. Препращайки читателите, които се интересуват от доказателство, оставащо в класическите рамки, към някои от великолепните книги [48], [54], [55] или [56], ще отбележим, че при такъв подход темата за ортогоналната проекция е неизползваема, защото съответните функционални пространства не са пълни. От друга страна, съвременните методи ни позволяват да заключим, че при подходящи предположения обобщеното решение, което ни дава принципът на Дирихле в установената форма е класическо ([53] или десета глава на [52]).

У п р а ж н е н и е 5

1. Докажете, че за всяка ограничена област $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и за всяко $p \geq 1$ пространството $H_0^{m,p}(\Omega)$ е истинско подпространство на $H^{m,p}(\Omega)$.

У п ъ т в а н е. Обобщете неравенството на Фридрихс.

2. Нека $Q \subset \mathbb{R}^n$ е куб с ребра, успоредни на координатните оси, с дължина a и функцията $u \in C^1(\bar{Q})$ е реална. Докажете следното класическо неравенство на Поанкаре:

$$\|u\|_{L^2(Q)}^2 \leq \frac{1}{a^n} \left(\int_Q u(x) dx \right)^2 + \frac{na^2}{2} \int_Q \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 dx.$$

Формулирайте и докажете съответното неравенство и за комплексно u .

У п ъ т в а н е. Да означим $\min_{x \in \bar{Q}} x_j$ с x_{0j} . Нека

$x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ са произволни точки от $\bar{Q}$. Изхождайки от тъждеството

$$u(x) - u(y) = \int_{y_1}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, x_3, \dots, x_n) dt + \int_{y_2}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial x_2}(y_1, t, x_3, \dots, x_n) dt + \dots + \int_{y_n}^{x_n} \frac{\partial u}{\partial x_n}(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, t) dt,$$

получете неравенството

$$(u(x) - u(y))^2 \leq na \int_{x_{01}}^{x_{01}+a} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_n) \right)^2 dt + \dots + na \int_{x_{0n}}^{x_{0n}+a} \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}(y_1, \dots, y_{n-1}, t) \right)^2 dt.$$

После разкрийте скобите и интегрирайте по $Q \times Q$.

3. Нека $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ е ограничена област и $u \in D'(\Omega)$ е решение на $\Delta = 0$. Докажете, че u съвпада в $D'(\Omega)$ с гладка хармонична функция, като реализирате следния план:

а/ Докажете, че ако $v \in C^2(\Omega)$ е хармонична, а $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ е камбановидната функция от стр.174, функцията

$$v_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{|x-y| < \varepsilon} v(y) \chi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy$$

съвпада с v в отвореното множество

$$\Omega_\varepsilon = \{x : x \in \Omega, \rho(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}.$$

б/ Проверете, че ако $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ е тъждествено равна на единица в някаква околност на $\overline{\Omega}_\varepsilon$, а $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ има носител в кълбото $|x| < \varepsilon$, то функцията

$$u(x) \stackrel{\text{def}}{=} (\psi u, \varphi(x-y)) = (\psi u * \varphi)(x)$$

е хармонична в $\Omega_{2\varepsilon}$.

в/ С помощта на равенствата

$$u(x) = (u * \chi_\varepsilon)(x) = (u \psi * \varphi) * \chi_\varepsilon = (u \psi * \chi_\varepsilon) * \varphi,$$

които според а/ и б/ са в сила в $\Omega_{3\varepsilon}$, заключете, че

$$u \psi = (u \psi) * \chi_\varepsilon. \text{ Разбира се, тук } \chi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

У п ъ т в а н е к ъ м в/. Използвайте, че φ е подчинена на единственото условие $\text{supp } \varphi \subset \{|x| < \varepsilon\}$ и направете трансформация на Фурие или пък вземете пред вид теорема 2.3, стр. 192.

В следващите задачи по възможност ще използваме същите означения, без да уговаряме това изрично.

4. Докажете, че ако функцията $u \in L^2(\Omega)$, разглеждана като елемент на $D'(\Omega)$, удовлетворява уравнението $\Delta u = 0$, то тя съвпада почти навсякъде в Ω с гладка хармонична функция, като установите, че

$$u_\varepsilon(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{|x-y| \leq \varepsilon} u(y) \chi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy$$

е хармонична в Ω_ε и при $\varepsilon \rightarrow 0$ редицата $\{u_\varepsilon\}$ е равномерно сходяща върху всеки компактен $K \subset \Omega$.

У п ъ т в а н е. Най-напред установете, че $u_\varepsilon \xrightarrow{L^2(K)} u$.

5. Докажете, че от $u \in D'(\Omega)$ и $\frac{\partial u}{\partial x_j} = 0, j = 1, 2, \dots, n$

следва $u = \text{const}$ по следния начин: най-напред проверете, че ако $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ е тъждествено равна на единица в някаква окол-

ност на $\overline{\Omega}_\varepsilon$, то функцията $u_\varepsilon(x) \stackrel{\text{def}}{=} ((\psi u) * \chi_\varepsilon)(x)$ е константа в Ω_ε . В такъв случай за $\varphi_k \in C_0^\infty(\Omega_\varepsilon), k = 1, 2$, ще получите

$$\begin{aligned} ((\psi u) * \chi_\varepsilon, \varphi_k) &= c_\varepsilon(1, \varphi_k), \quad c_\varepsilon = u_\varepsilon|_{\Omega_\varepsilon} = \text{const} \\ \text{т.е.} \quad ((\psi u) * \chi_\varepsilon, \varphi_1) &= ((\psi u) * \chi_\varepsilon, \varphi_2) \end{aligned}$$

при единственото условие $(1, \varphi_1) = (1, \varphi_2)$.

От това равенство с граничен преход получите $(\psi u, \varphi_1) = (\psi u, \varphi_2)$. Накрая вземете една фиксирана функция $\varphi_0 \in C_0^\infty(\Omega_\varepsilon)$, за която $(1, \varphi_0) = 1$ и произволна функция $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\varepsilon)$. Понеже функциите φ и $c\varphi$, където $c = (1, \varphi)$ имат равни интеграли, ще получите

$$(\psi u, \varphi) = (\psi u, c\varphi_0) = c(\psi u, \varphi_0) = (A, \varphi),$$

където с A сме означили константата $(\psi u, \varphi_0)$.

6. Едно разпределение $u \in D'(\Omega)$ се нарича субхармонично, ако за всяко $\varphi \in C_0^\infty(\Omega), \varphi \geq 0$ имаме $(u, \Delta \varphi) \geq 0$.

Докажете, че ако функцията $u \in C(\Omega)$ е субхармонична като разпределение, тя е субхармонична и в обичайния смисъл.

У п ъ т в а н е. Функцията

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{|x-y| \leq \varepsilon} u(y) \chi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy$$

е субхармонична в $D'(\Omega_\varepsilon)$. Понеже тя е гладка, веднага следва, че за нея имаме $\Delta u_\varepsilon \geq 0$, т.е. тя е субхармонична в обичайния смисъл. За да стигнете до същото заключение и за u , извършете граничния преход $\varepsilon \rightarrow 0$ в някое от неравенствата, които характеризират субхармоничните функции и не съдържат производни.

7. Нека $\{u_j\}$ е редица от гладки хармонични функции, дефинирани в Ω , която е сходяща в $D'(\Omega)$. Докажете, че сходимостта е равномерна върху компактните подмножества на Ω . Следователно границата на $\{u_j\}$ ще бъде хармонична функция.

У п ъ т в а н е. Вземете произволен компакт $K \subset \Omega$ и фиксирайте $\varepsilon > 0$ по такъв начин, че $K \subset \Omega_\varepsilon$. След това вземете пред вид, че в Ω_ε имаме

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{|x-y| < \varepsilon} u(y) \chi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right), \quad x \in K$$

и че множеството от функции

$$y \longrightarrow \frac{1}{\varepsilon^n} \chi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right), \quad x \in K$$

е ограничено в $D(\Omega)$ (ε е фиксирано!).

Разбира се, хармоничността на границата следва и от лемата на Вайл, но твърдението в задачата е по-силно.

2.2. Основни свойства на пространствата $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$

Както показва опитът, целесъобразно е систематичното изследване на пространствата $\mathcal{H}^m(\Omega)$, дефинирани в 2.1, да започне с детайлното разглеждане на най-простия случай $\Omega = \mathbb{R}^n$, когато разполагаме с трансформацията на Фурие.

Дефиниция 2.5. Нека s е произволно реално число. Подпространството на $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, състоящо се от разпределенията, чиято Фуриерова трансформация се съдържа в $L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ и за които е в сила неравенството

$$/19/ \quad \|u\|_s^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty$$

се означава с $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$.

Както ще се убедим след малко, скаларното произведение

$$/20/ \quad (u, v)_s = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s \hat{u}(\xi) \overline{\hat{v}(\xi)} d\xi$$

превръща $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$ в Хилбертово пространство. Преди това обаче ще проверим, че за $s = m$, m -естествено, току-що дефинираното пространство съвпада с $\mathcal{H}^m(\mathbb{R}^n)$, което ни дава дефиниция 2.1. Наистина, нека $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ е такава, че $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, за $|\alpha| \leq m$. Трябва да проверим, че нормата

$$/21/ \quad q(u) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

образувана съгласно дефиниция 2.1, е еквивалентна с нормата /19/ в случая $s = m$. За да се убедим в това, достатъчно е да си спомним, че $\widehat{D^\alpha u} = \xi^\alpha \hat{u}$ и да вземем пред вид равенството на Парсевал. Получаваме

$$\begin{aligned} q^2(u) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} |\widehat{D^\alpha u}|^2 \right) d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} |\xi^\alpha|^2 \right) |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi, \end{aligned}$$

откъдето с помощта на очевидните неравенства

$$C_1 (1+|\xi|^2)^m \leq \sum_{|\alpha| \leq m} |\xi^\alpha|^2 \leq C_2 (1+|\xi|^2)^m$$

получаваме

$$C_1 \|u\|_m^2 \leq q^2(u) \leq C_2 \|u\|_m^2,$$

с което еквивалентността на нормите q и $\|\cdot\|_m$ е установена. Сега вече произходът на теглото $(1+|\xi|^2)^s$ в /19/ е ясен. Говорейки на едро, можем да кажем, че $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$ се състои от оне-

зи разпределения от $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, чиито производни от ред $\leq S$ се съдържат в $L^2(\mathbb{R}^n)$, макар че изобщо S не е естествено число. Трансформацията на Фурие ни позволява без затруднения да работим с произволни реални S - обстоятелство, което е съществено в много приложения. Навярно читателят е забелязал, че $\mathcal{H}^0(\mathbb{R}^n)$ не е нищо друго освен $L^2(\mathbb{R}^n)$ и следователно е пълно пространство. За частие пълнотата е на лице и в общия случай.

Т е о р е м а 2.8. Каквото и да бъде $S \in \mathbb{R}^1$ скаларното произведение /20/ превръща $\mathcal{H}^S(\mathbb{R}^n)$ в Хилбертово пространство.

Доказателството почива на следната очевидна

Л е м а 2.5. Ако X и Y са нормирани пространства и $T: X \longrightarrow Y$ е линеен оператор, който изобразява изометрично X върху Y и X е пълно, то и Y е пълно.

Д о к а з а т е л с т в о. Нека $\{g_\nu\} \subset Y$ е редица на Коши и $f_\nu \stackrel{\text{def}}{=} T^{-1}(g_\nu)$. По дефиниция $\|Tf\|_Y = \|f\|_X$, т.е. от $Tf = 0$ следва $f = 0$ и T се оказва обратим. Очевидно имаме

$$\|g_\nu - g_\mu\|_Y = \|Tf_\nu - Tf_\mu\|_Y = \|f_\nu - f_\mu\|_X \longrightarrow 0.$$

Понеже X е пълно $f_\nu \xrightarrow{X} f$. Да положим $g = Tf$. В такъв случай получаваме

$$\|g_\nu - g\|_Y = \|Tf_\nu - Tf\|_Y = \|f_\nu - f\|_X \longrightarrow 0$$

и пълнотата на Y е установена. Сега теорема 2.8 произтича от факта, че линейният оператор

$$\text{/22/} \quad T_S f = F^{-1} \left((1 + |\xi|^2)^{-\frac{S}{2}} \hat{f} \right)$$

изобразява изометрично $L^2(\mathbb{R}^n)$ върху $\mathcal{H}^S(\mathbb{R}^n)$.

З а б е л е ж к а. Изометрията /22/ показва, че всички пространства $\mathcal{H}^S$ са линейно /и изометрично/ хомеоморфни с $L^2(\mathbb{R}^n)$ и

следователно и помежду си, т.е. те не се различават от топологично гледище. Техните аналитични свойства обаче са различни.

Следващата теорема описва структурата на пространството $\mathcal{H}^{-S}$ в случая, когато S е естествено число.

Т е о р е м а 2.9. Едно разпределение $u \in \mathcal{S}'$ принадлежи на $\mathcal{H}^{-S}$, S - естествено тогава и само тогава, когато има вида

$$\text{/23/} \quad u = \sum_{|\alpha| \leq S} D^\alpha g_\alpha, \quad g_\alpha \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Д о к а з а т е л с т в о. Ако u има вида /23/, неговата принадлежност към $\mathcal{H}^{-S}$ е очевидна. Действуваме с оператора на Фурие. По-интересно е обратното твърдение. Нека $u \in \mathcal{H}^{-S}$. Тогава

$$f \stackrel{\text{def}}{=} (1 + |\xi|^2)^{-\frac{S}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Изхождайки от това равенство, намираме последователно

$$\hat{u} = (1 + |\xi|^2)^{\frac{S}{2}} f = \left(1 + \sum_{j=1}^n |\xi_j|^2 \right)^{\frac{S}{2}} \frac{(1 + |\xi|^2)^{\frac{S}{2}}}{1 + \sum_{j=1}^n |\xi_j|^2} f$$

$$= \left(1 + \sum_{j=1}^n |\xi_j|^2 \right) q = q + \sum_{j=1}^n \xi_j^S \left(\frac{|\xi_j|^S}{\xi_j^S} q \right),$$

където $q \in L^2(\mathbb{R}^n)$, понеже се различава от f с ограничен множител. Да положим

$$g_j = \frac{|\xi_j|^S}{\xi_j^S} q \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad h = F^{-1}(q), \quad h_j = F^{-1}(g_j).$$

Очевидно $h \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $h_j \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Получаваме

$$\hat{u} = \hat{h} + \sum_{j=1}^n \xi_j^s \hat{h}_j = \hat{h} + \sum_{j=1}^n \hat{D}_j^s h_j,$$

т.е.

$$u = h + \sum_{j=1}^n D_j^s h_j$$

и доказателството е завършено.

Т е о р е м а 2.10. Нека $s < t$. В сила са включванията

$$D \subset \mathcal{J} \subset H^t \subset H^s \subset \mathcal{J}'_\beta \subset D'_\beta$$

и всяко от естествените вложения

$$D \longrightarrow \mathcal{J} \longrightarrow H^t \longrightarrow H^s \longrightarrow \mathcal{J}'_\beta \longrightarrow D'_\beta$$

е непрекъснато и има плътен образ в съответното пространство. С други думи, всяко от пространствата $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $H^s(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{J}'_\beta(\mathbb{R}^n)$ е н о р м а л н о /деф.2.10, стр.322/.

Д о к а з а т е л с т в о. Трябва да докажем, че вложенията

$$\begin{aligned} & \alpha/ D \longrightarrow \mathcal{J}; \quad \beta/ \mathcal{J} \longrightarrow H^t; \quad \gamma/ H^t \longrightarrow H^s, \\ & t > s; \quad \Gamma/ H^s \longrightarrow \mathcal{J}'_\beta \text{ и } \Delta/ \mathcal{J}'_\beta \longrightarrow D'_\beta \end{aligned}$$

са непрекъснати и имат плътни образи.

В същност $\alpha/$ е частично установено: в лема 2.2, стр.189, доказахме, че $D(\mathbb{R}^n)$ е навсякъде гъсто в $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$. За да докажем, че $\alpha/$ е непрекъснато, достатъчно е да се убедим, че неговата рестрикция върху $C_0^\infty(K)$, където $K \subset \mathbb{R}^n$ е произволен компактен, е непрекъсната. Понеже $C_0^\infty(K)$ е метризуемо, нашата цел ще бъде постигната, ако докажем, че от $\{\varphi_\nu\} \subset C_0^\infty(K)$,

$$\{\varphi_\nu\} \longrightarrow 0 \text{ в } C_0^\infty(K) \text{ следва, че } \{\varphi_\nu\} \longrightarrow 0 \text{ в } \mathcal{J}(\mathbb{R}^n).$$

Това обаче е очевидно. Наистина, нека

$$\rho(\varphi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ (1+|x|^2)^m |D^\alpha \varphi(x)| \right\}$$

е някоя от полунормите, дефиниращи топологията в $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$. Тъй като за всяко $\nu \text{ supp } \varphi_\nu \subset K$ и редицата $\{D^\alpha \varphi_\nu\}$ равномерно клони към нула в $\mathbb{R}^n$, веднага заключаваме, че $\rho(\varphi_\nu) \rightarrow 0$.

Понеже ρ беше произволна, непрекъснатостта на вложенията $C_0^\infty(K) \longrightarrow \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, а оттам и на $\alpha/$ установена. За да извлечем $\Delta/$ от този резултат, ще си послужим с една лема, която фактически доказвахме и използвахме в много конкретни случаи.

Л е м а 2.6. Нека X и Y са Хаусдорфови ДЛП и $T: X \rightarrow Y$ е линеен и непрекъснат оператор. Тогава и неговият спрегнат ${}^t T: Y^* \rightarrow X^*$, дефиниран чрез равенството

$$\langle x, {}^t T f \rangle_X = \langle T x, f \rangle_Y, \quad f \in Y^*, \quad x \in X$$

/вж.стр.302/ е непрекъснат.

Д о к а з а т е л с т в о. Трябва да докажем, че на всяка околност

$$V = \left\{ g: g \in X^*, \sup_{x \in B} |\langle x, g \rangle| < \varepsilon \right\}$$

на началото в X^*_β (B е ограничено множество в X) отговаря околност U на началото в Y^*_β такава, че от $f \in U$ да следва ${}^t T f \in V$. Понеже T е непрекъснат, множеството $T(B)$ е ограничено в Y /лема 6.1, стр.158/ и ако положим,

$$U \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f: f \in Y^*, \sup_{y \in T(B)} |\langle y, f \rangle| < \varepsilon \right\},$$

веднага стигаме до желаното заключение. С това лемата е доказана. От нея и от $\alpha/$ веднага следва, че и $\Delta/$ е непрекъснато. Плътността

на $\mathcal{F}'$ в D'_β следва веднага от теорема 2.35, стр.254, според която даже $D(\mathbb{R}^n)$ е навсякъде гъсто в $D'_\beta(\mathbb{R}^n)$.

Да докажем б/. За да докажем, че то е непрекъснато, достатъчно е да се убедим, че от $\{\varphi_\nu\} \rightarrow 0$ в $\mathcal{F}$ следва $\{\varphi_\nu\} \rightarrow 0$ в $\mathcal{H}^t$. Понякоже трансформацията на Фурие действа непрекъснато от $\mathcal{F}$ в $\mathcal{F}$ /теорема 3.3, стр.278/, от $\{\varphi_\nu\} \rightarrow 0$ в $\mathcal{F}$ следва, че и $\{\hat{\varphi}_\nu\} \rightarrow 0$ в $\mathcal{F}$. Следователно на всяко $\varepsilon > 0$ можем да съпоставим такова $N(\varepsilon)$, че от $\nu > N(\varepsilon)$ да следва $\rho(\hat{\varphi}_\nu) < \varepsilon$, където

$$\rho(\varphi) = \sup_{\mathbb{R}^n} |(1+|\xi|^2)^{\frac{t+n}{2}} \varphi(\xi)|, \quad \varphi \in \mathcal{F}.$$

За такива ν очевидно имаме

$$\begin{aligned} \|\varphi_\nu\|_t^2 &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1+|\xi|^2)^{t+n} |\hat{\varphi}_\nu(\xi)|^2 d\xi}{(1+|\xi|^2)^n} \\ &\leq \frac{\rho^2(\varphi_\nu)}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^n} \leq C \varepsilon^2, \end{aligned}$$

с което непрекъснатостта на б/ е установена. За да докажем, че $\mathcal{F}$ е навсякъде гъсто в $\mathcal{H}^t$, достатъчно е да забележим, че $\mathcal{F}$ има това свойство в $L^2(\mathbb{R}^n)$ и операторът

$$T_t u \stackrel{\text{def}}{=} F^{-1}((1+|\xi|^2)^{-\frac{t}{2}} \hat{u})$$

изобразява изометрично $L^2(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{H}^t$ и $T_t(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$. (Функцията $(1+|\xi|^2)^{-\frac{t}{2}} \in \mathcal{O}_M$ за всяко t .)

За да установим непрекъснатостта на влагането $\mathcal{H}^t \rightarrow \mathcal{H}^s$, $s < t$, достатъчно е да вземем пред вид, че за всяко $u \in \mathcal{H}^t$ имаме $\|u\|_s \leq \|u\|_t$, т.е. $\mathcal{H}^t \subset \mathcal{H}^s$ и операторът $\mathcal{H}^t \rightarrow \mathcal{H}^s$ е ограничен с норма 1. Плътността на $\mathcal{H}^t$ в $\mathcal{H}^s$ следва от включ-

ването $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}^t \subset \mathcal{H}^s$ и от втората част на б/. Остава да докажем г/. Да вземем произволна редица $\{u_\nu\} \subset \mathcal{H}^s$, която клони към нула в $\mathcal{H}^s$. Достатъчно е да докажем, че тя клони към нула и в $\mathcal{F}'_\beta(\mathbb{R}^n)$. Нека

$$V = \left\{ f: f \in \mathcal{F}', \sup_{\varphi \in B} |(f, \varphi)| < \varepsilon \right\}$$

е околност на началото в $\mathcal{F}'_\beta$. Понякоже множеството $B \subset \mathcal{F}$ е ограничено, а полуноормата

$$q(\varphi) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi}{(1+|\xi|^2)^3} \right)^{\frac{1}{2}}$$

е непрекъсната в $\mathcal{F}$ /проверете!/, неравенството $\sup_{\varphi \in B} q(\varphi) \leq A$

= const е изпълнено, стига A да е достатъчно голямо /заб. към теорема 2.20, стр.36/. От друга страна, $\mathcal{H}^s \subset \mathcal{F}'$, така че за $\varphi \in \mathcal{F}$ имаме

$$(u_\nu, \varphi)_\mathcal{F} = \frac{1}{(2\pi)^n} (u_\nu, \hat{\varphi}(-x)) = \frac{1}{(2\pi)^n} (\hat{u}_\nu, \hat{\varphi}(-\xi))$$

/24/

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}_\nu(\xi) \hat{\varphi}(-\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u}_\nu(\xi) \frac{\hat{\varphi}(-\xi) d\xi}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}}, \end{aligned}$$

откъдето за произволно $\varphi \in B$ получаваме

$$|(u_\nu, \varphi)| \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \|u_\nu\|_s A,$$

т.е. $u_\nu \in V$ за $\nu > N(\varepsilon)$. С това непрекъснатостта на вла-

гнетото $\mathcal{H}^S \longrightarrow \mathcal{S}'$ е доказано. За да докажем, че $\mathcal{H}^S$ е плътно в $\mathcal{S}'$, достатъчно е да установим, че $\mathcal{S}$ има това свойство. Понеже гъстотата на $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}'$ е вече установена в лема 3.5, стр. 337, естествено е да ревизираме доказателството, за да се убедим, че то остава в сила и за $\mathcal{S}'$. Това просто и приятно упражнение предпоставяме на читателя. Единственото допълнително съображение, което трябва да се използва е, че елементите на всяко ограничено множество $B \subset \mathcal{S}$ образуват равностепенно непрекъсната фамилия от функции. Това следва веднага от теорема 2.20, стр. 36. И така, теорема 2.10 е доказана.

Понеже $\mathcal{S}$ е навсякъде гъсто в $\mathcal{H}^S$ и неговата топология е по-силна от тази, която $\mathcal{H}^S$ индуцира върху него, очевидно е, че можем да идентифицираме $(\mathcal{H}^S)^*$ с някакво подпространство на $\mathcal{S}'$. Оказва се, че при тази идентификация $(\mathcal{H}^S)^*$ съвпада с $\mathcal{H}^{-S}$. Ето точната формулировка на тази важна теорема.

Т е о р е м а 2.11. Нека $S \in \mathbb{R}^2$ е произволно. Пространствата $(\mathcal{H}^S)^*$ и $\mathcal{H}^{-S}$ са линейно изометрични. Нещо повече, дуалността между $\mathcal{H}^S$ и $\mathcal{H}^{-S}$ се съгласува с тази между $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}'$.

Д о к а з а т е л с т в о. Нека f е линейен функционал от $(\mathcal{H}^S)^*$. Понеже $\mathcal{H}^S$ е Хилбертово пространство, според теоремата на Рис f се представя като скалярно произведение. С други думи, съществува еднозначно определен елемент $v_f \in \mathcal{H}^S$ такъв, че

$$/24/ \quad f(u) = (u, v_f)_S = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^S \hat{u}(\xi) \overline{\hat{v}_f(\xi)} d\xi.$$

При това $\|f\|_{(\mathcal{H}^S)^*} = \|v_f\|_S.$

Да положим

$$/25/ \quad w_f = F^{-1} \left((1+|\xi|^2)^S \overline{\hat{v}_f(-\xi)} \right).$$

Понеже $v_f \in \mathcal{H}^S$, $\hat{v}_f \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^n)$ и функцията $\overline{\hat{v}_f}(-\xi)$ е дефинирана. Веднага се вижда, че $w_f \in \mathcal{H}^{-S}$ и

$$\|w_f\|_{-S} = \|v_f\|_S. \quad \text{Наистина,}$$

$$\|w_f\|_{-S}^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{-S} (1+|\xi|^2)^S |\hat{v}_f(-\xi)|^2 d\xi = \|v_f\|_S^2.$$

От друга страна, с помощта на /24/ стигаме до равенствата

$$/26/ \quad f(u) = (u, v_f)_S = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi) \overline{\hat{v}_f(-\xi)} d\xi,$$

$$/27/ \quad \|f\|_{(\mathcal{H}^S)^*} = \|w_f\|_{-S},$$

които съдържат всичко необходимо. Наистина, според /26/ съответствието $f \longrightarrow w_f$ е линейно и еднозначно обратимо, а според /27/ то е изометрия между $(\mathcal{H}^S)^*$ и $\mathcal{H}^{-S}$. Остава да се убедим, че то е и сюрективно. За тази цел е достатъчно да вземем произволен елемент $w \in \mathcal{H}^{-S}$ и да дефинираме отговарящия му функционал $f \in (\mathcal{H}^S)^*$ чрез /26/. В частния случай, когато $u \in \mathcal{S}$ от /26/ и /24/, получаваме

$$f(u) = (w_f, u)_S,$$

което показва, че установената дуалност между $\mathcal{H}^S$ и $\mathcal{H}^{-S}$ наистина се съгласува с дуалността между $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}'$.

Ще завършим обсъждането на въпроса като подчертаем, че в процеса на доказателството дефинирахме билинейното изображение

$$\mathcal{H}^S \times \mathcal{H}^{-S} \longrightarrow \mathbb{C}, \text{ което действа по правилото}$$

$$\{u, v\} \longrightarrow \langle u, v \rangle_S, \quad \text{където}$$

$$/28/ \quad \langle u, v \rangle_S \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi) \overline{\hat{v}(-\xi)} d\xi, \quad u \in \mathcal{H}^S, \quad v \in \mathcal{H}^{-S}.$$

Прилагайки неравенството на Шварц, намираме оценката

$$|\langle u, v \rangle_s| \leq \|u\|_s \|v\|_{-s},$$

която се използва постоянно. Доказаната теорема свежда изследването на H^{-s} , $s > 0$ до изследването на H^s .

З а б е л е ж к а. Много автори идентифицират $(H^s)^*$ и H^{-s} с помощта на скаларното произведение

$$(u, v)_0 = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi) \overline{\hat{v}(\xi)} d\xi, \quad u \in H^s, \quad v \in H^{-s}.$$

В такъв случай дуалността между H^s и H^{-s} не се съгласува с тази между $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}'$.

Следващият резултат показва, че Соболевите пространства са наистина удобни за работа с диференциални оператори.

Т е о р е м а 2.12. Нека $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ е произволен мултиндекс, а s е произволно реално число. Операторът $u \longrightarrow D^\alpha u$ действа непрекъснато от H^s в $H^{s-|\alpha|}$.

Д о к а з а т е л с т в о. Нека $u \in H^s$. Понеже $\widehat{D^\alpha u} = \xi^\alpha \hat{u}$ с помощта на очевидните съотношения

$$|\xi^\alpha|^2 = \prod_{j=1}^n |\xi_j|^{2\alpha_j} \leq \prod_{j=1}^n (1 + \xi_j^2)^{\alpha_j} \leq (1 + |\xi|^2)^{|\alpha|}$$

получаваме неравенството

$$\begin{aligned} \|D^\alpha u\|_{s-|\alpha|}^2 &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{s-|\alpha|} |\xi^\alpha|^2 |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \|u\|_s^2, \end{aligned}$$

което показва, че операторът $H^s \xrightarrow{D^\alpha} H^{s-|\alpha|}$ има норма, не надминаваща единица. Теоремата е доказана.

Следващата теорема е съвсем частен случай от важната теорема на Соболев, която показва, че при известни предположения

обобщените производни са непрекъснати и следователно класически.

Т е о р е м а 2.13. Нека $u \in H^s$, където $s > \frac{n}{2} + k$, а k е естествено или нула. Тогава u и неговите производни $D^\alpha u$, $|\alpha| \leq k$ съпадат в $D'(\mathbb{R}^n)$ с непрекъснати функции. Нещо повече, $\lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} D^\alpha u(x) = 0$, за $|\alpha| \leq k$.

Д о к а з а т е л с т в о. Да разгледаме най-напред основния случай $k = 0$. Щом $u \in H^s$, $s > \frac{n}{2}$, очевидно имаме

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)| d\xi \leq \|u\|_s \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{(1 + |\xi|^2)^s} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

неравенство, което показва, че $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Следователно

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x, \xi)} \hat{u}(\xi) d\xi,$$

защото трансформацията на Фурие в $\mathcal{S}'$ се съгласува с тази в $L^1(\mathbb{R}^n)$. Понеже според лемата на Риман-Лебег $\lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} u(x) = 0$,

случаят $k = 0$ е изчерпан. Общият случай веднага се свежда към вече разглеждания, защото според теорема 2.12 $D^\alpha u \in H^{s-|\alpha|}$ и в случая $s - |\alpha| > \frac{n}{2}$.

С това теоремата е доказана. С един пример ще покажем, че резултатът не може да се подобри. /Вижте също зад. 3 и 4 от следващото упражнение./

П р и м е р 1. Нека

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & |x| \geq \frac{3}{4} \end{cases}$$

е функция от $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Лесно се вижда /проверете!/, че функцията

$$x \rightarrow f(x) \ln |\ln |x||, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

принадлежи на $H^1(\mathbb{R}^2)$, въпреки че тя очевидно не е непрекъсната. В случая $s = 1 = \frac{n}{2}$.

С л е д с т в и е. Ако за момент означим със $Z(\mathbb{R}^n)$ подмножеството на $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, състоящо се от функциите, които заедно с всичките си производни клонят към нула, когато $|x| \rightarrow \infty$, имаме

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \bigcap_{s \in \mathbb{R}^+} H^s(\mathbb{R}^n) \subset Z(\mathbb{R}^n).$$

Функциите $x \rightarrow (1 + |x|^2)^{-n}$ и $x \rightarrow (1 + |x|^2)^{-\frac{1}{2}}$, $x \in \mathbb{R}^n$ показват, че включванията са строги.

Т е о р е м а 2.14. Нека $s \in \mathbb{R}^+$, а $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Тогава операторът $M_\varphi: u \rightarrow \varphi u$ действа непрекъснато от H^s в H^s .

Д о к а з а т е л с т в о. Според теорема 3.22, стр. 342, имаме

$$/30/ \quad (\widehat{\varphi u})_\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} (\widehat{u} * \widehat{\varphi}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(\xi - \eta) \widehat{u}(\eta) d\eta.$$

(Интегралът е очевидно сходящ, защото $\varphi \in \mathcal{S}$.)

От /30/ с помощта на неравенството на Петре получаваме

$$/31/ \quad \left| (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} (\widehat{\varphi u})(\xi) \right| \leq \frac{2^{\frac{|s|}{2}}}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi - \eta|^2)^{\frac{|s|}{2}} \left| \widehat{\varphi}(\xi - \eta) (1 + |\eta|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{u}(\eta) \right| d\eta$$

и неравенството на Ънг ни дава

$$\| \varphi u \|_s = \left\| (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{\varphi u} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C \| u \|_s,$$

$$C = 2^{\frac{|s|}{2}} (2\pi)^{-n} \left\| (1 + |\xi|^2)^{\frac{|s|}{2}} \widehat{\varphi}(\xi) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

С това доказателството е завършено. От /30/ веднага се вижда, че при нашите предположения $\widehat{\varphi u} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Следващата важна теорема /в различните ѝ разновидности/ традиционно се асоциира с името на Релих, който пръв е установил резултат от такъв род.

Т е о р е м а 2.15. Нека $t > s$, а $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. В такъв случай операторът $H^t \rightarrow H^s$, действащ по правилото $u \rightarrow \varphi u$, е компактен.

Д о к а з а т е л с т в о. От теорема 2.14 знаем, че M_φ действа от H^t в H^t , но той не е компактен. Операторът, който ни интересува в момента е композиция от M_φ и естественото влягане $H^t \rightarrow H^s$.

И така, трябва да докажем, че ако $\{u_\nu\} \subset H^t$ е безкрайна редица, за която $\|u_\nu\|_t \leq A = \text{const}$, редицата $\{\varphi u_\nu\}$

съдържа подредица, сходяща в H^s . Изхождайки от /30/, получаваме

$$D^\alpha (\widehat{\varphi u}_\nu)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} D_\xi^\alpha \widehat{\varphi}(\xi - \eta) \widehat{u}_\nu(\eta) d\eta,$$

откъдето с помощта на неравенството на Петре намираме

$$/32/ \quad \left| (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} D^\alpha (\widehat{\varphi u}_\nu)(\xi) \right| \leq \frac{2^{\frac{|s|}{2}}}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi - \eta|^2)^{\frac{|s|}{2}} \left| D_\xi^\alpha \widehat{\varphi}(\xi - \eta) (1 + |\eta|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{u}_\nu(\eta) \right| d\eta$$

$$\leq C(\alpha, \varphi) \| u_\nu \|_s,$$

където

където

$$C(\alpha, \varphi) = 2^{\frac{s}{2}} (2\pi)^{-n} \left\| (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} D^\alpha \hat{\varphi}(\xi) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Последното неравенство получихме, прилагайки неравенството на Фиверц. Като се възползваме от /32/ с $\alpha = 0$ и $|\alpha| = 1$, намираме

$$|(\hat{\varphi} \hat{u}_\nu)(\xi)| \leq C_1 (1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}, \quad |D^\alpha (\hat{\varphi} \hat{u}_\nu)(\xi)| \leq C_2 (1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}},$$

неравенства, които ни позволяват с теоремата на Арцела-Асколи и на Фигуровия диагонален процес да изберем подредица $\{\varphi \hat{u}_{\nu_k}\}$, равномерно сходяща върху всеки компактен в $\mathbb{R}^n$. Именно тя е търсената. Наистина, нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Да вземем толкова голямо R , че да имаме

$$\begin{aligned} /33/ \quad \int_{|\xi| \geq R} (1+|\xi|^2)^s |(\hat{\varphi} \hat{u}_\nu)(\xi) - (\hat{\varphi} \hat{u}_\mu)(\xi)|^2 d\xi \\ \leq \frac{1}{(1+R^2)^{t-s}} \|\varphi u_\nu - \varphi u_\mu\|_t^2 < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Това може да се направи, защото

$$\begin{aligned} \|\varphi u_\nu - \varphi u_\mu\|_t &\leq \|\varphi u_\nu\|_t + \|\varphi u_\mu\|_t \\ &\leq C(\varphi, t) (\|u_\nu\|_t + \|u_\mu\|_t) \leq 2AC(\varphi, t) \end{aligned}$$

и t е по-голямо от s . От друга страна, понеже $\{\varphi \hat{u}_{\nu_k}\}$ е равномерно сходяща в кълбото $|\xi| \leq R$, за $k, p > N(\varepsilon)$ имаме

$$/34/ \quad \int_{|\xi| \leq R} (1+|\xi|^2)^s |\hat{\varphi} \hat{u}_{\nu_k}(\xi) - \hat{\varphi} \hat{u}_{\nu_p}(\xi)|^2 d\xi < \frac{\varepsilon}{2}.$$

От /33/ и /34/, разбира се, следва

$$\|\varphi u_{\nu_k} - \varphi u_{\nu_p}\|_s^2 < \varepsilon \quad \text{за } k, p > N(\varepsilon)$$

и теоремата е доказана.

Следствие /Лема на Релих/. Ако $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ е ограничена област и $t > s$, естественото влягане

$$\mathcal{H}^t(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{E}'(\Omega) \longrightarrow \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$$

е компактно.

Доказателство. Нека $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ е функция, тъждествено равна на единица в някаква околност на Ω . Като вземем пред вид, че за $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ имаме $u = \varphi u$ и приложим теорема 2.15, стигаме до желаното заключение.

Забележка. Влягането $\mathcal{H}^t \longrightarrow \mathcal{H}^s$, $t > s$ не е компактно /зад.5 от следващото упражнение/.

Упражнение 6

1. Нека $t > s$. Докажете, че включването $\mathcal{H}^t \subset \mathcal{H}^s$ е строго и влягането $\mathcal{H}^t \longrightarrow \mathcal{H}^s$ има норма, равна на единица.

2. Докажете, че изображенията

$$D_j : \mathcal{H}^s \longrightarrow \mathcal{H}^{s-1}, \quad D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

имат норма 1, докато нормата на $D_k D_j : \mathcal{H}^s \longrightarrow \mathcal{H}^{s-2}$, $k \neq j$ е $\frac{1}{2}$.

3. Нека $s > \frac{n}{2}$ и $\alpha > 0$ е толкова малко, че $s > \frac{n}{2} + \alpha$. Докажете, че всяка функция от $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$ почти навсякъде съвпада с някаква функция, удовлетворяваща условието на Холдер с показател α .

4. Да означим с $\beta^k(\mathbb{R}^n)$ подпространството на $C^k(\mathbb{R}^n)$, което се състои от функциите, за които

$$P_\alpha(u) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha u| < \infty, \quad |\alpha| \leq k.$$

Топология в $\beta^k(\mathbb{R}^n)$ дефинираме с полунормите P_α . Докажете, че ако за някакви s и k имаме $\mathcal{H}^s \subset \beta^k$, то $s > \frac{n}{2} + k$.

У п ъ т в а н е. Допуснете, че $H^s \subset \beta^k$ и с помощта на теоремата за затворената графика установете, че операторът на естественото влягане $H^s \rightarrow \beta^k$ е непрекъснат. Това ще ви даде възможност да заключите, че функционалите $D^\alpha \delta$, $|\alpha| \leq k$ се съдържат в $(H^s)^* = H^{-s}$. Използвайки този факт, лесно ще установите, че $s > \frac{n}{2} + k$.

5. Нека $s > 0$ е произволно. Установете, че влягането $H^s(\mathbb{R}^1) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^1)$ не е компактно.

У п ъ т в а н е. Вземете $\varphi \in C_0^\infty(0, 1)$ и разгледайте редицата $\{\varphi_\nu\}$ с общ член $\varphi_\nu(x) = \varphi(x - \nu)$, $\nu = 1, 2, 3, \dots$.

6. Нека $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ и $\left(1 - \frac{\partial}{\partial x_1}\right) \dots \left(1 - \frac{\partial}{\partial x_n}\right) f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Докажете, че f почти навсякъде съвпада с функцията, непрекъснатата и ограничена в $\mathbb{R}^n$.

7. Нека $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Дефинирайте конволвцията $u * \varphi$ по два различни начина и установете, че операторът $u \rightarrow u * \varphi$ действа непрекъснато от H^s в H^s .

8. Нека δ е Дираковата функция в $\mathbb{R}^n$. Докажете, че $\delta \in H^s(\mathbb{R}^n)$ тогава и само тогава, когато $s < -\frac{n}{2}$. Проверете, че за такива s изображението $x \rightarrow \delta_x$ на $\mathbb{R}^n$ в $H^s(\mathbb{R}^n)$ е непрекъснато. (δ_x е Дираковата функция с носител в точката x) Като следствие от този факт установете, че за $u \in H^{-s}$, $s < -\frac{n}{2}$ и изображението $x \rightarrow \langle u, \delta_x \rangle_s$ е непрекъснато.

9. Нека $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ и Q е достатъчно голям куб, който съдържа $\text{supp } \varphi$. Ако ръбът на Q има дължина a , разделете Q на кубчета с ръбове $\frac{a}{m}$ и във всяко от тях вземете по една

точка x_j . Докажете, че при $m \rightarrow \infty$ интегралните суми $\sum_j \varphi(x_j) \text{mes } Q_j \delta_{x_j}$ клонят в H^{-s} , $s > \frac{n}{2}$, към ня-

какво разпределение, което ще означим с $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \delta_x dx$. Дока-

жете, че то действа по правилото

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \delta_x dx, \psi \right) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \psi(x) dx, \quad \psi \in \mathcal{S}$$

и след това за произволно $u \in H^s$, $s > \frac{n}{2}$ установете равенството

$$(u, \varphi)_\mathcal{S} = \int_{\mathbb{R}^n} \langle u, \delta_x \rangle_s \varphi(x) dx,$$

което показва, че непрекъснатата функция $x \rightarrow \langle u, \delta_x \rangle_s$ е плътност на u . Така ще получите ново доказателство на теоремата на Соболев.

2.3. Допълнителни сведения за пространствата

$H^s(\mathbb{R}^n)$. Една теорема за интерполиране.

Дефиниция на $H^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$, $H^{+\infty}(\mathbb{R}^n)$, $H^s_{loc}(\Omega)$ и $H^s_c(\Omega)$

В тази точка са събрани основни факти за пространствата $H^s(\mathbb{R}^n)$, които се използват по-рядко. Поради липса на място изложението е конспективно.

Т е о р е м а 2.16. Нека $s_2 > s_1$, $s_2 \geq -\frac{n}{2}$. Тогава за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова $\delta = \delta(\varepsilon)$, че за всяко $u \in H^{s_2}(\mathbb{R}^n)$, чийто носител има диаметър по-малък от δ , е в сила неравенството

$$\|u\|_{s_1} \leq \varepsilon \|u\|_{s_2}.$$

Д о к а з а т е л с т в о. Да допуснем противното. В такъв случай съществува $\varepsilon_0 > 0$ такова, че за всяко $j = 1, 2, 3, \dots$ може да се намери поне по едно $u_j \in H^{s_2}(\mathbb{R}^n)$, $\text{diam}(\text{supp } u_j) < \frac{1}{j}$,

за което $\|u_j\|_{s_2} > \varepsilon_0 \|u_j\|_{s_2}$. Понеже нормите в пространствата $\mathcal{H}^s$ са

инвариантни относно трансляции, без ограничение на общността можем да предположим, че носителят на u_j се съдържа в кълбото

$$B_j : |x| < \frac{1}{j}. \text{ Да въведем разпределенията } \tilde{v}_j = \frac{u_j}{\|u_j\|_{s_2}},$$

$j = 1, 2, 3, \dots$, които очевидно удовлетворяват релациите

$$\|\tilde{v}_j\|_{s_1} > \varepsilon_0, \|\tilde{v}_j\|_{s_2} = 1 \text{ и } \text{supp } \tilde{v}_j \subset B_j. \text{ Понеже редицата } \{\tilde{v}_j\}$$

е ограничена в $\mathcal{H}^{s_2}$ и $\mathcal{H}^{s_2}$ е Хилбертово, според теорема 3.8, стр. 92 от нея може да се избере подредица $\{\tilde{v}_{j_k}\}$,

която слабо клони към някакъв елемент $v_0 \in \mathcal{H}^{s_2}$. От друга страна, според лемата на Релих съществува подредица на $\{\tilde{v}_{j_k}\}$ - да я означим с $\{\tilde{v}_{j_{k_p}}\}$, която клони в $\mathcal{H}^{s_1}$ към някакъв елемент u_0 . Веднага се вижда, че $u_0 = v_0$. Наистина, слабата сходимост в $\mathcal{H}^{s_2}$ означава, че за всяко $w \in \mathcal{H}^{-s_2}$ имаме

$$\lim \langle \tilde{v}_{j_k}, w \rangle_{s_2} = \langle v_0, w \rangle_{s_2} \text{ /вж. /26/ и /28/},$$

т.е. тази сходимост е по-силна от сходимостта в $\mathcal{S}'$. Понеже и сходимостта в $\mathcal{H}^{s_1}$ е такава /теорема 2.10/, то $u_0 = v_0$ в $\mathcal{S}'$, а следователно и в $\mathcal{H}^{s_2}$.

Сега вече сме близо до целта. Понеже $\text{supp } \tilde{v}_j \subset B_j$ и редицата $\{\tilde{v}_{j_k}\}$ е сходяща в $D'(\mathbb{R}^n)$, веднага следва, че $\text{supp } v_0 = \{0\}$ и теорема 2.14, стр. 224 ни дава

$$v_0 = \sum_{\alpha} c_{\alpha} D^{\alpha} \delta, \quad c_{\alpha} = \text{const}$$

/сумата е крайна/. Като вземем пред вид, че $\hat{v}_0(\xi) = \sum_{\alpha} c_{\alpha} \xi^{\alpha}$ и

$v_0 \in \mathcal{H}^{s_2}$, $s_2 > -\frac{n}{2}$, без особени усилия стигаме до заключението, че $v_0 = 0$. Това обаче противоречи на неравенството

$$\|v_0\|_{s_1} \geq \varepsilon_0 > 0, \text{ което следва от } \|\tilde{v}_{j_{k_p}}\|_{s_1} > \varepsilon_0.$$

С това доказателството е завършено.

Теорема 2.17. Нека $s > \frac{n}{2}$. В такъв случай от $u \in \mathcal{H}^s$, $v \in \mathcal{H}^s$ следва, че и тяхното произведение $uv \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$.

Забележка. Произведението uv има смисъл, защото според теоремата на Соболев /теорема 2.13/ функциите u и v са непрекъснати.

Доказателство. Тъй като $s > \frac{n}{2}$, $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\hat{v} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ /вж. /29// и ние можем да образуваме конволюцията

$$(\hat{u} * \hat{v})(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi - \eta) \hat{v}(\eta) d\eta.$$

Сега теорема 3.19, стр. 334 ни дава

$$\widehat{uv} = \widehat{u} \widehat{v} = (2\pi)^{2n} \hat{u} \hat{v} = (2\pi)^n \widehat{\hat{u} \hat{v}},$$

т.е. $\widehat{uv} = \frac{1}{(2\pi)^n} \widehat{u} * \widehat{v}$. Трябва да оценим L^2 нормата

на функцията $(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{uv}$. За по-голяма прегледност да въведем функциите

$$u(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u}(\xi), \quad v(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{v}(\xi),$$

които според направените предположения се съдържат в $L^2(\mathbb{R}^n)$. Последователно получаваме

$$\left| (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} (\widehat{uv})(\xi) \right| = \frac{(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}}}{(2\pi)^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi - \eta) \hat{v}(\eta) d\eta \right|$$

$$\leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} |u(\xi - \eta) v(\eta)| d\eta}{(1 + |\xi - \eta|^2)^{\frac{s}{2}} (1 + |\eta|^2)^{\frac{s}{2}}}$$

$$\leq \frac{1}{(2\pi)^n} I(\xi) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(\xi - \eta)|^2 |v(\eta)|^2 d\eta \right)^{\frac{1}{2}},$$

където

$$I(\xi) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1+|\xi|^2)^s d\eta}{(1+|\xi-\eta|^2)^s (1+|\eta|^2)^s} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

/Разбира се, последното неравенство получихме с помощта на неравенството на Шварц./ Оказва се, че $I(\xi) \leq A = \text{const.}$

Наистина имаме

$$\begin{aligned} I^2(\xi) &= \int_{|\eta| \geq \frac{|\xi|}{2}} \frac{(1+|\xi|^2)^s d\eta}{(1+|\xi-\eta|^2)^s (1+|\eta|^2)^s} + \int_{|\eta| \leq \frac{|\xi|}{2}} \frac{(1+|\xi|^2)^s d\eta}{(1+|\xi-\eta|^2)^s (1+|\eta|^2)^s} \\ &\leq \frac{(1+|\xi|^2)^s}{\left(1 + \frac{|\xi|^2}{4}\right)^s} \int_{|\eta| \geq \frac{|\xi|}{2}} \frac{d\eta}{(1+|\xi-\eta|^2)^s} + \frac{(1+|\xi|^2)^s}{\left(1 + \frac{|\xi|^2}{4}\right)^s} \int_{|\eta| \leq \frac{|\xi|}{2}} \frac{d\eta}{(1+|\eta|^2)^s} \\ &\leq \left(\frac{1+|\xi|^2}{1 + \frac{|\xi|^2}{4}} \right)^s \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\eta}{(1+|\xi-\eta|^2)^s} + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\eta}{(1+|\eta|^2)^s} \right) \\ &= 2 \left(\frac{1+|\xi|^2}{1 + \frac{|\xi|^2}{4}} \right)^s \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\eta}{(1+|\eta|^2)^s} \leq C \end{aligned}$$

и ограничеността на $I(\xi)$ е установена. Вече сме близо до целта.

Като интегрираме току-що установеното неравенство

$$\left| (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} (\widehat{uv})(\xi) \right|^2 \leq \frac{C}{(2\pi)^{2n}} \int_{\mathbb{R}^n} |u(\xi-\eta)|^2 |v(\eta)|^2 d\eta$$

и приложим теоремата на Фубини, получаваме

$$\|uv\|_s^2 \leq \frac{C}{(2\pi)^{2n}} \|u\|_{L^2}^2 \|v\|_{L^2}^2 = \frac{C}{(2\pi)^{2n}} \|u\|_s^2 \|v\|_s^2$$

и доказателството е завършено.

Интерполацията е мощно средство за изследване на Соболевите пространства. Следващата теорема заедно с теорема 2.11 ни позволява да работим и в общия случай така свободно, както в случая, когато s е естествено число.

Т е о р е м а 2.18. Нека $A: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ е линейен оператор и нека $(t_1, s_1), (t_2, s_2)$ са две двойки от реални числа. Нека освен това неравенствата

$$136/ \quad \|A\varphi\|_{t_1} \leq C_1 \|\varphi\|_{s_1}, \quad \|A\varphi\|_{t_2} \leq C_2 \|\varphi\|_{s_2}$$

са в сила за произволно $\varphi \in \mathcal{S}$. В такъв случай имаме

$$\|A\varphi\|_{t(\theta)} \leq C_1^{1-\theta} C_2^\theta \|\varphi\|_{s(\theta)},$$

където естествено

$$t(\theta) = (1-\theta)t_1 + \theta t_2, \quad s(\theta) = (1-\theta)s_1 + \theta s_2, \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

Д о к а з а т е л с т в о. Да разгледаме линейното изображение $\Lambda^Z: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, дефинирано чрез равенството

$$137/ \quad (\Lambda^Z f)(x) = F^{-1} \left((1+|\xi|^2)^{\frac{Z}{2}} \hat{f}(\xi) \right)(x),$$

където Z е фиксирано комплексно число. Веднага се вижда, че Λ^Z изобразява $\mathcal{S}$ непрекъснато върху цялото $\mathcal{S}$. Нещо повече, Λ^Z е изометрия на $\mathcal{H}^{s+\text{Re } Z}$ върху $\mathcal{H}^s$. Наистина, очевидно имаме

$$\|\Lambda^Z f\|_s^2 = \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{s+\text{Re } Z} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \|f\|_{s+\text{Re } Z}^2.$$

Сега вече можем да се заемем с доказателството на теоремата. Да фиксираме $f \in \mathcal{S}$, $g \in \mathcal{S}$ и да разгледаме функцията

$$F(z) \stackrel{\text{def}}{=} (A \Lambda^{-s(z)} f, \Lambda^{t(z)} g)_\mathcal{S},$$

където $s(z) = (1-z)s_1 + zs_2$, $t(z) = (1-z)t_1 + zt_2$,

$0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$, а скобката изразява дуалността между $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}'$.
(Обърнете внимание, че $\Lambda^{t(z)} g \in \mathcal{P}$, докато

$A \Lambda^{-s(z)} f \in \mathcal{P}'$.) Ние ще покажем, че F е аналитична функция на z в ивицата $G: 0 < \operatorname{Re} z < 1$ и ще оценим нейния модул с теоремата за трите прави. Най-напред ще проверим, че F е ограничена и непрекъсната в $\bar{G}$. Понеже $\Lambda^{-s(z)} f \in \mathcal{P} \subset \mathcal{H}^{t_1}$, $\Lambda^{t(z)} g \in \mathcal{P} \subset \mathcal{H}^{-t_2}$, използвайки /36/ и съгласуването на дуалността между $\mathcal{H}^{t_1}$ и $\mathcal{H}^{-t_2}$ с тази между $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}'$, получаваме

$$|F(z)| \leq \|A \Lambda^{-s(z)} f\|_{t_1} \|\Lambda^{t(z)} g\|_{-t_2} \leq C_1 \|\Lambda^{-s(z)} f\|_{s_1} \|\Lambda^{t(z)} g\|_{-t_2} \\ /38/ \\ = C_1 \|f\|_{s_1 - \operatorname{Re} s(z)} \|g\|_{-t_2 + \operatorname{Re} t(z)} \leq C_1 \|f\|_{|s_1| + |s_2|} \|g\|_{|t_1| + |t_2|},$$

където ограничеността на F в $\bar{G}$ е установена. За да покажем, че тя е и непрекъсната, да фиксираме $z_0 \in \bar{G}$ и да разгледаме разликата

$$F(z_0 + h) - F(z_0) = (A(\Lambda^{-s(z_0+h)} f - \Lambda^{-s(z_0)} f), \Lambda^{t(z_0+h)} g) \\ /39/ + (A \Lambda^{-s(z_0)} f, (\Lambda^{t(z_0+h)} g - \Lambda^{t(z_0)} g)),$$

където $0 \leq \operatorname{Re} h \leq 1$ и $z_0 + h \in \bar{G}$. Като по-горе, намираме

$$|F(z_0 + h) - F(z_0)| \leq \|A(\Lambda^{-s(z_0+h)} f - \Lambda^{-s(z_0)} f)\|_{t_1} \|\Lambda^{t(z_0+h)} g\|_{-t_2} \\ + \|A \Lambda^{-s(z_0)} f\|_{t_2} \|\Lambda^{t(z_0+h)} g - \Lambda^{t(z_0)} g\|_{-t_1}$$

$$\leq C_1 \|\Lambda^{-s(z_0+h)} f - \Lambda^{-s(z_0)} f\|_{s_1} \|g\|_{|t_1| + |t_2|}$$

$$+ C_1 \|f\|_{|s_1| + |s_2|} \|\Lambda^{t(z_0+h)} g - \Lambda^{t(z_0)} g\|_{-t_1}.$$

Не е трудно да се види, че

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\Lambda^{-s(z_0+h)} f - \Lambda^{-s(z_0)} f\|_{s_1} = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|\Lambda^{t(z_0+h)} g - \Lambda^{t(z_0)} g\|_{-t_1} = 0.$$

За образец ще докажем първото равенство. Имаме

$$\|\Lambda^{-s(z_0+h)} f - \Lambda^{-s(z_0)} f\|_{s_1} \\ = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{s_1 - \operatorname{Re} s(z_0)} \left| (1 + |\xi|^2)^{\frac{h s_1 - h s_2}{2}} - 1 \right|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

и понеже елементарното неравенство $|e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1$ ни дава

$$\left| (1 + |\xi|^2)^{\frac{h s_1 - h s_2}{2}} - 1 \right| \leq (1 + |\xi|^2)^{\frac{|s_1| + |s_2|}{2}} - 1,$$

с помощта на теоремата на Лебег стигаме до желаното заключение. И така, F е непрекъсната в $\bar{G}$. Остава да се провери най-важното - че тя е холоморфна в $\bar{G}$. Изхождайки от /39/, намираме, че както и трябва да се очаква,

$$F'(z) = (A(\Lambda^{-s(z)} f)'_z, \Lambda^{t(z)} g) + (A(\Lambda^{-s(z)} f), (\Lambda^{t(z)} g)'_z),$$

където

$$(\Lambda^{-s(z)} f)'_z = \frac{s_1 - s_2}{2} F^{-1} \left\{ \left((1 + |\xi|^2)^{\frac{t_1}{2}} \ln(1 + |\xi|^2) \right) \hat{f}(\xi) \right\} \\ (\Lambda^{t(z)} g)'_z = \frac{t_2 - t_1}{2} F^{-1} \left\{ \left((1 + |\xi|^2)^{\frac{t_2}{2}} \ln(1 + |\xi|^2) \right) \hat{g}(\xi) \right\}.$$

Детайлите, макар и малко по-сложни, не съдържат нищо ново и ние ги предоставяме на читателя. Сега да се върнем към основната

нишка в доказателството и да приложим теоремата за трите прави. Понеже $\operatorname{Re} s(iy) = s_1$, $\operatorname{Re} t(iy) = t_1$, първите три неравенства от /38/ ни дават

$$/40/ \quad |F(iy)| \leq C_1 \|f\|_0 \|g\|_0, \quad y \in \mathbb{R}^1.$$

От друга страна, повтаряйки извода на /38/, намираме

$$|F(z)| \leq C_2 \|f\|_{s_2 - \operatorname{Re} s(z)} \|g\|_{-t_2 + \operatorname{Re} t(z)},$$

откъдето следва

$$/41/ \quad |F(1+iy)| \leq C_2 \|f\|_0 \|g\|_0,$$

защото $\operatorname{Re} s(1+iy) = s_2$, $\operatorname{Re} t(1+iy) = t_2$. Прилагайки теоремата за трите прави, от /40/ и /41/ получаваме

$$\sup_{\operatorname{Re} z = \theta} |F(z)| \leq C_1^{1-\theta} C_2^\theta \|f\|_0 \|g\|_0, \quad 0 < \theta < 1,$$

т.е.

$$/42/ \quad \begin{aligned} |(A(\Lambda^{-s(\theta)} f), \Lambda^{t(\theta)} g)| &\leq C_1^{1-\theta} C_2^\theta \|f\|_0 \|g\|_0 \\ &= C_1^{1-\theta} C_2^\theta \|\Lambda^{-s(\theta)} f\|_{s(\theta)} \|\Lambda^{t(\theta)} g\|_{-t(\theta)}, \end{aligned}$$

защото изображенията Λ^z са изометрии. Сега да фиксираме f и да оставим g да опише $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. В такъв случай и $\Lambda^{t(\theta)} g$ описва $\mathcal{S}$ и /42/ заедно с теорема 2.11 показва¹, че $A(\Lambda^{-s(\theta)} f) \in \mathcal{H}^{t(\theta)}$ и ни дава оценката

$$/43/ \quad \|A(\Lambda^{-s(\theta)} f)\|_{t(\theta)} = C_1^{1-\theta} C_2^\theta \|\Lambda^{-s(\theta)} f\|_{s(\theta)}.$$

$$(\text{Припомняме, че } \|u\|_s = \sup_{v \in \mathcal{H}^{-s}} \frac{|(u, v)_s|}{\|v\|_{-s}}.)$$

Сега да оставим f да опише $\mathcal{S}$. Тогава $\Lambda^{-s(\theta)} f$ описва същото

¹Тук се използва, че $\mathcal{S}$ е навсякъде гъсто в $\mathcal{H}^{-t(\theta)}$. Сравнете със зад. 7^б, стр. 318.

пространство и от /43/ следва

$$/44/ \quad \|A\varphi\|_{t(\theta)} \leq C_1^{1-\theta} C_2^\theta \|\varphi\|_{s(\theta)}$$

за всяко $\varphi \in \mathcal{S}$. Понеже числото $\theta \in (0, 1)$ беше съвсем произволно, доказателството е завършено. Оценката /44/ ни позволява по непрекъснатост да продължим A до ограничен оператор от $\mathcal{H}^{s(\theta)}$ в $\mathcal{H}^{t(\theta)}$ за $0 \leq \theta \leq 1$.

Доказаната теорема има важни следствия. Ето едно от тях.

С л е д с т в и е. Нека m е естествено число, а $S \in [-m, m]$ е реално. Тогава билинейното изображение $(f, u) \rightarrow fu$ на $\beta^m(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{H}^S(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{H}^S(\mathbb{R}^n)$ е непрекъснато. /За дефиницията на $\beta^k(\mathbb{R}^n)$ вижте зад. 4 от предишното упражнение./

Д о к а з а т е л с т в о. От формулата на Лайбниц веднага следва, че щом $f \in \beta^m$, $u \in \mathcal{S}$, то $f\varphi \in \mathcal{H}^m \cap \mathcal{H}^S$. Следователно всичко ще бъде доказано, ако установим неравенството

$$/45/ \quad \|fu\|_S \leq C q_m(f) \|u\|_S, \quad f \in \beta^m, \quad u \in \mathcal{S}.$$

$$\text{където } q_m(f) = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ |\alpha| \leq m}} |D^\alpha f(x)|, \quad C = \text{const.}$$

Нека най-напред $S = m$. Сега /45/ следва директно от формулата на Лайбниц. Ако $S = -m$, дуалността между $\mathcal{H}^m$ и $\mathcal{H}^{-m}$ и вече полученият резултат решават въпроса. Наистина

$$\begin{aligned} \|fu\|_{-m} &= \sup_{v \in \mathcal{S}} \frac{|(fu, v)_m|}{\|v\|_m} = \sup_{v \in \mathcal{S}} \frac{|(u, fv)_m|}{\|v\|_m} \\ &\leq \frac{\|u\|_{-m} \|fv\|_m}{\|v\|_m} \leq C q_m(\varphi) \|u\|_{-m}. \end{aligned}$$

За да завършим доказателството на /45/, остава да интерполираме между m и $-m$.

За пълнота в изложението ще дефинираме и крайните елементи $H^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ и $H^{+\infty}(\mathbb{R}^n)$ в множеството на Соболевите пространства, макар че те се използват твърде рядко.

Дефиниция 2.6. Нека

$$H^{-\infty}(\mathbb{R}^n) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{s \in \mathbb{R}^1} H^s(\mathbb{R}^n).$$

В $H^{-\infty}$ въвеждаме най-силната локално изпъкнала топология, при която вложенията $H^s \rightarrow H^{-\infty}$, $s \in \mathbb{R}^1$, са непрекъснати. С други думи, казваме, че едно абсолютно изпъкнало множество $O \subset H^{-\infty}$ е околност на началото, когато за всяко $s \in \mathbb{R}^1$ множеството $O \cap H^s$ е околност на началото в H^s . Лесно се вижда, че предположенията на теорема 2.12, стр. 25 са удовлетворени. Следователно по този начин $H^{-\infty}$ се превръща в ЛИП. Така топологизираното $H^{-\infty}$ се нарича индуктивна граница на $\{H^s\}$. Почти очевидно е, че едно множество $O \subset H^{-\infty}$ е отворено тогава и само тогава, когато $O \cap H^s$ е отворено в H^s за всяко $s \in \mathbb{R}^1$. С $H^{-\infty}$ се работи просто, защото за частите теорема 5.1 от стр. 128 остава в сила /проверете!/. Теоретико-множествените включения

$$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subset H^{-\infty}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

са очевидно на лице. /От теорема 2.12, стр. 219 веднага следва, че всяко разпределение от $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ се съдържа в H^{-s} стига s да е достатъчно голямо.

Дефиниция 2.7. Нека

$$H^{+\infty}(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{s \in \mathbb{R}^1} H^s(\mathbb{R}^n).$$

Казваме, че едно абсолютно изпъкнало множество $O \subset H^{+\infty}$ е околност на началото в $H^{+\infty}$, когато за поне едно $s \in \mathbb{R}^1$ съществува абсолютно изпъкнала околност на началото в H^s - да я означим с O_s такава, че $O_s \cap H^{+\infty} = O$. Лесно се проверява, че отново предположенията на теорема 2.12, стр. 25 са налице. ЛИП, което се получава по този начин е проективна граница на $\{H^s\}$, $s \in \mathbb{R}^1$ /вж. общата дефиниция в [3] или [4] /.

Оказва се, че едно множество $O \subset H^{+\infty}$ е отворено тогава и само тогава, когато за някакво s съществува отворено множество $O_s \subset H^s$ такава, че $O = O_s \cap H^{+\infty}$. Включванията

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset H^{+\infty}(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

са очевидно налице.

Дефиниция 2.8. Нека $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ е област и $K \subset \Omega$ е компакт, а $s \in \mathbb{R}^1$. Линейното подпространство на $H^s(\mathbb{R}^n)$, което се състои от разпределенията с носител в K , се означава с $H_c^s(K)$. Очевидно е, че $H_c^s(K)$ е затворено подмножество на $H^s(\mathbb{R}^n)$. В $H_c^s(K)$ се разглежда топологията, която $H^s(\mathbb{R}^n)$ индуцира върху него. Нека сега

$$K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \dots K_\nu \dots \subset \Omega$$

е една редица от компакти, която изчерпва Ω . Силната индуктивна граница $\lim_{\nu \rightarrow \infty} H_c^s(K_\nu)$ се означава с $H_c^s(\Omega)$. (Следователно $H_c^s(\Omega) = \bigcup_{K \subset \Omega} H_c^s(K)$. Дефиницията на топологията е коректна, защото $H_c^s(K_\nu)$ индуцира върху $H_c^s(K_{\nu-1})$ оригиналната топология.) Очевидно е, че топологията в $H_c^s(\Omega)$ не зависи от избора на редицата $\{K_\nu\}$.

Дефиниция 2.9. Нека отново Ω е област в $\mathbb{R}^n$, а s е фиксирано. Казваме, че едно разпределение $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ се съ-

държа в $H_{loc}^s(\Omega)$, когато за всяко $\varphi \in D(\Omega)$ имаме

$\varphi u \in H^s(\mathbb{R}^n)$. (Считаме, че φu е продължено като нула извън Ω .)

В $H_{loc}^s(\Omega)$ въвеждаме топология с помощта на полунормите

$\rho_\varphi(u) = \|\varphi u\|_s$, $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$. Лесно се вижда, че в същност $H_{loc}^s(\Omega)$ е пространство на Фреше: ако $\{K_j\}$ е редица

от компакти, която изчерпва Ω и $\varphi_j \in C_0^\infty(K_{j+1})$ е тъждествено равно на единица в околност на K_j , полунормите

$u \rightarrow \|\varphi_j u\|_s$ дефинират в $H_{loc}^s(\Omega)$ оригиналната топология. Оказва се, че пространствата $H_c^s(\Omega)$ и $H_{loc}^s(\Omega)$ са дуални едно

на друго. Включванията

$$D(\Omega) \subset H_c^s(\Omega) \subset H_{loc}^s(\Omega) \subset D'_\beta(\Omega)$$

са очевидни. Нещо повече, естествените вложения

$$/46/ \quad D(\Omega) \rightarrow H_c^s(\Omega) \rightarrow H_{loc}^s(\Omega) \rightarrow D'_\beta(\Omega)$$

са непрекъснати и имат плътни образи.

Следващата теорема е особено важна при дефинирането на пространствата $H^s(\Gamma)$, където Γ е границата на някаква достатъчно гладка област.

Т е о р е м а 2.19. Пространствата $H_{loc}^s(\Omega)$ са инвариантни

относно C^∞ дифеоморфизми. По-точно, ако Ω_1 и Ω_2 са области в $\mathbb{R}^n$ и $h: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ е C^∞ дифеоморфизъм, то изображението

$h^*: D'(\Omega_2) \rightarrow D'(\Omega_1)$, което h индуцира /вж. стр.

484/, изобразява $H_{loc}^s(\Omega_2)$ еднозначно-обратно и непрекъснато

върху $H_{loc}^s(\Omega_1)$.

Д о к а з а т е л с т в о. Ще докажем малко по-силно твърдение: ако $h: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ е C^{m+1} дифеоморфизъм, то за

$$|S| \leq m \quad \text{изображението} \quad h^*: H_{loc}^s(\Omega_2) \rightarrow H_{loc}^s(\Omega_1)$$

е линеен изоморфизъм. Достатъчно е да докажем, че за всяко $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_1)$ съществува $\psi \in C_0^\infty(\Omega_2)$ такова, че равенството

$$/47/ \quad \|\varphi(u \circ h)\|_{s, \Omega_1} \leq C \|\psi u\|_{s, \Omega_2}$$

да бъде в сила за произволно $u \in H_{loc}^s(\Omega_2)$ с подходяща

константа $C = C(\Omega_1, \Omega_2)$.

Ще започнем с най-простия случай $s = m$.

За по-голяма яснота да си мислим, че $\Omega_1 \subset \mathbb{R}_x^n$

$\Omega_2 \subset \mathbb{R}_y^n$ и да положим $v(x) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(x) u(h(x))$. Използвайки правилото за диференциране на съставни функции и формулата на

Лайбниц, последователно намираме

$$\|v\|_{m, \Omega_1}^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega_1} |D_x^\alpha (\varphi(x) u(h(x)))|^2 dx$$

$$\leq C_1 \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\text{supp } \varphi} |(D_y^\alpha u) \circ h(x)|^2 dx$$

$$= C_1 \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{h(\text{supp } \varphi)} |D_y^\alpha u(y)|^2 |J_{h^{-1}}(y)| dy$$

$$\leq C_2 \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{h(\text{supp } \varphi)} |D^\alpha u(y)|^2 dy$$

$$\leq C_2 \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega_2} |D^\alpha (\psi u)|^2 dy,$$

където $\psi \in C_0^\infty(\Omega_2)$ е функция, тъждествено равна на единица в някаква околност на $h(\text{supp } \varphi)$. С това /47/ е доказано за $S = m$. Нека сега $S = -m$. Използвайки дуалността между H^m и H^{-m} , последователно получаваме

$$\|v\|_{-m} = \sup_{f \in \mathcal{F}} \frac{|\langle v, f \rangle_m|}{\|f\|_m} = \sup_{f \in \mathcal{F}} \frac{|\langle u \circ h, \varphi f \rangle_m|}{\|f\|_m}$$

/48/

$$= \sup_{f \in \mathcal{F}} \frac{|\langle u, [(\varphi f) \circ h^{-1}] \gamma_{h^{-1}}(y) \rangle_m|}{\|f\|_m} = \sup_{f \in \mathcal{F}} \frac{|\langle \psi u, g \rangle_m|}{\|f\|_m},$$

където сме положили за краткост

$$g \stackrel{\text{def}}{=} ((\varphi f) \circ h^{-1}) \gamma_{h^{-1}}(y) \in C_0^\infty(\Omega_2),$$

а функцията $\psi \in C_0^\infty(\Omega_2)$ е подчинена на единственото условие да бъде равна на единица около носителя на g .

Понеже $|\langle \psi u, g \rangle_m| \leq \|\psi u\|_{-m} \|g\|_m$ и според вече доказаното $\|g\|_m \leq C \|f\|_m$, доказателството е завършено и за $S = -m$.

В общия случай /47/ се получава с интерполация между m и $-m$. Остава да се убедим, че изображението h^* е сюрективно. Това обаче е очевидно, защото и h^{-1} има свойствата на h .

С това теорема 2.19 е доказана.

Упражнение 7

1. Нека $0 < S < 1$. Докажете, че нормата

$$g(\varphi) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \right)^{\frac{1}{2}}$$

е еквивалентна с нормата в $H^S(\mathbb{R}^n)$.

Упътване. За $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ равенството на Парсевал ни позволява да представим втория интеграл във вида

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}_\xi^n} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 \left\{ \int_{\mathbb{R}_t^n} \frac{|e^{it\xi} - 1|^2}{|t|^{n+2s}} dt \right\} d\xi.$$

Вътрешният интеграл е равен на $C_S |\xi|^{2s}$, $C_S = \text{const}$, неговата стойност е хомогенна функция от $|\xi|$.

2. Нека m е естествено число и $S \in (m, m+1)$. Изхождайки от зад. 1, намерете еквивалентна норма на $\|\cdot\|_S$, която не съдържа трансформация на Фурие. С нейна помощ докажете още веднъж, че пространствата H_{loc}^S са инвариантни относно дифеоморфизми.

3. Проверете, че включванията

$$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subset H^{-\infty}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

са строги и влагането $H^{-\infty} \rightarrow \mathcal{S}'$ е непрекъснато.

4. Докажете, че $(H^{-\infty})^* = H^{+\infty}$.

5. Нека E е произволно ЛИП. Установете, че едно изображение $T: E \rightarrow H^{+\infty}$ е непрекъснато тогава и само тогава, когато всяко от изображенията $\mathcal{F}_S \circ T$, $S \in \mathbb{R}^1$, където $\mathcal{F}_S: H^{+\infty} \rightarrow H^S$ е естественото влагане, е непрекъснато.

6. Докажете, че за всяко комплексно Z операторът Λ^Z , дефиниран чрез равенството

$$(\Lambda^Z f)(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{\frac{Z}{2}} \hat{f}(\xi),$$

изображава еднозначно обратимо и непрекъснато $H^{-\infty}$ върху $H^{-\infty}$ и $H^{+\infty}$ върху $H^{+\infty}$.

7. Убедете се, че влаганята /46/ са наистина непрекъснати.

8. Нека $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \varphi \leq 1$, е функция, за която $\varphi(x) = 0$ за $|x| \leq 1$, $\varphi(x) = 1$ за $|x| \geq 2$.

Докажете, че за $R > R(s)$ операторът $u \rightarrow \varphi\left(\frac{x}{R}\right) u$ изобразява $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$ и има норма, равна на единица. Убедете се, че както и да избирате функцията $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, равна на нула около $x = 0$ и на единица около $x = \infty$, не можете да получите изображение $u \rightarrow \varphi u$ на $\mathcal{H}^s$ в $\mathcal{H}^s$ с норма, по-малка от единица.

2.4. Теорема за следата в $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$

Както многократно отбелязвахме, в теорията на граничните задачи се нуждаем от пространства, чиито елементи притежават рестрикции върху многообразия с по-малка размерност. Следващата важна теорема показва, че Соболевите пространства удовлетворяват това изискване.

Теорема 2.20. Нека $s > \frac{1}{2}$, а a е реална константа. В такъв случай операторът

$\gamma_0 : u \rightarrow u(x', a)$, $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, $x = (x', x_n)$, който съпоставя на $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ нейната рестрикция

$u(x, a) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$ върху хиперравнината $\mathcal{H}_a : x_n = a$, може да се продължи до непрекъснато изображение на $\mathcal{H}^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ в $\mathcal{H}^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$. Елементът $\gamma_0 u \in \mathcal{H}^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$, се нарича **с л е д а** на u върху $\mathcal{H}_a$. Нещо повече, изображението $x_n \rightarrow (\gamma_0 u)(x_n)$ на $\mathbb{R}^1$ в $\mathcal{H}^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$,

което естествено възниква при дадено u от $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$ е непрекъснато.

Д о к а з а т е л с т в о. Нека $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и $x_n = a$. Ще оценяваме трансформацията на Фурие на функцията

$$x' \rightarrow v(x') \stackrel{\text{def}}{=} u(x', a). \text{ Очевидно имаме}$$

$$/49/ \quad \hat{v}(\xi') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(\xi) e^{ia\xi_n} d\xi_n, \quad \xi = (\xi', \xi_n),$$

където, разбира се, $\hat{u}$ е Фуриеровата трансформация на u . Изхождайки от /49/, последователно получаваме

$$\begin{aligned} |\hat{v}(\xi')|^2 &\leq \frac{1}{4\pi^2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{u}(\xi)| d\xi_n \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi_n}{(1+|\xi|^2)^s} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{u}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^s d\xi_n. \end{aligned}$$

Последният интеграл е очевидно сходящ, защото $\hat{u} \in \mathcal{S}$. Сходимостта на първия следва от неравенството $s > \frac{1}{2}$. Наистина, след субституцията $\xi_n = t(1+|\xi'|^2)^{\frac{1}{2}}$ намираме

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi_n}{(1+|\xi'|^2 + \xi_n^2)^s} &= (1+|\xi'|^2)^{\frac{1}{2}-s} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^s} \\ &= C(1+|\xi'|^2)^{\frac{1}{2}-s}, \quad C = \text{const.} \end{aligned}$$

Получиме

$$(1+|\xi'|^2)^{s-\frac{1}{2}} |\hat{v}(\xi')|^2 \leq C \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{u}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^s d\xi_n,$$

откъдето след интегриране по ξ^1 следва

$$/50/ \quad \|v\|_{s-\frac{1}{2}, \mathbb{R}^{n-1}} \leq C \|u\|_{s, \mathbb{R}^n}, \quad s > \frac{1}{2}.$$

Нека сега $u \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$, $s > \frac{1}{2}$. Апроксимирайки u в $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$ с редица $\{u_\nu\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, с помощта на /50/ получаваме

$$\|u_\nu(x', a) - u_\mu(x', a)\|_{S-\frac{1}{2}, \mathbb{R}^{n-1}} \leq C \|u_\nu - u_\mu\|_{S, \mathbb{R}^n}$$

Излезе, че рестрикциите на $\{u_\nu\}$ върху $\mathcal{H}_a$ клонят към някакъв елемент от $\mathcal{H}^{S-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$, който ще означим с $(\gamma_0 u)(a)$. С обичайните разсъждения се убеждаваме, че $\gamma_0 u$ не зависи от апроксимиращата редица. Като следствие от /50/ получаваме

$$/51/ \quad \|\gamma_0 u\|_{S-\frac{1}{2}, \mathbb{R}^{n-1}} \leq C \|u\|_{S, \mathbb{R}^n}$$

Непрекъснатостта на изображението $x_n \rightarrow (\gamma_0 u)(x_n)$ се доказва аналогично. Прилагайки /51/ към функцията

$$w(x) \stackrel{\text{def}}{=} u(x', x_n + h) - u(x', x_n) \in \mathcal{H}^S(\mathbb{R}^n), \text{ получаваме}$$

$$\|(\gamma_0 u)(x_n + h) - (\gamma_0 u)(x_n)\|_{S-\frac{1}{2}, \mathbb{R}^{n-1}}$$

$$/52/ \quad \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^S |\hat{w}(\xi)|^2 |e^{ih\xi_n} - 1|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}, \quad h \in \mathbb{R}^1.$$

Според теоремата на Лебег при $h \rightarrow 0$ интегралът в /52/ клони към нула и доказателството е завършено. Функцията w е коректно дефинирана, защото $S > 0$ и следователно $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

С л е д с т в и е. Нека k е естествено число, за което

$$S - k - \frac{1}{2} > 0 \text{ и } u \in \mathcal{H}^S(\mathbb{R}^n). \text{ Тогава производните}$$

$$D_{x_n}^k u \in \mathcal{H}^{S-k}(\mathbb{R}^n) \text{ имат еднозначно определени следи}$$

$$\gamma_k(u) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_0(D_{x_n}^k u) \text{ върху всяка хиперравнина } x_n = \text{const.}$$

Операторът $u \rightarrow \gamma_k(u)$, който изобразява $\mathcal{H}^S(\mathbb{R}^n)$ в

$\mathcal{H}^{S-k-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ е непрекъснат. Нещо повече и операторът

$u \rightarrow (\gamma_0(u), \dots, \gamma_l(u))$, където l е най-голямото цяло число, за което $S - l - \frac{1}{2} > 0$, действа непрекъснато от $\mathcal{H}^S(\mathbb{R}^n)$ в пространството

$$\prod(S, x_n, \mathbb{R}^{n-1}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{H}^{S-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}) \times \mathcal{H}^{S-1-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}) \times \dots \times \mathcal{H}^{S-l-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}).$$

Нормата в $\prod$ се дефинира чрез равенството

$$\|u\|_{\prod}^2 = \sum_{k=0}^l \|\gamma_k(u)(x_n)\|_{S-k-\frac{1}{2}, \mathbb{R}^{n-1}}^2$$

З а б е л е ж к а. Не е трудно да се види, че функцията $u \in \mathcal{H}^S(\mathbb{R}^n)$, $S > \frac{1}{2}$, еднозначно се възстановява по нейните следи върху всевъзможните хиперравнини $x_n = \text{const}$. Наистина, понеже $(\gamma_0 u)(x_n) \in \mathcal{H}^{S-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}) \subset L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ за всяко $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ можем да дефинираме функцията

$$F_\varphi(x_n) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\gamma_0 u)(x_n) \varphi(x', x_n) dx',$$

която е непрекъсната и с компактен носител. Теоремата на Фубини прави равенството

$$(u, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} F_\varphi(x_n) dx$$

почти очевидно. Доказателството предоставяме на читателя. Удобно е да се започне с гладкия случай.

К о м е н т а р. По-груба теорема за следата може да се получи и без да използваме трансформацията на Фурие. За простота на означенията ще разгледаме случая $x_n = 0$.

Нека $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, а $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ е функция, която е тъждествено равна на 1 за $|t| \leq \frac{1}{2}$ и се анулира за $|t| \geq 1$. Очевидно имаме

$$u(x', 0) = f(0) u(x', 0) = - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} (f(t) u(x', t)) dt,$$

откъдето следва

$$|u(x', 0)|^2 \leq \int_0^1 \left| \frac{\partial}{\partial t} (f(t) u(x', t)) \right|^2 dt$$

след интегриране по $\mathbb{R}^{n-1}$ получаваме

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x', 0)|^2 dx' \leq \int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} \left| \frac{\partial}{\partial t} (f(t) u(x', t)) \right|^2 dt dx' \leq C_f \|u\|_{1, \mathbb{R}_+^{n-1}}^2$$

където $\mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}^n \cap \{x_n > 0\}$. Тази оценка ни позволява да дефинираме следа върху хиперравнината $x_n = 0$ за всяка функция $u \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$, $s \geq 1$, която обаче този път попада в $\mathcal{H}^{s-1}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Сега ролята на трансформацията на Фурие и на пространствата $\mathcal{H}^s$, $s \in \mathbb{R}^1$ става по-ясна. Именно с тяхна помощ успяхме да получим теорема 2.20. Следващите две теореми ни убеждават, че тя дава максимално точен резултат.

Теорема 2.21 /Теорема за повдигането/. Изображението

$$u \longrightarrow \gamma u \stackrel{\text{def}}{=} (\gamma_0 u, \gamma_1 u, \dots, \gamma_l u)$$

на $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)_\text{в} \prod(s, x_n, \mathbb{R}^{n-1})$

е скрективно.

От този резултат следва, че при дадено $s > \frac{1}{2}$, $s - \frac{1}{2}$ е най-големият показател, за който е вярна оценката /51/. С други думи, $\mathcal{H}^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ е най-тъсното от пространствата $\mathcal{H}^t(\mathbb{R}^{n-1})$, което съдържа следите на елементите от $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$, $s > \frac{1}{2}$. /Вж. зад. 1 от следващото упражнение./

Доказателство. За да опростим означенията, ще разглеждаме само случая $x_n = 0$. Нека функциите $f_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$, $k = 0, 1, \dots, l$, са произволни, но фиксирани. За всяко k , $0 \leq k \leq l$ да вземем по едно $\varphi_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ такова, че

$$(\mathcal{D}_{x_n}^j \varphi_k)(0) = \delta_k^j = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ 1, & k = j. \end{cases} \quad \text{Такива функции се построяват лесно.}$$

Например, ако $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ е тъждествено равна на единица

около началото, функцията $\varphi_k(t) = \psi(t) \frac{t^k}{k!}$ има необходимите

свойства. Да положим

$$u_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} F_{\xi'}^{-1} \left\{ (1 + |\xi'|^2)^{-\frac{k}{2}} \hat{f}_k(\xi') \varphi_k((1 + |\xi'|^2)^{\frac{1}{2}} x_n) \right\}(x').$$

Веднага се вижда, че $u_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и че

$$\hat{u}_k(\xi) = (1 + |\xi'|^2)^{-\frac{k+1}{2}} \hat{f}_k(\xi') \hat{\varphi}_k \left(\frac{\xi_n}{(1 + |\xi'|^2)^{\frac{1}{2}}} \right),$$

откъдето с директно пресмятане стигаме до равенството

$$\|u_k\|_{s, \mathbb{R}^n}^2 = C_k \|f_k\|_{s-k-\frac{1}{2}, \mathbb{R}^{n-1}}^2, \quad C_k = \text{const.}$$

Понесже частичната трансформация на Фурие спрямо ξ' и диференцирането по x_n комутират, благодарение на специалния избор на φ_k получаваме

$$(\mathcal{D}_{x_n}^j u_k)(x', 0) = \delta_k^j f_k(x'), \quad k=0, 1, \dots, l.$$

След като разполагаме с този резултат, да положим

$$\pi(f) = \sum_{k=0}^l u_k \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n), \quad \text{където } f \stackrel{\text{def}}{=} (f_0, f_1, \dots, f_l).$$

Изображението $f \longrightarrow \pi(f)$, което се получава по този начин, е очевидно линейно, а неравенството

$$\|\pi(f)\|_s^2 = \sum_{k=0}^l \|u_k\|_{s, \mathbb{R}^n}^2 \leq C \sum_{k=0}^l \|f_k\|_{s-k-\frac{1}{2}, \mathbb{R}^{n-1}}^2$$

ни позволява да продължим π до линейен оператор от

$\prod(s, 0, \mathbb{R}^{n-1})_\text{в} \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$. При това тъждеството

$$/53/ \quad \gamma \circ \pi = Id$$

се съхранява, защото π и γ са непрекъснати, а векторите от вида $f = (f_0, f_1, \dots, f_l)$, $f_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ са, нався-

където γ е сюрективно, доказателството е завършено.

Т е о р е м а 2.22. Елементите на $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq s \leq \frac{1}{2}$ не "оставят" следи върху хиперравнините $x_n = \text{const}$. С други думи, операторът $\gamma_0 : u \rightarrow u(x', a)$, $a = \text{const}$, дефиниран в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, не допуска разумно продължение в цялото $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$.

Д о к а з а т е л с т в о. Да означим с X подпространството на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, което се състои от функциите f , за които $f(x', 0) \equiv 0$, $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Достатъчно е да докажем, че $\overline{X} = \mathcal{H}^s$, като затворената обвивка на X се взема спрямо нормата в $\mathcal{H}^s$.

Да допуснем, че $\overline{X} \neq \mathcal{H}^s$ и да означим с v_0 някакъв ненулев елемент от $(\overline{X})^\perp$. Такъв съществува според лемата за ортогоналната проекция. И така, за всяко $u \in \overline{X}$ имаме

$$/54/ \quad (v_0, u)_s = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s \hat{v}_0(\xi) \hat{u}(\xi) d\xi = 0.$$

Нашата цел ще бъде постигната, ако установим, че $v_0 = 0$. За да стигнем до това заключение имаме нужда от

Л е м а 2.7. Нека $v \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ и нека $\frac{\partial v}{\partial x_n} = 0$ в $D'(\mathbb{R}^n)$. Тогава съществува $h \in L_{loc}(\mathbb{R}^{n-1})$ такова, че $v(x) = h(x')$, $x = (x', x_n)$ почти навсякъде в $\mathbb{R}^n$.

Д о к а з а т е л с т в о. Нека

$$v_\varepsilon(x) \stackrel{\text{def}}{=} (v * \chi_\varepsilon)(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} v(y) \chi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy,$$

където χ е камбановидната функция от стр.174. Веднага се вижда,

че $\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_n} \equiv 0$ и понеже $v_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, заключаваме, че

$v_\varepsilon = v_\varepsilon(x')$. Тъй като според теорема 1.2 в/, стр.174 при $\varepsilon \rightarrow 0$ $v_\varepsilon \rightarrow v$ в $L_{loc}(\mathbb{R}^n)$, лемата е доказана.

Сега да се върнем към доказателството на теоремата. Да поставим в /54/ $u = x_n f(x)$, където f е произволна функция от $\mathcal{S}$. Да положим за краткост $w \stackrel{\text{def}}{=} (1 + |\xi|^2)^s \hat{v}_0(\xi) \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Понеже $x_n f = i \frac{\partial}{\partial \xi_n} \hat{f}$, от /54/ получаваме $(w, \frac{\partial}{\partial \xi_n} \hat{f}) = 0$, т.е. $\frac{\partial w}{\partial \xi_n} = 0$ в $D'(\mathbb{R}^n)$, защото съответствието $f \rightarrow \hat{f}$ изобразява $\mathcal{S}$ върху цялото $\mathcal{S}$. Сега лема 2.7 ни дава $w(\xi) = h(\xi')$ почти навсякъде в $\mathbb{R}^n$. По този начин получихме равенството

$$/55/ \quad (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{v}_0(\xi) = \frac{h(\xi')}{(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}}}, \quad \xi = (\xi', \xi_n)$$

и за да завършим доказателството остава да вземем пред вид, че

$$/56/ \quad \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |h(\xi')|^2 \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_n}{(1 + |\xi|^2)^s} \right) d\xi' = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|h(\xi')|^2}{(1 + |\xi|^2)^s} d\xi < \infty$$

защото $(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{v}_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ по условие. Тъй като

$$\int (1 + |\xi|^2)^s d\xi_n = \infty^1 \quad \text{за всяко } \xi', \text{ от /56/ следва,}$$

че $h(\xi') = 0$ почти навсякъде в $\mathbb{R}^{n-1}$. Излезе, че $\hat{v}_0 = 0$ в $\mathcal{S}'$, т.е. $v_0 = 0$ в $\mathcal{H}^s$ противно на предположението.

Полученото противоречие доказва теоремата.

У п р а ж н е н и е 8

1. Установете, че за $s > \frac{1}{2}$ $\mathcal{H}^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ е минималното пространство, което съдържа следите на всички елементи от $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$.

¹Припомняме, че $s \leq \frac{1}{2}$.

У п ъ т в а н е. Вземете елемент $v \in \mathcal{H}^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$, който не се съдържа в никое от пространствата $\mathcal{H}^t(\mathbb{R}^{n-1})$, $t < s - \frac{1}{2}$ и с помощта на теорема 2.21 конструирайте $u \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$, за което $\gamma_0 u = v$.

2. Докажете, че операторът $\gamma_1 : u \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', 0)$ не може разумно да се продължи от $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$.

У п ъ т в а н е. Установете директно, че множеството на функциите $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, за които $\frac{\partial u}{\partial x_n}(x', 0) = 0$ е навсякъде гъсто в $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$.

2.5. Изследване на пространствата

$$\mathcal{H}^s(\mathbb{R}_+^n) \text{ и } \mathcal{H}_0^s(\mathbb{R}_+^n)$$

В тази точка започваме изследването на пространствата $\mathcal{H}^s(\Omega)$, където $\Omega \neq \mathbb{R}^n$. Нашето внимание ще бъде съсредоточено върху най-простия случай, когато Ω е полупространство. Ще започнем с няколко теореми за гъстота. Резултати от такъв род са много важни, защото ни позволяват да се ограничаваме с разглеждането само на гладки функции. За удобство при цитирането ще формулираме един по същество вече установен резултат.

Л е м а 2.8. Каквото и да бъде $s \in \mathbb{R}^1$, елементите на $D(\mathbb{R}^n)$ са разположени навсякъде гъсто в $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$.

Д о к а з а т е л с т в о. Според теорема 2.10, стр. 540 елементите на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ са навсякъде гъсто в $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$. От своя страна според лема 2.2, стр. 189 елементите на $D(\mathbb{R}^n)$ са навсякъде гъсто в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Като вземем пред вид, че топологията в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ е по-силна от тази в $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$, стигаме до желаното заключение.

Т е о р е м а 2.23. Нека $\mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}^n \cap \{x_n > 0\}$ и m е естествено число. В такъв случай рестрикциите на елементите от

$D(\mathbb{R}^n)$ са навсякъде гъсто в $\mathcal{H}^m(\mathbb{R}_+^n)$.

Д о к а з а т е л с т в о. Нека $u \in \mathcal{H}^m(\mathbb{R}_+^n)$ и нека $u_{-h}(x) \stackrel{\text{def}}{=} u(x', x_n + h)$, $h > 0$. (Както обикновено $x = (x', x_n)$.) Очевидно е, че $u_{-h} \in \mathcal{H}^m(\mathbb{R}_+^n)$. Не е трудно да се види, че $\|u_{-h} - u\|_{m, \mathbb{R}_+^n} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.

Наистина, това свойство веднага следва от аналогичното свойство на елементите от $L^2(\mathbb{R}^n)$, където пак то е директно следствие от гъстотата на $C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ в $L^2(\mathbb{R}_+^n)$. След като направихме тази констатация, да разгледаме функцията

$$v_{-h}(x) = \begin{cases} g(x_n) u_{-h}(x), & x_n > -h \\ 0, & x_n \leq -h \end{cases}$$

където

$$g(x_n) = \begin{cases} 0, & x_n \leq -\frac{2}{3}h \\ 1, & x_n \geq -\frac{h}{3}. \end{cases}$$

и освен това $g \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ и удовлетворява неравенствата $0 \leq g \leq 1$. С формулата на Лайбниц веднага проверяваме, че $v_{-h} \in \mathcal{H}^m(\mathbb{R}^n)$. Нека сега $\varepsilon > 0$ е произволно. Да фиксираме $h = h(\varepsilon) > 0$ по такъв начин, че да имаме $\|u_{-h} - u\|_{m, \mathbb{R}_+^n} < \varepsilon$.

След това с лема 2.8 да изберем $f \in D(\mathbb{R}^n)$ по такъв начин, че неравенството $\|v_{-h} - f\|_{m, \mathbb{R}^n} < \varepsilon$ да бъде удовлетворено. След тази подготовка намираме

$$\begin{aligned} \|u - f\|_{m, \mathbb{R}_+^n} &\leq \|u - u_{-h}\|_{m, \mathbb{R}_+^n} + \|u_{-h} - f\|_{m, \mathbb{R}_+^n} \\ &\leq \varepsilon + \|v_{-h} - f\|_{m, \mathbb{R}_+^n} < 2\varepsilon, \end{aligned}$$

с което теоремата е доказана.

Следва най-простата, но твърде важна теорема за продължителност.

Т е о р е м а 2.24. Нека m е естествено число. Съществува непрекъснат линеен оператор

$$P: H^m(\mathbb{R}_+^n) \longrightarrow H^m(\mathbb{R}^n)$$

такъв, че за всяко $u \in H^m(\mathbb{R}_+^n)$ са в сила неравенствата

$$/57/ \quad \|u\|_{m, \mathbb{R}_+^n} \leq \|Pu\|_{m, \mathbb{R}^n} \leq C \|u\|_{m, \mathbb{R}_+^n}$$

и в $\mathbb{R}_+^n$ е в сила тъждеството $Pu = u$.

С други думи, всяка функция от $H^m(\mathbb{R}_+^n)$ може да се продължи до функция от $H^m(\mathbb{R}^n)$ без нормата ѝ съществено да се увеличи. (Константата C не зависи от u .)

Д о к а з а т е л с т в о. Да означим с $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ линейното пространство, образувано от рестрикциите в $\overline{\mathbb{R}_+^n}$ на функциите от $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и да предположим, че $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^n})$. След това да фиксираме някакво естествено $N \geq m$ и да въведем функцията

$$/58/ \quad (Pu)(x', x_n) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} u(x', x_n), & x_n \geq 0 \\ \sum_{k=0}^N \alpha_k u(x', -kx_n), & x_n < 0, \end{cases}$$

където коефициентите α_k са на наше разположение. Веднага се вижда, че $Pu \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ тогава и само тогава, когато двете функции, участващи в дефиницията на Pu се сливат гладко при $x_n = 0$, т.е. когато са в сила равенствата

$$/59/ \quad 1 = \sum_{k=0}^N (-k)^j \alpha_k, \quad j = 0, 1, \dots, N.$$

Тъй като детерминантата на системата /59/ е от типа на Вандермонд, тя е различна от нула и числата α_k са еднозначно определени. Тъй като по дефиниция в $\mathbb{R}_+^n$ имаме $Pu = u$, неравенството

$$\|u\|_{m, \mathbb{R}_+^n} \leq \|Pu\|_{m, \mathbb{R}_+^n}$$

е очевидно. От друга страна, използвайки явния вид на Pu , леко получаваме

$$/60/ \quad \|Pu\|_{m, \mathbb{R}^n} \leq C \|u\|_{m, \mathbb{R}_+^n}.$$

с константа, зависеща само от N .

С това неравенствата /57/ са установени за функции от $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^n})$. Нека сега u е произволен елемент от $H^m(\mathbb{R}_+^n)$ и $\{u_j\} \subset \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ е редица, която апроксимира u в $H^m(\mathbb{R}_+^n)$. От /60/ веднага следва, че $\{Pu_j\}$ е сходяща в $H^m(\mathbb{R}^n)$. Да означим нейната граница с v . С обичайните разсъждения се убеждаваме, че v не зависи от апроксимиращата редица, а само от u . Полагайки $Pu = v$, завършваме доказателството, защото неравенствата /57/ се запазват след граничния преход.

Т е о р е м а 2.24 ни позволява да дефинираме още една норма в $H^m(\mathbb{R}_+^n)$, която е еквивалентна с изходната, но лесно се подава на обобщение.

Т е о р е м а 2.25. Нека $u \in H^m(\mathbb{R}_+^n)$, а m е естествено число. Да означим с $\mathcal{N}_m(u)$ изпъкналото подмножество на $H^m(\mathbb{R}^n)$, което се състои от онези функции $v \in H^m(\mathbb{R}^n)$, които съвпадат с u в $\mathbb{R}_+^n$. (Понеже $H^m(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и множеството $\mathbb{R}_+^n$ е отворено, релацията $u = v$ в $\mathbb{R}_+^n$ е коректно дефинирана.) Да положим

$$/61/ \quad \|u\|_m^+ \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{v \in \mathcal{N}_m(u)} \|v\|_{m, \mathbb{R}^n}$$

Оказва се, че функционалът /61/ е норма в $H^m(\mathbb{R}_+^n)$ и то еквивалентна с изходната.

Д о к а з а т е л с т в о. Ясно е, че /61/ е полунорма и че класът $\mathcal{N}(u)$ не е празен – той съдържа например елемента Pu , дефиниран в теорема 2.24. По-нататък от /57/ и /61/ веднага следват неравенствата

$$\|u\|_{m, \mathbb{R}^n} \leq \|u\|_m^+ \leq \|Pu\|_{m, \mathbb{R}^n} \leq C \|u\|_{m, \mathbb{R}_+^n},$$

които показват, че /61/ е норма в $\mathcal{H}^m(\mathbb{R}_+^n)$ и то еквивалентна с $\|\cdot\|_{m, \mathbb{R}_+^n}$.

Сега вече сме готови да дадем

Д е ф и н и ц и я 2.10. Нека s е произволно реално число. С $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}_+^n)$ ще означаваме линейното пространство на разпределенията от $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^n)$, всяко от които съвпада в $\mathbb{R}_+^n$ с някакъв елемент от $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$. Норма в $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}_+^n)$ ще дефинираме с равенството

$$/62/ \quad \|u\|_s^+ = \inf_{v \in \mathcal{R}_s(u)} \|v\|_s,$$

където $\mathcal{R}_s(u)$ се състои от онези елементи на $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$, които съвпадат с u в $\mathbb{R}_+^n$.

Не е трудно да се види, че $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}_+^n)$ е пълно относно току-що въведената норма и че инфимумът в /62/ се достига. За да се убедим в това, достатъчно е да променим само гледната точка: да наречем два елемента v_1 и v_2 от $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$ еквивалентни, ако съвпадат в $\mathbb{R}_+^n$. Да положим

$$\mathcal{N} = \{w: w \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n), \text{supp } w \subset \overline{\mathbb{R}_-^n}\},$$

където $\overline{\mathbb{R}_-^n} = \mathbb{R}^n \cap \{x_n \leq 0\}$.

Ясно е, че $\mathcal{N}$ е затворено подпространство на $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$ и че два елемента v_1 и v_2 са еквивалентни точно, когато $v_1 - v_2 \in \mathcal{N}$. Сега /62/ взема вида

$$/63/ \quad \|u\|_s^+ = \inf_{w \in \mathcal{N}} \|u_0 + w\|_s,$$

където u_0 е кое да е продължение на u в $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$ - например P_u . Понеже $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$ е Хилбертово, според следствие 2 от теорема 3.10, стр.104 и $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)/\mathcal{N}$ е Хилбертово с норма

$$\|v\|_s^+ = \inf_{w \in \mathcal{N}} \|v + w\|_s = \|v_N\|_s,$$

където $v_N \subset \mathcal{N}^\perp$ е компонентата на v в директната сума

$\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n) = \mathcal{N} \oplus \mathcal{N}^\perp$. Съпоставяйки на $u \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}_+^n)$ единствения клас, който съдържа Pu , получаваме линейна изометрия между $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}_+^n)/\mathcal{N}$ и $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}_+^n)$, с която пълнотата на последното е установена.

Ако $s > \frac{1}{2}$, теоремата за следата се пренася по очевиден начин и за елементите от $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}_+^n)$.

Д е ф и н и ц и я 2.11. Нека $u \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}_+^n)$, $s > \frac{1}{2}$. Следи на u върху хиперравнината $x_n = a$, $a = \text{const} \geq 0$ наричаме следата на кое да е разпределение от $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$, което съвпада с u в $\mathbb{R}_+^n$.

За да установим, че дефиницията е коректна, трябва да докажем, че следата на кое да е разпределение от

$$\mathcal{N} = \{w: w \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n), \text{supp } w \subset \overline{\mathbb{R}_-^n}, \text{ върху } x_n = a \geq 0 \text{ е нула.}$$

И така, нека $u \in \mathcal{N}$ и нека $u_\varepsilon(x) \stackrel{\text{def}}{=} (u * \chi_\varepsilon)(x)$, където $\chi_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^n} \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, а χ е камбановидната функция от стр.

174. Свойствата на конволюцията ни дават

$$\text{supp } u_\varepsilon \subset \{x \in \mathbb{R}^n, x_n \leq \varepsilon\}. \text{ Ясно е, че } u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

и $u_\varepsilon \rightarrow u$ в $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n)$. Наистина

$$\|u_\varepsilon - u\|_s^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s \left| \chi(\varepsilon\xi) - 1 \right|^2 |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

и теоремата на Лебег показва, че $\|u_\varepsilon - u\|_s^2 \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Нека най-напред $a > 0$. Понеже за $\varepsilon < a$ имаме $u_\varepsilon|_{x_n=a} = 0$,

заклучаваме, че $(\gamma_0 u)(a) = 0$. Сега равенството $(\gamma_0 u)(0) = 0$ следва от факта, че според теорема 2.20 изображението

$$x_n \rightarrow (\gamma_0 u)(x_n) \text{ е непрекъснато.}$$

З а б е л е ж к а. Нека $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^n)$, а m е естествено число. Комбинирайки /50/ с второто от неравенствата /57/, намираме

$$/64/ \quad \| \gamma_0 v \|_{m-\frac{1}{2}, \mathbb{R}^{n-1}} \leq C_1 \| P v \|_{m, \mathbb{R}^n} \leq C_2 \| v \|_{m, \mathbb{R}_+^n}$$

- съотношение, което ни позволява да дефинираме следа в $H^m(\mathbb{R}_+^n)$ без явно да прибавяме до продължение в $H^m(\mathbb{R}^n)$. Разбира се, /64/ се запазва за произволни елементи от $H^m(\mathbb{R}_+^n)$.

Разполагайки с деф.2.11, можем да характеризираме $H_0^m(\mathbb{R}_+^n)$ като подмножество на $H^m(\mathbb{R}_+^n)$.

Т е о р е м а 2.26. Нека m е естествено число. Един елемент $u \in H^m(\mathbb{R}_+^n)$ се съдържа в $H_0^m(\mathbb{R}_+^n)$ тогава и само тогава, когато $\gamma_k u|_{x_n=0} = 0$ за $k = 0, 1, \dots, m-1$.

Припомняме, че $\gamma_k(u) = \gamma_0(D_{x_n}^k u)$ по дефиниция.

Д о к а з а т е л с т в о. Че следите $\gamma_k|_{x_n=0} = 0$ на елементите от $H_0^m(\mathbb{R}_+^n)$ се анулират е очевидно. По-интересно е обратното твърдение. За краткост ще разгледаме случая $m = 1$. Общият случай се третира аналогично. Нека $u \in H^1(\mathbb{R}_+^n)$ и нека $\gamma_0 u|_{x_n=0} = 0$. Ще установим, че функцията

$$\tilde{u} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} u, & x_n \geq 0 \\ 0, & x_n < 0 \end{cases}$$

се съдържа в $H^1(\mathbb{R}^n)$. Понеже за $j < n$ производните $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_j}$ очевидно се съдържат в $L^2(\mathbb{R}^n)$, остава да се докаже, че и $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_n} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. За тази цел ще установим едно общо съотношение. Нека най-напред $u \in D(\mathbb{R}_+^n)$ и $\tilde{u}$ е дефинирано както по-горе. Използвайки дефиницията на диференцирането в $D'(\mathbb{R}^n)$, за произволно $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ получаваме

$$/65/ \quad \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_n}, \varphi \right) = - \left(\tilde{u}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right) = - \int_{\mathbb{R}_+^n} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} dx =$$

$$= - \int_{x_n=0} (\gamma_0 u)(\gamma_0 \varphi) dx' + \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\partial u}{\partial x_n} \varphi dx.$$

Разбира се, последното равенство получихме с интегриране по части. Не е трудно да се види, че /65/ се запазва за всяко $u \in H^1(\mathbb{R}_+^n)$. За тази цел е достатъчно да апроксимираме u в $H^1(\mathbb{R}_+^n)$ с редица $\{u_\nu\} \subset D(\mathbb{R}_+^n)$ и да вземем пред вид, че

$$\left| \int_{x_n=0} (\gamma_0 u_\nu - \gamma_0 u)(\gamma_0 \varphi) dx \right| \leq \| \gamma_0 u_\nu - \gamma_0 u \|_{\frac{1}{2}, \mathbb{R}^{n-1}} \| \gamma_0 \varphi \|_{-\frac{1}{2}, \mathbb{R}^{n-1}}.$$

След като установим /65/ в общия случай, допускайки, че

$$\gamma_0 u|_{x_n=0} = 0, \text{ получаваме тъждеството } \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_n}, \varphi \right) = \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\partial u}{\partial x_n} \varphi dx, \text{ т.е. } \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_n} = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_n}, & x_n \geq 0 \\ 0, & x_n < 0 \end{cases}$$

което показва, че наистина $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_n} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. По този начин установихме, че наистина $\tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^n)$. За да завършим доказателството да вземем $\varepsilon > 0$ и да изберем $h = h(\varepsilon) > 0$ толкова

малко, че да имаме $\| \tilde{u}_h - \tilde{u} \|_{1, \mathbb{R}^n} < \varepsilon$, където

$$\tilde{u}_h(x) = \tilde{u}(x', x_n - h). \text{ След това да въведем функцията } v_{h\delta}(x) = (\tilde{u}_h * \chi_\delta)(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

и да фиксираме толкова малко δ , $\delta = \delta(\varepsilon) < \frac{h(\varepsilon)}{2}$, че да имаме $\| v_{h\delta} - \tilde{u}_h \|_{1, \mathbb{R}^n} < \varepsilon$. Понеже $\text{supp } v_{h\delta}$ се

съдържа в полуравнината $x_n \geq \frac{h(\varepsilon)}{2} > 0$, нашата задача е почти решена. Ако вземем функция $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, тъждествено

равна на единица за $|x| \leq 1$, за $R > R(\varepsilon)$ получаваме

$$\left\| \varphi\left(\frac{x}{R}\right) u_{h\delta} - u_{h\delta} \right\|_{1, R^n} < \varepsilon. \quad \text{С това всичко е доказа-}$$

но, защото $\varphi\left(\frac{x}{R}\right) u_{h\delta} \in C_0^\infty(R^n)$ и освен това

$$\left\| \varphi\left(\frac{x}{R}\right) u_{h\delta} - u \right\|_{1, R^n} \leq \left\| \varphi\left(\frac{x}{R}\right) u_{h\delta} - \tilde{u} \right\|_{1, R^n} < 3\varepsilon.$$

У п р а ж н е н и е 9

1. Нека Ω е област в R^n , а s е реално число. Да означим с $H_0^s(\Omega)$ затворената обвивка в $H^s(R^n)$ на функциите от $C_0^\infty(\Omega)$. Докажете, че $H_c^s(\Omega) \subset H_0^s(\Omega)$. В случая $s > \frac{1}{2}$

$\Omega = R_+^n$ характеризирайте $H_0^s(R_+^n)$ като подмножество на $H^s(R_+^n)$.

2. Нека m е естествено число, а $p \geq 1$. Конструирайте линейен непрекъснат оператор $P: H^{m,p}(R_+^n) \rightarrow H^{m,p}(R_+^n)$, който продължава елементите на $H^{m,p}(R_+^n)$ до елементи от $H^{m,p}(R^n)$. Докажете, че $D(R_+^n)$ е навсякъде гъсто в $H^{m,p}(R^n)$.

2.6. Изследване на пространствата

$H^m(\Omega)$. Дефиниция на

$H^s(\Gamma)$. Обща теорема за

следата

В тази точка доказваме теореми 2.2 - 2.5, формулирани в точка 2.1 на този параграф /последните две в отслабена форма/. Освен това дефинираме пространствата $H^s(\partial\Omega)$ за $s \geq 0$ в случая, когато $\partial\Omega$ е достатъчно гладка и завършваме с общата теорема за следата.

Ще започнем с доказателството на теоремата на Майерс и Серин, в която не се правят никакви предположения за гладкост на $\partial\Omega$.

Т е о р е м а 2.3 (Майерс и Серин, 1964). Нека Ω е произволна област в R^n , m е естествено число, а $p \geq 1$. Нека $C^{m,p}(\Omega)$ е линейното подпространство на $C^m(\Omega)$ състоящо се от функциите, за които

$$\| \varphi \|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha \varphi|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty. \quad /66/$$

В такъв случай затворената обвивка на $C^{m,p}(\Omega)$ относно нормата /66/ съвпада с $H^{m,p}(\Omega)$

Д о к а з а т е л с т в о. Нека

$$\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega \subset \dots \subset \Omega,$$

$\bar{\Omega}_j \subset \Omega_{j+1}$ е растяща редица от ограничени об-

ласти, изчерпваща Ω . За единство в означенията да положим $\Omega_0 = \emptyset$. В такъв случай отворените множества

$\{\Omega_{j+1} \setminus \bar{\Omega}_{j-1}\}, \quad j = 1, 2, 3, \dots$ покриват Ω . Да означим с $\{\psi_j\}$ едно локално крайно C^∞ разлагане на единицата,

подчинено на покритието $\{\Omega_{j+1} \setminus \bar{\Omega}_{j-1}\}$, като при това, именно $\text{supp } \psi_j \subset \Omega_{j+1} \setminus \bar{\Omega}_{j-1}, \quad j = 1, 2, 3, \dots$ /вж. зад.4,

стр.364/. След тази подготовка да вземем произволен елемент $u \in H^{m,p}(\Omega)$ и произволно $\varepsilon > 0$. Нека, както обикновено

$$(\psi_j u)_{\varepsilon_j}(x) \stackrel{\text{def}}{=} ((\psi_j u) * \chi_{\varepsilon_j})(x)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_j^n} \int_{|x-y| \leq \varepsilon_j} (\psi_j u)(y) \chi\left(\frac{x-y}{\varepsilon_j}\right) dy,$$

където χ е камбановидната функция от стр.174. Избирайки ε_j достатъчно малко, да си осигурим неравенството

$$\|(\psi_j u)_{\varepsilon_j} - \psi_j u\|_{m,p} < \frac{\varepsilon}{2^j} \quad \text{и} \quad \text{включването}$$

$$\text{supp } (\psi_j u)_{\varepsilon_j} \subset \Omega_{j+1} \setminus \bar{\Omega}_{j-1}, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

След това да разгледаме функцията

$$/67/ \quad u_{\varepsilon}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} (\psi_j u)_{\varepsilon_j}(x), \quad x \in \Omega.$$

Понеже за всеки компактен $K \subset \Omega$ само краен брой от събираемите в /67/ са различни от нула, можем да твърдим, че $u_{\varepsilon} \in C^{\infty}(\Omega)$. По същите съображения $u_{\varepsilon} \in H^{m,p}(\Omega_k)$, за $k = 1, 2, 3, \dots$. За да завършим доказателството остава да забележим, че

$$\begin{aligned} \|u - u_{\varepsilon}\|_{m,p,\Omega_k} &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \|u \psi_j - (u \psi_j)_{\varepsilon_j}\|_{m,p,\Omega_k} \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \|u \psi_j - (u \psi_j)_{\varepsilon_j}\|_{m,p,\Omega} < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Оставяйки k да расте в неравенството $\|u - u_{\varepsilon}\|_{m,p,\Omega_k} < \varepsilon$, получаваме $\|u - u_{\varepsilon}\|_{m,p,\Omega} \leq \varepsilon$, с което доказателството е завършено.

З а б е л е ж к а 1. Естествено възниква въпросът защо не можем вместо с u_{ε} да апроксимираме u с парциалните суми

$u_{\varepsilon,\mu} = \sum_1^{\mu} (u \psi_j)_{\varepsilon_j} \in C^{\infty}(\Omega)$ и да стигнем до абсурдното заключение, че $H_0^{m,p}(\Omega) = H^{m,p}(\Omega)$. Отговорът е ясен - ние установихме сходимостта на редицата $\{u_{\varepsilon,\mu}\}$ само върху компактните подмножества на Ω и в общия случай тя не е сходяща в $H^{m,p}(\Omega)$.

З а б е л е ж к а 2. За $p = \infty$ теоремата не е вярна, защото би излязло, че $H^{m,\infty}(\Omega) = C^{m,\infty}(\Omega)$ - равенство, което очевидно е невъзможно. Например функцията $x \rightarrow |x| \in H^{2,\infty}(-1, 1)$, но не се съдържа в $C^1(-1, 1)$.

Ето едно просто приложение на теоремата на Майерс и Серин.

Т е о р е м а 2.27. Нека Ω е област в $\mathbb{R}^n$ и $u \in H^1(\Omega)$, а f е функция от класа $C^1(\mathbb{R})$ с ограничена производна. Тогава $f(u) \in H^1(\Omega)$ и $\frac{\partial f(u)}{\partial x_j} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial x_j}$, $j=1, 2, \dots, n$.

Д о к а з а т е л с т в о . Нека $\{u_{\nu}\} \subset C^1(\Omega)$ е редица от функции, която клони към u в $H^1(\Omega)$. Без ограничение на общността можем да предположим, че $\{u_{\nu}\}$ е сходяща и почти навсякъде в Ω , защото сходимостта в $L^2(\Omega)$ ни осигурява съществуването на подредица с това свойство ([6], стр.379). Да положим $M = \sup_{\mathbb{R}} |f'|$. Очевидно имаме

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(u_{\nu}) - f(u)|^2 dx &\leq M^2 \int_{\Omega} |u_{\nu} - u|^2 dx \rightarrow 0 \\ \int_{\Omega} \left| f'(u_{\nu}) \frac{\partial u_{\nu}}{\partial x_j} - f'(u) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^2 dx &\leq 2 \int_{\Omega} \left| f'(u_{\nu}) \frac{\partial u_{\nu}}{\partial x_j} - f'(u_{\nu}) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^2 dx \\ &\quad + 2 \int_{\Omega} \left| f'(u_{\nu}) \frac{\partial u}{\partial x_j} - f'(u) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^2 dx \\ &\leq 2 M^2 \left\| \frac{\partial u_{\nu}}{\partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 I_{\nu}. \end{aligned}$$

Понеже $f'(u_{\nu}) \rightarrow f'(u)$ почти навсякъде в Ω и $|f'(u_{\nu}) - f'(u)| \leq 2M$, теоремата на Лебег ни позволява да твърдим, че $I_{\nu} \rightarrow 0$. Понеже $\left\| \frac{\partial u_{\nu}}{\partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_{\nu} - u\|_{1,\Omega} \rightarrow 0$, доказателството е завършено.

С л е д с т в и е . Ако $u \in H^1(\Omega)$, то и функциите $u^+ = \max(u, 0)$, $u^- = \min(u, 0)$ и $|u|$ се съдържат в $H^1(\Omega)$.

Доказателство. Да разгледаме функцията $f_\varepsilon(t) = \sqrt{t^2 + \varepsilon^2}$, която очевидно удовлетворява изискванията в теоремата. Нека $\varphi \in D(\Omega)$. Според доказаната теорема имаме

$$\int_{\Omega} f_\varepsilon(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = - \int_{\Omega} \varphi(x) \frac{u \frac{\partial u}{\partial x_j}}{(u^2 + \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} dx,$$

откъдето, извършвайки граничния преход $\varepsilon \rightarrow 0$ отново използваме теоремата на Лебег/, получаваме

$$\int_{\Omega} |u| \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} (\text{sign } u) \varphi dx, \text{ т.е. } \frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial u}{\partial x_j} \text{sign } u.$$

С това доказателството е завършено, защото $u^+ = \frac{u+|u|}{2}$, $u^- = \frac{u-|u|}{2}$.

Останалата част от тази точка е посветена на изследването на ограничените области от класа C^m , където m е естествено число. В следващата лема е описана една основна процедура, известна като "изправяне" на границата.

Лема 2.9. Нека $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ е ограничена област от класа C^m /деф.2.3, стр.519/. В такъв случай нейната граница Γ може да се покрие с краен брой области $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n$ такива, че в Ω_i съществува C^m дифеоморфизъм

$$h_i: \Omega_i \longrightarrow B = \{y: y \in \mathbb{R}^n, |y| < 1\},$$

който изобразява $\Omega_i \cap \bar{\Omega}$ върху полукълбото $\bar{B}^+ = B \cap \{y_n \geq 0\}$, а $\Omega_i \cap \Gamma$ върху $B \cap \{y_n = 0\}$.

Доказателство. Нека x_0 е произволна точка от Γ и нека $\bar{O}_{x_0} \subset \mathbb{R}^n$ е толкова малка околност на x_0 , че $\Gamma \cap \bar{O}_{x_0}$ да се задава с уравнение от вида $\phi(x) = 0$, къде-

то $\phi \in C^m(\bar{O}_{x_0})$ и $\text{grad } \phi \neq 0$ в $\bar{O}_{x_0}$. Без ограничение на общността можем да предполагаме, че $\frac{\partial \phi}{\partial x_n} \neq 0$ в $\bar{O}_{x_0}$, защото в противен случай можем да намалим $\bar{O}_{x_0}$ и да променим номерацията на координатите. След това утаяване да разгледаме изображението

$$1/68/ \quad y = \psi(x), \quad \psi(x) = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \phi(x)).$$

Очевидно имаме $\det |J_\psi(x)| = \frac{\partial \psi}{\partial x_n}(x) \neq 0$ в $\bar{O}_{x_0}$.

и следователно според теоремата за неявните функции ψ изобразява някаква по-малка околност $\bar{O}'_{x_0} \subset \bar{O}_{x_0}$ в отворено подмножество на $\mathbb{R}^n_y$. Ясно е, че точките от $\bar{O}'_{x_0} \cap \Gamma$ се трансформират в точки от вида $(y', 0)$, $y' = (y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$. Да означим $\psi(x_0)$ с y_0 и да разгледаме кълбото

$B_r(y_0): |y - y_0| < r$, където r е толкова малко, че $B_r(y_0) \subset \psi(\bar{O}'_{x_0})$. Тогава $\bar{O}''_{x_0} \stackrel{\text{def}}{=} \psi^{-1}(B_r(y_0))$

ще бъде отворена околност на x_0 , която е C^m дифеоморфна с $B_r(y_0)$. За да завършим доказателството, остава да разгледаме

дифеоморфизма $h: x \longrightarrow k \frac{\psi(x) - y_0}{r}$, където $k = \pm 1$. Ясно

е, че h изобразява $\bar{O}''_{x_0}$ в единичното кълбо B . Избирайки целесъобразно знака на k можем да си осигурим и равенството $h(\bar{O}''_{x_0} \cap \bar{\Omega}) = B \cap \{y_n \geq 0\}$. Тъй като Γ е компактно подмножество на $\mathbb{R}^n$, избирайки крайно покритие с области от вида $\bar{O}''_{x_0}$, завършваме доказателството.

Следващият елементарен резултат е формулиран отделно само за удобство при цитирането.

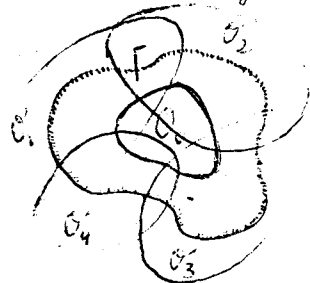
Лема 2.10. Включването $\mathcal{H}_c^m(\bar{\Omega}) \subset \mathcal{H}_0^m(\bar{\Omega})$ е в сила за произволна област от $\mathbb{R}^n$.

Доказателство. Трябва да установим, че ако $u \in \mathcal{H}^m(\bar{\Omega})$ и $\text{supp } u \subset \bar{\Omega}$, то $u \in \mathcal{H}_0^m(\bar{\Omega})$. Вед-

нага се вижда, че ако $u_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} u * \chi_\varepsilon$ е средната функция на u и $\varepsilon \in \rho(\text{supp } u, \partial \Omega)$, то $u_\varepsilon \in D(\Omega)$ и $u_\varepsilon \rightarrow u$ в $H^m(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. /Сравнете с разсъжденията след деф. 2.11, стр. 581 /.

С това лемата е доказана.

Лема 2.11. Нека отново Ω е ограничена област от класа C^m и $\{O_j\}$, $j = 1, 2, \dots, N$ крайното покритие на $\partial \Omega = \Gamma$,



Фиг. 11

което конструирахме в лема 2.9, а $h_j: O_j \rightarrow B$ са съответните дифеоморфизми. Нека $O'_j, \bar{O}'_j \subset \Omega$

е отворено множество, което съдържа

$\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^N O'_j$, а $\{\xi_j\}$.

$\text{supp } \xi_j \subset O'_j$, $j = 0, 1, \dots, N$,

е C^∞ разлагане на единицата около Ω , подчинено на покритието $\{O'_j\}$.

Тогав едно разпределение u от $D'(\Omega)$ принадлежи на $H^m(\Omega)/H_0^m(\Omega)$ тогава и само тогава, когато всяко от разпределенията $\xi_j u$, $j = 0, 1, \dots, N$ се съдържа в $H^m(\Omega)/H_0^m(\Omega)$. (Пишейки $\xi_j u$, в момента под ξ_j разбираме рестрикцията на ξ_j в Ω .)

Доказателство. Ако $u \in H^m(\Omega)$, с помощта на формулата на Лайбниц веднага се вижда, че $\xi_j u \in H^m(\Omega)$, $j = 0, 1, \dots, N$. Обратното е още по-тривиално, защото $H^m(\Omega)$ е линейно пространство. Малко по-интересно е твърдението, което се отнася до $H_0^m(\Omega)$.

Нека най-напред $u \in H_0^m(\Omega)$. Понеже $\text{supp } \xi_0 u \subset \bar{O}'_0 \subset \Omega$, според лема 2.10 наистина $\xi_0 u \in H_0^m(\Omega)$. За да се убедим, че и $\xi_j u \in H_0^m(\Omega)$, $1 \leq j \leq N$ да вземем редица $\{u_\varepsilon\} \subset D(\Omega)$, която апроксимира u в $H^m(\Omega)$. Тогав $\{\xi_j u_\varepsilon\} \subset D(\Omega \cap O'_j) \subset D(\Omega)$ и неравенство /45/

от стр. 561 ни дава $\|\xi_j u_\varepsilon - \xi_j u\|_{m, \Omega} \leq C \|u_\varepsilon - u\|_{m, \Omega}$,

което показва, че $\{\xi_j u_\varepsilon\}$ клони към $\xi_j u$ в $H^m(\Omega)$, т.е.

$\xi_j u \in H_0^m(\Omega)$, $1 \leq j \leq N$. Обратното твърдение е тривиално, защото $H_0^m(\Omega)$ е линейно пространство.

Забележка. От самата конструкция на ξ_j е ясно, че релациите $\xi_j u \in H^m(\Omega)/H_0^m(\Omega)$ и $\xi_j u \in H^m(\Omega \cap O'_j)/H_0^m(\Omega \cap O'_j)$ са равносилни.

От лема 2.11 с лекота произтича следната основна

Теорема 2.28. Нека $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ е ограничена област от класа C^m , а G е произволна област, която съдържа $\bar{\Omega}$. В такъв случай всяка функция от $H^m(\Omega)$ се продължава до функция от $H_0^m(G)$.

Доказателство. В същност достатъчно е да докажем, че всяка от функциите $\xi_j u$, $j = 0, 1, \dots, N$ се продължава до елемент от $H_0^m(G)$. /Използваме означенията от лема 2.11./

За $\xi_0 u$ това е очевидно, защото $\xi_0 u \in H_0^m(\Omega) \subset H_0^m(G)$. За да установим същото за $\xi_j u$, $1 \leq j \leq N$

ще забележим, че твърденията $\xi_j u \in H^m(\Omega \cap O'_j)$ и

$u_j \stackrel{\text{def}}{=} (\xi_j u) \circ h_j^{-1} \in H^m(B^+)$ са

очевидно еквивалентни. Използвайки

оператора P , конструиран в теоре-

ма 2.24, да продължим u_j до елемент

$u_j^* \in H^m(B)$. Понеже носителят

на u_j^* се съдържа в множеството,

защриховано на фиг. 12, ако означим с

α_j функция от $D(B)$, която е

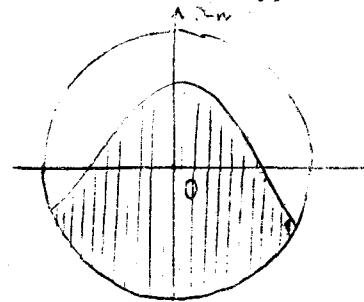
тължествено равна на единица в къл-

бото $|y| \leq 1 - \delta$, където $\delta > 0$ е достатъчно малко,

функцията

$\alpha_j u_j^*$ все още ще бъде продължение на u_j , но вече с компак-

тен носител и следователно ще се съдържа в $H_0^m(B)$. Сега е яс-



Фиг. 12

но, че $q_j \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha_j u_j) \circ h_j^{-1} \in H_c^m(\mathcal{O}_j)$, защото $\text{supp } q_j \subset \mathcal{O}_j$ и доказателството е почти завършено. Наистина функцията q_j съвпада с $\xi_j u$ в $\Omega \cap \mathcal{O}_j$, а $\xi_0 u + \sum_{j=1}^N q_j \in H_c^m(\Omega \cup (\bigcup_{j=1}^N \mathcal{O}_j))$

и съвпада с u в Ω . За да получим търсеното продължение, остава да я умножим с функция от $C_c^\infty(G)$, равна на единица около $\bar{\Omega}$.

Като непосредствено следствие получаваме

Т е о р е м а 2.29 (Лема на Релих). Нека Ω е ограничена област от класа C^m . Тогава влягането $H^m(\Omega) \rightarrow H^{m-1}(\Omega)$ е компактно.

Д о к а з а т е л с т в о. Нека $\{u_\nu\} \subset H^m(\Omega)$ е безкрайна редица, за която $\|u_\nu\|_{m,\Omega} \leq A = \text{const.}$ Да

означим с G някакво кълбо, съдържащо $\bar{\Omega}$, и да означим с v_ν конструираното в теорема 2.27 продължение на u_ν . Конструкцията на v_ν ни дава $\|v_\nu\|_{m,G} \leq C(\Omega, G) \|u_\nu\| \leq C(\Omega, G) A$

и понеже $v_\nu \in H^m(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{E}'(G)$, лемата на Релих от стр. 551 показва, че можем да изберем подредица $\{v_{\nu_k}\}$, сходяща в $H^{m-1}(G)$.

Понеже очевидно $\|u_{\nu_k} - u_{\nu_s}\|_{m-1,\Omega} \leq \|v_{\nu_k} - v_{\nu_s}\|_{m-1,G}$, редицата $\{u_{\nu_k}\}$ е сходяща в $H^{m-1}(\Omega)$ и доказателството е завършено.

Следващият още по-прост вариант също е твърде полезен.

Т е о р е м а 2.30. Ако Ω е ограничена област в $\mathbb{R}^n$, влягането $H_c^m(\Omega) \rightarrow H_c^{m-1}(\Omega)$ е компактно.

Д о к а з а т е л с т в о. Нека $\{u_\nu\} \subset H_c^m(\Omega)$ и $\|u_\nu\|_{m,\Omega} \leq A$. Да изберем редица $\{\varphi_\nu\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$

такава, че да имаме $\|u_\nu - \varphi_\nu\| \leq \frac{1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, 3, \dots$

Понеже $\varphi_\nu \in H^m(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{E}'(\Omega)$ можем да изберем подредица $\{\varphi_{\nu_k}\}$ сходяща в $H^{m-1}(\Omega)$. Тогава и $\{u_{\nu_k}\}$ ще бъде сходяща в $H^{m-1}(\Omega)$.

Дойде време да докажем

Т е о р е м а 2.2. Нека $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ е ограничена област от класа C^m и $u \in C^{m-1}(\bar{\Omega}) \cap H^m(\Omega)$. В такъв случай $u \in H_c^m(\Omega)$ тогава и само тогава, когато $\partial^\alpha u|_\Gamma = 0$ за

$$|\alpha| \leq m-1.$$

Д о к а з а т е л с т в о. Ще използваме означенията от лема 2.11. Достатъчно е да установим, че за $j = 1, 2, \dots, N$ релациите $\xi_j u \in H_c^m(\Omega)$ и $\partial^\alpha(\xi_j u)|_\Gamma = 0$, $|\alpha| \leq m-1$ са еквивалентни, защото $\sum_{j=1}^N \xi_j \equiv 1$ в цяла околност на Γ . Да

фиксираме едно j , $1 \leq j \leq N$ да съсредоточим вниманието си върху $\xi_j u$. Ще разгледаме най-напред случая $m = 1$. Трябва да установим, че релациите

$$a/ \xi_j u \in H_c^1(\Omega \cap \mathcal{O}_j) \cap C(\bar{\Omega} \cap \mathcal{O}_j)$$

и

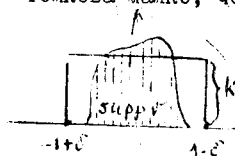
$$b/ \xi_j u \in H^1(\Omega \cap \mathcal{O}_j) \cap C(\bar{\Omega} \cap \mathcal{O}_j), \quad \xi_j u|_{\Gamma \cap \mathcal{O}_j} = 0$$

са равносилни.

Да допуснем, че а/ е налице. Тогава функцията $v \stackrel{\text{def}}{=} (\xi_j u) \circ h_j^{-1} \in H_c^1(B^+) \cap C(\bar{B}^+)$. Наистина, ако $\{u_\nu\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ апроксимира u в $H^1(\Omega)$ редицата с общ член $v_\nu = (\xi_j u_\nu) \circ h_j^{-1} \in C_c^1(B^+)$ и апроксимира v в $H_c^1(B)$. Понеже $v_\nu \in H_c^1(B^+)$, релацията $v \in H_c^1(B^+)$ е установена. Трябва да докажем, че $v|_{B \cap \{x_n = 0\}} = 0$.

От самата дефиниция на v е ясно, че $\text{supp } v$ има вида, изобразен на фиг. 13. Нека k е реално число от интервала $(0, 1)$ и

$\zeta(k)$ е цилиндърът $0 \leq y_n \leq k$, $|y'| \leq 1-\delta$, където $\delta > 0$ е толкова малко, че $\text{supp } v \cap \{y_n = 0\} \subset \{|y'| \leq 1-\delta\}$ (фиг.13). Нека $f_n \in D(B^+)$ е редица, която апроксимира v в $H_0^1(B^+)$. Изхождайки от тъждеството



Фиг.13

$$f_n(y', y_n) = \int_0^{y_n} \frac{\partial f_n}{\partial y_n}(y', t) dt,$$

за $y \in \zeta(k)$ получаваме

$$|f_n(y)|^2 \leq k \int_0^k \left| \frac{\partial f_n}{\partial y_n}(y', t) \right|^2 dt,$$

т.е.

$$\int_{\zeta(k)} |f_n(y)|^2 dy \leq k^2 \int_{\zeta(k)} \left| \frac{\partial f_n}{\partial y_n}(y) \right|^2 dy.$$

Чрез граничен преход от това неравенство намираме

$$\frac{1}{k} \int_0^k \left(\int_{|y'| \leq 1} |v(y', t)|^2 dy' \right) dt \leq k \|v\|_{H^1(B^+)}^2,$$

откъдето, оставяйки k да клони към нула, получаваме

$$\int_{|y'| \leq 1} |v(y', 0)|^2 dy' = 0, \text{ т.е. } v|_{B \cap \{y_n=0\}} = 0, \text{ к.т.д.}$$

Сега да предположим, че $\delta/$ е в сила. Да разгледаме отново $v \stackrel{\text{def}}{=} (\xi, u) \in h^{-1} \in H^1(B^+) \cap C(\overline{B^+})$. Имаме $v|_{B \cap \{y_n=0\}} = 0$. Трябва да установим, че $v \in H_0^1(B^+)$.

Най-напред ще покажем, че функцията

$$\tilde{v} = \begin{cases} v, & y \in B^+ \\ 0, & y \in B \setminus B^+ \end{cases}$$

се съдържа в $H^1(B)$. Понеже $\tilde{v} \in L^2(B)$, $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_n} \in L^2(B)$ и

$k \leq n-1$, остава да проверим, че $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_n} \in L^2(B)$. Нека

$\varphi \in D(B)$. Имаме

$$/70/ \quad \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_n}, \varphi \right) = - \left(v, \frac{\partial \varphi}{\partial y_n} \right) = - \int_{B^+} v(y) \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y_n} dy$$

За да преработим последния интеграл, прилагайки теорема 2.24, да продължим v до някакъв елемент $w \in H_0^1(B)$. Както в теорема 2.28 можем да си осигурим включването $\text{supp } w \subset B$ с едно допълнително срязване. Да разгледаме средните

$w_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} w * \chi_\varepsilon$, които за $\varepsilon < \varepsilon_0$ принадлежат на $D(B)$ и при $\varepsilon \rightarrow 0$ апроксимират w в $H^1(B)$ /задача 1 от следващото упражнение/. От друга страна, $w \in C_0(B)$, защото принадлежеше на $C(B^+)$ и освен това $v|_{y_n=0} = 0$. Следователно

според теорема 1.2, стр.174 w_ε клони равномерно към w в кълбото B . Всичко това ни позволява да извършим граничния преход в равенството

$$\int_{B^+} w_\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial y_n} dy = - \int_{B^+} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial y_n} \varphi(y) dy = \int_{B \cap \{y_n=0\}} w_\varepsilon \varphi dy'$$

и да получим

$$/71/ \quad \int_{B^+} v \frac{\partial \varphi}{\partial y_n} dy = - \int_{B^+} \frac{\partial v}{\partial y_n} \varphi dy,$$

защото $w_\varepsilon|_{y_n=0} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} v|_{y_n=0} = 0$.

Обединявайки /70/ и /71/, получаваме

$$\left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_n}, \varphi \right) = \int_{B^+} \frac{\partial v}{\partial y_n} \varphi dy,$$

откъдето следват равенствата

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_n} = \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y_n}, & y \in B^+ \\ 0, & y \in B \setminus B^+, \end{cases}$$

защото $\varphi \in D(B)$ беше произволно. Оказа се, че $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y_n} \in L^2(B)$

и включването $\tilde{v} \in H^1(B)$ е установено. Понеже $\text{supp } \tilde{v} \subset B$, за $\varepsilon < \frac{1}{2} \rho(\text{supp } v, \partial B)$ ще имаме $\text{supp } f \subset B^+$, където $f \stackrel{\text{def}}{=} v(y', y_n - \varepsilon)$ (вж. /69/). Следователно средните функции $f_{\varepsilon} = f * \chi_{\varepsilon} \in C_0^\infty(B^+)$. Понеже лесно се вижда, че $f_{\varepsilon} \rightarrow v$ в $H^1(B^+)$ /зад. 2/, включването $v \in H_0^1(B^+)$ е установено.

За да докажем теоремата за $m > 1$, достатъчно е да забележим, че от $|x| \leq m-1$ следва

$$\partial^\alpha u \in H^{m-|\alpha|}(\Omega) \cap C^{m-|\alpha|-1}(\bar{\Omega}) \subset H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$$

и да се възползваме от вече доказаното.

Следващата дефиниция подготвя общата теорема за следата.

Д е ф и н и ц и я 2.12. Нека $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ е ограничена област от класа C^m с граница Γ , s е реално число от интервала $[0, m]$, а $\{\alpha_j\}$, $j = 1, 2, \dots, N$ е покритието на Γ , построено в лема 2.9. Нека $u: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ е функция, дефинирана почти навсякъде върху Γ , а u_j е нейната рестрикция върху $\Gamma \cap \alpha_j$. Ще казваме, че $u \in H^s(\Gamma)$ тогава и само тогава, когато $u_j \circ h_j^{-1} \in H_{loc}^s(B')$, където B' е единичното кълбо $|y'| < 1$ в $\mathbb{R}^{n-1}$. (h_j са дифеоморфизмите от лема 2.9.) Нормата в $H^s(\Gamma)$ ще дефинираме с равенството

$$\|u\|_{s, \Gamma} = \sum_{j=1}^N \|(\xi_j u_j) \circ h_j^{-1}\|_{s, B'}$$

където $\{\xi_j\}$, $j = 1, \dots, N$ е разлагането на единицата около Γ от лема 2.9.

С помощта на следствието от теорема 2.18, стр.561 и на теорема 2.19, стр.554 се вижда, че ако използваме друго покритие на Γ с подчиненото му разлагане на единицата, ще стигнем до еквивалентна норма. Следователно дефиницията на пространството $H^s(\Gamma)$ не зависи от избора на покритието. Пълнотата на $H^s(\Gamma)$ произтича от обстоятелството, че $(\xi_j u) \circ h_j^{-1} \in H_0^s(B')$, $H_0^s(B')$ е пълно.

Ще завършим със следната обща теорема за следата.

Т е о р е м а 2.30. Нека Ω е ограничена област от класа C^m . Функциите от $H^m(\Omega)$ притежават еднозначно определен следи, които са елементи от $H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. В сила е и неравенството

$$\| \gamma_0 u \|_{m-\frac{1}{2}, \Gamma} = C \| u \|_{m, \Omega},$$

където C е константа, която зависи от Ω и от покритието $\{\alpha_j\}$.

Д о к а з а т е л с т в о . Ще използваме разлагането

$$u = \sum_{j=1}^N \xi_j u_j, \text{ построено в лема 2.11. Достатъчно е да дефинираме}$$

следи на елементите $\xi_j u_j$, $j = 1, 2, \dots, N$. Нека $v_j(y) = (\xi_j u) \circ h_j^{-1}(y) \in H^m(B')$ и нека $\gamma_0 v_j$ е нейната следа в B' . Полагаме $\gamma_0 u|_{\Gamma} = \sum_{j=1}^N (\gamma_0 v_j) \circ h_j \in H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Сега /72/ ни дава

$$\| \gamma_0 u \|_{m-\frac{1}{2}, \Gamma} = \sum_{j=1}^N \| \gamma_0 v_j \|_{m-\frac{1}{2}, B'}.$$

Остава да проверим /73/. Като приложим към $\gamma_0 v_j$ неравенството /64/, получаваме

$$/74/ \quad \| \chi_{\varepsilon} u \|_{m-\frac{1}{2}, B'} \leq C \| u \|_{m, B^+} \leq C_1 \| \xi_j u \|_{m, \Omega} \leq C_2 \| u \|_{m, \Omega},$$

като предпоследното и последното неравенство получихме с помощта на теорема 2.19 и следствието от теорема 2.18.

След сумиране от 1 до N получаваме /73/.

О това доказателството е завършено. Като в случая на пространство или полупространство се вижда, че ако l е най-голямото естествено число, за което $m-l-\frac{1}{2} > 0$, производните D_{α}^{α} , $|\alpha| \leq l$ притежават следи от $H^{m-|\alpha|-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Доказаната теорема играе важна роля в теорията на граничните задачи.

Забележка. Следващите разсъждения правят дефиницията на $J_{\alpha}|_{\Gamma}$ по-естествена. Нека $u \in H^m(\Omega)$, а G е ограничена област, за която $\overline{\Omega} \subset G$. Да продължим u до елемент от $H_0^m(G)$ и да запазим старото означение. Нека $\{u_{\varepsilon}\}$ са средните на u и $\{\varepsilon_{\nu}\} \rightarrow 0$. От /72/ и /74/ получаваме неравенството $\|J_{\alpha} u_{\varepsilon} - J_{\alpha} u_{\varepsilon_{\mu}}\|_{m-\frac{1}{2}, \Gamma} \leq A \|u_{\varepsilon} - u_{\varepsilon_{\mu}}\| \rightarrow 0$, което показва, че рестрикциите на $\{u_{\varepsilon_{\nu}}\}$ клонят към някакъв елемент от $H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Именно той е следата на u .

У п р а ж н е н и е 10

1. Нека Ω е област в $\mathbb{R}^n$, $u \in H^m(\Omega)$ и $\text{supp } u \subset \Omega$. Докажете, че средните $u_{\varepsilon} = u * \chi_{\varepsilon}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ клонят към u в $H^m(\Omega)$.

а/ като използвате трансформацията на Фурие;

б/ с помощта на теорема 1.2, стр. 174 като вземете пред вид, че

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)_{\varepsilon} = \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial x_j}, \quad j=1,2,\dots, N, \text{ стига } \varepsilon \text{ да е достатъчно малко.}$$

2. Докажете, че ако $v \in H^m(\Omega)$, $\text{supp } v \subset \Omega$, то при $\varepsilon \rightarrow 0 \quad (v(y', y_m - \varepsilon))_{\varepsilon} \xrightarrow{H^m(\Omega)} v$.

3. Нека Ω е ограничена област от класа C^{∞} . Докажете, че

$$C^{\infty}(\overline{\Omega}) = \bigcap_{m=0}^{\infty} H^m(\Omega).$$

У п ъ т в а н е. Продължете елементите на $H^m(\Omega)$ до елементи от $H^m(\mathbb{R}^n)$ и използвайте теоремата на Соболев /теорема 2.13, стр. 547/.

ПРЕДМЕТЕН УКАЗАТЕЛ

абсолютно изпълняемо подмножество - 15	конволватор - 346, 349
абсолютно изпълняема обвивка - 15	конволвция - 166, 247, 268
аналитичен параметрикс - 442	лема на Вайл - 524
аналитично хипоелиптически оператор - 441	- Ланс-Милграм - 89
	- за ортогоналната проекция - 84
	- Релих - 521, 551
база - 3, 17	- Риман-Лебег - 272
взвесиба база - 5	- Рорн - 39
вълнов фронт - 351	линеен функционал - 38
	локално крайно разлагане на единичната - 364
директна сума - 84	мерки на Ралон - 188
диференцируемо изображение - 500	метод на ортогоналната проекция - 529
двукла двока пространства - 142	
двукла променлива - 271	метрика - 2
двукла пространство - 271	- инвариантна метрика - 51
еквивалентни функции - 282	микролокален - 351
елиптичен оператор - 447	множество от първа категория - 105
	- втора категория - 105
задача на Коши - 503	мултииндекс - 56, 57
закснвявш потенциал - 507	мултипликатор - 214
затворена обвивка - 5	
затворено подмножество - 3	навсякъде гъсто подмножество - 9
изпълняема обвивка - 15	непрекъснато изображение - 6, 7
изпълняемо подмножество - 15	неравенство на Берншайн - 427
измерваша величина от компакти - 55	- Бесел - 98
	- Ъънг - 167
камбановидна функция - 177	- Коши-Буняковски-Шварц - 82
квазиномга - 119	- Питре - 335
компактно подмножество - 9	- Поинкаре - 526, 532
	- тригълника - 2, 164, 172

неравенство на Фридрихс - 518
 - Хевслоръ-Уинг - 403
 - Хюлдер - 163
 къде непълно подмноже-
 ство - 105
 норма на оператор - 64
 носител на функция - 137

област притежаваща своитството
 на отсечката - 520
 обобщена валата на Дирихле - 521
 обратно неравенство на Хюл-
 дер - 317

ограничено множество - 23
 околност - 3
 оператор линеен - 64
 - ограничен линеен - 64
 - от тип (p, q) - 396
 ортогонално допълнение - 84
 ортогонални елементи - 83
 отворено множество - 1

параметрикс - 441
 периодично разпределение на едини-
 ците - 369
 периодични разпределения - 365
 плътност на разпределение -
 ние - 182, 267

полнотата подмножество - 15
 положителен функционал - 191
 полунорма - 27
 -скрежливостни полунорми - 34
 правило на парачетогнема - 82
 принцип на Дирихле - 525, 530
 -за максималност на Хевс-
 лоръ - 40

пространство - 355, 357
 произведение на разпределе-
 ния - 362, 363
 пространство Банахова - 63
 - борноотлично - 150
 - бързено - 153
 - линейно топологично - 16
 - локално изпъкнало - 24
 - метрично - 2
 - Монтел - 153
 - на периодичните функции - 266
 - на периодичните разпределе-
 ния - 267

- рефлексивно - 68, 73
 - сепарационно пълно - 55
 - Соболев - 515
 - спрегнатото - 66, 69
 - топологично - 1
 - Фреше - 52, 54
 - хевслорфово - 6
 - Хилбертово - 81, 83
 - $\mathcal{D}(\Omega)$ - 139
 - $\mathcal{D}'(\Omega)$ - 139
 - $\mathcal{E}'(\Omega)$ - 221
 - $Z(R^n)$ - 548
 - $L^p(\Omega), p \geq 1$ - 72
 - $L^\infty(\Omega)$ - 74
 - O_H - 536
 - $S'(R^n)$ - 139
 - $H_0^{m,p}(\Omega)$ - 517
 - $H^1(\Omega)/C$ - 528
 - $H^3(R^n)$ - 536
 - $H^{-\infty}(R^n)$ - 562
 - $H^{+\infty}(R^n)$ - 562
 - $H_c^3(K)$ - 563
 - $H_{loc}^3(\Omega)$ - 563, 564

пространство $H^s(R^n)$ - 580
 - $C_0^\infty(\Omega)$ - 137

равенство на Парсевел - 292
 раздельно непрекъснато изо-
 бражение - 116
 разлагане на единичната - 178
 разпределение - 139
 - от краен ред - 187
 - с правилно разположен но-
 сител - 247
 - с умерен ред - 129
 регуляризация - 195
 регулярно насотена двойка - 351
 ред на разпределение - 187, 267
 ретроиния на разпределение -
 ние - 359

сепарационно компактно мно-
 жество - 70
 сепарационно непрекъснат опе-
 ратор - 212
 силно аналитична функция - 394
 сингуларен носител - 194
 сингуларен оператор - 352
 сингулярно ядро на Рундид -
 Кандерон - 385
 скетарно произведение - 81
 слабо аналитична функция - 386
 слабо произволна - 200
 следа на разпределение - 359
 спрегнат оператор - 302
 спрегнатото ядро на Говсен - 316
 строго индуктивна граница - 127
 стационарна функция - 396
 субгармонично разпределе-
 ние - 535

сумиционна формула на Поасон -
 365, 375

- Адел-Поасон - 291
 - Вайерштрас - 291
 - Чезаро - 291
 сумиране на Фурьерови интегра-
 ли - 289

тензорно произведение на раз-
 пределения - 235

теорема на Алмон и др. - 110
 - Банах - 123
 - Банах-Алаоглу - 72
 - Банах-Сакс - 94
 - Банах-Шейнхауз - 113
 - Бер за категориите - 100
 - Бурбаки - 160
 - Х. Бейл - 529
 - Винер-Пели-Шварц - 325
 - Винер-Пели - 327, 406, 422
 - затворената граница - 124
 - Уинг - 167, 320
 - Луиш - 309
 - Майерс и Серин - 520, 585
 - Мекс-Аренс - 150
 - Малгранж-Бренпрейс - 508
 - Мерсел Рис - 316
 - Осгуд - 113
 - отвореното изображение - 119
 - Планшерел - 292
 - Рис - 27
 - Рис-Топин - 397
 - слетата - 568, 581
 - Топин-Рис - 398
 - Хан-Банах - 33, 42
 - Фратмен-Тиндълъф - 409, 430
 - Шварц - 421

теорема на Л. Шварц - 439

топология - 1

- дискретна - 2

- индуцирана - 6

- на Хаусдорф - 150

- силна - 13

- слаба - 12, 69

- слаба* - 70

- свързване с двойността

- 146

- тривална - 2

точка гранична - 4

- външна - 3

- вътрешна - 3

трансформация на Бурже - 270,

271, 272, 278, 281, 292,

298, 309, 325

трансформация на Бурже-Лап-

лас - 326

трансформация на Хилберт -

315, 324

тълкуване на Ойлер - 382

унитарен оператор - 295

установено потъножество - 15

усредняване на функции - 174

факторпространство - 13, 21, 99

формула на Кирхгоф - 507

формула на Лайбниц - 205, 207

-транспонирана формула на

Лайбниц - 209

формула за обръщане - 271, 272,

279, 280, 281, 287, 299

фундаментално решение - 433

ф.р. на оператора на Лаплас - 465

фундаментално решение на вълно-

вия оператор - 437

- оператор на Коши-Риман - 460

- топологичността - 475

- на уравнението на Прюди-

гер - 477

фундаментална функция от око-

ности - 3

функционери на Минковски - 29

функция на Гейс - 76, 81

функция с умерен ръст - 336

функция на Хевисайд - 303

хипергранична - 46

хипоелитичен оператор - 438

хипонормираното бяленино

изображение - 259

хомеоморфизъм - 9

хомогенни разпределения - 365, 367

целта функции от експоненциален

тип - 327, 405

частична трансформация на Бурже

- 306, 307

ядро на Гресон - 316, 320