ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА И ОРДЕНА ТРУДОВОГО
КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ А. А. ЖДАНОВА

В. Г. МАЗЬЯ

ПРОСТРАНСТВА С. Л. СОБОЛЕВА

ЛЕНИНГРАД
ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1985

УДК 517.5

ПЕЧАТАЕТСЯ ПО ПОСТАНОВЛЕНИЮ
РЕДАКЦИОННО-ИЗДАТЕЛЬСКОГО СОВЕТА
ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Мазья В. Г. Пространства С. Л. Соболева. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985. 416 с.

В монографии рассматривается широкий круг вопросов теории пространств С. Л. Соболева. Даются обобщения и новые доказательства известных теорем вложения Анализируются необходимые и достаточные условия справедливости различных интегральных неравенств для функций с обобщенными производными, формулируемые в терминах изопериметрических неравенств. Приводятся примеры, иллюстрирующие «патологические» особенности операторов вложения. Даны приложения к теории эллиптических краевых задач.

Книга предназначена для математиков — специалистов в области функционального анализа, теории функций и математической физики. Кроме того, она может быть полезна аспирантам и студентам математических факультетов университетов и педагогических вузов.

Библиогр. 253 назв. Ил. 25.

Рецензенты: проф. **В. П. Ильин** (Ленингр. отд. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР), проф. **А. И. Кошелев**, зав. каф. высш. мат. Ленингр. электротех. ин-та им. В. И. Ульянова (Ленина)

М $\frac{1702050000-011}{076(02)-85}$ 96—84

Посвящаю
Татьяне
Шапошниковой

ПРЕДИСЛОВИЕ

Пространства С. Л. Соболева, т. е. классы функций с производными из L_p, занимают исключительно важное место в анализе. За последние двадцать лет в изучении этих пространств достигнуты большие успехи, и теперь известно исчерпывающее решение многих трудных задач, связанных с ними.

В настоящей монографии рассмотрены различные аспекты теории пространств С. Л. Соболева. Основное внимание уделено теоремам вложения. Такие теоремы, сформулированные и доказанные С. Л. Соболевым еще в тридцатых годах, оказались полезным аппаратом функционального анализа и теории линейных и нелинейных уравнений в частных производных.

Вот некоторые из вопросов, ответы на которые содержатся в книге.

1. Какие требования к мере μ обеспечивают справедливость неравенства

$$\left(\int |u|^q \, d\mu\right)^{1/q} \leqslant C \|u\|_{S_p^l},$$

где S_p^l — пространство С. Л. Соболева или его обобщение?

2. При каких минимальных предположениях относительно области сохраняют силу теоремы С. Л. Соболева, как они меняются при ухудшении свойств границы, как зависит класс допустимых областей от дополнительных требований к граничному поведению функций?

3. Сколь массивным должно быть подмножество e области Ω, чтобы выполнялось «неравенство Фридрихса»

$$\|u\|_{L_q(\Omega)} \leqslant C \|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)}$$

для всех гладких функций, равных нулю в окрестности e?

Исследование этих и подобных вопросов интересно не только само по себе. С помощью известных общих соображений оно приводит к условиям разрешимости краевых задач для эллиптических уравнений и теоремам о структуре спектра соответствующих операторов. Такие приложения также рассматриваются в книге.

Отбор тем, о которых идет речь, определился в значительной мере участием автора в их разработке.

Книга не имеет сколько-нибудь существенных пересечений с вышедшими в последние годы монографиями С. М. Никольского [104], О. В. Бесова, В. П. Ильина, С. М. Никольского [6], Г. Трибеля [123], посвященными пространствам дифференцируемых функций.

Параграфы и пункты имеют соответственно двойную и тройную нумерацию (3.1 — § 1 гл. 3, 1.4.3 — п. 3 § 4 гл. 1). Внутри пунктов принята автономная нумерация теорем, лемм, предложений, следствий, замечаний и т. п. Если в пункте лишь одна теорема или лемма, то она не имеет номера. Ссылаясь на материал из другого пункта или параграфа, мы сначала указываем его номер. Например, теорема 1.2.1/1 — это теорема 1 из п. 1.2.1; (2.7/2) — формула (2) из § 2.7.

Представление о содержании книги можно получить из Введения. Большая часть литературных указаний собрана в комментариях. В конце книги приведен список основных обозначений.

Я с благодарностью вспоминаю своего талантливого ученика А. Л. Розина, погибшего в 1976 г. в альпинистском походе, с которым неоднократно обсуждал содержание этой книги. Мне приятно поблагодарить Ю. Д. Бураго, нашедшего, несмотря на занятость, время для совместной работы над главой 6, а также С. П. Преображенского за участие в написании п. 1.2.1. Я глубоко признателен С. В. Поборчему за многие существенные исправления и улучшения рукописи. Я особенно благодарен Т. О. Шапошниковой за конструктивную критику текста, полезные советы и постоянную самоотверженную помощь в подготовке книги.

ВВЕДЕНИЕ

В работах С. Л. Соболева [115—117] были доказаны общие интегральные неравенства для дифференцируемых функций нескольких переменных и даны их приложения к ряду задач математической физики. С. Л. Соболев ввел понятие обобщенной производной и рассмотрел нормированное пространство $W_p^l(\Omega)$ функций из $L_p(\Omega)$, обобщенные производные которых порядка l суммируемы со степенью $p \geqslant 1$. Используя доказанные им теоремы об интегралах типа потенциала, интегральные представления функций и свойства усреднений, С. Л. Соболев установил, в частности, что при некоторых соотношениях между показателями p, l, q пространство $W_p^l(\Omega)$ вложено в $L_q(\Omega)$ или $C(\Omega)$.

Теоремы С. Л. Соболева были в дальнейшем обобщены и усилены в различных направлениях (В. И. Кондрашов, В. П. Ильин, Э. Гальярдо, Л. Ниренберг и др.). В этих исследованиях область определения функций удовлетворяет так называемому условию конуса (каждая внутренняя точка является вершиной конуса постоянных высоты и раствора, расположенного внутри области). Простейшие примеры показывают, что это условие является точным: если на границе имеется «пик», направленный во внешность области, то не всякая функция из $W_p^1(\Omega)$ суммируема со степенью $pn/(n-p)$, $n > p$, вопреки неравенству Соболева. Однако, взглянув на рис. 1, читатель легко убедится, что условие конуса не необходимо для вложения $W_p^1(\Omega)$ в $L_{2p/(2-p)}(\Omega)$, $2 > p$. В самом деле, объединяя Ω с зеркальным отражением, мы получаем подчиненную условию конуса новую область, для которой по теореме С. Л. Соболева упомянутое вложение имеет место. Следовательно, то же верно и для исходной области, хотя она и не удовлетворяет условию конуса.

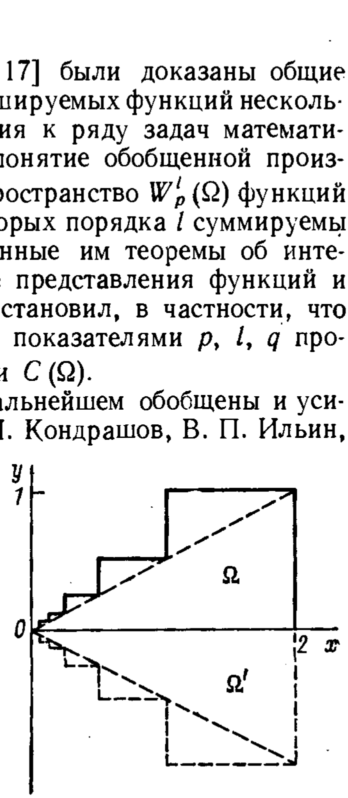

Рис. 1.

Отметим теперь тот известный еще до результатов Соболева факт, что отдельные интегральные неравенства справедливы при весьма слабых предположениях об области. Например, неравенство К. Фридрихса (1927 г.)

$$\int_\Omega u^2\,dx \leqslant K\left(\int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2\,dx + \int_{\partial\Omega} u^2\,ds\right)$$

было доказано при единственном предположении, что Ω — ограниченная область, для которой верна формула Гаусса — Остроградского [181]. В 1933 г. О. Никодим [229] предложил пример области, для которой из квадратичной суммируемости градиента не следует квадратичная суммируемость функции. В монографии Р. Куранта и Д. Гильберта [46] изложены достаточные условия, при которых верны неравенство Пуанкаре

$$\int_\Omega u^2\,dx \leqslant K\int_\Omega (\operatorname{grad} u)^2\,dx + (1/m_n\Omega)\left(\int_\Omega u\,dx\right)^2$$

и лемма Реллиха о компактности в $L_2(\Omega)$ множества, ограниченного в метрике $\int_\Omega [(\operatorname{grad} u)^2 + u^2]\,dx$.

В связи со сказанным естественно возникает задача описания классов областей, принадлежность к которым эквивалентна тем или иным свойствам операторов вложения. В ряде статей автора, первая из которых появилась в 1960 г., были получены необходимые и достаточные, а также более простые достаточные условия справедливости некоторых теорем вложения пространств типа $W_p^1(\Omega)$.

В случае $p=1$ эти условия представляют собой «изопериметрические» неравенства, связывающие объем и площадь всей или части границы произвольного подмножества области. Доказательства были основаны на некотором новом в то время приеме, базирующемся на представлениях интегралов от функций и их производных в терминах множеств уровней и оценке получившихся интегралов при помощи изопериметрических неравенств. Одновременно и независимо от автора тот же прием был использован Федерером и Флемингом [176] для доказательства неравенства Гальярдо

$$\|u\|_{L_{n/(n-1)}(R^n)} \leqslant c\,\|\operatorname{grad} u\|_{L_1(R^n)}, \qquad u \in C_0^\infty(R^n),$$

с точной константой.

При $p>1$ таких геометрических терминов, как объем и площадь, уже недостаточно для адекватного описания свойств области. Здесь появляются изопериметрические неравенства между объемом и p-емкостью или p-проводимостью [60—63, 68, 71]. Эти результаты и явились центром конденсации материала настоящей книги, хотя нельзя сказать, что они ее исчерпывают даже в идейном плане.

В книге рассматриваются многие вопросы теории пространств Соболева, но основное внимание уделено исследованию операторов вложения.

Самая обширная глава 1 представляет собой современное введение в теорию. Вероятно, ее можно положить в основу спецкурса по теоремам вложения. Наряду с изложением классического материала глава содержит и сравнительно новые результаты.

В § 1.3 проведено полное исследование одномерного неравенства Харди с двумя весами. В § 1.4 включены принадлежащие Д. Р. Адамсу [132, 133] и автору [82] обобщения теорем С. Л. Соболева, в которых речь идет о необходимых и достаточных условиях суммируемости со степенью q по произвольной мере для функций из пространства $W_p^l(\Omega)$. При этом предполагается, как и в работах Соболева, что область — «хорошая», например, удовлетворяет условию конуса. Вообще в том, что касается требований к области, в главе 1 почти везде соблюдается принцип «всё или ничего».

Исключение составляет § 1.5, где речь идет о продолжении функций из пространств Соболева с сохранением класса. (В последнее время этому вопросу было уделено много внимания.) Здесь, в частности, приведен пример области, для которой оператор продолжения существует, но которая не является квазикругом.

В § 1.6 получено интегральное представление для функций из $W_p^l(\Omega)$, удовлетворяющих на $\partial\Omega$ однородным условиям Коши до порядка $k-1$, $2k \geqslant l$. Из этого представления следуют теоремы вложения соболевского типа, какова бы ни была ограниченная область Ω. В случае $2k < l$ на примере показано, что ограничения на $\partial\Omega$ необходимы.

Идея эквивалентности изопериметрических неравенств и теорем вложения проходит красной нитью через многие главы книги.

В главе 2 рассматриваются неравенства, содержащие первые производные функций, равных нулю на границе. Большая часть этой главы посвящена необходимым и достаточным условиям справедливости интегральных неравенств. Специально отметим доказанные в § 2.1 важные для приложений многомерные весовые неравенства типа Харди — Соболева. Основные результаты главы 2 находят применение к спектральной теории оператора Шредингера (§ 2.5).

В главах 3—5 изучается пространство $L_p^1(\Omega)$, содержащее функции с градиентом из $L_p(\Omega)$. Глава 3 посвящена случаю $p=1$. Здесь найдены необходимые и достаточные условия справедливости теорем вложения, формулируемые в терминах классов J_α, и развита методика проверки принадлежности конкретных областей этому классу. В главах 4 и 5 рассмотрен случай $p>1$. Здесь критерии формулируются в терминах p-проводимости. В главе 4 обсуждаются теоремы вложения в пространства $L_q(\Omega)$ и $L_q(\partial\Omega)$, а в главе 5 — в пространство $L_\infty(\Omega) \cap C(\Omega)$. Здесь, в частности, даны необходимые и достаточные условия справедливости упомянутых ранее неравенств Фридрихса и Пуанкаре, а также леммы Реллиха. В книге приведены многочисленные примеры областей, характеризующие возможные патологии операторов вложения. Так, например, в § 1.1 показано, что из суммируемости с квадратом вторых производных и самой функции не следует суммируемость с квадратом первых производных. В § 5.5 рассмотрена область, для которой оператор вложения $W_p^1(\Omega)$ в $L_\infty(\Omega) \cap C(\Omega)$ непрерывен, но не вполне непрерывен — для областей с хорошими границами это невозможно. Результаты глав 3—5 показывают, что не только классы областей определяют параметры p, q и т. п. в теоремах вложения, но что имеется и обратная связь. Критерии справедливости интегральных неравенств находят в главе 4 непосредственное приложение к теории эллиптических краевых задач. Окончательные результаты исследования операторов вложения позволяют получить необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости и дискретности спектра краевых задач, в частности задачи Неймана.

Написанная вместе с Ю. Д. Бураго глава 6 посвящена исследованию пространства $BV(\Omega)$ (bounded variation), содержащего функции, градиенты которых являются векторными зарядами. Здесь найдено необходимое и достаточное условие, обеспечивающее существование ограниченного (нелинейного) оператора продолжения $BV(\Omega) \to BV(R^n)$. Для пространства $BV(\Omega)$ найдены необходимые и достаточные условия справедливости теорем вложения, аналогичные полученным в главе 3 для $L_1^1(\Omega)$. В некоторых интегральных неравенствах вычислены точные константы. Результаты § 6.5, 6.6 о следах функций из $BV(\Omega)$ на границе позволяют говорить о граничных значениях «плохих» функций, заданных в «плохих» областях. Наряду с результатами Ю. Д. Бураго и автора в главе 6 приведены теоремы Де Джорджи — Федерера об условиях справедливости формулы интегрирования по частям.

В главах 2—6 речь идет в основном о функциях с первыми производными из L_p или C^*. Это ограничение вызвано существом дела, так как в доказательствах используется операция срезки функции по уровням. Следующие шесть глав посвящены функциям с производными любого целого, а иногда и дробного порядка.

Глава 7 является вспомогательной. В ней в основном без доказательств приведены используемые в дальнейшем известные факты теории пространств бесселевых и риссовых потенциалов, а также пространств Л. Н. Слободецкого и О. В. Бесова в R^n. В главе 7 дан также обзор результатов теории (p, l)-емкостей и нелинейных потенциалов.

В главе 8 исследуются необходимые и достаточные условия справедливости неравенства

$$\|u\|_{L_q(\mu)} \leqslant C \|u\|_{S_p^l}, \qquad u \in C_0^\infty(R^n), \tag{1}$$

где $L_q(\mu)$ — пространство с нормой $\left(\int |u|^q d\mu\right)^{1/q}$, μ — мера и S_p^l — одно из упомянутых выше пространств. В случае $q \geqslant p$ последнее неравенство эквивалентно изопериметрическому неравенству, которое связывает меру μ и емкость, порожденную пространством S_p^l. Это — результат такого же типа, как и теоремы глав 2—6. Он непосредственно следует из неравенства

$$\int_0^\infty \operatorname{cap}(N_t;\ S_p^l)\, t^{p-1}\, dt \leqslant C \| u \|_{S_p^l}^p,$$

где $N_t = \{x : |u(x)| \geqslant t\}$. Неравенства такого типа, впервые установленные автором для пространств $\mathring{L}_p^1(\Omega)$ и $\mathring{L}_p^2(R^n)$ [78], были применены к ряду вопросов теории функций и в последнее время активно исследовались Д. Р. Адамсом [136], Б. Дальбергом [163], К. Ханссоном [190, 191], автором [79, 84] и др. Переход к производным любого порядка оказался нетривиальным и к настоящему времени осуществлен лишь для функций, заданных на всем пространстве.

В случае $q > p \geqslant 1$ критерий справедливости неравенства (1) не требует емкости: мера любого шара должна оцениваться некоторой функцией радиуса. Принадлежащие автору и С. П. Преображенскому [87] и автору [82] результаты такого рода также изложены в главе 8. Они примыкают к теореме Д. Р. Адамса [132, 133], приведенной в § 1.4.

В главе 9 определена и изучается некоторая разновидность емкости. По сравнению с емкостями, введенными в главе 7, здесь класс допустимых функций в вариационной задаче сужен: они подчинены условию $u(x) = 1$ в окрестности компакта. В случае емкостей из главы 7 допустимые функции мажорируют единицу на компакте. Если число производных l в норме пространства равно единице, то обе емкости совпадают, но при $l \neq 1$ их эквивалентность требует доказательства, которое и приведено в § 9.3.

Емкость, введенная в главе 9, используется во всех следующих главах при доказательстве различных теорем вложения. Некоторое полезное неравенство типа Фридрихса для функций на кубе подробно изучается в главе 10. На его основе в главе 11 исследуются условия вложения пространства $\mathring{L}_p^l(\Omega)$ в различные функциональные пространства. Здесь $\mathring{L}_p^l(\Omega)$ — пополнение пространства гладких финитных функций в метрике $\| \nabla_l u \|_{L_p(\Omega)}$. Как известно, это пополнение, вообще говоря, не вложено даже в пространство обобщенных функций $\mathscr{D}'$. В главе 11 даны необходимые и достаточные условия вложений $\mathring{L}_p^l(\Omega)$ в $\mathscr{D}'$, $L_q(\Omega, \mathrm{loc})$, $L_q(\Omega)$. При $p = 2$ эти результаты можно интерпретировать как необходимые и достаточные условия разрешимости в энергетическом пространстве задачи Дирихле для полигармонического уравнения в бесконечных областях при условии, что правая часть принадлежит $\mathscr{D}'$ или $L_q(\Omega)$. Наконец, в главе 12 установлены критерии ограниченности и компактности оператора вложения пространства $\overset{\circ}{L}{}^l_p(\Omega, \nu)$ в $W^r_q(\Omega)$, где ν — мера, а $\overset{\circ}{L}{}^l_p(\Omega, \nu)$ — пополнение $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $\left(\int_\Omega |\nabla_l u|^p dx + \int_\Omega |u|^p d\nu\right)^{1/p}$. Эта глава, результаты которой представляют собой развитие известного критерия дискретности спектра оператора Шредингера, найденного А. М. Молчановым [99], основана на статьях автора [75] и автора и М. Отелбаева [86].

Глава 1

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА

§ 1.1. ПРОСТРАНСТВА $L_p^l(\Omega)$, $V_p^l(\Omega)$ И $W_p^l(\Omega)$

1.1.1. Некоторые определения и обозначения. Пусть Ω — открытое подмножество n-мерного евклидова пространства $R^n=\{x\}$. Через $C^\infty(\Omega)$ обозначим пространство бесконечно дифференцируемых в Ω функций, а через $C^\infty(\bar{\Omega})$ — пространство сужений на Ω функций из $C^\infty(R^n)$. В дальнейшем $\mathscr{D}(\Omega)$ или $C_0^\infty(\Omega)$ — пространство функций из $C^\infty(R^n)$ с компактными носителями в Ω.

Аналогично определяются классы $C^k(\Omega)$, $C^k(\bar{\Omega})$, $C_0^k(\Omega)$ функций с непрерывными производными порядка k, а также классы $C^{k,\alpha}(\Omega)$, $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$, $C_0^{k,\alpha}(\Omega)$ функций, производные которых порядка k удовлетворяют условию Гельдера порядка $\alpha\in(0, 1]$. Пусть, кроме того, $\mathscr{D}'(\Omega)$ — сопряженное $\mathscr{D}(\Omega)$ пространство обобщенных функций (см. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов [19], Л. Шварц [242]). Через $L_p(\Omega)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, обозначим пространство измеримых по мере Лебега функций в Ω, для которых

$$\|f\|_{L_p(\Omega)}=\left(\int_\Omega |f|^p dx\right)^{1/p}<\infty,$$

и через $L_p(\Omega, \mathrm{loc})$ — пространство функций, локально суммируемых со степенью p в Ω. В $L_p(\Omega, \mathrm{loc})$ естественно определяется счетная система полунорм $\|u\|_{L_p(\omega_k)}$, где $\{\omega_k\}_{k\geqslant 1}$ — последовательность областей с компактными замыканиями $\bar{\omega}_k$, $\bar{\omega}_k\subset\omega_{k+1}\subset\Omega$, $\bigcup_k \omega_k=\Omega$. Тогда пространство $L_p(\Omega, \mathrm{loc})$ становится полным метризуемым.

В случае $\Omega=R^n$ указание на Ω в обозначениях пространств и норм иногда будем опускать. Интегрирование без указания пределов распространено на R^n.

Пусть, кроме того, $\operatorname{supp} f$ — носитель функции f, $\operatorname{dist}(F, E)$ — расстояние между множествами F и E, $B(x, \rho)$ или $B_\rho(x)$ — открытый шар с центром x и радиусом ρ, $B_\rho=B_\rho(0)$, m_n — n-мерная мера Лебега в R^n, $v_n=m_n(B_1)$.

Через c, c_1, c_2, ... будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от «безразмерных» параметров n, p, l и др. Две величины a и b считаются эквивалентными (обозначение $a\sim b$), если существуют такие константы c_1, c_2, что $c_1a<b<c_2a$.

Если α — мультииндекс $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ то, как обычно, $|\alpha|=$ $=\sum_i \alpha_j$ — порядок α, $\alpha!=\alpha_1!\ldots\alpha_n!$, $D^\alpha=D_{x_1}^{\alpha_1}\ldots D_{x_n}^{\alpha_n}$, где $D_{x_i}=$

$=\partial/\partial x_i$, $x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}$, $\beta\geqslant\alpha$, означает $\beta_i\geqslant\alpha_i$, $i=1, \dots, n$. Наконец, $\nabla_l=\{D^\alpha\}$, где $|\alpha|=l$, и $\nabla=\nabla_1$.

1.1.2. Локальные свойства элементов пространства $L_p^l(\Omega)$. Обозначим через $L_p^l(\Omega)$ пространство обобщенных функций в Ω, производные которых порядка l принадлежат пространству $L_p(\Omega)$. В $L_p^l(\Omega)$ введем полунорму

$$\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)}=\left(\int_\Omega\left(\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha u(x)|^2\right)^{p/2}dx\right)^{1/p}.$$

Теорема. *Любой элемент пространства $L_p^l(\Omega)$ есть функция из $L_p(\Omega, \mathrm{loc})$.*

Доказательство. Пусть ω и g — ограниченные открытые подмножества R^n, такие, что $\omega\subset g\subset\Omega$, причем каждое последующее множество содержит ε-окрестность предыдущего. Через φ обозначим функцию из $\mathscr{D}(\Omega)$, равную единице на g, и через u — произвольный элемент пространства $L_p^l(\Omega)$. Положим еще $T=\varphi u$ и введем функцию $\eta\in\mathscr{D}$, такую, что $\eta=1$ в окрестности начала координат и $\operatorname{supp}\eta\subset B_\varepsilon$.

Как известно, фундаментальное решение полигармонического оператора Δ^l имеет вид

$$\Gamma(x)=\begin{cases} c_{n,l}|x|^{2l-n}, & \text{если } 2l<n \text{ или } 2l\geqslant n, \quad n \text{ — нечетное;}\\ c_{n,l}|x|^{2l-n}\log|x|, & \text{если } 2l\geqslant n, \quad n \text{ — четное.}\end{cases}$$

(Константа $c_{n,l}$ выбрана так, чтобы обеспечить равенство $\Delta^l\Gamma=\delta(x)$.)

Легко видеть, что $\Delta^l(\eta\Gamma)=\zeta+\delta$, где $\zeta\in\mathscr{D}(R^n)$. Следовательно *,

$$T+\zeta*T=\sum_{|\alpha|=l}(l!/\alpha!)\,D^\alpha(\eta\Gamma)*D^\alpha T.$$

Функция $\zeta*T$ принадлежит пространству $C^\infty(R^n)$. Остается изучить $D^\alpha(\eta\Gamma)*D^\alpha T$. Так как в g $D^\alpha T=D^\alpha(\varphi u)=\varphi D^\alpha u$ **, то в ω $D^\alpha(\eta\Gamma)*D^\alpha T=D^\alpha(\eta\Gamma)*\varphi D^\alpha u$. На функцию $\varphi D^\alpha u$ действует интегральный оператор «со слабой особенностью», как известно, непрерывный в $L_p(\omega)$. ■

Следствие. Если $u\in L_p^l(\Omega)$, то все производные $D^\alpha u$ (понимаемые в смысле теории обобщенных функций) порядка $|\alpha|=0, 1, \dots, l-1$ принадлежат пространству $L_p(\Omega, \mathrm{loc})$.

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы и включения $D^\alpha u\in L_p^{l-|\alpha|}(\Omega)$.

Замечание. Из результатов п. 1.4.5 следует, что теорему можно усилить, уточнив локальные свойства элементов пространства $L_p^l(\Omega)$.

* Звездочкой обозначена свертка.

** Мы используем равенство $D^\alpha(\varphi u)=\sum_{\alpha\geqslant\beta}(\alpha!/\beta!\,(\alpha-\beta)!)\,D^\beta\varphi D^{\alpha-\beta}u$.

1.1.3. Абсолютная непрерывность функций из $L_p^1(\Omega)$. Остановимся на одном хорошо известном свойстве пространства $L_p^1(\Omega)$, $p \geqslant 1$. Будем говорить, что функция, заданная в Ω, *абсолютно непрерывна на прямой* l, имеющей непустое пересечение с Ω, если она абсолютно непрерывна на любом отрезке этой прямой, заключенном в Ω.

Теорема 1. *Любая функция из* $L_p^1(\Omega)$ *(быть может, измененная на множестве нулевой меры* m_n*) абсолютно непрерывна на почти всех прямых, параллельных любой координатной оси. Градиент функции из* $L_p^1(\Omega)$ *(понимаемый в смысле теории обобщенных функций) совпадает почти всюду с обычным градиентом.*

В доказательстве этого утверждения используется следующее простое утверждение.

Лемма. *Пусть* $g \in L_1(0, 1)$ — *произвольная функция из* $\mathscr{D}'(0, 1)$. *Если* $\int_0^1 g(t)\,\eta'(t)\,dt = 0$, *то* $g(t) = \mathrm{const}$ *при* п. в. $t \in (0, 1)$.

Доказательство. Пусть Φ и α — функции из $\mathscr{D}(0, 1)$, причем $\int_0^1 \alpha(\tau)\,d\tau = 1$. Очевидно, что функция $\Phi - \alpha\int_0^1 \Phi(\tau)\,d\tau$ является производной функции из $\mathscr{D}(0, 1)$. Поэтому

$$0 = \int_0^1 g(t)\left(\Phi(t) - \alpha(t)\int_0^1 \Phi(\tau)\,d\tau\right)dt = \int_0^1 \left(g(t) - \int_0^1 g(\tau)\alpha(\tau)\,d\tau\right)\Phi(t)\,dt.$$

Поскольку Φ — любая функция из $\mathscr{D}(0, 1)$, то

$$g(t) = \int_0^1 g(\tau)\,\alpha(\tau)\,d\tau \quad \text{п. в. на } (0, 1).$$

Доказательство теоремы 1 достаточно провести в предположении, что Ω — куб $\{x\colon 0 < x_i < 1,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Пусть $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ — точка $(n-1)$-мерного куба $\omega = \{x'\colon 0 < x_i < 1,\ 1 \leqslant i \leqslant n-1\}$.

Так как по теореме Фубини п. в. в ω

$$\int_0^1 |(\partial u/\partial t)(x', t)|\,dt < \infty,$$

где $\partial u/\partial t$ — производная в смысле теории обобщенных функций, то функция

$$x_n \to v(x) = \int_0^{x_n} (\partial u/\partial t)(x', t)\,dt$$

при п. в. $x' \in \omega$ абсолютно непрерывна на отрезке $[0, 1]$ и ее производная (в смысле классического определения) совпадает с $\partial u/\partial x_n$ п. в. на $(0, 1)$.

Пусть $\zeta \in \mathscr{D}(\omega)$ и $\eta \in \mathscr{D}(0, 1)$. Интегрируя по частям, находим

$$\int_0^1 v(x', t)\,\eta'(t)\,dt = -\int_0^1 \eta(t)\,(\partial v/\partial t)(x', t)\,dt.$$

После умножения этого тождества на $\zeta(x')$ и интегрирования по ω получим

$$\int_\Omega v(x)\,\eta'(x_n)\,\zeta(x')\,dx = -\int_\Omega \eta(x_n)\,\zeta(x')\,(\partial v/\partial x_n)\,dx.$$

Но по определению производной обобщенной функции

$$\int_\Omega u(x)\,\eta'(x_n)\,\zeta(x')\,dx = -\int_\Omega \eta(x_n)\,\zeta(x')\,(\partial v/\partial x_n)\,dx.$$

Приравнивая левые части двух последних тождеств и используя произвольность функции $\zeta \in \mathscr{D}(\omega)$, получаем, что при п. в. $x' \in \omega$:

$$\int_0^1 [u(x', x_n) - v(x', x_n)]\,\eta'(x_n)\,dx_n = 0.$$

По лемме разность $u(x', x_n) - v(x', x_n)$ п. в. на ω не зависит от x_n. Иначе говоря, при почти любом фиксированном x' на отрезке $0 \leqslant x_n \leqslant 1$

$$u(x) = \int_0^{x_n} (\partial u/\partial t)(x', t)\,dt + \mathrm{const}.$$

Справедливо и обратное утверждение.

Теорема 2. *Если функция u в Ω абсолютно непрерывна на почти всех прямых, параллельных координатным осям, и ее первые производные (в классическом смысле) принадлежат $L_p(\Omega)$, то они совпадают с соответствующими производными в смысле теории обобщенных функций и, следовательно, $u \in L_p^1(\Omega)$.*

Доказательство. Пусть v_j — производная u по x_j (в классическом смысле) и $\eta \in \mathscr{D}(\Omega)$. Интегрируя по частям, получаем равенство

$$\int_\Omega \eta v_j\,dx = -\int_\Omega (\partial\eta/\partial x_j)\,u\,dx,$$

которое показывает, что v_j является производной (в смысле теории обобщенных функций) функции u по x_j.

1.1.4. Пространства $W_p^l(\Omega)$ **и** $V_p^l(\Omega)$. Введем пространства

$$W_p^l(\Omega) = L_p^l(\Omega) \cap L_p(\Omega) \quad \text{и} \quad V_p^l(\Omega) = \bigcap_{k=0}^{l} L_p^k(\Omega),$$

снабженные нормами

$$\|u\|_{W_p^l(\Omega)} = \|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)} + \|u\|_{L_p(\Omega)},$$

$$\|u\|_{V_p^l(\Omega)} = \sum_{k=0}^{l} \|\nabla_k u\|_{L_p(\Omega)}.$$

Приведем два примера областей, показывающие, что, вообще говоря, $L_p^l(\Omega) \neq W_p^l(\Omega) \neq V_p^l(\Omega)$.

В работе О. Никодима [229], посвященной изучению функций с конечным интегралом Дирихле, приведена область, для которой не всякая такая функция суммируема с квадратом, другими словами, $W_2^1(\Omega) \neq L_2^1(\Omega)$.

Пример 1. Рассмотренная Никодимом область Ω есть сумма прямоугольников (рис. 2):

$$A_k = \{(x, y):\ 2^{1-k} - 2^{-1-k} < x < 2^{1-k},\ \ ^2/_3 < y < 1\},$$

$$B_k = \{(x, y):\ 2^{1-k} - \varepsilon_k < x < 2^{1-k},\ \ ^1/_3 \leqslant y \leqslant {}^2/_3\},$$

$$C = \{(x, y):\ 0 < x < 1,\ 0 < y < {}^1/_3\},$$

где $\varepsilon_k \in (0,\ 2^{-k-1})$ и $k = 1,\ 2,\ \ldots$

Положительные числа α_k выбираются так, чтобы ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k m_2(A_k) \tag{1}$$

расходился. Пусть функция u непрерывна в Ω, равна α_k в A_k, нулю в C и линейна в B_k. Эта функция в силу расходимости

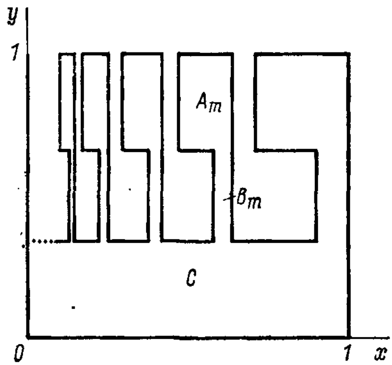

Рис. 2.

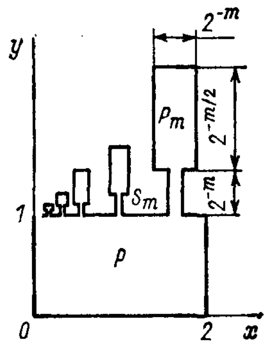

Рис. 3.

ряда (1) не принадлежит $L_2(\Omega)$, но можно выбрать числа ε_k столь малыми, что интеграл Дирихле функции u, равный

$$\sum_{k=1}^{\infty} \iint_{B_k} (\partial u/\partial y)^2\, dx\, dy,$$

будет сходиться.

Пример 2. Для изображенной на рис. 3 области Ω пространства $W_2^2(\Omega)$ и $V_2^2(\Omega)$ не совпадают. Пусть

$$u(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{в } P, \\ 4^m (y-1)^2 & \text{в } S_m \quad (m = 1, 2, \ldots), \\ 2^{m+1}(y-1) - 1 & \text{в } P_m \quad (m = 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

Очевидно, что

$$\iint_{S_m} (\nabla_2 u)^2\, dx\, dy = 2^{2-m},$$
$$\iint_{S_m} u^2\, dx\, dy = 2^{-5m},$$
$$\iint_{P_m} u^2\, dx\, dy \sim 2^{-m/2},$$
$$\iint_{S_m} (\nabla u)^2\, dx\, dy \sim 2^{-3m},$$
$$\iint_{P_m} (\nabla u)^2\, dx\, dy \sim 2^{m/2}.$$

Следовательно, $\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)} = \infty$ и $\|u\|_{W_2^2(\Omega)} < \infty$.

1.1.5. Аппроксимация функций из пространств Соболева функциями, гладкими в Ω. Пусть $\varphi \in \mathscr{D}$, $\varphi \geqslant 0$, $\operatorname{supp}\varphi \subset B_1$ и $\int \varphi(x)\, dx = 1$. Любой функции $u \in L(\Omega)$, продолженной нулем на $R^n \setminus \Omega$, поставим в соответствие семейство ее усреднений:

$$(\mathscr{M}_\varepsilon u)(x) = \varepsilon^{-n} \int \varphi((x-y)/\varepsilon)\, u(y)\, dy.$$

Функция φ называется *усредняющим ядром*, а число ε — *радиусом усреднения*.

Следующие утверждения почти очевидны:

1) $\mathscr{M}_\varepsilon u \in C^\infty(\Omega)$;

2) если $u \in L_p(\Omega)$, то $\mathscr{M}_\varepsilon u \to u$ в $L_p(\Omega)$ и

$$\|\mathscr{M}_\varepsilon u\|_{L_p(R^n)} \leqslant \|u\|_{L_p(\Omega)};$$

3) если ω — ограниченная область, $\bar\omega \subset \Omega$, то при достаточно малом ε в ω справедливо равенство

$$D^\alpha \mathscr{M}_\varepsilon u = \mathscr{M}_\varepsilon D^\alpha u.$$

Поэтому для $u \in L_p^l(\Omega)$

$$D^\alpha \mathscr{M}_\varepsilon u \to D^\alpha u \quad \text{в} \quad L_p(\omega).$$

Используя усреднения, легко показать, что равенство $\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)} = 0$, где Ω — область, означает, что u — полином степени не выше $l-1$.

Следующие две теоремы утверждают возможность аппроксимации любой функции из $L_p^l(\Omega)$ и $W_p^l(\Omega)$ бесконечно дифференцируемыми в Ω функциями.

Теорема 1. *Пространство* $L_p^l(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ *плотно в* $L_p^l(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $\{\mathscr{B}_k\}_{k\geqslant 1}$ — локально конечное покрытие Ω открытыми шарами $\mathscr{B}_k$, $\bar{\mathscr{B}}_k \subset \Omega$, и пусть $\{\varphi_k\}_{k\geqslant 1}$ — подчиненное этому покрытию разбиение единицы. Пусть, кроме того, u — любая функция из $L_p^l(\Omega)$ и $\{\rho_k\}$ — последовательность положительных чисел, стремящаяся к нулю монотонно и столь быстро, что последовательность концентрических шаров $\{(1+\rho_k)\mathscr{B}_k\}$ обладает теми же свойствами, что и $\{\mathscr{B}_k\}$ *. Через w_k обозначим усреднение функции $u_k=\varphi_k u$ с радиусом $\rho_k r_k$, где r_k — радиус $\mathscr{B}_k$. Ясно, что функция $w=\sum w_k$ принадлежит пространству $C^\infty(\Omega)$. Возьмем $\varepsilon\in(0,\ 1/2)$ и выберем ρ_k так, чтобы имело место неравенство

$$\|u_k-w_k\|_{L_p^l(\Omega)}\leqslant\varepsilon^k.$$

На любом открытом ограниченном множестве ω, $\bar\omega\subset\Omega$, справедливо равенство $u=\sum_k u_k$. (Здесь сумма содержит конечное число слагаемых.) Поэтому

$$\|u-w\|_{L_p^l(\omega)}\leqslant\sum_k\|u_k-w_k\|_{L_p^l(\omega)}\leqslant\varepsilon(1-\varepsilon)^{-1}.$$

Следовательно, $w\in L_p^l(\Omega)\cap C^\infty(\Omega)$ и $\|u-w\|_{L_p^l(\Omega)}\leqslant 2\varepsilon$.

Точно так же доказывается следующее утверждение.

Теорема 2. *Пространство* $W_p^l(\Omega)\cap C^\infty(\Omega)$ *плотно в* $W_p^l(\Omega)$, *а пространство* $V_p^l(\Omega)\cap C^\infty(\Omega)$ *плотно в* $V_p^l(\Omega)$.

Замечание. В доказательстве теоремы 1 по существу показано, что для множества Ω с компактным замыканием пространство $L_p^l(\Omega)\cap C^\infty(\Omega)\cap C(\bar\Omega)$ плотно в $L_p^l(\Omega)\cap C(\bar\Omega)$ и, разумеется, здесь можно заменить L_p^l на W_p^l или V_p^l.

Действительно, будем считать, что числа ρ_k выбраны так, что дополнительно имеет место неравенство

$$\|u_k-w_k\|_{C(\Omega)}\leqslant\varepsilon^k.$$

Пусть

$$V_N=\sum_{k=1}^N w_k+\sum_{k=N+1}^\infty u_k.$$

Тогда

$$\sup_{x\in\bar\Omega}|w(x)-V_N(x)|\leqslant\sum_{k=N+1}^\infty\|u_k-w_k\|_{C(\Omega)}\leqslant 2\varepsilon^{N+1}$$

и, следовательно, $w\in C(\bar\Omega)$ как предел последовательности непрерывных функций на $\bar\Omega$. Вместе с тем

$$\|u-w\|_{C(\Omega)}\leqslant\sum_{k=1}^\infty\|u_k-w_k\|_{C(\Omega)}\leqslant 2\varepsilon. \blacksquare$$

---

* Если $\mathscr{B}_k=B_\rho(x)$, то по определению $c\mathscr{B}_k=B_{c\rho}(x)$.

1.1.6. Аппроксимация функций из пространств Соболева функциями из $C^\infty(\bar\Omega)$. Приведем пример области, для которой в теоремах 1.1.5/1 и 1.1.5/2 нельзя заменить $C^\infty(\Omega)$ на $C^\infty(\bar\Omega)$.

Введем на плоскости полярные координаты (ρ, θ), где $0 \leqslant \theta < 2\pi$, и рассмотрим область $\Omega = \{(\rho, \theta)\colon 1<\rho<2,\ 0<\theta<2\pi\}$, граница которой состоит из окружностей $\rho=1$, $\rho=2$ и интервала $\{(\rho, \theta)\colon 1<\rho<2,\ \theta=0\}$. Функция $u=\theta$ суммируема на Ω со всеми своими производными, но не является абсолютно непрерывной на отрезках прямых $x=\mathrm{const}>0$, пересекающих Ω. Согласно теореме 1.1.3/1 она не принадлежит пространству $L_p^l(\Omega_1)$, где Ω_1 — кольцо $\{(\rho, \theta)\colon 1<\rho<2,\ 0\leqslant\theta<2\pi\}$. Следовательно, производные этой функции не аппроксимируются в среднем функциями из $C^\infty(\bar\Omega)$.

Необходимое и достаточное условие возможности аппроксимации функций из пространств Соболева функциями из $C^\infty(\bar\Omega)$ неизвестно. Две теоремы этого пункта содержат простые достаточные условия плотности $C^\infty(\bar\Omega)$ в $V_p^l(\Omega)$, $W_p^l(\Omega)$ и $L_p^l(\Omega)$.

Определение. Область $\Omega \subset R^n$ называется *звездной относительно некоторой точки*, если любой исходящий из этой точки луч имеет одну и только одну общую точку с $\partial\Omega$.

Теорема 1. *Если Ω — ограниченная область, звездная относительно точки, то пространство $C^\infty(\bar\Omega)$ плотно в $W_p^l(\Omega)$, $V_p^l(\Omega)$ и $L_p^l(\Omega)$.*

Доказательство. Пусть $u \in W_p^l(\Omega)$. Будем считать, что область Ω звездна относительно начала координат. Введем обозначение $u_\tau(x)=u(\tau x)$, где $\tau\in(0, 1)$. Нетрудно видеть, что $\|u-u_\tau\|_{L_p(\Omega)}\to 0$ при $\tau\to 1$.

Из определения обобщенной производной следует, что $D^\alpha(u_\tau) = \tau^l(D^\alpha u)_\tau$, $|\alpha|=l$. Поэтому $u_\tau \in W_p^l(\tau^{-1}\Omega)$ и

$$\|D^\alpha(u-u_\tau)\|_{L_p(\Omega)} \leqslant (1-\tau^l)\|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)} + \|D^\alpha u - (D^\alpha u)_\tau\|_{L_p(\Omega)}.$$

Правая часть этого неравенства стремится к нулю при $\tau\to 1$ и, значит, $u_\tau \to u$ в $W_p^l(\Omega)$.

Так как $\bar\Omega \subset \tau^{-1}\Omega$, последовательность усреднений функций u_τ сходится к u в $W_p^l(\Omega)$. Это позволяет с помощью диагонального процесса построить последовательность функций из $C^\infty(\bar\Omega)$, аппроксимирующую u в $W_p^l(\Omega)$.

Доказательство плотности $C^\infty(\bar\Omega)$ в $W_p^l(\Omega)$ закончено. Пространства $L_p^l(\Omega)$, $V_p^l(\Omega)$ рассматриваются аналогично.

Теорема 2. *Пусть Ω — область с компактным замыканием класса C, т. е. обладающая следующим свойством: каждая точка $x \in \partial\Omega$ имеет окрестность U, такую, что в некоторой системе декартовых координат множество $\Omega \cap U$ представляется неравен-*

ством $x_n < f(x_1, \ldots, x_{n-1})$, *где* f — *непрерывная функция. Тогда пространство* $C^\infty(\bar\Omega)$ *плотно в* $W_p^l(\Omega)$, $V_p^l(\Omega)$ *и* $L_p^l(\Omega)$.

Доказательство. Ограничимся для определенности рассмотрением пространства $V_p^l(\Omega)$. Согласно теореме 1.1.5/2 можно с самого начала предположить, что u принадлежит пересечению $C^\infty(\Omega)\cap V_p^l(\Omega)$.

Пусть $\{U\}$ — столь мелкое открытое покрытие $\partial\Omega$, что $U\cap\partial\Omega$ допускает явное задание в декартовых координатах, и пусть $\{\eta\}$ — гладкое разбиение единицы, подчиненное этому покрытию. Достаточно построить требуемую аппроксимацию для функции $u\eta$. Следовательно, можно считать, что

$$\Omega = \{x=(x', x_n):\ x'\in G,\ 0<x_n<f(x')\},$$

где G — подобласть R^{n-1}, $f\in C(\bar G)$, $f>0$ на G, и что u — функция с компактным носителем в $\Omega\cup\{x:\ x'\in G,\ x_n=f(x')\}$.

Обозначим через ε достаточно малое положительное число. Очевидно, что функция $u_\varepsilon(x)=u(x', x_n-\varepsilon)$ — гладкая на $\bar\Omega$. Кроме того, ясно, что для любого мультииндекса α

$$\|D^\alpha(u_\varepsilon-u)\|_{L_p(\Omega)} = \|(D^\alpha u)_\varepsilon - D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)} \to 0$$

при $\varepsilon\to+0$. ■

Замечание. Рассмотренная в начале раздела область Ω, для которой пространство $C^\infty(\bar\Omega)$ неплотно в пространствах Соболева, обладает свойством $\partial\Omega\neq\partial\bar\Omega$. Можно было бы предположить, что равенство $\partial\Omega=\partial\bar\Omega$ обеспечивает плотность $C^\infty(\bar\Omega)$ в $L_p^l(\Omega)$. Однако согласно следующему примеру эта гипотеза неверна [204].

Пример. Покажем, что существует такая ограниченная область $\Omega\subset R^n$, что $\partial\Omega=\partial\bar\Omega$, и множество $L_p^1(\Omega)\cap C(\bar\Omega)$ неплотно в $L_p^1(\Omega)$.

Пусть сначала $n=2$. Обозначим через K замкнутое, нигде не плотное подмножество отрезка $[-1, 1]$, и $\{B_i\}$ — последовательность открытых кругов, построенных на интервалах смежности множества K как на диаметрах. Пусть, кроме того, B — круг $x^2+y^2<4$. Обозначим через Ω множество $B\setminus\overline{\bigcup B_i}$. Ясно, что можно построить K так, чтобы линейная мера множества $\Gamma=\{x\in K, |x|<1/2\}$ была положительной. Рассмотрим характеристическую функцию верхней полуплоскости $y>0$ и функцию $\eta\in C_0^\infty(-1, 1)$, равную единице на $(-1/2, 1/2)$.

Функция U, определенная равенством $U(x, y)=\eta(x)\theta(x, y)$, принадлежит пространству $L_p^1(B)$ при всех $p\geqslant 1$. Допустим, что $u_j\to U$ в $L_p^1(\Omega)$, $\{u_j\}_{j\geqslant 1}$ — последовательность функций из $C(\bar\Omega)\cap L_p^1(\Omega)$. Согласно предположению для п. в. $x\in\Gamma$ и для всех

$\delta \in (0, 1/2)$

$$u_j(x, \delta) - u_j(x, -\delta) = \int_{-\delta}^{\delta} (\partial u_j(x, y)/\partial y)\, dy.$$

Следовательно,

$$\int_\Gamma |u_j(x, \delta) - u_j(x, -\delta)|\, dx \leqslant \int\int_{\Gamma(\delta)} |\operatorname{grad} u_j(x, y)|\, dx\, dy,$$

где $\Gamma(\delta) = \Gamma \times (-\delta, \delta)$.

Так как $u_j \to U$ в $L_1^1(\Omega)$, то интегралы

$$\int\int_{\Gamma(\delta)} |\operatorname{grad} u_j(x, y)|\, dx, dy, \quad j \geqslant 1,$$

равномерно малы. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta_0 > 0$, что для всех $\delta \in (0, \delta_0)$

$$\int_\Gamma |u_j(x, \delta) - u_j(x, -\delta)|\, dx < \varepsilon.$$

Применяя теорему Фубини, получаем, что левая часть неравенства стремится к

$$\int_\Gamma |U(x, \delta) - U(x, -\delta)|\, dx = m_1(\Gamma)$$

при $j \to \infty$ для почти всех малых δ. Следовательно, $m_1(\Gamma) \leqslant \varepsilon$, что противоречит положительности $m_1(\Gamma)$.

Так как $\partial\Omega = \partial\bar{\Omega}$, то требуемый контрпример построен при $n = 2$.

Если $n > 2$, то обозначим через ω только что рассмотренную плоскую область. Положим $\Omega = \omega \times (0, 1)^{n-2}$ и повторим предыдущее рассуждение.

1.1.7. Преобразование координат в нормах пространств Соболева. Пусть H и G — области в R^n и T: $y \to x(y) = (x_1(y), \ldots, x_n(y))$ — гомеоморфное отображение H на G.

Говорят, что T — *квазиизометрическое отображение*, если для любых точек $y_0 \in H$, $x_0 \in G$

$$\overline{\lim_{y \to y_0}} \frac{|x(y) - x(y_0)|}{|y - y_0|} \leqslant L, \quad \overline{\lim_{x \to x_0}} \frac{|y(x) - y(x_0)|}{|x - x_0|} \leqslant L \tag{1}$$

и якобиан $\det x'(y)$ сохраняет знак в H.

Мы предоставляем читателю проверить, что оценки (1) равносильны соответственно следующим неравенствам:

$$\|x'(y)\| \leqslant L \text{ п. в. на } H, \quad \|y'(x)\| \leqslant L \text{ п. в. на } G,$$

где x', y' — матрицы Якоби отображений $y \to x(y)$ и $x \to y(x)$, а $\|\cdot\|$ — норма матрицы. Отсюда непосредственно вытекает, что для якобиана квазиизометрического отображения верны оценки

$$L^{-n} \leqslant |\det x'(y)| \leqslant L^n. \tag{2}$$

По определению отображение T принадлежит классу $C^{l-1,1}(\bar{H})$, $l \geqslant 1$, если функции $y \to x_i(y)$ принадлежат классу $C^{l-1,1}(\bar{H})$.

Легко показать, что если T — квазиизометрическое отображение класса $C^{l-1,1}(\bar{H})$, то T^{-1} принадлежит классу $C^{l-1,1}(\bar{G})$.

Теорема. *Пусть T — квазиизометрическое отображение H на G класса $C^{l-1,1}(\bar{H})$, $l \geqslant 1$. Пусть, кроме того, $u \in V_p^l(G)$ и $v(y) = u(x(y))$. Тогда $v \in V_p^l(H)$, и при* п. в. *$y \in H$ производные $D^\alpha v(y)$, $|\alpha| \leqslant l$, существуют и выражаются классической формулой*

$$D^\alpha v(y) = \sum\nolimits_{1 \leqslant |\beta| \leqslant |\alpha|} \varphi_\beta^\alpha(y)(D^\beta u)(x(y)). \tag{3}$$

Здесь

$$\varphi_\beta^\alpha(y) = \sum\nolimits_s c_s \prod\nolimits_{i=1}^n \prod\nolimits_j (D^{s_{ij}} x_i)(y),$$

причем суммирование распространено на все наборы мультииндексов $s = (s_{ij})$, подчиненные условиям

$$\sum\nolimits_{i,j} s_{ij} = \alpha, \quad |s_{ij}| \geqslant 1, \quad \sum\nolimits_{i,j} (|s_{ij}| - 1) = |\alpha| - |\beta|.$$

Кроме того, нормы $\|v\|_{V_p^l(H)}$ и $\|u\|_{V_p^l(G)}$ эквивалентны.

Доказательство. Пусть $u \in C^\infty(G) \cap V_p^1(G)$. Тогда функция v абсолютно непрерывна на почти всех прямых, параллельных координатным осям, и ее частные производные при п. в. y выражаются формулой

$$\partial v(y)/\partial y_m = \sum\nolimits_{i=1}^n (\partial x_i(y)/\partial y_m)(\partial u/\partial x_i)(x(y)). \tag{4}$$

Так как

$$\|\nabla v\|_{L_p(H)} \leqslant c \|\nabla u\|_{L_p(G)},$$

то согласно теореме 1.1.3/2 $v \in V_p^1(H)$. Аппроксимируя произвольную функцию $u \in V_p^1(G)$ функциями из $C^\infty(G) \cap V_p^1(G)$ (см. теорему 1.1.5/2), выводим требуемое в случае $l = 1$.

При $l > 1$ результат получается индукцией. Пусть формула (3) верна для $|\alpha| = l - 1$. Так как $D^\beta u \in V_p^1(G)$, то согласно только что доказанному функции $y \to (D^\beta u)(x(y))$ принадлежат пространству $V_p^1(H)$. Отсюда и из включения $\varphi_\beta^\alpha \in C^{0,1}(H)$ следует, что каждое слагаемое правой части равенства (3), где $|\alpha| = l - 1$, принадлежит пространству $V_p^1(H)$. Применяя к (3) при $|\alpha| = l$ формулу (4), приходим к оценке

$$\|\nabla_l v\|_{L_p(H)} \leqslant c \|u\|_{V_p^l(G)}. \blacksquare$$

1.1.8. Области, звездные относительно шара.

Определение. Область Ω *звездна относительно шара*, расположенного в Ω, если она звездна относительно каждой точки этого шара.

Лемма. *Пусть Ω — ограниченная область, звездная относительно шара B_ρ с радиусом ρ и центром в начале сферических координат (r, ω). Если $r=r(\omega)$ — уравнение $\partial\Omega$, то функция $r(\omega)$ удовлетворяет условию Липшица.*

Доказательство. Покажем, что если x, $y \in \partial\Omega$ и

$$|\omega_x - \omega_y| < 1, \tag{1}$$

то $|x-y| \leqslant 2D^2\rho^{-1}|\omega_x - \omega_y|$.

Неравенство (1) означает, что угол φ между векторами x и y меньше, чем $\pi/3$. Покажем, что прямая l, проходящая через точки x и y, не может пересекать шар $B_{\rho/2}$ с радиусом $\rho/2$ и центром в начале координат.

Действительно, если существует точка $z \in l \cap B_{\rho/2}$, то в силу звездности Ω относительно z точка z принадлежит отрезку xy.

Рассмотрим треугольники Oxz и Oyz. Так как $|x|>\rho$, $|y|>\rho$, $|z|\leqslant\rho/2$, то $|z|\leqslant|y-z|$, $|z|\leqslant|x-z|$. Поэтому угол xOz больше угла xzO и угол yOz больше угла yzO. Следовательно, угол φ, равный сумме углов xOz и yOz, не меньше, чем $\pi/3$, что противоречит неравенству (1).

Расстояние от точки O до прямой l равно $|x||y||x-y|^{-1}\sin\varphi$, и так как $l \cap B_{\rho/2} \neq \varnothing$, оно не меньше $\rho/2$. Следовательно,

$$|x-y| \leqslant 2\rho^{-1}|x||y|\sin\varphi \leqslant 4\rho^{-1}D^2\sin(\varphi/2) = 2\rho^{-1}D^2|\omega_x-\omega_y|. \blacksquare$$

Замечание. Нетрудно проверить, что верно и обратное утверждение. Именно, если Ω — ограниченная область, граница которой допускает явное задание $r=r(\omega)$ в сферических координатах, причем $r(\omega)$ удовлетворяют условию Липшица, то Ω звездна относительно некоторого шара с центром в начале координат.

1.1.9. Области класса $C^{0,1}$ или удовлетворяющие условию конуса.

Определение 1. Будем говорить, что ограниченная область Ω *принадлежит классу* $C^{0,1}$, если любая точка $x \in \partial\Omega$ имеет окрестность U, такую, что в некоторой декартовой системе координат множество $U \cap \Omega$ может быть представлено неравенством $x_n < f(x_1, \ldots, x_{n-1})$, где f — функция, удовлетворяющая условию Липшица.

Из леммы 1.1.8 следует, что ограниченная область, звездная относительно шара, принадлежит классу $C^{0,1}$.

Определение 2. Область Ω *удовлетворяет условию конуса*, если в каждую ее точку можно поместить вершину конуса, заданного в некоторой декартовой системе координат неравенствами $x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2<bx_n^2$, $0<x_n<a$, a, $b=\mathrm{const}$, и содержащегося внутри Ω вместе с замыканием.

Замечание 1. Нетрудно показать, что ограниченные области класса $C^{0,1}$ удовлетворяют условию конуса. Пример шара с выколотым центром показывает, что обратное утверждение неверно.

Лемма 1. *Ограниченная область, удовлетворяющая условию конуса, есть объединение конечного числа областей, звездных относительно шара.*

Поскольку область, удовлетворяющая условию конуса, является суммой конгруэнтных конусов, а следовательно, суммой областей, звездных относительно шаров с фиксированным радиусом, лемма 1 немедленно выводится из следующего утверждения.

Лемма 2. *Если ограниченная область Ω представляет собой сумму бесконечного множества областей G_α, звездных относительно содержащихся в них шаров $\mathscr{B}_\alpha$ с фиксированным радиусом $R>0$, то для всякого $r<R$ существует конечное число областей Ω_k $(1\leqslant k\leqslant N)$, звездных относительно содержащихся в них шаров с радиусом r, объединение которых совпадает с областью Ω.*

Доказательство. Пусть G_1 — одна из областей бесконечного семейства G_α. Образуем область $\Omega_1=\bigcup\limits_\beta G_\beta$, где сумма распространяется на все области G_β, для которых центры шаров $\mathscr{B}_\beta$ отстоят от центра шара $\mathscr{B}_1$ на расстояние $\rho\leqslant R-r$. Очевидно, что любой из этих шаров $\mathscr{B}_\beta$ содержит шар $\mathscr{C}_1$ с радиусом r, концентрический с $\mathscr{B}_1$. Так как каждая из областей G_β звездна относительно $\mathscr{C}_1$, то и вся область Ω_1 звездна относительно этого шара.

Примем за область G_2 любую из областей G_α, не вошедших в Ω_1. Повторяя предыдущие рассуждения, построим область Ω_2, звездную относительно шара $\mathscr{C}_2$ с радиусом r, центр которого отстоит от центра шара $\mathscr{C}_1$ на расстоянии $d>R-r$. Аналогично построим область Ω_3, звездную относительно шара $\mathscr{C}_3$ радиусом r с центром, удаленным от центров $\mathscr{C}_1$ и $\mathscr{C}_2$ на расстояние $d>R-r$, и т. д. Этот процесс оборвется после конечного числа шагов, так как центры шаров $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \ldots$ содержатся в ограниченной области, а расстояние между любыми двумя из них больше числа $R-r>0$. ■

Замечание 2. Области класса $C^{0,1}$ иногда называют *сильно липшицевыми* в отличие от липшицевых областей, определяемых следующим образом.

Определение 3. Ограниченная область Ω называется *липшицевой*, если каждая точка ее границы имеет такую окрестность U в R^n, что $U\cap\Omega$ отображается на куб при помощи квазиизометрического преобразования.

Очевидно, что области класса $C^{0,1}$ удовлетворяют только что сформулированному условию. Следующий пример показывает, что обратное утверждение неверно, т. е. что липшицева область не обязана быть сильно липшицевой. Более того, рассматриваемая в этом примере липшицева область не удовлетворяет условию конуса (ср. с замечанием 1).

Пример. Пусть область $\Omega \subset R^2$ есть сумма прямоугольников

$$P_k = \{x\colon |x_1 - 2^{-k}| < 2^{-k-2},\ 0 \leqslant x_2 < 2^{-k-2}\},\ k = 1, 2, \ldots,$$

и квадрата $Q = \{x\colon 0 < x_1 < 1,\ -1 < x_2 < 0\}$. Отсутствие условия конуса очевидно. Покажем, что Ω отображается на квадрат Q при помощи квазиизометрического преобразования.

Непосредственно проверяется, что отображение $T_0\colon x \to y = (y_1, y_2)$, тождественное на Q и определенное на P_k равенствами $y_1 = (x_1 - 2^{-k})(1 - 2^k x_2) + 2^{-k}$, $y_2 = x_2$, квазиизометрическое.

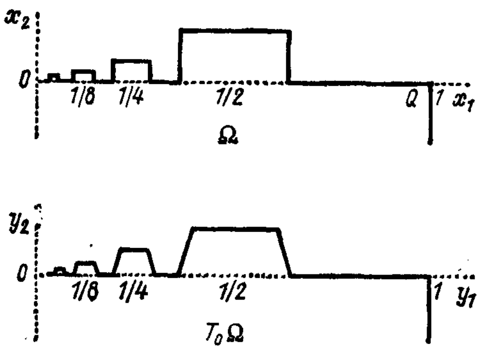

Рис. 4.

Образ $T_0\Omega$ представляет собой объединение куба T_0Q и множества $\{y\colon 0 < y_1 < 1,\ 0 \leqslant y_2 < f(y_1)\}$, где f удовлетворяет условию Липшица с константой 4, $0 \leqslant f(y_1) \leqslant 1/8$ (рис. 4).

Пусть η — кусочно-линейная функция, равная единице при $y > 0$ и нулю при $y < -1$. Липшицево преобразование $T_1\colon y \to z$, заданное равенствами $z_1 = y_1$, $z_2 = y_2 - f(y_1)\,\eta(y_2)$, отображает $T_0\Omega$ на квадрат $\{z\colon 0 < z_1 < 1,\ -1 < z_2 < 0\}$. Якобиан T_1 больше $^1/_2$ и, следовательно, T_1 — квазиизометрическое преобразование. Итак, Ω отображается на квадрат Q квазиизометрическим преобразованием $T_0 T_1$.

1.1.10. Интегральное представление функций по Соболеву.

Теорема 1. *Пусть Ω — ограниченная область, звездная относительно шара B_δ, $\bar{B}_\delta \subset \Omega$, и u — функция из $L_p^l(\Omega)$. Тогда при* п. в. $x \in \Omega$

$$u(x) = \delta^{-n} \sum_{|\beta| < l} \left(\frac{x}{\delta}\right)^\beta \int_{B_\delta} \varphi_\beta\left(\frac{y}{\delta}\right) u(y)\,dy + \sum_{|\alpha| = l} \int_\Omega \frac{f_\alpha(x, r, \theta)}{r^{n-l}} D^\alpha u(y)\,dy, \tag{1}$$

где $r = |y - x|$, $\theta = (y - x)r^{-1}$, $\varphi_\beta \in \mathscr{D}(B_1)$ и f_α — бесконечно дифференцируемые функции своих аргументов. Функции f_α допускают оценку $|f_\alpha| \leqslant c(D/\delta)^{n-1}$, где D — диаметр области Ω, а c — постоянная, не зависящая от Ω.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $\delta = 1$. Пусть $\omega \in \mathscr{D}(B_1)$ и

$$\int_{B_1} \omega(y)\,dy = 1. \tag{2}$$

Предположим сначала, что $u \in C^l(\Omega)$. Введем функции

$$\left.\begin{aligned} &\psi(x;\ r,\ \theta) = -(r^{l-1}/(l-1)!)\int_r^\infty \omega(x+t\theta)\,t^{n-1}\,dt,\\ &U(x;\ r,\ \theta) = \sum\nolimits_{k=0}^{l-1}(-1)^k(\partial^k/\partial r^k)\,u(x+r\theta)\,(\partial^{l-1-k}/\partial r^{l-1-k})\,\psi(x;\ r,\ \theta), \end{aligned}\right\}\tag{3}$$

если $y \in \Omega$ и $U(x;\ r,\ \theta) = 0$, если $y \overline{\in} \Omega$.

Прежде всего отметим, что

$$U(x;\ 0,\ \theta) = -u(x)\int_0^\infty \omega(x+t\theta)\,t^{n-1}\,dt.$$

Дифференцируя (3), получаем $\partial U/\partial r = u\,(\partial^l\psi/\partial r^l) + (-1)^{l-1}\,\psi\,(\partial^l u/\partial r^l)$, что вместе с (3) приводит к равенству

$$u(x)\int_0^\infty \omega(x+t\theta)\,t^{n-1}\,dt = \int_0^\infty u(x+r\theta)\,(\partial^l\psi/\partial r^l)(x;\ r,\ \theta)\,dr + \\ +(-1)^l\int_0^\infty \psi(x;\ r,\ \theta)\,(\partial^l/\partial r^l)\,u(x+r\theta)\,dr.$$

Проинтегрируем это тождество по сфере $\{\theta\colon |\theta| = 1\}$ и воспользуемся равенством (2). Тогда придем к равенству

$$u(x) = \int_\Omega u(y)\,\frac{\partial^l}{\partial r^l}\,\psi(x;\ r,\ \theta)\,\frac{dy}{r^{n-1}} + (-1)^l\int_\Omega \psi(x,\ r,\ \theta)\,\frac{\partial^l}{\partial r^l}\,u(y)\,\frac{dy}{r^{n-1}}.\tag{4}$$

Непосредственно проверяется, что

$$\frac{1}{r^{n-1}}\,\frac{\partial^l}{\partial r^l}\,\psi(x;\ r,\ \theta) = \sum\nolimits_{k=0}^{l-1}\frac{(n+l-1)!}{(n+k)!\,(l-k-1)!\,k!}\,r^k\,\frac{\partial^k}{\partial r^k}\,\omega(x+r\theta).$$

Поскольку

$$r^k(\partial^k/\partial r^k)\,\omega(x+r\theta) = \sum\nolimits_{|\beta|=k}(k!/\beta!)\,(y-x)^\beta\,D^\beta\omega(y),$$

то

$$\frac{1}{r^{n-1}}\,\frac{\partial^l}{\partial r^l}\,\psi(x;\ r,\ \theta) = \sum\nolimits_{|\beta|<l} x^\beta\varphi_\beta(y),$$

где $\varphi_\beta \in \mathscr{D}(B_1)$. Следовательно, первое слагаемое в (4) представляет собой многочлен степени $l-1$ по переменной x: $\sum_{|\beta|<l} x^\beta\int_{B_1}\varphi_\beta(y)\,u(y)\,dy$.

Рассмотрим второе слагаемое в (4). Имеем $(\partial^l/\partial r^l)\,u(x+r\theta) = \sum_{|\alpha|=l}(l!/\alpha!)\,\theta^\alpha D^\alpha u(y)$, где $\theta_i = (y_i - x_i)\,r^{-1}$. Поэтому $(-1)^{l-1}\times$ $\times(1/r^{n-1})\,\psi(x;\ r,\ \theta)\,(\partial^l/\partial r^l)\,u(x+r\theta) = (-1)^l\,l!/r^{n-l}\sum_{|\alpha|=l}(\theta^\alpha/\alpha!)\times$ $\times D^\alpha u(y)\int_r^\infty \omega(x+t\theta)\,t^{n-1}\,dt$, и мы пришли к (1), где

$$f_\alpha(x;\ r,\ \theta) = \frac{(-1)^l\,l!}{\alpha!}\,\theta^\alpha\int_r^\infty \omega(x+t\theta)\,t^{n-1}\,dt.\tag{5}$$

Оценка $|f_\alpha| \leqslant cD^{n-1}$ очевидна. Равенство (1) доказано для $u \in C^l(\bar{\Omega})$. Допустим, что $u \in L_p^l(\Omega)$. Отметим, что семейство функций u_τ, построенное в теореме 1.1.6/1, обладает следующим свойством: $u_\tau \to u$ при $\tau \to 1$ в $L_p(\Omega, \mathrm{loc})$ и в $L_p^l(\Omega)$. Поэтому, переходя к пределу в представлении (1) для функции u_τ и используя при этом непрерывность в $L_p(\Omega)$ интегрального оператора со слабой особенностью, выводим (1) в общем случае.

Для $\Omega = R^n$ получаем более простое интегральное представление функции $u \in \mathscr{D}$.

Теорема 2. *Если* $u \in \mathscr{D}$, *то*

$$u(x) = ((-1)^l\, l/nv_n) \int_{R^n} \sum_{|\alpha| = l} (\theta^\alpha/\alpha!)\, D^\alpha u(y)\, (dy/r^{n-l}), \tag{6}$$

где, как и в теореме 1, $r = |y-x|$, $\theta = (y-x)\, r^{-1}$.

Доказательство формулы (6) повторяет вывод тождества (1.1) с той разницей, что здесь роль $\psi(x;\, r,\, \theta)$ играет функция $\psi(r) = r^{l-1}/(l-1)!$

1.1.11. Обобщенное неравенство Пуанкаре. При помощи леммы 1.1.9/1 и теоремы 1.1.10/1 получается следующее утверждение, которым мы воспользуемся в 1.1.13.

Лемма. *Пусть* Ω — *ограниченная область, удовлетворяющая условию конуса,* ω — *произвольное непустое открытое множество,* $\bar{\omega} \subset \Omega$. *Тогда для любой функции* $u \in L_p^l(\Omega)$, $p \geq 1$, *найдется полином*

$$\Pi(x) = \sum_{|\alpha| \leq l-1} (u,\, \varphi_\alpha)\, x^\alpha, \tag{1}$$

где $\varphi_\alpha \in \mathscr{D}(\omega)$, *такой, что*

$$\sum_{k=0}^{l-1} \| \nabla_k (u - \Pi) \|_{L_p(\Omega)} \leq C \| \nabla_l u \|_{L_p(\Omega)}. \tag{2}$$

Здесь C — *постоянная, не зависящая от* u.

Доказательство. Достаточно предположить, что ω — шар. Обозначим через G любую из составляющих Ω областей, звездных относительно шара (см. лемму 1.1.9/1), и через $\mathscr{B}$ — соответствующий шар. Построим конечную цепочку шаров $\{\mathscr{B}_i\}_{i=0}^{M}$, такую, что $\mathscr{B}_0 = \mathscr{B}$, $\mathscr{B}_i \cap \mathscr{B}_{i+1} \neq \varnothing$, $\mathscr{B}_M = \omega$. Так как область G звездна относительно любого шара, содержащегося в $\mathscr{B}_0 \cap \mathscr{B}_1$, то, используя интегральное представление (1.1.10/1) и непрерывность интегрального оператора с ядром $|x-y|^{l-k-n}$ в $L_p(G)$, получаем неравенство

$$\| \nabla_k u \|_{L_p(G)} \leq C \left(\| \nabla_l u \|_{L_p(G)} + \| u \|_{L_p(\mathscr{B}_0 \cap \mathscr{B}_1)} \right), \quad 0 \leq k < l. \tag{3}$$

Аналогично при $i = 1, \ldots, N-1$ имеем

$$\| u \|_{L_p(\mathscr{B}_i)} \leq C \left(\| \nabla_l u \|_{L_p(\mathscr{B}_i)} + \| u \|_{L_p(\mathscr{B}_i \cap \mathscr{B}_{i+1})} \right).$$

Следовательно, $\| \nabla_k u \|_{L_p(G)} \leq C \left(\| \nabla_l u \|_{L_p(\Omega)} + \| u \|_{L_p(\omega)} \right)$.

Суммируя по всем G, получаем неравенство

$$\|\nabla_k u\|_{L_p(\Omega)} \leqslant C\left(\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)} + \|u\|_{L_p(\omega)}\right). \tag{4}$$

Из интегрального представления (1.1.10/1) для функций в ω следует

$$\|u - \Pi\|_{L_p(\omega)} \leqslant C\|\nabla_l u\|_{L_p(\omega)},$$

где

$$\Pi(x) = \sum_{|\beta| < l} x^\beta \int_\omega \varphi_\beta(y)\, u(y)\, dy, \quad \varphi_\beta \in \mathscr{D}(\omega).$$

Остается заменить в (4) u на $u - \Pi$. ■

Из леммы получаем следующее очевидное следствие.

Следствие. *Для ограниченной области, удовлетворяющей условию конуса, пространства $V_p^l(\Omega)$, $W_p^l(\Omega)$ и $L_p^l(\Omega)$ совпадают.*

Замечание В этом пункте мы сознательно не стремимся к наиболее сильной формулировке леммы для функций в областях, удовлетворяющих условию конуса. Такая формулировка немедленно получится, если лемму объединить с теоремой 1.4.5, которая доказывается далее.

Вместе с тем класс областей, рассматриваемых в лемме этого пункта, также далек от максимального. Заключения леммы и следствия, например, имеют место для любой ограниченной области, являющейся конечной суммой областей класса C (определенного в теореме 1.1.6/2). Доказательство проводится по той же схеме, если вместо (3) принять во внимание следующее свойство простейшей области из класса C.

Пусть

$$\Omega = \{x : x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 < \rho^2,\ 0 < x_n < f(x_1, \ldots, x_{n-1})\},$$

где f — непрерывная функция в шаре $x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 \leqslant \rho^2$.

Через G обозначим «цоколь» области Ω, т. е. цилиндр

$$\{x:\ x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 < \rho^2,\quad 0 < x_n < \min f(x_1, \ldots, x_{n-1})\}.$$

Тогда для всех $u \in C^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} \leqslant C\left(\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)} + \|u\|_{L_p(G)}\right).$$

Последнее следует из элементарного неравенства

$$\int_0^a |f(t)|^p\, dt \leqslant c\left(a^p \int_0^a |f'(t)|^p\, dt + (a/b)\int_0^b |f(t)|^p\, dt\right), \tag{5}$$

где $f \in C^1[0, a]$, $0 < b < a$, и c зависит только от p.

Доказательство оценки (5) можно провести следующим образом. Пусть $\Phi_a = \left(a^{-1}\int_0^a |f(t)|^p\, dt\right)^{1/p}$ — значение функции $|f|$ в некоторой точке интервала $(0, a)$. Имеем $|\Phi_a - \Phi_b| \leqslant \int_0^a |f'(t)|\,dt \leqslant$ $\leqslant a^{1/p'} \|f'\|_{L_p(0,a)}$, что и дает (5).

Пример. Рассматривая область $\Omega = \{(x, y) \in R^2 : |y| < \exp(-1/x),$ $0 < x < 1\}$ и функцию $u(x, y) = x^{2l} \exp(1/px)$, убеждаемся в том, что для области класса C пространство $L_p(\Omega)$ в левой части неравенства (2), вообще говоря, нельзя заменить никаким пространством $L_q(\Omega)$ при $q > p$.

1.1.12. Полнота пространств $W_p^l(\Omega)$ и $V_p^l(\Omega)$. В следующей теореме Ω — произвольное открытое подмножество R^n.

Теорема. *Пространства $W_p^l(\Omega)$ и $V_p^l(\Omega)$ полные.*

Доказательство. Пусть $\{u_k\}_{k \geqslant 1}$ — фундаментальная последовательность в $W_p^l(\Omega)$ и пусть $u_k \to u$ в $L_p(\Omega)$ и $D^\alpha u_k \to v_\alpha$, $|\alpha| = l$, в $L_p(\Omega)$. Тогда для любой функции φ из $\mathscr{D}(\Omega)$

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi\, dx = \lim_{k \to \infty} \int_\Omega u_k D^\alpha \varphi\, dx =$$
$$= (-1)^l \lim_{k \to \infty} \int_\Omega \varphi D^\alpha u_k\, dx = (-1)^l \int_\Omega v_\alpha \varphi\, dx.$$

Итак, $v_\alpha = D^\alpha u$ и последовательность $\{u_k\}$ сходится к функции $u \in W_p^l(\Omega)$. Теорема доказана для пространства $W_p^l(\Omega)$. Пространство $V_p^l(\Omega)$ рассматривается точно так же.

1.1.13. Пространство $\dot{L}_p^l(\Omega)$ и его полнота. Предположим, что Ω — область.

Определение. Пространством $\dot{L}_p^l(\Omega)$ назовем фактор-пространство $L_p^l(\Omega)/\mathscr{P}_{l-1}$, где $\mathscr{P}_k$ — подпространство полиномов степени не выше k.

В пространстве $\dot{L}_p^l(\Omega)$ введем норму $\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)}$. Элементами $\dot{L}_p^l(\Omega)$ являются классы $\dot{u} = \{u + \Pi\}$, где $\Pi \in \mathscr{P}_{l-1}$, $u \in L_p^l(\Omega)$.

Теорема 1. *Пространство $\dot{L}_p^l(\Omega)$ полное.*

Доказательство. Пусть $\{\dot{u}_k\}_{k \geqslant 1}$ — фундаментальная последовательность в $\dot{L}_p^l(\Omega)$. Это означает, что для любой функции u_k из класса $\dot{u}_k$ и любого мультииндекса α порядка l $D^\alpha u_k \to T_\alpha$ в $L_p(\Omega)$. Требуется показать, что существует функция $u \in L_p^l(\Omega)$, такая, что $D^\alpha u = T_\alpha$.

Пусть B — открытый шар, $\bar{B} \subset \Omega$ и пусть $\{\omega_j\}_{j \geqslant 0}$ — последовательность областей с компактными замыканиями и гладкими границами, такая, что $\bar{B} \subset \omega_0$, $\omega_j \subset \omega_{j+1}$, $\bigcup_j \omega_j = \Omega$. Вместе с функцией u_k классу $\dot{u}_k$ принадлежит и функция $v_k = u_k - \Pi_k$, где Π_k — полином, построенный в лемме 1.1.11 по множеству $\omega = B$ и функции u_k. В силу леммы 1.1.11 $\{v_k\}$ — фундаментальная последовательность в $L_p(\omega_j)$ при любом j.

Обозначим через u предельную функцию. Очевидно, что для любой функции $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ и любого мультииндекса α порядка l

$$(u, D^\alpha\varphi) = \lim(v_k, D^\alpha\varphi) = \lim(-1)^l (D^\alpha u_k, \varphi) = (-1)^l (T_\alpha, \varphi). \blacksquare$$

Попутно в доказательстве теоремы 1 установлено следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $\{u_k\}$ — последовательность функций из $L_p^l(\Omega)$, такая, что для некоторой функции $u \in L_p^l(\Omega)$*

$$\|\nabla_l(u_k - u)\|_{L_p(\Omega)} \to 0.$$

Тогда существует последовательность полиномов $\Pi_k \in \mathscr{P}_{l-1}$, такая, что $u_k - \Pi_k \to u$ в $L_p(\Omega, \mathrm{loc})$.

1.1.14. Сопряженные пространства для пространств Соболева.

Теорема 1. *Если $1 \leqslant p < \infty$, то любой линейный функционал на $L_p^l(\Omega)$ можно представить в виде*

$$f(u) = \int_\Omega \sum_{|\alpha| = l} g_\alpha(x) D^\alpha u(x)\, dx, \tag{1}$$

где $g_\alpha \in L_{p'}(\Omega)$, $pp' = p + p'$. Более того,

$$\|f\| = \inf \Big\| \Big(\sum_{|\alpha| = l} g_\alpha^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L_{p'}(\Omega)}, \tag{2}$$

где инфимум вычисляется по всем наборам $\{g_\alpha\}_{|\alpha| = l}$, для которых равенство (1) имеет место при любом $u \in L_p^l(\Omega)$.

Доказательство. Очевидно, что правая часть (1) является линейным функционалом на $L_p^l(\Omega)$ и $\|f\| \leqslant \Big\| \Big(\sum_{|\alpha| = l} g_\alpha^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L_{p'}(\Omega)}$.

Для того чтобы представить $f(u)$ в виде (1), рассмотрим пространство $\mathbf{L}_p(\Omega)$ векторов $\mathbf{v} = \{v_\alpha\}_{|\alpha| = l}$ с компонентами из $L_p(\Omega)$, снабженное нормой $\Big\| \Big(\sum_{|\alpha| = l} v_\alpha^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L_p(\Omega)}$. Так как пространство $L_p^l(\Omega)$ полно, то область значений оператора ∇_l: $L_p^l(\Omega) \to \mathbf{L}_p(\Omega)$ является замкнутым подпространством пространства $\mathbf{L}_p(\Omega)$. Определим функционал $\Phi(\mathbf{v}) = f(u)$ для любого вектора $\mathbf{v}$, представимого в виде $\nabla_l u$. Тогда $\|\Phi\| = \|f\|$ и по теореме Хана — Банаха Φ может быть распространен до линейного функционала на $\mathbf{L}_p(\Omega)$ с сохранением нормы. $\blacksquare$

Пусть, как и ранее, $W_p^l(\Omega) = L_p^l(\Omega) \cap L_p(\Omega)$. Обозначим через $\mathring{W}_p^l(\Omega)$ пополнение $\mathscr{D}(\Omega)$ по норме $W_p^l(\Omega)$.

Точно так же, как и теорема 1, доказывается следующее утверждение.

Теорема 2. *Любой линейный функционал на $W_p^l(\Omega)$ (или на $\mathring{W}_p^l(\Omega)$) имеет вид*

$$f(u) = \int_\Omega \Big(\sum_{|\alpha| = l} g_\alpha(x) D^\alpha u(x) + g(x) u(x) \Big) dx, \tag{3}$$

где $g_\alpha \in L_{p'}(\Omega)$, $g \in L_p(\Omega)$. *При этом*

$$\|f\| = \inf \left\| \left(\sum_{|\alpha|=l} g_\alpha^2 + g^2 \right)^{1/2} \right\|_{L_p(\Omega)}, \tag{4}$$

где инфимум берется по всем наборам функций g_α, $g \in L_{p'}(\Omega)$, *для которых равенство* (3) *имеет место при любом* $u \in W_p^l(\Omega)$ (*или* $u \in \mathring{W}_p^l(\Omega)$).

Из теоремы 2 непосредственно получается следующая более простая характеристика пространства линейных функционалов на $\mathring{W}_p^l(\Omega)$.

Следствие. *Любой линейный функционал на* $\mathring{W}_p^l(\Omega)$ *можно отождествить с обобщенной функцией* $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$, *имеющей вид*

$$f = \sum_{|\alpha|=l} (-1)^l D^\alpha g_\alpha + g, \tag{5}$$

где g_α, $g \in L_{p'}(\Omega)$. *Норма этого функционала равна правой части* (4), *где инфимум берется по всем наборам функций* g_α, g, *участвующих в представлении* (5).

1.1.15. Об эквивалентных нормировках пространства $W_p^l(\Omega)$. Следующая теорема описывает широкий класс эквивалентных норм в пространстве $W_p^l(\Omega)$.

Теорема. *Пусть ограниченная область* Ω *такова, что* $L_p^l(\Omega) \subset L_p(\Omega)$ (*например, удовлетворяет условию конуса*), *и пусть* $\mathscr{F}(u)$ — *непрерывный в* $W_p^l(\Omega)$ *функционал, обладающий свойствами полунормы и не обращающийся в нуль ни на одном отличном от нуля полиноме степени не выше* $l-1$. *Тогда норма*

$$\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)} + \mathscr{F}(u) \tag{1}$$

эквивалентна норме в $W_p^l(\Omega)$.

Доказательство. Пусть I — тождественное отображение $W_p^l(\Omega)$ в пространство $B(\Omega)$, полученное пополнением $W_p^l(\Omega)$ по норме (1). Это отображение линейно, непрерывно и взаимно однозначно. Из теоремы 1.1.13 о полноте пространства $L_p^l(\Omega)$ следует, что $B(\Omega) \subset L_p^l(\Omega)$. Так как по условию $L_p^l(\Omega) = W_p^l(\Omega)$, то I отображает $W_p^l(\Omega)$ на себя. По теореме Банаха (см. [12, с. 58]) I — изоморфизм. ■

Замечание. Условию теоремы удовлетворяет функционал $\mathscr{F}(u) = \sum_{0 \leqslant |\alpha| < l} |f_\alpha(u)|$, где f_α — линейные функционалы в $W_p^l(\Omega)$, такие, что $\det(f_\alpha(x^\beta)) \neq 0$ (здесь α и β — мультииндексы порядка не выше $l-1$)

Можно положить, например, $f_\alpha(u) = \int_\Omega u D^\alpha \varphi\, dx$, где $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, $\int_\Omega \varphi(x)\, dx \neq 0$.

Роль $\mathcal{F}(u)$ может играть также функционал $|\Pi(u)|$, где Π — проектор $W_p^l(\Omega)$ на подпространство $\mathcal{P}_{l-1}$, т. е. линейное непрерывное отображение $W_p^l(\Omega)$ на $\mathcal{P}_{l-1}$, удовлетворяющее условию $\Pi^2=\Pi$.

Так как $\Pi(u-\Pi(u))$, то из теоремы следует эквивалентность полунорм $\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)}$ и $\|u-\Pi(u)\|_{W_p^l(\Omega)}$ (ср. с леммой 1.1.11).

1.1.16. Продолжение функций из $V_p^l(\Omega)$ на R^n. В этом пункте речь идет о продолжении функций из пространства $V_p^l(\Omega)$ во внешность Ω «с сохранением класса». Начнем с известной процедуры продолжения «отражением конечного порядка». Введем несколько обозначений: $x=(x', x_n)$, где $x'=(x_1, \ldots, x_{n-1})$, π — n-мерный параллелепипед, $P=\pi\times(-a/(l+1), a)$, $P_+=\pi\times(0, a)$, $P_-=P\diagdown P_+$.

Теорема. *Для каждого целого $l\geqslant 0$ существует линейное отображение*

$$C^\infty(\bar{P}_+)\ni u\to u^*\in C^l(\bar{P}),$$

такое, что $u^*=u$ в P_+. Это отображение единственным образом можно распространить до непрерывного отображения: $L_p^k(P_+)\to L_p^k(P)$, $p\geqslant 1$, при всех $k=0, 1, \ldots, l$. Продолжение $u\to u^*$ может быть определено на пространстве $C^{k,1}(\bar{P}_+)$ $(k=0, 1, \ldots, l-1)$ и является непрерывным отображением в $C^{k,1}(\bar{P})$.

Это отображение обладает еще следующим свойством: если $\operatorname{dist}(\operatorname{supp} u, F)>0$, *где F — компакт в $\bar{P}_+$, то $u^*=0$ в окрестности F.*

Доказательство. Пусть $u\in C^\infty(\bar{P})$. Положим $u^*=u$ в P_+ и $u^*(x)=\sum_{j=1}^{l+1} c_j u(x', -jx_n)$ в P_-, где коэффициенты c_j удовлетворяют системе $\sum_{j=1}^{l+1}(-j)^k c_j=1$, $k=0, \ldots, l$. (Определитель этой системы — определитель Вандермонда — отличен от нуля.)

Очевидно, что $u^*\in C^l(\bar{P})$. Столь же очевидна оценка $\|\nabla_k u^*\|_{L_p(P)}\leqslant c\|\nabla_k u\|_{L_p(P_+)}$. Так как множество $C^\infty(\bar{P}_+)$ плотно в $L_p^k(P_+)$ (теорема 1.1.6/1), отображение $u^*\to u$ допускает единственное распространение до непрерывного отображения: $L_p^k(P_+)\to L_p^k(P)$. Непрерывность отображения $C^{k,1}(\bar{P}_+)\ni u\to u^*\in C^{k,1}(\bar{P})$ проверяется непосредственно.

Пусть $\operatorname{dist}(\operatorname{supp} u, F)>0$. Обозначим через x произвольную точку множества $F\cap\pi$ и через δ столь малое положительное число, что $(l+1)\delta<\operatorname{dist}(\operatorname{supp} u, F)$. Так как $u=0$ на множестве $\{x\in\bar{P}_+: |x'|<(l+1)x_n\}$, то $u^*=0$ на множестве $\{x\in P_-: |x'|^2+(l+1)^2x_n^2<(l+1)^2\delta^2\}$. Поэтому $u^*=0$ при $|x|<\delta$. ■

Пусть Ω — область в R^n с компактным замыканием $\bar{\Omega}$ и достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Комбинируя описанную конструкцию продолжения с разбиением единицы и локальным отображением области Ω на полупространство, нетрудно построить линейный непрерывный оператор $\mathscr{E}$: $V_p^l(\Omega)\to V_p^l(R^n)$, такой, что $\mathscr{E}u|_\Omega=u$ для всех $u\in V_p^l(\Omega)$. Если для области такой оператор существует, то она по определению принадлежит классу EV_p^l.

Итак, области с гладкими границами принадлежат классу EV_p^l. Оказывается, что тем же свойством обладают ограниченные области класса $C^{0,1}$. Доказательству этого полезного утверждения посвящен § 3 гл. VI монографии Стейна [121] (см. также комментарии к настоящему разделу).

К вопросу об описании областей класса EV_p^l мы еще вернемся в п. 1.5.

1.1.17. Комментарии к § 1.1. Пространство $W_p^l(\Omega)$ введено и подробно изучено С. Л. Соболевым [115—117]. Определения пространств $L_p^l(\Omega)$ и $\mathring{L}_p^l(\Omega)$ заимствованы из работы Ж. Дени и Ж. Л. Лионса [167]. В доказательствах теорем 1.1.2, 1.1.5/1, 1.1.12, 1.1.13/1 и 1.1.13/2 мы следуем той же статье, где аналогичные факты установлены для $l=1$. Теорема 1.1.5/1 доказана также Н. Мейерсом и Дж. Серрином [219]. В связи с материалом п. 1.1.3 отметим, что свойство абсолютной непрерывности на почти всех прямых, параллельных координатным осям, было положено в основу определения пространств типа L_p^1 еще в работах Б. Леви [208], О. Никодима [229], Ч. Морри [222] и др. Пример области из п. 1.1.4, для которой $W_2^2(\Omega)\neq V_2^2(\Omega)$, принадлежит автору. Пример, рассмотренный в начале п. 1.1.6, взят из работы Э. Гальярдо [184], а замечание 1.1.6 и следующий за ним пример заимствованы из статьи Т. Колсруда [204]. Теорема 1.1.6/1 доказана в курсе В. И Смирнова [114], а теорема 1.1.6/2 — в упомянутой статье Гальярдо. В связи с п. 1.1.7 см. книги Морри [223], Ю. Г. Решетняка [111] и статью автора и Т. О. Шапошниковой [96].

Требования звездности относительно шара и условие конуса введены в теорию пространств W_p^l С. Л. Соболевым [115—117]. Лемма 1.1.8, несомненно, известна, но автор затрудняется дать ссылку. Лемма 1.1.9/2 доказана В. П. Глушко [22]. Пример, приведенный в п. 1.1.9, принадлежит автору, другой пример липшицевой области не из класса $C^{0,1}$ можно найти в книге Ч. Морри [223].

Интегральные представления (1.1.10/1) и (1.1.10/6) получены С. Л. Соболевым [116, 117] и использованы им в доказательстве теорем вложения. Далеко идущие обобщения этих представлений получены В. П. Ильиным [33, 34] и К. Смитом [244] (см. книгу О. В. Бесова, В. П. Ильина и С. М. Никольского [5]), а также Ю. Г. Решетняком [110].

Неравенство Пуанкаре для ограниченных областей, являющихся конечными объединениями областей класса C, доказано в монографии Р. Куранта и Д. Гильберта [46]. Свойства функций из пространства $L_p^l(\Omega)$, заданных в областях несколько более широкого класса, изучены Ж.-Л. Лионсом [210].

Материал п. 1.1.14 хорошо известен (см., например, [58,143]).

Теорема 1.1.15 об эквивалентных нормировках пространства $W_p^l(\Omega)$ принадлежит С. Л. Соболеву [117, 118].

Конструкция продолжения, описанная в начале п. 1.1.16, предложена М. Хестенсом [198] для пространства $C^k(\bar{\Omega})$ (см. также работу Л. Лихтенштейна [209]). Тот же прием был использован С. М. Никольским [103] и В. М. Бабичем [2] для пространств $W_p^l(\Omega)$. То, что для областей из $C^{0,1}$ возможно распространение функций из $W_p^l(\Omega)$ $(1<p<\infty)$ на R^n с сохранением класса W_p^l, было отмечено А. Кальдероном [159]. Его конструкция основана на интегральном представлении (1.1.10/1) и теореме о непрерывности сингулярного интегрального оператора в L_p. Способ построения, пригодный также для $p=1$ и $p=\infty$, предложен Стейном [121]. Основная часть доказательства теоремы Стейна состоит в продолжении функций, заданных в координатной окрестности точки границы. Затем при помощи разбиения единицы строится глобальное продолжение. Для простейшей области

$$\Omega=\{x=(x', x_n):\ x'\in R^{n-1},\ x_n>f(x')\},$$

где f — функция на R^{n-1}, удовлетворяющая условию Липшица, продолжение функции u вводится формулой

$$u^*(x', x_n)=\int_1^\infty u(x', x_n+\lambda\delta(x', x_n))\,\psi(\lambda)\,d\lambda, \qquad x_n<f(x').$$

Здесь δ — некоторая бесконечно дифференцируемая функция, эквивалентная расстоянию до $\partial\Omega$. Функция ψ определена и непрерывна на полуоси $[1, \infty)$, убывает при $\lambda\to\infty$ быстрее любой степени λ^{-1} и удовлетворяет условиям $\int_1^\infty \psi(\lambda)\,d\lambda=1$, $\int_1^\infty \lambda^k\psi(\lambda)d\lambda=0$, $k=1, 2, \ldots$

§ 1.2. НЕКОТОРЫЕ ФАКТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

В этом параграфе собраны некоторые известные результаты теории множеств и теории функций действительного переменного, которые будут использованы в дальнейшем.

1.2.1. Две теоремы о покрытиях.

Теорема 1. *Пусть S — ограниченное множество в R^n и каждой точке $x\in S$ сопоставлен шар $B_{r(x)}(x)$, $r(x)>0$. Совокупность всех этих шаров обозначим через $\mathfrak{B}$. Тогда можно выбрать такую последовательность шаров $\{\mathscr{B}_m\}$ из $\mathfrak{B}$, что:*

1) $S\subset\bigcup_m \mathscr{B}_m$;

2) *существует такое зависящее только от размерности пространства число M, что каждая точка пространства принадлежит не более чем M шарам из* $\{\mathscr{B}_m\}$;

3) *шары* $^1/_3\mathscr{B}_m$ *не пересекаются*;

4) $\bigcup\limits_{B\in\mathfrak{B}} B\subset\bigcup\limits_m 4\mathscr{B}_m$.

Доказательство. Положим $a_1=\sup\limits_{x\in S} r(x)$. Если $a_1=\infty$, то утверждение теоремы очевидно. Если $a_1<\infty$, то выберем такую точку $x_1\in S$, что $r(x_1)>{}^3/_4a_1$. Допустим, что точки $x_1, x_2, \ldots, x_m$ из множества S уже выбраны. Определим число $a_{m+1}=$ $=\sup\left\{r(x)\colon\ x\in S\diagdown\bigcup\limits_{j=1}^{m}\mathscr{B}_j\right\}$ и возьмем точку $x_{m+1}\in S\diagdown\bigcup\limits_{j=1}^{m}\mathscr{B}_j$, для которой $r(x_{m+1})>{}^3/_4a_{m+1}$. Покажем, что последовательность $\{\mathscr{B}_m\}$ и есть искомая последовательность шаров.

Если процесс построения этой последовательности остановился на конечном шаге, то, очевидно, что $S\subset\bigcup\limits_m\mathscr{B}_m$ и выполнено утверждение 2). Утверждение 3) вытекает из того, что $r(x_i)\leqslant$ $\leqslant a_i\leqslant a_j<{}^4/_3r(x_j)$, если $i>j\geqslant 1$. Действительно, пусть r_{ij} — расстояние между центрами шаров $\mathscr{B}_i$ и $\mathscr{B}_j$ ($i>j$), а r_i — радиус $\mathscr{B}_i$. По построению центр x_i шара $\mathscr{B}_i$ не лежит в шаре $\mathscr{B}_j$, поэтому

$$r_{ij}>r_j. \tag{1}$$

Предположим, что шары $^1/_3\mathscr{B}_i$ и $^1/_3\mathscr{B}_j$ пересекаются и $y\in{}^1/_3\mathscr{B}_i\cap$ $\cap{}^1/_3\mathscr{B}_j$. Тогда $r_{ij}\leqslant|x_i-y|+|y-x_j|\leqslant{}^1/_3r_i+{}^1/_3r_j\leqslant{}^7/_9r_j$, что противоречит (1). Как видно из этого рассуждения, свойство 3) имеет место и в том случае, когда число шаров $\mathscr{B}_m$ бесконечно.

Теперь докажем, что если $\{\mathscr{B}_m\}$ — бесконечная последовательность, то $r_m\to 0$ при $m\to\infty$. Действительно, как уже было показано, шары $^1/_3\mathscr{B}_m$ не пересекаются, и поэтому, если r_m не стремится к нулю, то мы имеем в ограниченном множестве (в a_1-окрестности множества S) бесконечное число непересекающихся шаров с одним и тем же положительным радиусом, чего быть не может. Предположим теперь, что $s\in S\diagdown\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\mathscr{B}_m$. В силу того что $r(s)>0$, это означает, что точка s была пропущена при построении последовательности $\{x_m\}$. Таким образом, $S\subset\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\mathscr{B}_m$ и утверждение 1) доказано.

Перейдем к доказательству свойства 2). По построению последовательности $\{\mathscr{B}_m\}$, если x_k и x_m — центры шаров $\mathscr{B}_k$ и $\mathscr{B}_m$, то либо (i) $x_k\,\overline{\in}\,\mathscr{B}_m$ и $x_m\,\overline{\in}\,\mathscr{B}_k$, либо (ii) только один из центров содержится в шаре с другим номером, например $x_k\in\mathscr{B}_m$. Если

$y \in \mathscr{B}_k \cap \mathscr{B}_m$ и имеет место случай (i), то угол между векторами $\overrightarrow{yx_k}$ и $\overrightarrow{yx_m}$ больше чем $\pi/3$. В случае (ii) оценку снизу угла между этими векторами можно провести, если точка y лежит вне шара $^2/_5\mathscr{B}_k$. (Заметим, что шары $^2/_5\mathscr{B}_k$, так же как и $^1/_3\mathscr{B}_k$, попарно не пересекаются. Проверяется это аналогично.) В этом случае элементарные рассуждения показывают, что угол между векторами $\overrightarrow{yx_k}$ и $\overrightarrow{yx_m}$ больше некоторого положительного числа, не зависящего от k и m. (В качестве такого числа можно взять $\alpha = \arccos {}^{11}/_{12}$.)

Пусть

$$y \in \bigcup_{m=1}^{N} \mathscr{B}_{k_m}.$$

Если при этом точка y входит в какой-либо из шаров $^2/_5\mathscr{B}_{k_m}$ (такой может быть только один), например $y \in {}^2/_5\mathscr{B}_{k_N}$, то мы опустим соответствующий номер в (2) и запишем, что $y \in \bigcap_{m=1}^{N-1} \mathscr{B}_{k_m}$. Теперь к любой паре $\mathscr{B}_{k_i}$, $\mathscr{B}_{k_j}$ шаров из этого пересечения применимы полученные выше оценки угла, т. е. угол между векторами $\overrightarrow{yx_{k_i}}$ и $\overrightarrow{yx_{k_j}}$ больше положительного числа α, не зависящего от номера k. Но максимальное число таких отрезков $\overrightarrow{yx_k}$, исходящих из одной точки y, определяется только размерностью пространства и величиной α. Следовательно, число N не зависит от точки y, а тем самым вторая часть утверждения теоремы установлена.

Перейдем к последней части доказательства. Пусть шар $\mathscr{B} \in \mathfrak{B}$ не пересекается с шарами $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_{k-1}$, но пересекается с шаром $\mathscr{B}_k$. Покажем, что тогда $\mathscr{B} \subset 4\mathscr{B}_k$. Прежде всего, так как центр шара $\mathscr{B}$ не принадлежит множеству $S \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} \mathscr{B}_j$, то $r \leqslant a_k < {}^4/_3 r(x_k)$.

Пусть $x \in \mathscr{B}$ и $y \in \mathscr{B} \cap \mathscr{B}_k$. Тогда $|x - x_k| \leqslant |x - y| + |y - x_k| = 2r + r_k < {}^8/_3 r_k + r_k < 4r_k$. Следовательно, любая точка $x \in \mathscr{B}$ является точкой шара $4\mathscr{B}_k$.

Осталось показать, что каждая точка $x \in \bigcup_{\mathscr{B} \in \mathfrak{B}} \mathscr{B}$ находится в шаре, который пересекается с некоторым шаром из построенной последовательности. Если последовательность шаров $\{\mathscr{B}_m\}$ конечна и число шаров в ней равно k_0, то любой шар $\mathscr{B} \in \mathfrak{B}$ пересекает один из шаров последовательности $\{\mathscr{B}_m\}_{m=1}^{k_0}$. Если последовательность шаров $\{\mathscr{B}_m\}$ бесконечна, то последовательность их радиусов стремится к нулю. Но если шар $\mathscr{B}$ не пересекается с шарами

$\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2, \ldots, \mathscr{B}_{k-1}$, то его радиус r допускает оценку $r < {}^2/_3 r_k$, а так как $r_k \to 0$ и $r > 0$, то шар $\mathscr{B}$ пересекается с некоторым шаром $\mathscr{B}_m$. Теорема доказана.

Замечание 1. Доказанная теорема будет верна, если шары заменить на кубы с гранями, параллельными координатным плоскостям. Это доказывается почти так же и, кроме того, следует из работы А. Морса [225]. Из этой работы следует также, что шары и кубы можно заменить другими телами.

Если в условии теоремы потребовать, что: α) радиусы шаров из $\mathfrak{B}$ ограничены в совокупности, β) для любой последовательности непересекающихся шаров из $\mathfrak{B}$ последовательность радиусов стремится к нулю, то можно считать, что множество S не ограниченное. Утверждения теоремы останутся справедливыми.

Лемма. *Пусть g — открытое подмножество R^n с гладкой границей, такое, что $2m_n(B_r \cap g) = m_n(B_r)$. Тогда*

$$s(B_r \cap \partial g) \geqslant c_n r^{n-1},$$

где c_n — положительная постоянная, зависящая только от n, а s — $(n-1)$-мерная площадь.

Доказательство. Пусть χ и ψ — характеристические функции множеств $g \cap B_r$ и $B_r \setminus g$. Для любого вектора $z \neq 0$ введем отображение P_z проектирования на $(n-1)$-мерное подпространство, ортогональное z. По теореме Фубини

$$\begin{aligned} {}^1/_4 v_n^2 r^{2n} &= m_n(g \cap B_r)\, m_n(B_r \setminus g) = \\ &= \int_{R^n}\int_{R^n} \chi(x)\,\psi(y)\,dx\,dy = \int_{R^n}\int_{R^n} \chi(x)\,\psi(x+z)\,dz\,dx = \\ &= \int_{|z| \leqslant 2r} m_n(\{x\colon\ x \in B_r \cap g \text{ и } (x+z) \in B_r \setminus g\})\,dz. \end{aligned}$$

Так как каждый отрезок, соединяющий точку $x \in g \cap B_r$ с точкой $(x+z) \in B_r \setminus g$, пересекает $B_r \cap \partial g$, то последний интеграл не превосходит $2r \int_{|z| \leqslant 2r} m_{n-1}[P_z(B_r \cap \partial g)]dz \leqslant (2r)^{n+1} v_n s(B_r \cap \partial g)$. ■

Замечание 2. Наилучшее значение константы c_n равно объему $(n-1)$-мерного единичного шара (см. лемму 3.2.1/1).

Теорема 2. *Пусть g — ограниченное открытое подмножество с гладкой границей. Существует покрытие g последовательностью шаров с радиусами ρ_i $(i = 1, 2, \ldots)$, такое, что*

$$\sum\nolimits_i \rho_i^{n-1} \leqslant c\,s(\partial g), \tag{3}$$

где c — постоянная, зависящая только от n.

Доказательство. Каждая точка $x \in g$ является центром шара $B_r(x)$, для которого

$$m_n(B_r(x) \cap g)/m_n(B_r(x)) = 1/2 \tag{4}$$

(это отношение — непрерывная функция r, равная единице при малых r и стремящаяся к нулю при $r \to \infty$). По лемме * существует последовательность непересекающихся шаров $B_{r_j}(x_j)$, для которой $g \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{3r_j}(x_j)$.

Из леммы и равенства (4) получаем $s(B_{r_j}(x_j) \cap \partial g) \geqslant c_n r_j^{n-1}$. Следовательно,

$$s(\partial g) \geqslant \sum_j s(B_{r_j}(x_j) \cap \partial g) \geqslant 3^{1-n} c_n \sum_j (3r_j)^{n-1}.$$

Итак, $\{B_{3r_j}(x_j)\}$ — требуемое покрытие. ■

1.2.2. Теорема о множествах уровня гладкой функции. Напомним теорему Витали о покрытии (см., например, [29, с. 232]).

Пусть $E \subset R^1$ и $\mathcal{M}$ — система интервалов. Если для всякой точки $t \in E$ и любого $\varepsilon > 0$ существует интервал $i \in \mathcal{M}$, такой, что $x \in i$, $m_1(i) < \varepsilon$, то говорят, что $\mathcal{M}$ образует покрытие E в смысле Витали.

Теорема 1. *Если множество E покрыто в смысле Витали системой интервалов $\mathcal{M}$, то из $\mathcal{M}$ можно выделить такое не более чем счетное множество интервалов $\{i_k\}$, что $i_k \cap i_l = \varnothing$ при $k \neq l$, $m_1\left(E \setminus \bigcup_k i_k\right) = 0$.*

Рассмотрим функцию $f\colon \Omega \ni x \to f(x) = t \in R^1$. Множество $\{x\colon \nabla f(x) = 0\}$ назовем критическим и обозначим через K_1.

Если $E \subset \Omega$, то $f(E)$ — образ E при отображении f. Если $A \subset R^1$, то $f^{-1}(A)$ — полный прообраз A в Ω, $f^{-1}(t) \overset{\text{def}}{=} E_t$.

Теорема 2. *Пусть Ω — открытое множество в R^n и $f \in C^\infty(\Omega)$. Тогда $m_1[f(K_1)] = 0$.*

Доказательство. Достаточно доказать теорему в предположении, что Ω — ограниченное множество.

1. Введем обозначение: $K_n = \{x\colon (\nabla f)(x) = 0, \ldots, (\nabla_n f)(x) = 0\}$. Покажем сначала, что $m_1[f(K_n)] = 0$. Для любого $\varepsilon > 0$ и любого $x \in K_n$ выберем число $r_x > 0$, такое, что $B(x, r_x) \subset \Omega$ и $\operatorname{osc}_{B(x, r_x)} f < \varepsilon r_x^n$. Фиксируем точку $t \in f(K_n)$ и любую точку $x(t) \in E_t \cap K_n$. Точку t покроем всеми интервалами $(t-\delta, t+\delta)$, где

$$\delta < \varepsilon r_{x(t)}^n. \tag{1}$$

Совокупность таких интервалов образует покрытие $f(K_n)$ в смысле Витали. Выберем счетную систему непересекающихся интервалов $i_1, i_2, \ldots$, покрывающую $f(K_n)$ с точностью до множества нулевой линейной меры.

* Здесь на самом деле используется более слабый вариант теоремы 1 о покрытиях [29, с. 230—231].

Пусть $i_m=(t_m-\delta_m,\ t_m+\delta_m)$ и x_m — любая точка $E_{t_m}\cap K_n$. В силу (1) $\delta_m<\varepsilon r^n_{x_m}$. Поэтому $f^{-1}(i_m)\supset B(x_m,\ (\delta_m/\varepsilon)^{1/n})$ и, значит, $m_n[f^{-1}(i_m)]\geqslant v_n\,\delta_m/\varepsilon$. Так как интервалы i_m попарно не пересекаются, то их полные прообразы обладают тем же свойством. Итак,

$$\sum\delta_m\leqslant(\varepsilon/v_n)\sum\nolimits_{m=1}^{\infty}m_n[f^{-1}(i_m)]\leqslant m_n(\Omega),$$

т. е. $m_1[f(K_n)]\leqslant c\varepsilon m_n(\Omega)$, $m_1[f(K_n)]=0$.

2. Теперь докажем теорему индукцией по n. Случай $n=1$ содержится в 1. Пусть для $n-1$ теорема доказана.

Рассмотрим множество $K_1\setminus K_n$. Для любого $x\in K_1\setminus K_n$ существует мультииндекс α, $|\alpha|<n$, и такое натуральное число $i\leqslant n$, что

$$(D^\alpha f)(x)=0,\qquad ((\partial/\partial x_i)\,D^\alpha f)(x)\neq 0. \tag{2}$$

Пусть H — множество точек, для которых верно (2) (оно, конечно, определяется парой (α, i)). Покажем, что $m_1[f(H)]=0$.

Пусть для определенности $i=n$. Введем обозначения: $X=(x_1,\ \ldots,\ x_{n-1})$, $g=D^\alpha f$, так что $g(x)=0$, $\partial g/\partial x_n\neq 0$ при $x\in H$. По теореме о неявной функции для каждой точки $x_0\in H$ существует окрестность U, такая, что

$$U\cap\{x\colon\ g(x)=0\}\subset\{x\colon\ x_n=\varphi(X)\},$$

где φ — бесконечно дифференцируемая функция в некоторой области $G\subset R^{n-1}$. Так как из всякого покрытия множества H окрестностями всегда можно выбрать счетное, то достаточно доказать, что $m_1[f(H\cap U)]=0$. Если $x\in H\cap U$, то

$$f(x)=f(X,\ \varphi(X))\stackrel{\text{def}}{=}h(X),$$

где $X\in G$. Обозначим через P проекцию $H\cap U$ на плоскость $x_n=0$. Так как $\nabla h=0$ при $X\in P$, то по индукционному предположению $m_1[h(P)]=0$. Но $h(P)=f(H\cap U)$ и теорема доказана.

Из доказанного утверждения и теоремы о неявной функции непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие. *Если* $f\in C^\infty(\Omega)$ $(f\in\mathscr{D}(\Omega))$, *то при* п. в. t *множества* $E_t=\{x\colon f(x)=t\}$ — *многообразия класса* C^∞ (*компактные многообразия класса* C^∞).

1.2.3. Представление интеграла Лебега в виде интеграла Римана по полуоси.

Теорема. *Пусть* $(X,\ \mathscr{L},\ \mu)$ — *пространство с (неотрицательной) мерой, и*: $X\to R^1$ — μ-*измеримая неотрицательная функция. Тогда*

$$\int_X u(x)\,\mu(dx)=\int_0^\infty\mu(M_t)\,dt=\int_0^\infty\mu(L_t)\,dt, \tag{1}$$

где $M_t=\{x\in X\colon\ u(x)\geqslant t\}$, $L_t=\{x\in X\colon\ u(x)>t\}$.

Доказательство. Пусть $u(x) \leqslant A < \infty$. Разобьем область изменения функции u точками $\{t_k\}_{k=0}^m$, такими, что $0 = t_0 < t_1 < \ldots$ $\ldots < t_m = A$. Тогда $X = M_{t_m} \bigcup \left(\bigcup_{k=1}^{m-1} (M_{t_k} \setminus M_{t_{k+1}}) \right)$, и

$$\int_X u(x)\,\mu(dx) = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{M_{t_k} \setminus M_{t_{k+1}}} u(x)\,\mu(dx) + \int_{M_{t_m}} u(x)\,\mu(dx).$$

Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{m-1} t_k \mu(M_{t_k} \setminus M_{t_{k+1}}) + t_m \mu(M_{t_m}) \leqslant \int_X u(x)\,\mu(dx) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{m-1} t_{k+1} \mu(M_{t_k} \setminus M_{t_{k+1}}) + t_m \mu(M_{t_m}).$$

Так как

$$\sum_{k=0}^{m-1} a_k (b_k - b_{k+1}) = a_0 b_0 - a_{m-1} b_m + \sum_{k=1}^{m-1} (a_k - a_{k-1})\, b_k,$$

то, положив $a_k = t_k$, $b_k = \mu(M_{t_k})$, получим

$$\sum_{k=1}^{m} (t_k - t_{k-1})\, \mu(M_{t_k}) = \sum_{k=1}^{m-1} (t_k - t_{k-1})\, \mu(M_{t_k}) +$$
$$+ (t_m - t_{m-1})\, \mu(M_{t_m}) \leqslant \int_X u(x)\,\mu(dx) \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} (t_{k+1} - t_k)\, \mu(M_{t_k}).$$

Измельчая разбиение и переходя к пределу, приходим к первому равенству (1).

Пусть теперь функция u не ограничена. Положим $u_k(x) = \min\{u(x), k\}$. Тогда $\{u_k\}_{k \geqslant 1}$ — неубывающая последовательность, сходящаяся по мере к функции u. Следовательно, по теореме Беппо Леви о предельном переходе под знаком интеграла

$$\lim_{k \to \infty} \int_X u_k(x)\,\mu(dx) = \int_X u(x)\,\mu(dx).$$

Но так как $\int_X u_k(x)\,\mu(dx) = \int_0^k \mu(M_t)\,dt$, то из равенства $\lim\limits_{k \to \infty} \int_0^k \mu(M_t)\,dt = \int_0^\infty \mu(M_t)\,dt$ вытекает первое тождество (1). Второе тождество получается точно так же.

Замечание. Предоставляем читателю выписать формулу, аналогичную (1), для интеграла $\int_X u(x)\,\mu(dx)$, где μ — заряд, а u — не обязательно знакопостоянная функция, такая, что $\int_X |u(x)|\,|\mu|\,dx < \infty$.

1.2.4. Формула для интеграла от модуля градиента. Для того чтобы сформулировать следующее утверждение, нам потребуется определение d-мерной меры Хаусдорфа. Пусть E — множество в R^n. Рассмотрим всевозможные покрытия E шарами радиусов, не превосходящих ε, и положим $\sigma(\varepsilon) = v_d \inf \sum_i r_i^d$, где r_i — радиус i-го шара, v_d — объем единичного шара в R^d и инфимум берется по всем таким покрытиям; d-мерной мерой Хаусдорфа $H_d(E)$ множества E называется предел $\sigma(\varepsilon)$ при $\varepsilon\to 0$. (Такой предел, конечный или бесконечный, разумеется, существует в силу монотонности функции σ.)

Теорема. *Пусть* Φ — *измеримая по Борелю неотрицательная функция в* Ω, $u\in C^{0,1}(\Omega)$, Ω — *открытое подмножество* R^n. *Тогда*

$$\int_\Omega \Phi(x)\,|\nabla u(x)|\,dx=\int_0^\infty dt\int_{E_t}\Phi(x)\,ds(x), \tag{1}$$

где s — $(n-1)$-*мерная мера Хаусдорфа*, $E_t=\{x\in\Omega\colon |u(x)|=t\}$.

Мы приведем вывод равенства (1) в следующей ослабленной формулировке, которая только и потребуется в этой главе. Если $\Phi\in C(\Omega)$, $\Phi\geqslant 0$, $u\in C^\infty(\Omega)$, то справедливо тождество (1). (При этом под мерой s можно понимать $(n-1)$-мерную меру Лебега, так как согласно следствию 1.2.2 E_t — гладкие многообразия.)

Доказательство. Пусть w — n-мерная вектор-функция из $\mathscr{D}(\Omega)$. Интегрируя по частям и применяя теорему 1.2.3, получаем $\int_\Omega w\nabla u\,dx=-\int_\Omega u\operatorname{div}w\,dx=-\int_0^\infty dt\int_{u\geqslant t}\operatorname{div}w\,dx+\int_{-\infty}^0 dt\int_{u\leqslant t}\operatorname{div}w\,dx$. Так как $u\in C^\infty(\Omega)$, то при п. в. t множества $\{x\colon u(x)=t\}$ —бесконечно дифференцируемые многообразия в Ω. Поэтому при п. в. $t>0$

$$\int_{u>t}\operatorname{div}w\,dx=-\int_{u=t}w\nu\,ds=-\int_{u=t}(w\nabla u/|\nabla u|)\,ds,$$

где ν — нормаль к $\{x\colon u(x)=t\}$, направленная внутрь множества $\{x\colon u(x)\geqslant t\}$. Аналогично преобразуется интеграл $\int_{u\leqslant t}\operatorname{div}w\,dx$ при $t\leqslant 0$. Следовательно, $\int_\Omega w\nabla u\,dx=\int_0^\infty dt\int_{E_t}(w\nabla u/|\nabla u|)\,dx$. Положим в этом тождестве $w=\Phi\nabla u/(|\nabla u|^2+\varepsilon)^{1/2}$, где $\Phi\in\mathscr{D}(\Omega)$ и ε — положительное число. Тогда

$$\int_\Omega \Phi\,((\nabla u)^2/((\nabla u)^2+\varepsilon)^{1/2})\,dx=\int_0^\infty dt\int_{E_t}(w\nabla u/|\nabla u|)\,ds.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon\downarrow 0$ (и используя при этом теорему Беппо Леви о предельном переходе под знаком интеграла), получаем равенство (1) для всех $\Phi\in\mathscr{D}(\Omega)$.

Пусть $\Phi\in C(\Omega)$, $\operatorname{supp}\Phi\subset\Omega$ и $\mathscr{M}_h\Phi$ — усреднение функции Φ с радиусом h. Так как $\operatorname{supp}\mathscr{M}_h\Phi\subset\Omega$ при малых h, то

$$\int_\Omega(\mathscr{M}_h\Phi)\,|\nabla u|\,dx=\int_0^\infty dt\int_{E_t}\mathscr{M}_h\Phi\,ds. \tag{2}$$

Очевидно, что существует постоянная $C=C(\Phi)$, такая, что

$$\int_{E_t}\mathscr{M}_h\Phi\,ds\leqslant C\int_{E_t}\alpha\,ds, \tag{3}$$

где $\alpha \in \mathscr{D}(\Omega)$, $\alpha = 1$ на $\bigcup_h \operatorname{supp} \mathscr{M}_h \Phi$, $\alpha \geqslant 0$. В силу равенства (1), примененного к функции $\Phi = \alpha$, интеграл в правой части (3) — суммируемая на $(0, +\infty)$ функция. Поскольку $\mathscr{M}_h \Phi \to \Phi$ равномерно и $s(E_t \cap \operatorname{supp} \alpha) < \infty$ при п. в. t, то $\int_{E_t} \mathscr{M}_h \Phi \, ds \xrightarrow[h \to 0]{} \int_{E_t} \Phi \, ds$ при этих значениях t. Теперь возможность предельного перехода в (2) при $h \to 0$ следует из теоремы Лебега [100].

Снимем ограничение $\operatorname{supp} \Phi \subset \Omega$. Пусть $\Phi \in C(\Omega)$, $\Phi \geqslant 0$, и $\{\alpha_m\}$ — последовательность неотрицательных функций из $\mathscr{D}(\Omega)$, такая, что $\bigcup_m \operatorname{supp} \alpha_m = \Omega$, $0 \leqslant \alpha_m \leqslant 1$ и $\alpha_m(x) = 1$ при $x \in \operatorname{supp} \alpha_{m-1}$. Тогда $\operatorname{supp}(\alpha_m \Phi) \subset \Omega$ и

$$\int_\Omega \alpha_m \Phi \, |\nabla u| \, dx = \int_0^\infty dt \int_{E_t} \alpha_m \Phi \, ds.$$

Так как последовательность $\{\alpha_m \Phi\}$ не убывает, то здесь можно перейти к пределу при $m \to \infty$ в силу теоремы Беппо Леви (см. [100]). ■

1.2.5. Комментарии к § 1.2. Здесь собран используемый в книге вспомогательный материал, значительная часть которого нужна уже в первой главе.

Теорема 1.2.1/1 принадлежит А. С. Безиковичу [152] (см. также М. Гусман [28]), а теорема 1.2.1/2 — Гастину [187]. Здесь воспроизведено простое доказательство теоремы 1.2.1/2, предложенное Федерером [173]. Теорема 1.2.2/2 доказана А. Морсом [224] для функций из C^n; мы следуем книге Е. М. Ландиса [49]. Как показал Уитни, существуют функции $f \in C^{n-1}$, для которых утверждение теоремы 1.2.2/2 неверно. Теорема 1.2.3 содержится в статье Д. К. Фаддеева [127]. Равенство (1.2.4/1) установлено А. С. Кронродом [44] в двумерном случае для асимптотически дифференцируемых функций. Федерер [172] доказал утверждение, обобщающее теорему 1.2.4 для липшицевых отображений: $R^n \to R^m$. Доказательство результата Федерера изложено в книге Ю. Д. Бураго и В. А. Залгаллера [10].

§ 1.3. НЕКОТОРЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Этот параграф в основном посвящен обобщению следующего неравенства Харди (см. [128, с. 296]).

Если $f(x) \geqslant 0$, то

$$\int_0^\infty x^{-r} F(x)^p \, dx \leqslant (p/|r-1|)^p \int_0^\infty x^{-r} (x f(x))^p \, dx, \qquad (1)$$

где $p > 1$, $r \neq 1$ и

$$F(x) = \int_0^x f(t) \, dt \text{ при } r > 1, \quad F(x) = \int_x^\infty f(t) \, dt \text{ при } r < 1.$$

1.3.1. Случай $p \leqslant q$.

Теорема 1. *Пусть* μ *и* ν — *неотрицательные борелевские меры на* $(0, \infty)$ *и* ν^* — *абсолютно непрерывная часть* ν. *Неравенство*

$$\left[\int_0^\infty \left|\int_0^x f(t)\,dt\right|^q d\mu(x)\right]^{1/q} \leqslant C\left[\int_0^\infty |f(x)|^p d\nu(x)\right]^{1/p}, \qquad (1)$$

где $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, *справедливо для всех борелевских функций* f *в том и только в том случае, если*

$$B = \sup_{r>0} [\mu([r, \infty))]^{1/q} \left[\int_0^r (d\nu^*/dx)^{-1/(p-1)} dx\right]^{(p-1)/p} < \infty. \qquad (2)$$

Более того, если C — *наилучшая константа в* (1), *то*

$$B \leqslant C \leqslant B\,(q/(q-1))^{(q-1)/q}\, q^{1/q}. \qquad (3)$$

Если $p = 1$ *или* $q = \infty$, *то* $B = C$.

В случае $q = \infty$ *условие* (2) *означает, что* $B = \sup\{r > 0\colon \mu([r, \infty)) > 0\} < \infty$ *и* $d\nu^*/dx > 0$ *для* п. в. $x \in [0, B]$.

Докажем сначала следующую менее общую теорему, посвященную случаю абсолютно непрерывных мер μ и ν.

Теорема 2. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$. *Для того чтобы существовала константа* C, *не зависящая от функции* f, *такая, что*

$$\left[\int_0^\infty \left|w(x)\int_0^x f(t)\,dt\right|^q dx\right]^{1/q} \leqslant C\left[\int_0^\infty |v(x) f(x)|^p dx\right]^{1/p}, \qquad (4)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$B = \sup_{r>0} \left(\int_r^\infty |w(x)|^q dx\right)^{1/q} \left(\int_0^r |v(x)|^{-p'} dx\right)^{1/p'} < \infty, \qquad (5)$$

где $p' = p/(p-1)$. *Более того, если* C — *наилучшая константа в* (4) *и величина* B *определена в* (5), *то справедливы неравенства* (3). *Если* $p = 1$ *или* $p = \infty$, *то* $B = C$.

Доказательство. Случай $1 < p \leqslant q < \infty$. Необходимость. Если $f \geqslant 0$ и $\operatorname{supp} f \subset [0, r]$, то из неравенства (4) вытекает

$$\left(\int_r^\infty |w(x)|^q dx\right)^{1/q} \int_0^r f(t)\,dt \leqslant C\left(\int_0^r |v(x) f(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

Пусть $\int_0^r |v(x)|^{-p/(p-1)} dx < \infty$. Положим $f(x) = |v(x)|^{-p'}$ при $x < r$ и $f(x) = 0$ при $x > r$. Тогда

$$\left[\int_r^\infty |w(x)|^q dx\right]^{1/q} \left[\int_0^r |v(x)|^{-p'} dx\right]^{1/p'} \leqslant C. \qquad (6)$$

Если $\int_0^r |v(x)|^{-p'} dx = \infty$, то можем прийти к тому же результату, заменив в (4) функцию $v(x)$ на $v(x) + \varepsilon \operatorname{sgn} v(x)$, $\varepsilon > 0$, и перейдя к пределу при $\varepsilon \to 0$.

Достаточность. Положим $h(x) = \left(\int_0^x |v(t)|^{-p'} dt\right)^{1/qp'}$.

По неравенству Гельдера

$$\left(\int_0^\infty \left| w(x) \int_0^x f(t)\,dt \right|^q dx\right)^{p/q} \leqslant$$
$$\leqslant \left\{\int_0^\infty |w(x)|^q \left(\int_0^x |f(t)\,h(t)\,v(t)|^p\,dt\right)^{q/p} \left(\int_0^x |h(t)\,v(t)|^{-p'}\,dt\right)^{q/p'} dx\right\}^{p/q}. \tag{7}$$

Докажем теперь, что если φ, $f \geqslant 0$, $r \geqslant 1$, то

$$\left(\int_0^\infty \varphi(x) \left(\int_0^x f(y)\,dy\right)^r dx\right)^{1/r} \leqslant \int_0^\infty f(y) \left(\int_y^\infty \varphi(x)\,dx\right)^{1/r} dy. \tag{8}$$

Действительно, выражение в левой части (8) равно $\left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \varphi(x)^{1/r} f(y)\,\chi_{[y,\,\infty)}(x)\,dy\right)^r dx\right)^{1/r}$, где $\chi_{[y,\,\infty)}$ — характеристическая функция полуоси $[y, \infty)$, и по неравенству Минковского не превосходит

$$\int_0^\infty \left(\int_0^\infty [\varphi(x)^{1/r} f(y)\,\chi_{[y,\,\infty)}(x)]^r\,dx\right)^{1/r} dy = \int_0^\infty f(y) \left(\int_y^\infty \varphi(x)\,dx\right)^{1/r} dy.$$

Согласно (8) правая часть в (7) мажорируется величиной

$$\int_0^\infty |f(t)\,h(t)\,v(t)|^p \left(\int_t^\infty |w(x)|^q \left(\int_0^x |h(y)\,v(y)|^{-p'}\,dy\right)^{q/p'} dx\right)^{p/q} dt. \tag{9}$$

Подставляя выражение для h во внутренний интеграл, перепишем интеграл по x в виде

$$\int_t^\infty |w(x)|^q \left(\int_t^x |v(y)|^{-p'} \left(\int_0^y |v(z)|^{-p'}\,dz\right)^{-1/q} dy\right)^{q/p'} dx. \tag{10}$$

Так как

$$\int_0^x |v(y)|^{-p'} \left(\int_0^y |v(z)|^{-p'}\,dz\right)^{-1/q} dy = q' \left(\int_0^x |v(y)|^{-p'}\,dy\right)^{1/q'},$$

то интеграл (10) равен

$$(q')^{q/p'} \int_t^\infty |w(x)|^q \left(\int_0^x |v(y)|^{-p'}\,dy\right)^{q/p'q'} dx.$$

По определению B это выражение не превосходит

$$B^{q/q'} (q')^{q/p'} \int_t^\infty |w(x)|^q \left(\int_x^\infty |w(y)|^q\,dy\right)^{-1/q'} dx =$$
$$= B^{q-1} (q')^{q/p'} q \left(\int_t^\infty |w(x)|^q\,dx\right)^{1/q} \leqslant$$
$$\leqslant B^q (q')^{q/p'} q \left(\int_0^t |v(x)|^{-p'}\,dx\right)^{-1/p'} = B^q (q')^{q/p'} q h(t)^{-q}. \tag{11}$$

Поэтому выражение (9) не больше чем

$$\int_0^\infty |f(t)\,v(t)\,h(t)|^p (B^q (q')^{q/p'} q h(t)^{-q})^{p/q}\,dt =$$
$$= B^p (q')^{p/p'} q^{p/q} \int_0^\infty |v(t) f(t)|^p\,dt.$$

Следовательно, неравенство (4) выполняется с константой $B(q')^{(p-1)/p} q^{1/q}$.

Перейдем к рассмотрению предельных случаев.

Если $p=\infty$, то $q=\infty$ и неравенство (4) следует из очевидной оценки

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0<x<\infty}\left|w(x)\int_0^x f(t)\,dt\right|\leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{0<x<\infty}|w(x)|\int_0^x (dt/|v(t)|)\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<x}|v(t)f(t)|.$$

Если $p=1$, $q<\infty$, то из неравенства (8) вытекает

$$\left(\int_0^\infty\left|w(x)\int_0^x f(t)\,dt\right|^q dx\right)^{1/q}\leqslant$$
$$\leqslant\int_0^\infty|f(t)|\left(\int_t^\infty|w(x)|^q\,dx\right)^{1/q}(1/|v(t)|)\,|v(t)|\,dt\leqslant B\int_0^\infty|v(t)f(t)\,dt|.$$

Пусть $q=\infty$, $p=1$. Тогда

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0<x<\infty}\left|w(x)\int_0^x f(t)\,dt\right|\leqslant$$
$$\leqslant\operatorname*{ess\,sup}_{0<x<\infty}\left(|w(x)|\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<x}(1/|w(t)|)\int_0^x|v(t)f(t)|\,dt\right)\leqslant B\int_0^\infty|v(t)f(t)|\,dt.$$

Если $p>1$, то

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0<x<\infty}\left|w(x)\int_0^x f(t)\,dt\right|\leqslant$$
$$\leqslant\operatorname*{ess\,sup}_{0<x<\infty}\left[\operatorname*{ess\,sup}_{x\leqslant t\leqslant\infty}|w(x)|\left(\int_0^x|v(t)|^{-p'}\,dt\right)^{1/p'}\left(\int_0^x|v(t)f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\right]\leqslant$$
$$\leqslant B\left(\int_0^\infty|v(t)f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}.$$

Доказательство теоремы 1. Полагая $f=0$ на носителе сингулярной части меры ν, получаем, что неравенство (1) эквивалентно неравенству

$$\left[\int_0^\infty\left|\int_0^x f(t)\,dt\right|^q d\mu(x)\right]^{1/q}\leqslant C\left[\int_0^\infty|f(x)|^p\,(d\nu^*/dx)\,dx\right]^{1/p}.$$

Оценка $B\leqslant C$ проводится точно так же, как и в доказательстве теоремы 2, если заменить $|v(x)|^p$ на $d\nu^*/dx$ и $\int_r^\infty|w(x)|^q\,dx$ на $\mu([r,\infty))$.

Получим верхнюю оценку для C. Можно предположить, что $f\geqslant 0$. Пусть $\{g_n\}$ — последовательность убывающих абсолютно непрерывных на $[0,\infty)$ функций, удовлетворяющих условиям:

$$0\leqslant g_n(x)\leqslant g_{n+1}(x)\leqslant\mu([x,\infty)),\ \lim_{n\to\infty}g_n(x)=\mu([x,\infty))\ \text{при п. в. } x.$$

Имеем

$$\left[\int_0^\infty\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^q d\mu(x)\right]^{1/q}=\left[\int_0^\infty\mu([x,\infty))\,d\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^q\right]^{1/q}.$$

По теореме о монотонной сходимости правая часть равна

$$\sup_n\left|\int_0^\infty g_n(x)\,d\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^q\right|^{1/q}=$$
$$=\sup_n\left[\int_0^\infty\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^q[-g_n'(x)]\,dx\right]^{1/q}. \qquad (12)$$

Из определений константы B и последовательности $\{g_n\}$ следует неравенство

$$\left|\int_r^{\infty}[-g_n'(x)]\,dx\right|^{1/q}\left[\int_0^r (d\nu^*/dx)^{-p'/p}\,dx\right|^{1/p'} \leqslant B.$$

Отсюда и из теоремы 2 выводим, что правая часть (12) не превосходит $B(q')^{(p-1)/p}q^{1/q}\left(\int_0^{\infty}|f(x)|^p(d\nu^*/dx)\,dx\right)^{1/p}$. ■

Заменяя x на x^{-1}, получаем из теоремы 1 следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty$. *Для того чтобы существовала константа* C, *не зависящая от функции* f, *такая, что*

$$\left[\int_x^{\infty}\left|\int_x^{\infty}f(t)\,dt\right|^q d\mu(x)\right]^{1/q}\leqslant C\left[\int_0^{\infty}|f(x)|^p\,d\nu(x)\right]^{1/p}, \tag{13}$$

необходимо и достаточно, чтобы величина

$$B=\sup_{r>0}[\mu((0,\ r])]^{1/q}\left[\int_r^{\infty}(d\nu^*/dx)^{-1/(p-1)}\,dx\right|^{(p-1)/p}$$

была конечной. Наилучшая константа в (13) *удовлетворяет тем же неравенствам, что и в теореме* 1.

Аналогично при помощи замены $(0,\ \infty)\ni x\to y=x-x^{-1}\in$ $\in(-\infty,\ +\infty)$ из теоремы 1 следует

Теорема 4. *Пусть* $1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty$. *Для того чтобы существовала константа* C, *не зависящая от функции* f, *такая, что*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\int_x^{\infty}f(t)\,dt\right|^q d\mu(x)\leqslant C\left[\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p\,d\nu(x)\right]^{1/p}, \tag{14}$$

необходимо и достаточно, чтобы величина

$$B=\sup_{r\in(-\infty,\ \infty)}[\mu((-\infty,\ r))]^{1/q}\left[\int_r^{\infty}(d\nu^*/dx)^{-1/(p-1)}\,dx\right]^{(p-1)/p}$$

была конечной. Числа B *и* C *связаны так же, как в теореме 1.*

1.3.2. Случай $p>q$.

Лемма. *Пусть* $1\leqslant q<p\leqslant\infty$, ω — *неотрицательная борелевская функция на интервале* $(0,\ b)$, *где* $b\in(0,\ \infty]$. *Для того чтобы существовала константа* C, *не зависящая от функции* ψ, *такая, что*

$$\left(\int_0^b\omega(t)\left|\int_0^t\psi(\tau)\,d\tau\right|^q dt\right)^{1/q}\leqslant C\left(\int_0^b|\psi(t)|^p\,dt\right)^{1/p}, \tag{1}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$B=\left(\int_0^b\left(\int_t^b\omega(\tau)\,d\tau\right)^{p/(p-q)}t^{(q-1)p/(p-q)}\,dt\right)^{(p-q)/pq}<\infty. \tag{2}$$

Если C — *наилучшая константа в* (2), *то*

$$((p-q)/(p-1))^{(q-1)/q}q^{1/q}B\leqslant C\leqslant(p/(p-1))^{(q-1)/q}q^{1/q}B$$

при $q>1$ *и* $B=C$ *при* $q=1$.

Доказательство. Достаточность. Рассмотрим сначала случай $q>1$. Можно считать, что $\psi(t)\geqslant 0$. Производя интегрирование по частям в левой части (1) и применяя неравенство Гельдера с показателями $p/(p-q)$, $p/(q-1)$ и p, получаем

$$\begin{aligned}\Big(\int_0^b \omega(t)\Big(\int_0^t\psi(\tau)\,d\tau\Big)^q dt\Big)^{1/q} &= q^{1/q}\Big(\int_0^b\int_t^b \omega(\tau)\,d\tau\,\psi(t)\Big(\int_0^t \psi(\tau)\,d\tau\Big)^{q-1} dt\Big)^{1/q}\leqslant\\ &\leqslant q^{1/q}\Big[\Big(\int_0^b \psi(t)^p\,dt\Big)^{1/p}\Big(\int_0^b\Big(\int_0^t\psi(\tau)\,d\tau\Big)^p t^{-p}\,dt\Big)^{(q-1)/p}\times\\ &\times\Big(\int_0^b t^{(q-1)p/(p-q)}\Big(\int_t^b \omega(\tau)\,d\tau\Big)^{p/(p-q)}dt\Big)^{(p-q)/p}\Big]^{1/q}.\end{aligned}\tag{3}$$

Из (2) и неравенства Харди, сформулированного перед п. 1.3.1, следует, что выражение (3) не превосходит $B(p/(p-1))^{(q-1)/q}\times\times q^{1/q}\Big(\int_0^b\psi(t)^p\,dt\Big)^{1/p}$.

Необходимость. Рассмотрим, например, случай $b=\infty$ (при $b<\infty$ рассуждения аналогичны).

Если неравенство (1) имеет место для веса ω с константой C, то оно имеет место (с той же константой) и для веса $\omega_N=\omega\chi_{[0,N]}$, где $\chi_{[0,N]}$ — характеристическая функция отрезка $[0,N]$. Положим

$$f_N(x)=\Big(\int_x^\infty \omega_N(t)\,dt\Big)^{1/(p-q)}x^{(q-1)/(p-q)},$$

$$B_N=\Big(\int_0^\infty\Big(\int_t^\infty \omega_N(\tau)\,d\tau\Big)^{p/(p-q)}t^{(q-1)p/(p-q)}\,dt\Big)^{(p-q)/p}.$$

Из (1) вытекает, что

$$CB_N^{q/(p-q)}=C\Big(\int_0^\infty f_N(x)^p\,dx\Big)^{1/p}\geqslant\Big(\int_0^\infty\omega_N(t)\Big(\int_0^t f_N(\tau)\,d\tau\Big)^q dt\Big)^{1/q}.\tag{4}$$

Интегрируя по частям, получаем, что интеграл (4) равен

$$\Big(q\int_0^\infty f_N(t)\int_t^\infty\omega_N(\tau)\,d\tau\Big(\int_0^t f_N(\tau)\,d\tau\Big)^{q-1}dt\Big)^{1/q}.\tag{5}$$

Так как

$$\begin{aligned}\Big(\int_0^t f_N(\tau)\,d\tau\Big)^{q-1}&=\Big(\int_0^t x^{(q-1)/(p-q)}\Big(\int_x^\infty\omega_N(\tau)\,d\tau\Big)^{1/(p-q)}dx\Big)^{q-1}\geqslant\\ &\geqslant\Big(\int_t^\infty\omega_N(\tau)\,d\tau\Big)^{(q-1)/(p-q)}t^{(p-1)(q-1)/(p-q)}((p-1)/(p-q))^{1-q},\end{aligned}$$

то выражение (5) не меньше чем

$$\begin{aligned}q^{1/q}((p-1)/(p-q))^{(1-q)/q}\Big(\int_0^\infty\Big(\int_t^\infty\omega_N(\tau)\,d\tau\Big)^{p/(p-q)}t^{(q-1)p/(p-q)}\,dt\Big)^{1/q}&=\\ =q^{1/q}((p-1)/(p-q))^{(1-q)/q}B_N^{p/(p-q)}.&\end{aligned}$$

Поэтому $B_N\leqslant q^{-1/q}((p-q)/(p-1))^{(1-q)/q}C$, и та же оценка верна для B

При $q=1$ условие (2) записывается особенно просто:

$$B=\Big(\int_0^b\Big(\int_t^b\omega(\tau)\,d\tau\Big)^{p'}dt\Big)^{1/p'}<\infty.$$

Для доказательства того, что в этом случае $C\leqslant B$, проинтегрируем по частям в левой части (1) и применим неравенство Гельдера с показателями p и p' (ср. (3)). Тогда для первой части неравенства (1) получается мажоранта $\left(\int_0^b\left(\int_t^\infty \omega(\tau)\,d\tau\right)^{p'}dt\right)^{1/p'}\times$ $\times\left(\int_0^b|\psi(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$ и неравенство $C\leqslant B$ доказано.

Для того чтобы вывести неравенство $B\leqslant C$, подставим $f_N(x)=$ $=\left(\int_x^\infty \omega_N(t)\,dt\right)^{1/(p-1)}$ в выражение (5). Тогда получаем, то $B_N\leqslant C$, а следовательно, и $B\leqslant C$. ■

Теорема 1. *Пусть* $1\leqslant q<p\leqslant\infty$. *Неравенство* (1.3.1/4) *верно в том и только в том случае, если*

$$B=\left(\int_0^\infty\left[\left(\int_0^x|v(y)|^{-p'}dy\right)^{q-1}\int_x^\infty|w(y)|^q\,dy\right]^{p/(p-q)}\times\right.$$
$$\left.\times\,(dx/|v(x)|^{p'})\right)^{(p-q)/pq}<\infty. \qquad (6)$$

Если C — точная константа в (1.3.1/4), *то*

$$q^{1/q}\,((p-q)/(p-1))^{(q-1)/q}\,B\leqslant C\leqslant$$
$$\leqslant (p/(p-1))^{(q-1)/q}q^{1/q}B \quad \textit{при} \quad 1<q<p\leqslant\infty$$

и $B=C$ при $q=1$, $1<p\leqslant\infty$.

Доказательство. Можно считать, что $f\geqslant 0$ (так как при замене f на $|f|$ правая часть в (1.3.1/4) не изменится, а левая лишь возрастет) и что $f(x)=0$ при достаточно больших x. Положим $t(x)=\int_0^x|v(y)|^{-p'}dy$. Тогда неравенство (1.3.1/4) можно переписать в виде

$$\left(\int_0^b|\tilde w(t)|^q\,|\tilde v(t)|^{p'}\,|\varphi(t)|^q\,dt\right)^{1/q}\leqslant C\left(\int_0^b|\varphi'(t)|^p\,dt\right)^{1/p},$$

где $\tilde w(t(x))=w(x)$, $\tilde v(t(x))=v(x)$, $\varphi(t(x))=\int_0^x f(y)\,dy$, $b=$ $=\int_0^\infty|v(y)|^{-p'}dy$.

Теперь утверждение теоремы для случая $1\leqslant q<p<\infty$ вытекает из леммы.

Пусть $p=\infty$. Тогда

$$B=\left(\int_0^\infty\left(\int_0^x|v(y)|^{-1}dy\right)^{q-1}\int_x^\infty|w(y)|^q\,dy\,(dx/|v(x)|)\right)^{1/q}=$$
$$=q^{-1/q}\left(\int_0^\infty|w(x)|^q\left(\int_0^x(dy/|v(y)|)\right)^q dx\right)^{1/q}.$$

Следовательно,

$$\left(\int_0^\infty\left|w(x)\int_0^x f(t)\,dt\right|^q dx\right)^{1/q}\leqslant Bq^{1/q}\operatorname*{ess\,sup}_{0<x<\infty}|vf|.$$

Для доказательства необходимости можно заметить, что функция v не равна нулю на множестве положительной меры, а затем положить $f=1/v$ ■

Следующее более общее утверждение выводится из доказанной теоремы 1 так же, как теорема 1.3.1/1 была получена из теоремы 1.3.1/2.

Теорема 2. *Пусть* μ *и* ν — *неотрицательные борелевские меры на* $(0, \infty)$ *и* ν^* — *абсолютно непрерывная часть* ν. *Неравенство* (1.3.1/4), *где* $1 \leqslant q < p \leqslant \infty$, *справедливо для всех борелевских функций* f *в том и только в том случае, если*

$$B = \left(\int_0^\infty \left[\mu([x, \infty)) \left(\int_0^x (d\nu^*/dy)^{-p'} dy\right)^{q-1}\right]^{p/(p-q)} \times \right.$$
$$\left. \times (d\nu^*/dx)^{-p'} dx\right)^{(p-q)/pq} < \infty.$$

Точная константа C *в* (1.3.1/13) *связана с* B *так же, как в теореме* 1.

При помощи замены x на x^{-1} отсюда получаем следующий результат.

Теорема 3. *Пусть* $1 \leqslant q < p \leqslant \infty$. *Неравенство* (1.3.1/13) *справедливо в том и только в том случае, если*

$$B = \left(\int_0^\infty \left[\mu((0, x]) \left(\int_x^\infty (d\nu^*/dy)^{-p'} dy\right)^{q-1}\right]^{p/(p-q)} \times \right.$$
$$\left. \times (d\nu^*/dx)^{-p'} dx\right)^{(p-q)/pq} < \infty.$$

Наилучшая константа C *в* (1.3.1/13) *связана с* B *так же, как и в теореме* 1.

Замена $(0, \infty) \ni x \to y = x - x^{-1} \in (-\infty, +\infty)$ приводит к следующему необходимому и достаточному условию справедливости неравенства (1.3.1/14) при $1 \leqslant q < p \leqslant \infty$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\mu((-\infty, x]) \left(\int_x^\infty (d\nu^*/dy)^{-p'} dy\right)^{q-1}\right]^{p/(p-q)} \times$$
$$\times (d\nu^*/dx)^{-p'} dx < \infty.$$

1.3.3. Еще три неравенства для функций на полуоси.

Лемма 1. *Если* f — *неотрицательная невозрастающая функция на полуоси* $(0, \infty)$ *и* $p \geqslant 1$, *то*

$$\int_0^\infty [f(x)]^p \, d(x^p) \leqslant \left(\int_0^\infty f(x)\, dx\right)^p. \tag{1}$$

Доказательство. Очевидно, что

$$p\int_0^\infty [xf(x)]^{p-1} f(x)\, dx \leqslant p\int_0^\infty \left[\int_0^x f(t)\, dt\right]^{p-1} f(x)\, dx = \left(\int_0^\infty f(x)\, dx\right)^p. \blacksquare$$

Лемма 2. *Если* $f(x) \geqslant 0$, *то*

$$\left[\int_0^\infty f(x)\, dx\right]^{a\mu+b\lambda} \leqslant$$
$$\leqslant c(a, b, \lambda, \mu)\left[\int_0^\infty x^{a-1-\lambda} f(x)^a\, dx\right]^\mu \left[\int_0^\infty x^{b-1+\mu} f(x)^b\, dx\right]^\lambda, \tag{2}$$

где $a > 1$, $b > 1$, $0 < \lambda < a$, $0 < \mu < b$.

Доказательство. Очевидно, что

$$\int_0^\infty f(x)\,dx=\int_0^\infty x^{(a-1-\lambda)/a}f(x)\frac{dx}{x^{(a-1-\lambda)/a}(1+x)}+$$
$$+\int_0^\infty x^{(b-1+\mu)/b}f(x)\frac{dx}{x^{(b-1+\mu)/b}(1+x^{-1})}.$$

По неравенству Гельдера

$$\int_0^\infty x^{(a-1-\lambda)/a}f(x)\frac{dx}{x^{(a-1-\lambda)/a}(1+x)}\leqslant L\left(\int_0^\infty x^{a-1-\lambda}f(x)^a\,dx\right)^{1/a},$$
$$\int_0^\infty x^{(b-1+\mu)/b}f(x)\frac{dx}{x^{(b-1+\mu)/b}(1+x^{-1})}\leqslant M\left(\int_0^\infty x^{b-1+\mu}f(x)^b\,dx\right)^{1/b},$$

где

$$L=\left(\int_0^\infty\frac{dx}{x^{(a-1-\lambda)/(a-1)}(1+x)^{a/(a-1)}}\right)^{(a-1)/a},$$
$$M=\left(\int_0^\infty\frac{dx}{x^{(b-1+\mu)/(b-1)}(1+x^{-1})^{b/(b-1)}}\right)^{(b-1)/b}.$$

Следовательно,

$$\int_0^\infty f(x)\,dx\leqslant L\left(\int_0^\infty x^{a-1-\lambda}f(x)^a\,dx\right)^{1/a}+M\left(\int_0^\infty x^{b-1+\mu}f(x)^b\,dx\right)^{1/b}.$$

Заменяя здесь $f(x)$ на $f(z/\rho)$, где $\rho>0$, и полагая $z=\rho x$, получаем

$$\rho^{-1}\int_0^\infty f(z/\rho)\,dz\leqslant L\rho^{(\lambda-a)/a}\left(\int_0^\infty z^{a-1-\lambda}f(z/\rho)^a\,dz\right)^{1/a}+$$
$$+M\rho^{-(\mu+b)/b}\left(\int_0^\infty z^{b-1+\mu}f(z/\rho)^b\,dz\right)^{1/b}.$$

Итак, для всех измеримых неотрицательных функций на $(0,\infty)$ при любом $\rho>0$

$$\int_0^\infty\varphi(z)\,dz\leqslant L\rho^{\lambda/a}\left(\int_0^\infty z^{a-\lambda-1}\varphi(z)^a\,dz\right)^{1/a}+M\rho^{-\mu/b}\left(\int_0^\infty z^{b+\mu-1}\varphi(z)^b\,dz\right)^{1/b}.$$

Минимизируя правую часть по ρ, получаем (2).

Лемма 3. *Если f — неотрицательная невозрастающая функция на полуоси $(0,\infty)$ и $p\geqslant 1$, то*

$$((p-1)^{p-1}/p^p)\sup_x x^pf(x)\leqslant\sup_x x^{p-1}\int_x^\infty f(t)\,dt. \tag{3}$$

Для характеристической функции интервала $(0, 1)$ выражение (3) превращается в равенство.

Доказательство. Пусть c — произвольное положительное число. Так как f не возрастает, то

$$f\left(\frac{p}{p-1}c\right)\leqslant\frac{p-1}{c}\int_c^{cp/(p-1)}f(t)\,dt.$$

Отсюда находим

$$\left(\frac{p}{p-1}c\right)^p f\left(\frac{p}{p-1}c\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{p^p}{(p-1)^{p-1}} c^{p-1} \int_c^{cp/(p-1)} f(t)\,dt \leqslant \frac{p^p}{(p-1)^{p-1}} \sup_y y^{p-1} \int_y^\infty f(t)\,dt.$$

Полагая $x=\frac{p}{p-1}c$, получаем (3).

Для функции f, равной единице при $0<x<1$ и нулю при $x \geqslant 1$, справедливы равенства

$$\sup_x x^{p-1}\int_x^\infty f(t)\,dt = \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} x^{p-1}(1-x) =$$
$$= \frac{(p-1)^{p-1}}{p^p} = \frac{(p-1)^{p-1}}{p^p}\sup_x x^p f(x). \blacksquare$$

Замечание. Для произвольной неотрицательной измеримой функции на $(0, \infty)$ справедливо неравенство, обратное к (3):

$$\sup_x x^{p-1}\int_x^\infty f(t)\,dt \leqslant (1/(p-1))\sup_x x^p f(x), \tag{4}$$

которое становится равенством для функции $f(x)=x^{-p}$.

Действительно,

$$x^{p-1}\int_x^\infty f(t)\,dt \leqslant x^{p-1}\int_x^\infty (dt/t^p)\sup_x x^p f(x) = (1/(p-1))\sup_x x^p f(x).$$

1.3.4. Комментарии к § 1.3. Имеется большое число работ, где используются частные случаи теорем из пп. 1.3.1, 1.3.2. В случае $p=q$ теоремы 1.3.1/1 и 1.3.1/2 доказаны Макенхауптом [226]. Обобщения на $p\neq q$, которым посвящены пп. 1.3.1 и 1.3.2, получены А. Л. Розиным и автором (см. В. Г. Мазья [213]). Случай $p<q$ независимо рассмотрен В. М. Кокилашвили [39].

Неравенство (1.3.3/1) доказано в статье Харди, Литтлвуда и Полиа [193], а неравенство (1.3.3/2) можно найти в книге [128] тех же авторов. Точная константа в неравенстве (1.3.3/2) найдена В. И. Левиным [52]. Лемма 1.3.3/3 была опубликована в книге автора [213].

§ 1.4. ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ТИПА С. Л. СОБОЛЕВА

Цель этого параграфа — обобщение теоремы вложения Соболева. Этот результат в значительной своей части получается как следствие оценок нормы в пространстве функций, суммируемых со степенью q по произвольной мере, через норму в пространстве Соболева. Сначала рассматриваются функции на R^n, а затем делается простой переход к случаю ограниченной области.

1.4.1. Теорема Д. Р. Адамса о потенциалах М. Рисса. Пусть μ — мера в R^n, т. е. неотрицательная счетно-аддитивная функция множества, заданная на борелевском σ-кольце пространства R^n.

Обозначим через $L_q(R^n, \mu) = L_q(\mu)$ пространство функций в R^n, измеримых относительно меры μ и суммируемых по μ со степенью q. Положим $\| u \|_{L_q(\mu)} = \left(\int | u |^q d\mu\right)^{1/q}$. Точно так же определяется пространство $L_q(\Omega, \mu)$, где μ — мера в открытом множестве Ω.

Для того чтобы получить основной результат этого пункта, нам потребуется классическая интерполяционная теорема — теорема Марцинкевича, которую мы приведем без доказательства (см., например, книгу Стейна [121]). Предположим, что p_0, p_1, q_0, q_1 — вещественные числа, $1 \leqslant p_i \leqslant q_i < \infty$, $p_0 < p_1$ и $q_0 \neq q_1$. Обозначим через μ меру в R^n и через T заданный на $\mathscr{D}$ аддитивный оператор, значения которого — μ-измеримые функции.

Говорят, что T — *оператор слабого типа* (p_i, q_i), если существует постоянная A_i, такая, что для любой функции $f \in \mathscr{D}$

$$\mu(\{x\colon | (Tf)(x) | > \alpha\}) \leqslant \left(\alpha^{-1} A_i \| f \|_{L_{p_i}}\right)^{q_i}$$

для всех $\alpha > 0$.

Теорема 1. *Пусть T — оператор слабых типов (p_0, q_0) и (p_1, q_1). Если $0 < \theta < 1$ и $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$, $1/q = (1-\theta)/q_0 + \theta/q_1$, то для всех $f \in \mathscr{D}$*

$$\| Tf \|_{L_q(\mu)} \leqslant c A_0^{1-\theta} A_1^{\theta} \| f \|_{L_p}$$

и, следовательно, T может быть распространен на L_p как непрерывный оператор $L_p \to L_q(\mu)$. Здесь $c = c(p_1, p_2, q_1, q_2, \theta)$ — постоянная, не зависящая от μ, T и f.

Перейдем к формулировке и доказательству основной теоремы настоящего раздела.

Теорема 2. *Пусть $l > 0$, $1 < p < q < \infty$, $lp < n$. Потенциал М. Рисса $(I_l f)(x) = \int | x - y |^{l-n} f(y)\, dy$ осуществляет непрерывное отображение L_p в $L_q(\mu)$ в том и только в том случае, если функция*

$$\mathscr{M}(x) \overset{\text{def}}{=} \sup_{\rho > 0} \rho^{-s} \mu[B(x, \rho)],$$

где $s = q(n/p - l)$, ограничена.

Доказательство. Достаточность. Докажем неравенство

$$t\mu(\mathscr{L}_t)^{1/q} \leqslant v_n^{1/p'} pq(n-pl)^{-1} (q-p)^{-1} \sup \mathscr{M}(x)^{1/q} \| f \|_{L_p}, \qquad (1)$$

где $p' = p/(p-1)$, $\mathscr{L}_t = \{y\colon (I_l | f |)(y) > t\}$, $t > 0$. Пусть μ_t — сужение меры μ на множество $\mathscr{L}_t$ и r — положительное число, которое будет выбрано далее. Очевидно, что

$$t\mu(L_t) \leqslant \int |f(x)| \int |x-y|^{l-n} d\mu_t(y)\, dx =$$
$$= (n-l) \int_0^\infty \int |f(x)|\, \mu_t[B(x, \rho)]\, dx \rho^{l-n-1} d\rho =$$
$$= (n-l) \int_0^r (\ldots) \rho^{l-n-1} d\rho + (n-l) \int_r^\infty (\ldots) \rho^{l-n-1} d\rho = A_1 + A_2.$$

Используя неравенство $\mu_t[B(x, \rho)] \leqslant (\mu_t[B(x, \rho)])^{1/p'} \mathscr{M}(x)^{1/p} \rho^{s/p}$, получаем

$$A_1 \leqslant (n-l) \sup \mathscr{M}(x)^{1/p} \|f\|_{L_p} \int_0^r \left(\int \mu_t[B(x, \rho)]\, dx\right)^{1/p'} \rho^{s/p+l-n-1} d\rho.$$

Так как

$$\int \mu_t[B(x, \rho)]\, dx = v_n \rho^n \mu(\mathscr{L}_t),$$

то

$$A_1 \leqslant (p(n-l)/(pl-n+s)) v_n^{1/p'} \sup \mathscr{M}(x)^{1/p} \|f\|_{L_p} \mu(\mathscr{L}_t)^{1/p'} r^{l-(n-s)/p}.$$

Аналогично

$$A_2 \leqslant (n-l) \|f\|_{L_p} \mu(\mathscr{L}_t)^{1/p} \int_r^\infty \left(\int \mu_t[B(x, \rho)]\, dx\right)^{1/p'} \rho^{l-n-1} d\rho =$$
$$= (p(n-l)/(n-pl))\, v_n^{1/p'} \|f\|_{L_p} \mu(\mathscr{L}_t)\, r^{l-n/p}.$$

Следовательно,

$$t\mu(\mathscr{L}_t)^{1/p} \leqslant \|f\|_{L_p} v_n^{1/p'} (n-l)\, p\, (\sup \mathscr{M}(x)^{1/p} (pl-n+s)^{-1} r^{l-(n-s)/p} +$$
$$+ \mu(\mathscr{L}_t)^{1/p} (n-pl)^{-1} r^{l-n/p}).$$

Минимум по r правой части достигается при $r^s = \mu(\mathscr{L}_t)/\sup \mathscr{M}(x)$ и равен

$$(p(n-l)s/(n-pl)(pl-n+s))\, v_n^{1/p'} \|f\|_{L_p} \sup \mathscr{M}(x)^{1/q} \mu(\mathscr{L}_t)^{1/p-1/q}.$$

Оценка (1) доказана.

Применяя интерполяционную теорему 3.1, получаем непрерывность оператора I_l: $L_p \to L_q(\mu)$ и оценку

$$\|I_l f\|_{L_q(\mu)} \leqslant c \sup_x (\mathscr{M}(x))^{1/q} \|f\|_{L_p}. \tag{2}$$

Необходимость. Пусть

$$\|I_l f\|_{L_q(\mu)} \leqslant C \|f\|_{L_p}. \tag{3}$$

Возьмем в качестве f характеристическую функцию шара $B(x, \rho)$. Тогда при $z \in B(x, \rho)$

$$(I_l f)(z) \geqslant (2\rho)^{l-n} \int_{B(x, \rho)} dy = v_n 2^{l-n} \rho^l.$$

Отсюда и из (3) получаем

$$(\mu[B(x, \rho)])^{1/q} \leqslant 2^{n-l} v_n^{-1/p'} C \rho^{-l+n/p}. \blacksquare$$

Теорема 2 вместе с интегральным представлением (1.1.10/6) дает следующий результат.

Следствие. *Пусть* $1<p<q<\infty$ *и* $n>pl$.

1) *Для всех функций* $u\in\mathscr{D}$ *справедливо неравенство*

$$\|u\|_{L_q(\mu)}\leqslant C\|\nabla_l u\|_{L_p}, \tag{4}$$

где

$$C^q\leqslant c_1\sup_{x,\,\rho}\rho^{(l-n/p)q}\mu(B(x,\rho)).$$

2) *Если для функций* $u\in\mathscr{D}$ *справедливо неравенство* (4), *то*

$$C^q\geqslant c_2\sup_{x,\,\rho}\rho^{(l-n/p)/q}\mu(B(x,\rho)).\ \blacksquare$$

1.4.2. Оценка нормы в $L_q(\Omega, \mu)$ интегралом от модуля градиента.

Теорема 1. 1) *Пусть*

$$\sup_{\{g\}}(\mu(g)^{1/q}/s(\partial g))<\infty, \tag{1}$$

где $q\geqslant 1$ *и* $\{g\}$ *— совокупность открытых подмножеств открытого множества* Ω *с компактными замыканиями* $g\subset\Omega$, *ограниченных многообразиями класса* C^∞. *Тогда для всех функций* $u\in\mathscr{D}(\Omega)$ *справедливо неравенство*

$$\|u\|_{L_q(\Omega,\,\mu)}\leqslant C\|\nabla u\|_{L_1(\Omega)}, \tag{2}$$

где

$$C\leqslant\sup_{\{g\}}(\mu(g)^{1/q}/s(\partial g)). \tag{3}$$

2) *Пусть для всех функций* $u\in\mathscr{D}(\Omega)$ *верно неравенство* (1). *Тогда*

$$C\geqslant\sup_{\{g\}}(\mu(g)^{1/q}/s(\partial g)). \tag{4}$$

Доказательство. 1) Согласно теореме 1.2.3

$$\|u\|_{L_q(\Omega,\,\mu)}=\Big(\int_0^\infty\mu(L_t)\,d(t^q)\Big)^{1/q},$$

где $L_t=\{x\colon |u(x)|>t\}$. Так как $\mu(L_t)$ не возрастает, то, применяя неравенство (1.3.3/1), получаем

$$\|u\|_{L_q(\Omega,\,\mu)}\leqslant\int_0^\infty\mu(L_t)^{1/q}\,dt\leqslant\sup_{\{g\}}(\mu(g)^{1/q}/s(\partial g))\int_0^\infty s(\partial L_t)\,dt.$$

(Здесь мы воспользовались следствием 1.2.2, согласно которому почти все множества L_t ограничены гладкими многообразиями.) В силу теоремы 1.2.4 последний интеграл совпадает с $\|\nabla u\|_{L_1(\Omega)}$.

2) Пусть g — любое множество из совокупности $\{g\}$ и пусть

$d(x)=\operatorname{dist}(x, g)$, $g_t=\{x: d(x)<t\}$. Подставим в (1) функцию $u_\varepsilon(x)=\alpha[d(x)]$, где $\alpha(d)$ — невозрастающая бесконечно дифференцируемая функция на $[0, 1]$, равная единице при $d=0$ и нулю при $d>\varepsilon$ (ε — достаточно малое положительное число). Согласно теореме 1.2.4 $\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|\,dx=\int_0^\varepsilon \alpha'(t)\,s(\partial g_t)\,dt$. Так как $s(\partial g_t)\to s(\partial g)$ при $t\to 0$, то

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|\,dx\to s(\partial g). \tag{5}$$

Очевидно, что

$$\|u_\varepsilon\|_{L_q(\Omega,\,\mu)}\geqslant \mu(g)^{1/q}. \tag{6}$$

Объединяя (5) и (6) с (2), получаем

$$\mu(g)^{1/q}\leqslant Cs(\partial g).\ \blacksquare$$

Из теоремы 1 и классического изопериметрического неравенства

$$m_n(g)^{(n-1)/n}\leqslant n^{-1}v_n^{-1/n}s(\partial g) \tag{7}$$

получаем неравенство

$$\|u\|_{L_{n/(n-1)}}\leqslant n^{-1}v_n^{-1/n}\|\nabla u\|_{L_1},\qquad u\in\mathscr{D}, \tag{8}$$

с точной константой.

В случае $n>p\geqslant 1$ заменим в (8) функцию u на $|u|^{p(n-1)/(n-p)}$ и затем оценим правую часть при помощи неравенства Гельдера. Имеем

$$\|u\|^{p(n-1)/(n-p)}_{L_{pn/(n-p)}}\leqslant (p(n-1)/n(n-p))\,v_n^{-1/n}\,\||u|^{n(p-1)/(n-p)}\nabla u\|_{L_1}\leqslant$$
$$\leqslant (p(n-1)/n(n-p))\,v_n^{-1/p}\,\|u\|^{n(p-1)/(n-p)}_{L_{pn/(n-p)}}\|\nabla u\|_{L_p}.$$

Следовательно,

$$\|u\|_{L_{pn/(n-p)}}\leqslant (p(n-1)/n(n-p))\,v_n^{-1/n}\|\nabla u\|_{L_p}.$$

Отсюда и из неравенства $|\nabla|\nabla_{l-k}u||\leqslant n^{1/2}|\nabla_{l-k+1}u|$ получаем оценку

$$\|\nabla_{l-k}u\|_{L_{pn/(n-kp)}}\leqslant (p(n-1)/(n-kp))\,n^{-1/2}v_n^{-1/n}\|\nabla_{l-k+1}u\|_{L_{pn/(n-(k-1)p)}}, \tag{9}$$

где $kp<n$. Полагая $k=1, 2, \ldots, l$ в (9) и перемножая полученные неравенства, выводим следующее утверждение.

Следствие. *Если $n>lp$, $p\geqslant 1$, то для всех функций $u\in\mathscr{D}$ справедливо неравенство*

$$\|u\|_{L_{pn/(n-lp)}}\leqslant n^{-(l+1)/2}\left((n-1)/v_n^{1/n}\right)^l(\Gamma(n/p-l)/\Gamma(n/p))\,\|\nabla_l u\|_{L_p}. \tag{10}$$

Тем самым мы получили неравенство Соболева ($p>1$) — Гальярдо ($p=1$) с явным (но не точным при $p>1$, $l\geqslant 1$ или при $p \geqslant 1$, $l > 1$) значением постоянной. В случае $l=1$ точное значение константы известно (см. п. 2.3.1). ■

В следующей теореме показано, что в случае $\Omega = R^n$ условие (1) можно заменить эквивалентным:

$$\sup_{x, \rho} \rho^{(1-n)q} \mu [B(x, \rho)] < \infty. \tag{11}$$

Теорема 2. 1) *Если выполнено условие* (11), *то для всех функций* $u \in \mathscr{D}$ *справедливо неравенство* (2), *где* $q \geqslant 1$ *и*

$$C^q \leqslant c^q \sup_{x, \rho} \rho^{(1-n)q} \mu [B(x, \rho)] \tag{12}$$

(*c — постоянная, зависящая только от* n).

2) *Если для всех функций* $u \in \mathscr{D}$ *верно неравенство* (2), *то*

$$C^q \geqslant (n v_n^{-1})^q \sup_{x, \rho} \rho^{(1-n)q} \mu [B(x, \rho)]. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть $\{B(x_j, \rho_j)\}$ — покрытие множества g, построенное в теореме 1.2.1/2. В силу очевидного неравенства $\left(\sum_i a_i\right)^{1/q} \leqslant \sum a_i^{1/q}$, где $a_i \geqslant 0$, $q \geqslant 1$,

$$\mu(g) \leqslant \sum_i \mu [B(x_j, \rho_j)] \leqslant \Big| \sum_i \mu (B(x_j, \rho_j))^{1/q} \Big|^q \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{x, \rho} \rho^{q(1-n)} \mu (B(x, \rho)) \left(\sum_j \rho_j^{n-1}\right)^q.$$

Отсюда и из неравенства (1.2.1/3) получаем

$$\mu(g) \leqslant c^q \sup_{x, \rho} \rho^{q(1-n)} \mu (B(x, \rho)) [s(\partial g)]^q,$$

что вместе с теоремой 1 дает (2).

Неравенство (13) — очевидное следствие оценки (4). ■

1.4.3. Оценка нормы в $L_t(R^n, \mu)$ интеграло от модуля градиента порядка l.

Лемма. *Пусть* μ — *мера в* R^n, $n > l$, $1 \leqslant q < (n-l+1)(n-l)^{-1}$ *и* $\tau^{-1} = 1 - n^{-1}(q-1)(n-l)$. *Пусть еще* $(I_1\mu)(x) = \int |x-y|^{1-n} d\mu(y)$. *Тогда для всех* $x \in R^n$ *и* $\rho > 0$

$$\rho^{l-1-n} \| I_1 \mu \|_{L_\tau (B(x, \rho))} \leqslant c \sup_{x \in R^n,\ r > 0} r^{(l-n)q} \mu (B(x, r)).$$

Доказательство. Пусть для определенности $x=0$. В силу неравенства Минковского

$$\left(\int_{|x| \leqslant \rho} \left(\int_{|y| < 2\rho} (d\mu(y)/|x-y|^{n-1})\right)^\tau dx\right)^{1/\tau} \leqslant$$
$$\leqslant \int_{|y| < 2\rho} \left(\int_{|x| \leqslant \rho} (dx/|x-y|^{(n-1)\tau})\right)^{1/\tau} d\mu(y). \tag{1}$$

Так как $(n-1)\tau<n$, то $\int_{|x|\leqslant\rho}(dx/|x-y|^{(n-1)\tau})\leqslant c\rho^{n-\tau(n-1)}$. Следовательно, правая часть неравенства (1) не превосходит $c\rho^{1-n+n/\tau}\mu(B(2\rho))$. Поэтому

$$\rho^{l-n-1}\left(\int_{|x|\leqslant\rho}\left(\int_{|y|<2\rho}(d\mu(y)/|x-y|^{n-1})\right)^{\tau}dx\right)^{1/\tau}\leqslant c\rho^{(l-n)q}\mu(B(2\rho)).$$

Вместе с тем

$$\left(\int_{|x|<\rho}\left(\int_{|y|\geqslant 2\rho}d\mu(y)/|x-y|^{n-1}\right)^{\tau}dx\right)^{1/\tau}\leqslant c\rho^{n/\tau}\int_{|y|\geqslant 2\rho}(d\mu(y)/|y|^{n-1}).$$

Последний интеграл равен $(n-1)\int_{2\rho}^{\infty}\mu(B(r)\setminus B(2\rho))r^{-n}dr$ и поэтому оценивается сверху величиной $c\rho^{q(n-l)-n+1}\sup\limits_{0<r<\infty}r^{(l-n)q}\mu(B(r))$. ■

Теорема. *Пусть* μ — *мера в* R^n, $l\leqslant n$ *и* $q\geqslant 1$. *Неравенство*

$$\|u\|_{L_q(\mu)}\leqslant C\|\nabla_l u\|_{L_1},\quad u\in\mathscr{D},\tag{2}$$

справедливо в том и только в том случае, если

$$K=\sup_{x\in R^n,\ \rho>0}\rho^{l-n}[\mu(B(x,\rho))]^{1/q}<\infty.\tag{3}$$

Величина K *эквивалентна точной константе* C *в* (2).

Доказательство. Оценка $C\geqslant cK$ очевидна. Докажем обратную оценку. В случае $l=n$ она следует из тождества

$$u(x)=\int_{-\infty}^{x_1}\dots\int_{-\infty}^{x_n}\frac{\partial^n u}{\partial x_1\dots\partial x_n}dx_1\dots dx_n,\quad u\in\mathscr{D}.\tag{4}$$

Пусть $l<n$. В случае $l=1$ результат содержится в теореме 1.4.2/2. Рассмотрим сначала случай $l>1$, $q>n/(n-1)$. В силу следствия 1.4.1

$$\|u\|_{L_q(\mu)}\leqslant cK\|\nabla_{l-1}u\|_{L_{n/(n-1)}}.$$

Применяя оценку (1.4.2/8), получаем, что правая часть не превосходит $cK\|\nabla_l u\|_{L_1}$.

Пусть теперь $l>1$, $q\leqslant n/(n-1)$. Воспользуемся индукцией по числу производных. Допустим, что утверждение верно для производных порядка $2,\dots,l-1$. В силу интегрального представления (1.1.10/6)

$$\int|u|^q d\mu=c_0\int\left|\int((\xi-x)\nabla_\xi|u(\xi)|^q/|\xi-x|^n)d\xi\right|d\mu(x)\leqslant$$
$$\leqslant c_0 q\int|\nabla u||u|^{q-1}I_1\mu\,d\xi.$$

Поэтому

$$\int|u|^q d\mu\leqslant c\|u\|^{q-1}_{L_{n/(n-l)}}\||\nabla u|I_1\mu\|_{L_\tau},$$

где $\tau^{-1}=1-(q-1)(n-l)n^{-1}$. Первая норма справа оценивается при помощи неравенства (1.4.2/10) величиной $c\|\nabla_l u\|_{L_1}$, а вторая —

в силу индукционного предположения не превосходит

$$c \sup_{x\in R^n,\ \rho>0} \rho^{l-1-n} \| I_1\mu \|_{L_\tau(B(x,\ \rho))} \| \nabla_l u \|_{L_1}.$$

Так как $q \leqslant n(n-1)^{-1}$, то $q<(n-l+1)(n-l)^{-1}$, и поэтому можно воспользоваться леммой. Достаточность условия (3) и оценка $C \leqslant cK$ установлены. Необходимость и оценка $C \geqslant cK$ получаются подстановкой в (2) функции $y \to \eta((y-x)/\rho)$, где $\eta \in \mathscr{D}(B_2)$, $\eta=1$ на B_1. ■

1.4.4. Следствия предыдущих результатов. Следующее утверждение объединяет и дополняет следствие 1.4.1 и теорему 1.4.3.

Теорема 1. *При* $k<l$, $p(l-k)<n$, $1 \leqslant p<q<\infty$ *и при* $l-k=n$, $p=1 \leqslant q \leqslant \infty$ *точная константа в неравенстве*

$$\| \nabla_k u \|_{L_q(\mu)} \leqslant C \| \nabla_l u \|_{L_p}, \qquad u \in \mathscr{D}, \tag{1}$$

квивалентна величине $K=\sup\limits_{x,\ \rho} \rho^{l-k-np^{-1}} [\mu(B(x,\ \rho))]^{1/q}$.

Доказательство. Оценка $C \leqslant cK$ доказана в следствии 1.4.1 и теореме 1.4.3. Полагая в (1) $u(y)=(x_1-y_1)^k \eta((x-y)/\rho)$, где $\rho>0$, $\eta \in \mathscr{D}(B_2)$, $\eta=1$ на B_1, получаем оценку C снизу.

Из теоремы 1 следует ее аналог для пространства V_p^l.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *относительно* p, q, l, k, n. *Тогда точная константа в неравенстве* $\| \nabla_k u \|_{L_q(\mu)} \leqslant C \| u \|_{V_p^l}$, $u \in \mathscr{D}$, *эквивалентна величине*

$$K_1 = \sup_{x;\ \rho \in (0,\ 1)} \rho^{l-k-n/p} [\mu(B(x,\ \rho))]^{1/q}. \tag{2}$$

Доказательство. Получим верхнюю оценку C. Пусть кубы Q_j образуют координатную решетку в R^n с шагом, равным 1, а $2Q_j$ — концентрические подобно расположенные кубы с длиной ребра 2. Через $\{\eta_j\}$ обозначим разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{2Q_j\}$ и такое, что $|\nabla_m \eta_j| \leqslant c(m)$ для всех j. Здесь $c(m)$ — положительная постоянная, а m — любое натуральное число. Так как кратность покрытия $\{2Q_j\}$ конечна и зависит только от n, то

$$\int |\nabla_k u|^q d\mu \leqslant \int \Big(\sum\nolimits_j |\nabla_k(\eta_j u)|\Big)^q d\mu \leqslant c \sum\nolimits_j \int |\nabla_k(\eta_j u)|^q d\mu.$$

Применяя к каждому слагаемому в последней сумме теорему 1, получаем

$$\| \nabla_k(\eta_j u) \|_{L_q(\mu)} \leqslant c \sup_{x;\ \rho,\ j} \rho^{l-k-n/p} [\mu(2Q_j \cap B(x,\ \rho))]^{1/q} \| \nabla_l(\eta_j u) \|_{L_p}.$$

Следовательно, $\| \nabla_k u \|_{L_q(\mu)} \leqslant cK_1 \| u \|_{V_p^l}$, где K_1 — константа, определенная равенством (2).

Оценка C снизу получается точно так же, как и в теореме 1.

1.4.5. Обобщенная теорема Соболева.

Теорема. *Пусть Ω — подобласть R^n с компактным замыканием, являющаяся объединением конечного числа областей класса EV_p^l. (Согласно* п. 1.1.9 *и теореме Стейна о продолжении, упомянутой в* п. 1.1.16, *это требование выполнено, в частности, если Ω удовлетворяет условию конуса).*

Пусть еще μ — мера в Ω, удовлетворяющая условию

$$\sup_{x\in R^n,\ \rho>0} \rho^{-s}\mu(\Omega\cap B(x, \rho))<\infty, \tag{1}$$

где $s>0$ (например, если s — целое число, то в качестве μ можно взять s-мерную меру Лебега на $\Omega\cap R^s$).

Тогда для любой функции $u\in C^\infty(\Omega)\cap V_p^l(\Omega)$ справедлива оценка

$$\sum_{j=0}^k \|\nabla_j u\|_{L_q(\Omega,\mu)} \leqslant C\|u\|_{V_p^l(\Omega)}, \tag{2}$$

где C — постоянная, не зависящая от u, а параметры q, s, p, l удовлетворяют неравенствам

(a) $p>1$, $0<n-p(l-k)<s\leqslant n$, $q\leqslant sp(n-p(l-k))^{-1}$;

(b) $p=1$, $0<n-l+k\leqslant s\leqslant n$, $q\leqslant s(n-l+k)^{-1}$;

(c) $p>1$, $n=p(l-k)$, $s\leqslant n$, q — *любое положительное число.*

Если выполнено одно из условий:

(d) $p>1$, $n<p(l-k)$;

(e) $p=1$, $n\leqslant l-k$,

то справедлива оценка

$$\sum_{j=0}^k \sup_\Omega |\nabla_j u| \leqslant C\|u\|_{V_p^l(\Omega)}. \tag{3}$$

Если область Ω принадлежит классу EV_p^l, например входит в $C^{0,1}$, то утверждение теоремы в случае (d) *допускает следующее уточнение:*

(f) *если* $p\geqslant 1$, $(l-k-1)p<n<(l-k)p$ *и* $\lambda=((l-k)p-n)p^{-1}$, *то для всех $u\in W_p^l(\Omega)$ выполняется неравенство*

$$\sup_{x,\ y\in\Omega,\ x\neq y} \frac{|\nabla_k u(x)-\nabla_k u(y)|}{|x-y|^\lambda} \leqslant C\|u\|_{V_p^l(\Omega)}. \tag{4}$$

(g) *Если $(l-k-1)p=n$, то для всех $\lambda\in(0, 1)$ и $u\in V_p^l(\Omega)$ выполняется неравенство* (4).

Доказательство. Заметим сначала, что так как $V_{p_1}^l(\Omega)\subset V_{p_2}^l(\Omega)$ при $p_1>p_2$, то в случаях (c) и (g) результат следует из (e) и (f) соответственно.

Достаточно доказать (2), (3) для области из EV_p^l. Поскольку для такой области существует непрерывный оператор продолжения: $V_p^l(\Omega) \to V_p^l(R^n)$, то можно ограничиться случаем $\Omega = R^n$. Для того чтобы получить (2), в случаях (a), (b) можно сослаться на теорему 1.4.4/2.

Пусть выполнено условие (d). Достаточно доказать (3) для функций из $V_p^l(R^n)$ с носителями в некотором шаре. Тогда (3) следует из интегрального представления (1.1.10/6) и неравенства Гельдера.

В случае (e) оценка (3) получается из (1.4.3/4).

Пусть выполнено условие (f). Очевидно, что достаточно предположить $k=0$. Так как $\Omega \in EV_p^l$, то, как и ранее, можно положить $\Omega = R^n$. Согласно (1.1.10/6)

$$u(x) = \sum_{|\alpha|=l} \int_{R^n} K_\alpha(x-y)\, D^\alpha u(y)\, dy,$$

где $|K_\alpha(z)| \leqslant c|z|^{l-n}$ и $|K_\alpha(z+h) - K_\alpha(z)| \leqslant c|h|\,|z|^{l-1-n}$ при $|z| \geqslant 3|h|$. Следовательно,

$$|u(x+h) - u(x)| \leqslant$$
$$\leqslant c\int_{|x-y|\leqslant 4|h|} \frac{|\nabla_l u(y)|}{|x-y|^{n-l}}\, dy + c|h| \int_{|x-y|\geqslant 4|h|} \frac{|\nabla_l u(y)|}{|x-y|^{n-l+1}}\, dy.$$

Остается применить к каждому из интегралов в правой части неравенство Гельдера. ■

Замечание 1. Все соотношения между n, p, l, k, λ в условиях (d) — (g) теоремы точны. Это можно проверить на примере функций $x_1^k \log|\log|x||$, $|x|^\alpha$.

Замечание 2 Из теоремы следует, что пространство $V_p^l(\Omega)$ непрерывно вложено в $V_q^k(\Omega)$, $q = np(n-p(l-k))^{-1}$ при $n > p(l-k)$, $p \geqslant 1$, если область Ω ограничена и удовлетворяет условию конуса. В случае $n = p(l-k)$ то же верно при любом $q < \infty$. При $p(l-k) > n$ и при $p=1$, $l-k \geqslant n$ имеет место непрерывное вложение $V_p^l(\Omega)$ в $C^k(\Omega)$, т. е. в пространство функций, непрерывных и ограниченных в Ω вместе со всеми производными до порядка k.

Если $\Omega \in C^{0,1}$, то при условиях (f), (g) пространство $V_p^l(\Omega)$ вложено в пространство $\dot{C}^{k,\lambda}(\Omega)$, полученное пополнением $C^{k+1}(\bar{\Omega})$ по норме

$$\sum_{j=0}^{k} \|\nabla_j u\|_{L_\infty(\Omega)} + \sup_{x,\, y \in \Omega,\ x \neq y} (|\nabla_k u(x) - \nabla_k u(y)|/|x-y|^\lambda).$$

Из условий (a), (b), (c) доказанной теоремы следует, что при целом s операт[illegible]

$$[illegible] \ni u \to u|_{R^s \cap \Omega} \qquad (5)$$

может быть единственным образом распространен до линейного непрерывного оператора: $V_p^l(\Omega) \to V_q^k(R^s \cap \Omega)$.

Используя лемму 1.1.11, можно переписать (2) в эквивалентной форме:

$$\sum_{j=0}^{k} \| \nabla_j (u-\Pi) \|_{L_q(\Omega,\mu)} \leqslant C \| \nabla_l u \|_{L_p(\Omega)},$$

где Π — полином (1.1.11/1). Это позволяет в случае $\mu = m_s$ на $R^s \cap \Omega$ ввести непрерывный оператор сужения $\dot{L}_p^l(\Omega) \to V_q^k(R^s \cap \Omega)/\mathcal{P}_{l-1}$. Аналогично устанавливается непрерывность вложений $\dot{L}_p^l(\Omega)$ в $C^k(\bar{\Omega})/\mathcal{P}_{l-1}$ или в $C^{k,\lambda}(\bar{\Omega})/\mathcal{P}_{l-1}$ при условиях (d), (e) или (f), (g).

Отметим, наконец, что теорема этого пункта очевидным образом усиливает теорему 1.1.2 о локальных свойствах функций из $\dot{L}_p^l(\Omega)$, где Ω — произвольное открытое подмножество R^n.

1.4.6. Теоремы о компактности. Упомянутые в замечании 1.4.5/2 операторы вложения и сужения, непрерывность которых установлена в теореме 1.4.5, при некоторых соотношениях между p, l, q, n, s оказываются вполне непрерывными. Этот результат будет установлен в конце настоящего пункта.

Лемма. *Любое ограниченное подмножество пространства $V_p^l(R^n)$ компактно в $V_p^{l-1}(\Omega)$, где Ω — ограниченная область.*

Доказательство. Достаточно доказать теорему для $l=1$. Пусть f — суммируемая неотрицательная функция, заданная на промежутке $[0, a+\delta]$, где $a>0$, $\delta>0$. Тогда

$$\int_0^a dt \int_t^{t+\delta} f(\tau)\, d\tau \leqslant \delta \int_0^{a+\delta} f(t)\, dt. \tag{1}$$

Действительно, интеграл в левой части равен

$$\int_0^a dt \int_0^\delta f(\tau+t)\, d\tau = \int_0^\delta d\tau \int_\tau^{a+\tau} f(t)\, dt \leqslant \delta \int_0^{a+\delta} f(t)\, dt.$$

Пусть теперь $u \in C_0^\infty(R^n)$. Очевидно, что для всех $h \in R^n$

$$\int_\Omega |u(x+h)-u(x)|^p\, dx \leqslant \int_\Omega \Big(\int_{\sigma_{x,h}} |\nabla u|\, dl \Big)^p dx,$$

где $\sigma_{x,h}$ — отрезок прямой, соединяющий точки x и $x+h$. Следовательно,

$$\int_\Omega |u(x+h)-u(x)|^p\, dx \leqslant |h|^{p-1} \int_\Omega \int_{\sigma_{x,h}} |\nabla u|^p\, dl\, dx.$$

Применяя к последнему интегралу неравенство (1) при $\delta=|h|$, получаем

$$\Big(\int_\Omega |u(x+h)-u(x)|^p\, dx \Big)^{1/p} \leqslant |h|\, \| \nabla u \|_{L_p(R^n)}.$$

Остается вспомнить, что по теореме М. Рисса множество функций, определенных на открытом ограниченном множестве Ω, компактно в $L_p(\Omega)$, если оно ограничено в $L_p(\Omega)$ и равномерно выполняется соотношение $\int_\Omega |u(x+h)-u(x)|^p dx \to 0$ при $|h| \to 0$, где h — произвольный вектор пространства R^n. ■

Теорема 1. *Пусть Ω — ограниченная подобласть R^n, являющаяся объединением конечного числа областей из EV_p^l (например, удовлетворяющая условию конуса), и μ — неотрицательная мера в R^n с носителем в $\bar{\Omega}$. Пусть еще $k<l$, $p(l-k)<n$, $1 \leqslant p<q<\infty$ или $k \leqslant l-1$, $1=p \leqslant q$. Тогда всякое подмножество пространства $C^\infty(\bar{\Omega})$, ограниченное в $V_p^l(\Omega)$, относительно компактно в метрике*

$$\sum_{j=0}^k \| \nabla_j u \|_{L_q(\Omega,\, \mu)} \tag{2}$$

в том и только в том случае, если

$$\lim_{\rho \to 0} \sup_{x \in R^n} \rho^{q(l-k-n/p)} \mu(B(x,\rho)) = 0. \tag{3}$$

Доказательство. Можно с самого начала считать, что $\Omega \in EV_p^l$. Тогда достаточно показать, что всякое ограниченное подмножество пространства $C^\infty(R^n) \cap V_p^l(R^n)$ относительно компактно в метрике (2).

Согласно (3) по любому $\varepsilon>0$ можно найти такое число δ, что при $\rho \leqslant \delta$ $\rho^{q(l-k-n/p)} \sup\limits_x \mu(B(x,\rho)) < \varepsilon$.

Построим открытое покрытие $\{\mathscr{B}_i\}$ множества $\bar{\Omega}$ шарами с диаметром $\delta \leqslant 1$, кратность которого не превышает некоторой константы, зависящей только от размерности пространства. Пусть μ_i — сужение меры μ на $\mathscr{B}_i$ и $\{\eta_i\}$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{\mathscr{B}_i\}$. Используя теорему 1.4.4/1, получаем

$$\int_{\mathscr{B}_i} \sum_{j=0}^k |\nabla_j(u\eta_i)|^q d\mu_i \leqslant c \sup_{\rho;\, x} \rho^{q(l-k-n/p)} \mu_i(B(x,\rho)) \| u\eta_i \|^q_{V_p^l(\mathscr{B}_i)} \leqslant$$
$$\leqslant c\varepsilon \sum_{j=0}^l \left(\delta^{p(j-l)} \int_{\mathscr{B}_i} |\nabla_j u|^p dx \right)^{q/p}.$$

Суммируя по i, приходим к неравенству

$$\int_\Omega \sum_{j=0}^k |\nabla_j u|^q d\mu \leqslant c\varepsilon \| \nabla_l u \|^q_{L_p(R^n)} + C(\varepsilon) \| u \|^q_{V_p^{l-1}(\bigcup_i \mathscr{B}_i)}.$$

Остается вспомнить, что по лемме множество, ограниченное в $V_p^l(R^n)$, компактно в $V_p^{l-1}\left(\bigcup\limits_i \mathscr{B}_i\right)$.

Необходимость. Поместим начало декартовых координат в произвольную точку $O \in R^n$ и обозначим через η функцию из $\mathscr{D}(B_{2\rho})$, равную единице на B_ρ, $\rho<1$, и такую, что $|\nabla_j \eta| \leqslant c\rho^{-j}$, $j=1, 2, \ldots$ Из относительной компактности множества $\{u \in C^\infty(\bar{\Omega}):$

$\|u\|_{V_p^l(R^n)} \leqslant 1\}$ в метрике (2) следует, что для любого $\varepsilon > 0$, любой функции этого множества и любой точки O при некотором ρ справедливо неравенство $\int_{B_{2\rho}} |\nabla_k u|^q d\mu \leqslant \varepsilon$. Подставляя в это неравенство функцию $u(x) = x_1^k \eta(x) / \|x_1^k \eta\|_{V_p^l(R^n)}$, получаем

$$\mu(B_\rho) \leqslant \varepsilon \|x_1^k \eta\|^q_{V_p^l(B_{2\rho})} \leqslant c\varepsilon\rho^{q(n/p - l + k)}. \blacksquare$$

Теорема 2. *Пусть Ω — ограниченная подобласть R^n, являющаяся объединением конечного числа областей из EV_p^l. Тогда при $l > k \geqslant 0$, $p \geqslant 1$ имеем:*

(a) *если s — целое положительное число и $n > (l-k)p$, то оператор сужения (1.4.5/5), где $n - (l-k)p < s \leqslant n$ и $q < sp(n - (l-k)p)^{-1}$, вполне непрерывен как оператор из $V_p^l(\Omega)$ в $V_q^k(\Omega \cap R^s)$;*

(b) *если s — целое положительное число и $n = (l-k)p$, то оператор (1.4.5/5), где $s \leqslant n$, вполне непрерывен как оператор из $V_p^l(\Omega)$ в $V_q^k(\Omega \cap R^s)$ для любого значения $q > 0$;*

(c) *если $n < (l-k)p$, то вложение $V_p^l(\Omega)$ в пространство $C^k(\Omega)$ с нормой $\sum_{j=0}^k \sup_\Omega |\nabla_j u|$ вполне непрерывно.*

Доказательство. Так как $V_{p_1}^l(\Omega) \subset V_{p_2}^l(\Omega)$ при $p_1 > p_2$, то утверждение (b) следует из (a). В свою очередь, утверждение (a) есть прямое следствие теоремы 1.

Для того чтобы получить (c), достаточно доказать компактность единичного шара в $V_p^l(R^n)$ в метрике $C^k(G)$, где $(l-k)p > n$ и G — любая ограниченная область. Пусть $x \in \bar{G}$ и $\rho > 0$. В силу (1.4.5/3)

$$\sum_{j=0}^k \sup_{B_1(x)} |\nabla_j u| \leqslant c \|u\|_{V_p^l(B_1(x))}.$$

Применяя преобразование подобия с коэффициентом ρ, получаем

$$\sum_{j=0}^k \rho^j \sup_{B_\rho(x)} |\nabla_j u| \leqslant c \sum_{i=j}^l \rho^{i-n/p} \|\nabla_i u\|_{L_p(B_\rho(x))}.$$

Следовательно, при $j = 0, \ldots, k$

$$\sup_{B_\rho(x)} |\nabla_j u| \leqslant c\rho^{l-j-n/p} \|\nabla_l u\|_{L_p(B_\rho(x))} + C(\rho) \|u\|_{V_p^{l-1}(B_\rho(x))},$$

и поэтому

$$\sum_{j=0}^k \sup_G |\nabla_j u| \leqslant c\rho^{l-k-n/p} \|u\|_{V_p^l(R^n)} + C(\rho) \|u\|_{V_p^{l-1}(G_\rho)},$$

где G_ρ — ρ-окрестность $\bar{G}$. Так как ρ — произвольно малое число и по лемме единичный шар в $V_p^l(R^n)$ компактен в $V_p^{l-1}(G_\rho)$, то утверждение (c) доказано.

1.4.7. Мультипликативное неравенство. Этот пункт посвящен необходимому и достаточному условию справедливости неравенства

$$\|\nabla_k u\|_{L_q(\mu)} \leqslant C \|\nabla_l u\|^{\tau}_{L_p} \|u\|^{1-\tau}_{L_p}. \tag{1}$$

Лемма. *Пусть μ — мера в R^n, сосредоточенная в шаре $B_\rho = \{x: |x| < \rho\}$ и такая, что*

$$K = \sup_{x;\, r} r^{-s} \mu(B_r(x)) < \infty \tag{2}$$

при некотором $s \in [0, n]$. Пусть еще $p \geqslant 1$; k и l — целые числа, $k < l$; $s > n - p(l-k)$, если $p > 1$, и $s \geqslant n - l + k$, если $p = 1$. Тогда для всех $v \in C^\infty(\bar{B}_\rho)$ и для всех q, удовлетворяющих неравенствам $l - k - n/p + s/q > 0$, $q \geqslant p$, имеет место оценка

$$\|\nabla_k v\|_{L_q(B_\rho,\, \mu)} \leqslant c K^{1/q} \rho^{s/q - n/p - k} \left(\rho^l \|\nabla_l v\|_{L_p(B_\rho)} + \|v\|_{L_p(B_\rho)}\right). \tag{3}$$

Доказательство. Согласно п. 1.1.16 любую функцию $w \in C^\infty(\bar{B}_1)$ можно продолжить до функции $w \in C_0^l(B_2)$, удовлетворяющей неравенству $\|\nabla_l w\|_{L_p(B_2)} \leqslant c \|w\|_{V_p^l(B_1)}$. Так как $V_p^l(B_1) = W_p^l(B_1)$ (см. следствие п. 1.1.11), то последнее неравенство эквивалентно следующему: $\|\nabla_l w\|_{L_p(B_2)} \leqslant c(\|\nabla_l w\|_{L_p(B_1)} + \|w\|_{L_p(B_1)})$.

Применяя преобразование подобия, отсюда выводим, что функция v, упомянутая в условии леммы, допускает продолжение $v \in C_0^l(B_{2\rho})$, такое, что

$$\|\nabla_l v\|_{L_p(B_{2\rho})} \leqslant c\left(\|\nabla_l v\|_{L_p(B_\rho)} + \rho^{-l} \|v\|_{L_p(B_\rho)}\right). \tag{4}$$

Пусть $(l-k)p < n$, если $p > 1$, или $l - k \leqslant n$, если $p = 1$. Из следствия п. 1.4.1 и теоремы 1.4.4/1 получаем

$$\|\nabla_k v\|_{L_t(B_{2\rho},\, \mu)} \leqslant c K^{1/t} \|\nabla_l v\|_{L_p(B_{2\rho})}, \tag{5}$$

где $t = ps/(n - p(l-k))$.

В случае $(l-k)p = n$, $p > 1$, обозначим через p_1 число из интервала $[1, p)$, достаточно близкое к p, и положим $t = p_1 s/(n - p_1 \times (l-k))$. Тогда в силу следствия 1.4.1

$$\|\nabla_k v\|_{L_t(B_{2\rho},\, \mu)} \leqslant c K^{1/t} \|\nabla_l v\|_{L_{p_1}(B_{2\rho})} \leqslant c K^{1/t} \rho^{n/p_1 - n/p} \|\nabla_l v\|_{L_p(B_{2\rho})}. \tag{6}$$

Если $(l-k)p > n$, $p \geqslant 1$, положим $t = \infty$. Тогда по теореме Соболева

$$\|\nabla_k v\|_{L_t(B_{2\rho},\, \mu)} \leqslant c \rho^{l-k-n/p} \|\nabla_l v\|_{L_p(B_{2\rho})}. \tag{7}$$

Объединяя оценки (5) — (7), получаем неравенство

$$\|\nabla_k v\|_{L_t(B_{2\rho},\, \mu)} \leqslant c K^{1/t} \rho^{l-k-n/p+s/t} \|\nabla_l v\|_{L_p(B_{2\rho})}. \tag{8}$$

В силу неравенства Гельдера

$$\|\nabla_k v\|_{L_q(B_\rho,\,\mu)} \leqslant [\mu(B_\rho)]^{1/q-1/t} \|\nabla_k v\|_{L_t(B_\rho,\,\mu)} \leqslant$$
$$\leqslant K^{1/q-1/t}\rho^{s(1/q-1/t)} \|\nabla_k v\|_{L_t(B_\rho,\,\mu)},$$

что вместе с (8) дает оценку

$$\|\nabla_k v\|_{L_t(B_{2\rho},\,\mu)} \leqslant cK^{1/q}\rho^{s/q+l-k-n/p} \|\nabla_l v\|_{L_p(B_{2\rho})}.$$

Остается воспользоваться неравенством (4). ■

Теорема. 1) *Пусть μ — мера в R^n, удовлетворяющая условию* (2) *при некотором $s \in [0, n]$. Пусть еще $p \geqslant 1$, k и l — целые числа, $0 \leqslant k \leqslant l-1$, $s > n-p(l-k)$, если $p>1$, и $s \geqslant n-l+k$, если $p=1$. Тогда для всех $u \in \mathscr{D}$ имеет место оценка* (1), *где $C \leqslant cK^{1/q}$ $n/p-l+k<s/q$, $q \geqslant p$ и $\tau=(k-s/q+n/p)/l$.*

2) *Если для всех $u \in \mathscr{D}$ имеет место оценка* (1), *то мера μ удовлетворяет условию* (2) *и $C \geqslant cK^{1/q}$.*

Доказательство. Согласно лемме для всех $x \in R^n$ и $\rho > 0$

$$\|\nabla_k u\|_{L_q(B_\rho(x),\,\mu)} \leqslant cK^{1/q}\rho^{s/q-n/p-k}\left(\rho^l \|\nabla_l u\|_{L_p(B_\rho(x))} + \|u\|_{L_p(B_\rho(x))}\right). \quad (9)$$

Зафиксируем произвольное число $\rho_0 > 0$. Если первое слагаемое в правой части неравенства (9), где $\rho=\rho_0$, больше второго, покроем точку $x \in \operatorname{supp}\mu$ шаром $B_\rho(x)$. В противном случае будем увеличивать ρ до тех пор, пока первое слагаемое не совпадет со вторым. Тогда точка x будет покрыта шаром $B_\rho(x)$, где $\rho = \|u\|^{1/l}_{L_p(B_\rho(x))} \|\nabla_l u\|^{-1/l}_{L_p(B_\rho(x))}$. В обоих случаях

$$\|\nabla_k u\|^q_{L_q(B_\rho(x),\,\mu)} \leqslant cK\left(\rho_0^{s-q(n/p-l+k)} \|\nabla_l u\|^q_{L_p(B_\rho(x))} +\right.$$
$$\left. + \|\nabla_l u\|^{q\tau}_{L_p(B_\rho(x))} \|u\|^{q(1-\tau)}_{L_p(B_\rho(x))}\right). \quad (10)$$

Согласно теореме 1.2.1/1 из покрытия $\{B_\rho(x)\}$ множества $\operatorname{supp} u$ можно выделить подпокрытие $\{\mathscr{B}^{(i)}\}_{i\geqslant 1}$ конечной кратности, зависящей только от n. Просуммируем (10) по всем шарам $\mathscr{B}^{(i)}$. Замечая, что

$$\sum_i a_i^\alpha b_i^\beta \leqslant \left(\sum_i a_i^{\alpha+\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left(\sum_i b_i^{\alpha+\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \leqslant \left(\sum_i a_i\right)^\alpha \left(\sum_i b_i\right)^\beta,$$

где a_i, b_i, α, β — положительные числа, $\alpha+\beta \geqslant 1$, получаем

$$\|\nabla_k u\|^q_{L_q(\mu)} \leqslant cK\left(\rho_0^{q(n/p-l+k)}\left(\sum_i \|\nabla_l u\|^p_{L_p(\mathscr{B}^{(i)})}\right)^{q/p} +\right.$$
$$\left. + \left(\sum_i \|\nabla_l u\|^p_{L_p(\mathscr{B}^{(i)})}\right)^{\tau q/p} \left(\sum_i \|u\|^p_{L_p(\mathscr{B}^{(i)})}\right)^{(1-\tau)q/p}\right).$$

Так как кратность покрытия $\{\mathscr{B}^{(i)}\}$ зависит только от n, то правую часть можно оценить сверху суммой

$$cK\left(\rho^{s-q(n/p-l+k)} \|\nabla_l u\|^q_{L_p} + \|\nabla_l u\|^{\tau q}_{L_p} \|u\|^{(1-\tau)q}_{L_p}\right).$$

Остается устремить ρ_0 к нулю. Первая часть теоремы доказана.

Для доказательства обратного утверждения достаточно подставить в неравенство (1) функцию $u_\rho(x)=(y_1-x_1)^k\varphi(\rho^{-1}(x-y))$, где $\varphi\in\mathscr{D}(B_2)$, $\varphi=1$ на B_1. ■

Следствие 1. 1) *Пусть μ — мера в R^n, такая, что при некотором $s\in[0, n]$*

$$K_1=\sup_{x\in R^n,\ r\in(0,1)} r^{-s}\mu(B_r(x))<\infty. \tag{11}$$

Пусть еще $p\geqslant 1$, k и l — целые числа, $0\leqslant k\leqslant l-1$, $s>n-p(l-k)$, если $p>1$, и $s\geqslant n-l+k$, если $p=1$. Тогда для всех $u\in\mathscr{D}$ имеет место оценка

$$\|\nabla_k u\|_{L_q(\mu)}\leqslant C_1\|u\|^{\tau}_{V_p^l}\|u\|^{1-\tau}_{L_p}, \tag{12}$$

где $C_1\leqslant cK_1^{1/q}$, $n/p-l+k<s/q$, $q\geqslant p$ и $\tau=(k-s/q+n/p)/l$.

2) *Если для всех $u\in\mathscr{D}$ имеет место оценка* (12), *то мера μ удовлетворяет условию* (11) *и $C_1\geqslant cK_1^{1/q}$.*

Доказательство. Обозначим через $\{Q^{(i)}\}$ последовательность замкнутых кубов с длиной ребра 1, образующих координатную решетку в R^n. Пусть $O^{(i)}$ — центр куба $Q^{(i)}$, $O^{(0)}=O$ и $2Q^{(i)}$ — концентрический и подобно расположенный куб с вдвое большей длиной ребра. Положим $\eta_i(x)=\eta(x-O^{(i)})$, где $\eta\in C_0^\infty(2Q^{(0)})$, $\eta=1$ на $Q^{(0)}$.

Применяя теорему этого пункта к функции $u\eta_i$ и мере $e\to\mu(e\cap Q^{(i)})$, получаем неравенство

$$\|\nabla_k(u\eta_i)\|^p_{L_q(\mu)}\leqslant cK_1^{p/q}\|\nabla_l(u\eta_i)\|^{p\tau}_{L_p}\|u\eta_i\|^{p(1-\tau)}_{L_p}.$$

Суммируя по i и применяя неравенство $(\sum a_i)^{p/q}\leqslant\sum a_i^{p/q}$, где $a_i\geqslant 0$, приходим к (12).

Второе утверждение выводится подстановкой в (12) функции u_ρ, определенной в конце доказательства теоремы.

Из следствия 1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. 1) *Пусть для области Ω существует оператор продолжения $\mathscr{E}$, непрерывно отображающий $V_p^l(\Omega)$ в $V_p^l(R^n)$ и $L_p(\Omega)$ в $L_p(R^n)$ (например, Ω — ограниченная область класса $C^{0,1}$). Пусть еще μ — мера в $\bar\Omega$, удовлетворяющая условию* (11), *где s — число, подчиненное тем же неравенствам, что и в следствии* 1. *Тогда для всех $u\in C^l(\bar\Omega)$ имеет место оценка*

$$\|\nabla_k u\|_{L_q(\bar\Omega,\mu)}\leqslant C\|u\|^{\tau}_{V_p^l(\Omega)}\|u\|^{1-\tau}_{L_p(\Omega)}, \tag{13}$$

где $n/p-l+k<s/q$, $q\geqslant p\geqslant 1$, $\tau=(k-s/q+n/p)/l$.

2) *Если для всех $u\in C^l(\bar\Omega)$ имеет место оценка (13), то мера μ, сосредоточенная в $\bar\Omega$, удовлетворяет условию (11).*

1.4.8. Комментарии к § 1.4. Теорема 1.4.1 принадлежит Д. Р. Адамсу [132]. Приведенное в тексте доказательство взято из работы Д. Р. Адамса [133]. В случае, когда $\mu = m_s$, т. е. μ — s-мерная мера Лебега в R^s, неравенство (1.4.1/4) при $s = n$ доказано С. Л. Соболевым в [116] и при $s < n$ — в работе В. П. Ильина [31] при помощи интегрального представления (1.1.10/6) и обобщений на многомерный случай следующей теоремы Харди — Литтлвуда (см. Харди, Полиа, Литтлвуд [128]).

Если $1 < p < q < \infty$ *и* $\mu = 1 - p^{-1} + q^{-1}$, *то оператор* $|x|^{-\mu} * f$, *где* $f\colon R^1 \to R^1$, *непрерывен как оператор из* $L_p(R^1)$ *в* $L_q(R^1)$.

Теоремы 1.4.2/1, 1.4.2/2 доказаны автором [71, 79]. Неравенство (1.4.2/8) (с неточной константой и другим методом) установлено Э. Гальярдо [183]. Доказательство, дающее точную константу, одновременно и независимо предложено Федерером и Флемингом [176] и автором [60].

Хотя константа в (1.4.2/8) точна, но, сужая класс допустимых функций в этом неравенстве, ее можно улучшить. Например, так как для любого N-угольника Ω_N на плоскости справедливо изопериметрическое неравенство $[s(\partial\Omega_N)]^2 \geqslant (4/N)\operatorname{tg}(\pi/N)\, m_2(\Omega_N)$ (см. [232]), то, повторяя доказательство теоремы 1.4.2/1, получаем следующее утверждение. Пусть u_N — функция на плоскости с компактным носителем, графиком которой является многогранник с N гранями. Тогда

$$(4/N)\operatorname{tg}(\pi/N)\int_{R^2} |u_N|^2\, dx \leqslant \left(\int_{R^2} |\nabla u_N|\, dx\right)^2.$$

Лемма 1.4.3 является частным случаем одного результата Д. Р. Адамса [132]. Теорема 1.4.3 принадлежит автору [82].

Теорема 1.4.5 при $\mu = m_s$ представляет собой теорему вложения С. Л. Соболева [115—117] с дополнениями В. П. Ильина [31], Э. Гальярдо [183], Ч. Морри [222]. Именно в такой формулировке эта теорема доказана (другим методом) в статье Э. Гальярдо [183]. Доказательство непрерывности функций из $W_p^1(\Omega)$ при $p > 2$, $n = 2$, дано Л. Тонелли [251].

Оценка (1.4.6/1) имеется в работе Ч. Морри [222]. Лемма 1.4.6 — классическая лемма Ф. Реллиха [238]. Теорема 1.4.6/2 установлена для $p > 1$ В. И. Кондрашовым [42] и для $p = 1$. Э. Гальярдо [183].

В связи с оценкой (1.4.7/1) отметим, что мультипликативные неравенства вида

$$\|\nabla_j u\|_{L_q} \leqslant c\|\nabla_l u\|_{L_p}^{\tau}\, \|u\|_{L_r}^{1-\tau}$$

и их модификации известны давно (В. П. Ильин [30], Эрлинг [170] и др.) и в общем виде доказаны Э. Гальярдо [184] и Л. Ниренбергом [230] (см. также В. А. Солонников [120]). В работах Э. Гальярдо [184] и Л. Ниренберга [230] доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть при* $\sigma>0$ $\langle u\rangle_\sigma=\left(\int_\Omega |u|^\sigma dx\right)^{1/\sigma}$, *где* Ω — *ограниченная область, удовлетворяющая условию конуса. Тогда*

$$\langle\nabla_j u\rangle_q\leqslant c\,(\langle\nabla_l u\rangle_p+\langle u\rangle_r)^\tau\langle u\rangle_r^{1-\tau}, \qquad (1)$$

где $p\geqslant 1$ *и* $1/q=j/n+\tau(1/p-l/n)+(1-\tau)/r$ *при всех* τ *из интервала* $[j/l,\ 1]$, *за исключением случая* $1<p<\infty$ *и* $l-j-n/p$ — *неотрицательное целое число. В последнем случае неравенство* (1) *имеет место при* $\tau\in[j/l,\ 1)$.

В статье Л. Ниренберга [231] сформулированный результат дополнен следующим утверждением.

Теорема 2. *При* $\sigma<0$ *положим* $s=[-n/\sigma]$, $-\alpha=s+n/\sigma$, $\langle u\rangle_\sigma=\sup|\nabla_s u|$, *если* $\alpha=0$, *и* $\langle u\rangle_\sigma=[\nabla_s u]_\alpha$, *если* $\alpha>0$, *где* $[f]_\alpha=\sup\limits_{x\neq y}|x-y|^{-\alpha}|f(x)-f(y)|$. *Пусть* $1/r=-\beta/n$, $\beta>0$. *Тогда неравенство* (1) *верно для* $\beta\leqslant j<l$ *при всех* $\tau\in[(j-\beta)/(l-\beta),\ 1]$, *за исключением случая, указанного в теореме* 1.

Доказательство сводится к выводу следующего неравенства для функций одной переменной на единичном интервале I:

$$\int_I |u^{(j)}|^q dx\leqslant c\left(\int_I |u^{(l)}|^p dx+[u]_\beta^p\right)[u]_\beta^{q-p}.$$

§ 1.5. ЕЩЕ О ПРОДОЛЖЕНИИ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВ С. Л. СОБОЛЕВА

1.5.1. Обзор результатов и некоторые примеры областей. В п. 1.1.16 был введен класс EV_p^l областей в R^n, для которых существует линейный непрерывный оператор продолжения $\mathscr{E}$: $V_p^l(\Omega)\to V_p^l(R^n)$. Там же было отмечено, что в этот класс входят сильно липшицевы области.

В работе С. К. Водопьянова, В. М. Гольдштейна и Т. Г. Латфулина [15] показано, что односвязная плоская область принадлежит классу EV_2^1 в том и только в том случае, если ее граница является квазиокружностью (т. е. представляет собой образ окружности при квазиконформном отображении плоскости на себя). По теореме Л. Альфорса [1] (см. также С. Рикман [239]), последнее условие равносильно следующему. Справедливо неравенство

$$|x-z|\leqslant c\,|x-y|,\quad c=\mathrm{const}, \qquad (1)$$

где x, y — любые точки на $\partial\Omega$, а z — произвольная точка на той из двух дуг кривой $\partial\Omega$, соединяющих x и y, которая имеет меньший диаметр.

Приведем пример квазиокружности бесконечной длины. Пусть Q — квадрат $\{(x_1,\ x_2):\ 0<x_i<1,\ i=1,\ 2\}$. Разделим каждую из сторон этого квадрата на три части равной длины и на

3*

средних отрезках построим по квадрату Q_{i_1}, $i_1=1, \ldots, 4$, $Q \cap Q_{i_1} = \varnothing$. Поступая с каждым из Q_{i_1} таким же образом, получаем квадраты Q_{i_1, i_2}, $i_2=1, \ldots, 4$, с длиной стороны 3^{-2}. Так мы построим последовательность квадратов $\{Q_{i_1, i_2, \ldots, i_k}\}$ $(k=1, 2, \ldots;$ $i_k=1, \ldots, 4)$, сумму которых обозначим через Ω (рис. 5). Очевидно, что $m_1(\partial\Omega)=4\sum_{k=0}^{\infty}3^{k-1}(2/3)^k=\infty$. Пусть $x, y \in \partial\Omega$. Достаточно ограничиться случаем $x \in Q_{i_1, \ldots, i_k}$, $y \in Q_{j_1, \ldots, j_m}$, где $i_1=j_1, \ldots, i_l=j_l$, $i_{l+1} \neq j_{l+1}$. Тогда $|x-y| \geqslant c_1 3^{-l}$, и для любой точки z, входящей в условие (1), $|x-z| \leqslant c_2 3^{-l}$. Итак, $\partial\Omega$ — квазиокружность.

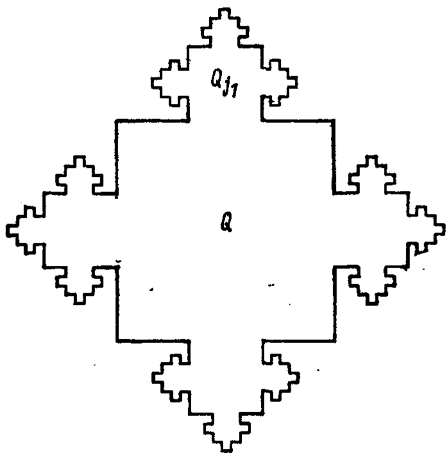

Рис. 5.

Область в R^2, ограниченная квазиокружностью, принадлежит классу EV_p^l при всех $p \in [1, \infty)$, $l=1, 2, \ldots$ (см. В. М. Гольдштейн, С. К. Водопьянов [186] при $l=1$ и П. Джонс [202] при $l \geqslant 1$). В упомянутой работе Джонса описан некоторый класс n-мерных областей, входящий в EV_p^l, более широкий, чем $C^{0,1}$, и при $n=2$ совпадающий с классом квазикругов.

В. М. Гольдштейн [26] показал, что из одновременного включения плоской односвязной области Ω и области $R^2 \setminus \Omega$ в класс EV_p^l следует, что $\partial\Omega$ — квазиокружность. Можно ли вывести последнее свойство из единственного условия $\Omega \in EV_p^1$ при некотором $p \neq 2$? Иначе говоря, исчерпываются ли квазиокружностями плоские односвязные области из EV_p^1, $p \neq 2$? Этот вопрос обсуждается в настоящем параграфе.

Приведем два примера, говорящие в пользу положительного ответа. Первый из них относится к фольклору; он показывает, что «пики», направленные во внешность области, не позволяют построить опер тор продолжения.

Пусть $\Omega=\{(x_1, x_2)\colon 0<x_1<1,\ 0<x_2<x_1^{\alpha}\}$, где $\alpha>1$. Допустим, что Ω входит в EV_p^l, $p>1$. Тогда $V_p^l(\Omega) \subset V_q^{l-1}(\Omega)$ при $1 \leqslant p<2$, $q=2p/(2-p)$; $V_p^l(\Omega) \subset V_q^{l-1}(\Omega)$ при любом $q<\infty$; $V_p^l(\Omega) \subset C^{l-1,\,1-2/p}(\overline{\Omega})$ при $p>2$. Пусть $u(x)=x_1^{l-\beta}$. Если $\beta<(\alpha+1)/p$, то $u \in V_p^l(\Omega)$. При дополнительном требовании близости β к $(\alpha+1)/p$ функция u не принадлежит пространствам

$V_q^{l-1}(\Omega)$ ($p<2$, $q=2p/(2-p)$ или $p=2$, q — большое число) и $C^{l-1,\,1-2/p}(\bar\Omega)$ ($p>2$). Итак, $\bar\Omega \overline{\in} EV_p^l$.

Следующий пример исключает из класса EV_p^l области, на границе которых имеются пики, направленные внутрь. Он показывает, между прочим, что объединение двух областей из EV_p^l не всегда принадлежит тому же классу

Пусть Ω — только что рассмотренная область. Покажем, что $R^2\setminus\bar\Omega \overline{\in} EV_p^l$. Введем полярные координаты (r, θ) с началом в точке $x=0$ так, чтобы луч $\theta=0$ был направлен по полуоси $x_1>0$, $x_2=0$. Положим $u(x)=r^{l-\beta}\psi(\theta)\eta(x)$. Здесь β — число, удовлетворяющее неравенству $\beta<2/p$, достаточно близкое к $2/p$; $\eta\in C_0^\infty(R^2)$, $\eta=1$ при $r<1$, а ψ — гладкая функция на $(0, 2\pi]$, $\psi(\theta)=1$ при малых $\theta>0$ и $\psi(\theta)=0$ при $\theta\in[\pi, 2\pi]$. Пусть v — продолжение функции $u\in V_p^l(R^2\setminus\Omega)$, принадлежащее пространству $V_p^l(R^2)$. Так как $(\partial^{l-1}v/\partial x_1^{l-1})(x_1, x_1^\alpha)\geqslant cx_1^{1-\beta}$, $(\partial^{l-1}v/\partial x_1^{l-1})(x_1, 0)=0$ при малых положительных x_1, то

$$\int_\Omega\left|\frac{\partial^l v}{\partial x_1^{l-1}\partial x_2}\right|^p dx \geqslant \int_0^\delta\left(\int_0^{x_1^\alpha}\left|\frac{\partial^l v}{\partial x_1^{l-1}\partial x_2}\right|dx_2\right)^p\frac{dx_1}{x_1^{\alpha(p-1)}}\geqslant$$

$$\geqslant\int_0^\delta\left|\frac{\partial^{l-1}v}{\partial x_1^{l-1}}(x_1, x_1^\alpha)\right|^p\frac{dx_1}{x_1^{\alpha(p-1)}}\geqslant c\int_0^\delta x_1^{1-p\beta-(\alpha-1)(p-1)}\,dx_1=\infty,$$

если $p>1$. Последнее противоречит включению $v\in V_p^l(\Omega)$. Итак, $R^2\setminus\bar\Omega \overline{\in} EV_p^l$ при $p>1$.

С. В. Поборчий и автор доказали существование непрерывного линейного оператора продолжения $V_p^l(R^2\setminus\bar\Omega)$ в весовое пространство $V_p^l(R^2, \sigma)$ с нормой

$$\left(\sum\nolimits_{s=0}^l\int_{R^2}|\nabla_s u|^p\,\sigma\,dx\right)^{1/p}\quad 1\leqslant p<\infty,$$

где σ — функция, равная единице вне Ω и совпадающая с $x_1^{(\alpha-1)(lp-1)}$ на Ω. Более того, если существует ограниченный оператор продолжения: $V_p^l(R^2\setminus\Omega)\to V_p^l(R^2, \sigma)$ и весовая функция σ неотрицательна, на множестве Ω зависит только от x_1 и возрастает, то для $x\in\Omega$ и достаточно малых x_1 верна оценка $\sigma(x)\leqslant cx_1^{(\alpha-1)(lp-1)}$, $c=\mathrm{const}$. В частности, при $p=1$, $l=1$ можно положить $\sigma=1$, и значит, $R^2\setminus\bar\Omega\in EV_1^1$.

1.5.2. Область из EV_p^1, не являющаяся квазикругом. Рассмотренные в п. 1.5.1 примеры наводят на мысль о том, что класс жордановых кривых, ограничивающих области из EV_p^l, исчерпывается квазиокружностями. Однако мы сейчас убедимся, что эта гипотеза неверна.

Теорема. *Существует область $\Omega \subset R^2$ с компактным замыканием и жордановой границей, обладающая следующими свойствами:*

(α) *кривая $\partial\Omega$ не является квазиокружностью;*

(β) *кривая $\partial\Omega$ имеет конечную длину и липшицева в окрестности любой своей точки, кроме одной;*

(γ) *область Ω принадлежит классу EV_p^1 при $p \in [1, 2)$;*

(δ) *область $R^2 \setminus \bar{\Omega}$ принадлежит классу EV_p^1 при $p > 2$.*

(*Из упомянутой ранее теоремы В. М. Гольдштейна* [26] *и условий* (α), (γ), (δ) *получаем дополнительно, что $\Omega \overline{\in} EV_p^1$ при $p \geqslant 2$ и $R^2 \setminus \bar{\Omega} \in EV_p^1$ при $p \in [1, 2]$.*)

Прежде чем доказать эту теорему, напомним одно известное неравенство, которое нам вскоре потребуется.

Лемма 1. *Пусть Ω — сектор, заданный в полярных координатах неравенствами $0 < \theta < \alpha$, $0 < r < a$. Пусть еще $u \in W_p^1(\Omega)$, $u|_{r=a} = 0$ при $p < 2$ и $u(0) = 0$ при $p > 2$. Тогда*

$$\|r^{-1}u\|_{L_p(\Omega)} \leqslant (p/|2-p|)\, \|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}. \qquad (1)$$

Последняя оценка немедленно вытекает из следующего частного случая одномерного неравенства Харди: $\int_0^a |u|^p r^{1-p}\, dr \leqslant$ $\leqslant (p/|2-p|)^p \int_0^a |u'|^p r\, dr$ (см. § 1.3).

Доказательство теоремы. Область Ω, удовлетворяющая условиям (α) — (δ), изображена на рис. 6. Соответствующие

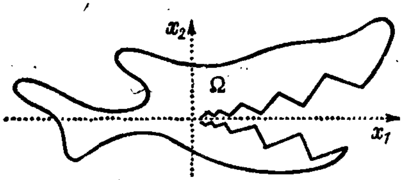

Рис. 6.

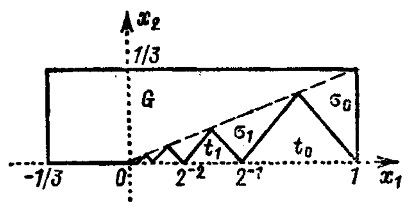

Рис. 7.

верхние и нижние «зубы» сближаются столь быстро, что неравенство (1) неверно. Поэтому $\partial\Omega$ — не квазиокружность. «Зубы» почти не меняют форму и уменьшаются в геометрической прогрессии. Следовательно, условие (β) выполнено.

Перейдем к проверке свойства (γ). Пусть G — разность прямоугольника $R = \{-1/3 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 1/3\}$ и объединения T последовательности равнобедренных прямоугольных треугольников $\{t_k\}_{k \geqslant 0}$ (рис. 7). Гипотенузой треугольника t_k служит отрезок $2^{-k-1} \leqslant x_1 \leqslant 2^{-k}$.

Лемма 2. *Существует линейный непрерывный оператор продолжения $\mathscr{E}_1$: $V_p^1(G) \to V_p^1(R^2)$, $1 \leqslant p < 2$, такой, что $\mathscr{E}_1 u = 0$* п. в. *на интервале $x_2 = 0$, $0 < x_1 < 1$.*

Доказательство. Так как «пила» $\{x \in \partial T,\ x_2 > 0\}$ — кривая класса $C^{0,1}$, то линейный непрерывный оператор продолжения $V_p^1(G) \to V_p^1(R)$ существует. Пусть v — продолжение функции $u \in V_p^1(G)$. Введем «срезку» θ, равную единице на G и нулю почти везде на интервале $x_2 = 0$, $0 < x_1 < 1$. Именно, положим $\theta = \theta_k$ на треугольнике t_k, где

$$\theta_k = \begin{cases} (4/\pi)\,\mathrm{arctg}\,(x_2/(x_1 - 2^{-k-1})) & \text{при } 2^{-k-1} < x_1 < 3\cdot 2^{-k-2}, \\ (4/\pi)\,\mathrm{arctg}\,(x_2/(2^{-k} - x_1)) & \text{при } 3\cdot 2^{-k-2} < x_1 < 2^{-k}. \end{cases}$$

На t_k имеет место неравенство

$$|\nabla\theta_k| \leqslant c\,(d_k^{-1} + d_{k+1}^{-1}), \tag{2}$$

где $d_k(x)$ — расстояние от x до точки $x_2 = 0$, $x_1 = 2^{-k}$.

Искомое продолжение функции u имеет вид θv. Для того чтобы это доказать, следует лишь проверить неравенство

$$\|\nabla(\theta v)\|_{L_p(T)} \leqslant c\,\|v\|_{V_p^1(R)}. \tag{3}$$

Имеем

$$\|\nabla(\theta v)\|_{L_p(T)} \leqslant \|\nabla v\|_{L_p(T)} + \|v\nabla\theta\|_{L_p(T)}.$$

В силу (2)

$$\|v\nabla\theta\|_{L_p(T)}^p \leqslant c \sum\nolimits_{k \geqslant 0} \left(\|d_k^{-1} v\|_{L_p(t_k^+)}^p + \|d_{k+1}^{-1} v\|_{L_p(t_k^-)}^p \right),$$

где t_k^+ и t_k^- — правая и левая половины треугольника t_k. Так как $1 \leqslant p < 2$, то

$$\|d_k^{-1} v\|_{L_p(t_k^+)} \leqslant c\left(\|\nabla v\|_{L_p(t_k^+)} + 2^k \|v\|_{L_p(t_k^+)} \right),$$

и точно такая же оценка верна для нормы $\|d_{k+1}^{-1} v\|_{L_p(t_k^-)}$. Следовательно,

$$\|v\nabla\theta\|_{L_p(T)}^p \leqslant c\left(\|\nabla v\|_{L_p(T)}^p + \|v/|x|\|_{L_p(T)}^p \right).$$

Применяя лемму 1, получаем оценку

$$\|v/|x|\|_{L_p(R)} \leqslant c\,\|v\|_{V_p^1(R)}. \tag{4}$$

Неравенство (3) доказано, а вместе с ним и лемма.

Область $\Omega_+ = \{x \in \Omega\colon x_2 > 0\}$ (см. рис. 6) может быть отображена на область G из леммы 2 при помощи квазиизометрического отображения. Поэтому любую функцию из $V_p^1(\Omega_+)$ можно распространить с сохранением класса на верхнюю полуплоскость так, чтобы продолжение обращалось в нуль на положительной полуоси. Применяя такую же операцию к $\Omega_- = \Omega \setminus \Omega_+$, заключаем, что условие (γ) выполнено.

Проверим свойство (δ). Пусть $S=\{x: 0<x_1<1,\ 0<x_2<x_1/3\}$. Обозначим через σ_k, $k=0, 1, \ldots$, компоненты множества $S\setminus T$ (см. рис. 7) и через γ объединение $\gamma_k\cup\gamma_{k+1}$ большего и меньшего катетов треугольника σ_k. Пусть еще $\tilde{V}_p^1(T)$ — пространство функций $u\in V_p^1(T)$, удовлетворяющих следующему условию. При $k=0, 1, \ldots$ в общей вершине треугольников t_k и t_{k+1} предельные значения функции u со стороны каждого из этих треугольников совпадают. В пространстве $\tilde{V}_p^1(T)$ введем норму пространства $V_p^1(T)$.

Ясно, что свойство (δ) области Ω немедленно выводится из следующей леммы.

Лемма 3. *Существует линейный непрерывный оператор продолжения* $\mathscr{E}_2$: $\tilde{V}_p^1(T)\to V_p^1(S)$, *где* $p\in(2, \infty)$.

Доказательство. Рассмотрим прямоугольник $Q=\{(x, y): 0<x<a,\ 0<y<b\}$ с вершинами O, $A=(a, 0)$, $B=(0, b)$, $C=(a, b)$. Пусть в треугольнике OAC задана функция w из пространства V_p^1, $p>2$, причем $w(O)=0$.

Покажем, что существует линейный оператор продолжения $w\to f\in V_p^1(Q)$, такой, что $f(0, y)=0$ при $y\in(0, b)$ и справедливы неравенства

$$\|f\|_{L_\infty(Q)}\leqslant\|w\|_{L_\infty(OAC)},\quad \|\nabla f\|_{L_p(Q)}\leqslant c\|\nabla w\|_{L_p(OAC)}.$$

Здесь c — постоянная, зависящая только от a/b и p. Очевидно, что достаточно считать Q квадратом. Продолжим функцию w четно через диагональ OC на треугольник OBC. Через η обозначим гладкую функцию полярного угла, $\eta(\theta)=1$ при $\theta<\pi/4$, $\eta(\pi/2)=0$. Так как $w(O)=0$, то из леммы 1 следует неравенство $\|r^{-1}w\|_{L_p(Q)}\leqslant$ $\leqslant c\|\nabla w\|_{L_p(Q)}$, где r — расстояние до точки O. Поэтому функция $f=\eta w$ является требуемым продолжением.

Используя описанную конструкцию, можно построить такое продолжение v_k функции $u\in\tilde{V}_p^1(T)$ на треугольник σ_k, что $v_k(2^{-k}, y)=u(2^{-k}, 0)$ и

$$\|v_k\|_{L_\infty(\sigma_k)}\leqslant\|u_k\|_{L_\infty(t_k\cup t_{k+1})},\quad \|\nabla v_k\|_{L_p(\sigma_k)}\leqslant c\|\nabla u\|_{L_p(t_k\cup t_{k+1})},$$

где $k=1, 2, \ldots$ При $k=0$ получаем продолжение v_0 функции u на треугольник σ_0, удовлетворяющее аналогичным неравенствам, в которых сумма $t_k\cup t_{k+1}$ заменена на t_0.

Определим продолжение функции u на S равенствами $v=u$ на T, $v=v_k$ на σ_k. Очевидно, что

$$\|\nabla v\|_{L_p(S)}+\|v\|_{L_\infty(S)}\leqslant c\left(\|\nabla u\|_{L_p(T)}+\|u\|_{L_\infty(T)}\right). \tag{5}$$

Из интегрального представления (1.1.10/1) следует неравенство

$$\operatorname*{osc}_{t_k} u\leqslant c\int_{t_k}|\nabla u(y)|(dy/|x-y|).$$

Следовательно,

$$\operatorname*{osc}_{t_k} u \leqslant c2^{-k(1-2/p)} \| \nabla u \|_{L_p(t_k)}.$$

Поэтому правая часть неравенства (5) эквивалентна норме в $\mathring{V}_p^1(T)$. ■

1.5.3. Продолжение с однородным граничным условием. Пусть G и Ω — ограниченные области в R^n и $\Omega \in EV_p^l$. Через $\mathring{V}_p^l(G)$ обозначим пополнение $\mathscr{D}(G)$ по норме пространства $V_p^l(G)$. В том случае, когда $\bar{\Omega} \subset G$, умножая слева на $\mathscr{E}$: $V_p^l(G) \to V_p^l(R^n)$ срезающую функцию $\eta \in \mathscr{D}(G)$, $\eta = 1$ на Ω, мы получаем линейный непрерывный оператор $\mathring{\mathscr{E}}$: $V_p^l(\Omega) \to \mathring{V}_p^l(G)$. Если же $\Omega \subset G$, но границы ∂G и $\partial\Omega$ имеют непустое пересечение, то вопрос о существовании оператора $\mathring{\mathscr{E}}$ становится нетривиальным. Не пытаясь углубиться в эту тему, проиллюстрируем возникающие здесь возможности на примере, взятом из статьи автора и В. П. Хавина [90]. В этой работе, посвященной некоторым задачам теории аппроксимации в среднем аналитическими функциями, и возник вопрос, рассматриваемый в настоящем разделе.

Пусть Ω и G — плоские области, $\Omega \in EV_p^1$, $\Omega \subset G$ и пусть единственная общая точка $\partial\Omega$ и ∂G расположена в начале координат. Если R — достаточно малое положительное число, то пересечение круга $B_R = \{\rho e^{i\theta}: 0 \leqslant \rho < R\}$ с $G \diagdown \bar{\Omega}$ представляет собой сумму двух непересекающихся областей ω_1 и ω_2, а пересечение любой окружности $|z| = \rho$ при $\rho \in (0, R)$ с каждой из областей ω_j $(j = 1, 2)$ — одну дугу. Пусть эта дуга задается уравнением $z = \rho e^{i\theta}$, $\theta \in (\alpha_j(\rho), \beta_j(\rho))$, где α_j и β_j — функции, удовлетворяющие условию Липшица на отрезке $[0, R]$, причем точки $\rho e^{i\alpha_j(\rho)}$ принадлежат кривой $\partial\Omega$, а точки $\rho e^{i\beta_j(\rho)}$ — кривой ∂G. Пусть $\delta_j(\rho) = \beta_j(\rho) - \alpha_j(\rho)$, $l_j(\rho) = \rho\delta_j(\rho)$.

Теорема. *Следующие утверждения равносильны:*

1) *функция $u \in L_p^1(\Omega)$ может быть продолжена до функции класса $\mathring{V}_p^1(G)$;*

2) $$\int_0^R \left(\left| u\left(\rho e^{i\alpha_j(\rho)}\right) \right|^p / [l_j(\rho)]^{p-1} \right) d\rho < \infty. \tag{1}$$

(*Здесь $u(\rho e^{i\alpha_j(\rho)})$ — граничное значение функции u в точке $\rho e^{i\alpha_j(\rho)} \in \partial\Omega$; это граничное значение существует почти везде на $\partial\Omega$.*)

Доказательство. Так как $\Omega \in EV_p^1$, то при доказательстве импликации $2 \Rightarrow 1$ можно считать, что функция u продолжена из области Ω до функции класса $V_p^1(B)$, где B — круг, содержащий $\bar{G}$.

Пусть функция η удовлетворяет условию Липшица везде вне круга $|z| = R$, равна нулю на $R^2 \diagdown G$, равна единице на Ω и $\eta(\rho e^{i\theta}) = 1 - (\theta - \alpha_j(\rho))/\delta_j(\rho)$ при $\rho e^{i\theta} \in \omega_j$, $j = 1, 2$. Очевидно, что при $\theta \in (\alpha_j(\rho), \beta_j(\rho))$

$$|u(\rho e^{i\theta}) - u(\rho e^{i\alpha_j(\rho)})| \leqslant \int_{\alpha_j(\rho)}^{\beta_j(\rho)} \left|\frac{\partial u}{\partial \rho}(\rho e^{i\theta})\right| d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \rho \int_{\alpha_j(\rho)}^{\beta_j(\rho)} |(\nabla u)(\rho e^{i\theta})| \, d\theta \leqslant \rho [\delta_j(\rho)]^{(p-1)/p} \left(\int_{\alpha_j(\rho)}^{\beta_j(\rho)} |(\nabla u)(\rho e^{i\theta})|^p \, d\theta\right)^{1/p}. \tag{2}$$

Поэтому

$$\int_{\omega_j} \frac{|u(\rho e^{i\theta})|^p}{[l_j(\rho)]^p} \rho \, d\rho \, d\theta \leqslant c \left(\|\nabla u\|^p_{L_p(\omega_j)} + \int_0^R \frac{|u(\rho e^{i\alpha_j(\rho)})|^p}{[l_j(\rho)]^{p-1}} d\rho\right).$$

Отсюда легко вывести, что функция $u\eta$ принадлежит пространству $\overset{\circ}{V}{}^1_p(G)$.

Если $u \in \overset{\circ}{V}{}^1_p(G)$, то согласно (2) $\int_0^R (|u(\rho e^{i\alpha_j(\rho)})|^p / [l_j(\rho)]^{p-1}) \, d\rho \leqslant \leqslant \|\nabla u\|^p_{L_p(\omega_j)}$. ■

Так как $l_j(\rho) \leqslant 2\pi\rho$, то при $p \geqslant 2$ условие (1) не может выполняться для всех $u \in V^1_p(\Omega)$ и, следовательно, оператор $\overset{\circ}{\mathscr{E}}$ не существует. То же верно при $1 \leqslant p < 2$, если $l_j(\rho) = O(\rho^{1+\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$. Действительно, функция $u \in V^1_p(\Omega)$, определенная вблизи точки O равенством $u(\rho e^{i\theta}) = \rho^{1+\delta-2/p}$, где $0 < \delta < \varepsilon(p-1)/p$, не удовлетворяет условию (1).

Пусть теперь $1 \leqslant p < 2$ и $l_j(\rho) \geqslant c\rho$, $c > 0$. Используя оценку, аналогичную (2), получаем неравенство

$$\int_0^R |u(\rho e^{i\alpha_j(\rho)})|^p \rho^{1-p} \, d\rho \leqslant c \left(\|\nabla u\|^p_{L_p(\Omega_R)} + \|\rho^{-1} u\|^p_{L_p(\Omega_R)}\right),$$

которое вместе с неравенством Харди (1.5.2/1) показывает, что условие (1) выполнено для всех $u \in V^1_p(\Omega)$ Следовательно, при $p \in [1, 2)$ и $l_j(\rho) \geqslant c\rho$ оператор $\overset{\circ}{\mathscr{E}}$ существует.

§ 1.6. НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ФУНКЦИЙ, ИСЧЕЗАЮЩИХ НА ГРАНИЦЕ ВМЕСТЕ С ПРОИЗВОДНЫМИ ДО НЕКОТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим следующий вопрос. Нужны ли какие-либо предположения о множестве Ω, чтобы неравенства типа Соболева имели место для функций из $W^l_p(\Omega)$ «обращающихся в нуль» на $\partial\Omega$ вместе со всеми производными до порядка $k-1$ при некотором $k \leqslant l$? Точнее, речь идет о функциях из пространства $W^l_p(\Omega) \cap \cap \overset{\circ}{W}{}^k_p(\Omega)$.

Разумеется, требования, предъявляемые к границе, излишни при $k = l$. Далее показано, что то же верно, если число k удовлетворяет неравенству $2k \geqslant l$. Улучшить этот результат нельзя — в случае $2k < l$ дополнительные условия на $\partial\Omega$ необходимы.

Сохранение неравенств Соболева в случае $l \leqslant 2k$ вытекает из интегрального представления дифференцируемых функций в произвольной ограниченной области, установленного в п. 1.5.2. Необходимость ограничений на $\partial\Omega$ в случае $l > 2k$ показана на примере (см. п. 1.6.4).

Результаты этого параграфа были получены в работе автора [83].

1.6.1. Интегральное представление функций одной переменной.

Лемма. *Пусть k и l — целые числа, $1 < l \leqslant 2k$ и $z \in W_1^l(a, b) \cap \mathring{W}_1^{\,k}(a, b)$. Тогда*

$$z^{(l-1)}(t) = \int_a^b \mathscr{K}(t, \tau)\, z^{(l)}(\tau)\, d\tau, \tag{1}$$

где

$$\mathscr{K}(t, \tau) = \begin{cases} \Pi_{2[l/2]-1}((2\tau - a - b)/(b-a)) & \text{при } t > \tau, \\ \Pi_{2[l/2]-1}((a + b - 2\tau)/(b-a)) & \text{при } t < \tau, \end{cases}$$

а Π_{2i-1} — полином степени $2i-1$, полностью определяемый тождеством $\Pi_{2i-1}(s) + \Pi_{2i-1}(-s) = 1$ и краевыми условиями $\Pi_{2i-1}(-1) = \ldots = \Pi_{2i-1}^{(i-1)}(-1) = 0$.

Доказательство. Пусть l — четное число, $l = 2q$. Рассмотрим на отрезке $[-1, 1]$ краевую задачу

$$y^{(2q)}(x) = f(x), \quad y^{(j)}(\pm 1) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, q-1. \tag{2}$$

Функцию Грина этой задачи обозначим через $g(x, s)$. Очевидно, что $g(-x, -s) = g(x, s)$ и что при $x > s$ и при $x < s$ функция $g(x, s)$ представляет собой полином степени $2q-1$ по каждой из переменных x, s. Пусть $x > s$. Производная $\partial^{2q-1}g(x, s)/\partial x^{2q-1}$ не зависит от x, является полиномом степени $2q-1$ от s и удовлетворяет краевым условиям задачи (2) в точке $s = -1$. Обозначим этот полином через $\Pi_{2q-1}(s)$.

В случае $x > s$, т. е. при $-x < -s$, имеем

$$(\partial^{2q-1}/\partial x^{2q-1})\, g(x, s) = (\partial^{2q-1}/\partial x^{2q-1})\,[g(-x, -s)] = -\Pi_{2q-1}(-s).$$

Поэтому, дифференцируя равенство $y(x) = \int_{-1}^{1} g(x, s)\, y^{(2q)}(s)\, ds$, получаем

$$y^{(2q-1)}(x) = \int_{-1}^{x} \Pi_{2q-1}(s)\, y^{(2q)}(s)\, ds - \int_x^1 \Pi_{2q-1}(-s)\, y^{(2q)}(s)\, ds.$$

Переходя к новым переменным t и τ по формулам $x = (2t - a - b)/(b-a)$, $s = (2\tau - a - b)/(b-a)$ и полагая $z(t) = y(x)$, $z(\tau) = y(s)$, приходим к тождеству

$$z^{(2q-1)}(t) = \int_a^t \Pi_{2q-1}\left(\frac{2\tau - a - b}{b-a}\right) z^{(2q)}(\tau)\, d\tau - \\ - \int_t^b \Pi_{2q-1}\left(\frac{a + b - 2\tau}{b-a}\right) z^{(2q)}(\tau)\, d\tau. \tag{3}$$

В случае $l=2q$ лемма доказана. При $l=2q+1$ выразим производную $(z')^{(2q-1)}$ с помощью только что полученной формулы через производную $(z')^{(2q)}$. ■

Замечание. Для $i=1, 2, 3$ полиномы Π_{2i-1} имеют вид

$$\Pi_1(s)={}^1/_2(s+1),\quad \Pi_3(s)={}^1/_4(2-s)(s+1)^2,$$
$$\Pi_5(s)={}^1/_{16}(3s^2-9s-8)(s+1)^3.$$

1.6.2. Интегральное представление функций нескольких переменных с нулевыми граничными условиями. Основной результат параграфа содержится в следующей теореме.

Теорема. *Пусть* $u\in L_1^l(\Omega)\cap \mathring{W}_1^k(\Omega)$, *где* l — *целое положительное число, не превосходящее* $2k$. *Тогда для* п. в. $x\in\Omega$ *имеет место равенство*

$$D^\gamma u(x)=\sum\nolimits_{\{\beta:\,|\beta|=l\}}\int_\Omega K_{\beta,\gamma}(x,\ y)\,D^\beta u(y)\,(dy/|x-y|^{n-1}). \qquad (1)$$

Здесь γ — *любой мультииндекс порядка* $l-1$, *а* $K_{\beta,\gamma}$ — *измеримая функция на* $\Omega\times\Omega$, *такая, что* $|K_{\beta,\gamma}(x,\ y)|\leqslant c$, c — *постоянная, зависящая только от* n, l *и* k.

Доказательство. Предположим сначала, что функция u бесконечно дифференцируема в открытом множестве ω, $\bar\omega\subset\Omega$. Пусть L — произвольный луч, исходящий из точки x, θ — единичный вектор с началом в x, направленный вдоль L и $y=x+\tau\theta$, $\tau\in R^1$. Пусть $\pi(x,\ \theta)$ — первая точка пересечения луча L с границей $\partial\Omega$, $b(x,\ \theta)=|\pi(x,\ \theta)-x|$, $a(x,\ \theta)=-b(x,\ -\theta)$.

Так как $u\in\mathring{W}_1^k(\Omega)$ и $\nabla_l u\in L(\Omega)$, то для любого θ из множества полной меры на единичной $(n-1)$-мерной сфере S^{n-1} функция $[a(x,\ \theta),\ b(x,\ \theta)]\ni\tau\to z(\tau)=u(x+\tau\theta)$ удовлетворяет условиям леммы 1.5.1. Поэтому из (1.5.1/2) следует тождество

$$z^{(l-1)}(0)=\int_{a(x,\,\theta)}^{0}\Pi_{2[l/2]-1}\left(\frac{2\tau-a(x,\ \theta)-b(x,\ \theta)}{b(x,\ \theta)-a(x,\ \theta)}\right)z^{(l)}(\tau)\,d\tau-$$
$$-\int_0^{b(x,\,\theta)}\Pi_{2[l/2]-1}\left(\frac{a(x,\ \theta)+b(x,\ \theta)-2\tau}{b(x,\ \theta)-a(x,\ \theta)}\right)z^{(l)}(\tau)\,d\tau. \qquad (2)$$

Отметим, что

$$z^{(l-1)}(0)=\sum\nolimits_{\{\nu:\,|\nu|=l-1\}}((l-1)!/\nu!)\,\theta^\nu D^\nu u(x).$$

Пусть γ — любой мультииндекс порядка $l-1$ и $\{P_\gamma(\theta)\}$ — система однородных многочленов степени $l-1$ от переменных $\theta_1, \ldots, \theta_n$, такая, что $\int_{S^{n-1}}P_\gamma(\theta)\,\theta^\nu\,ds_\theta=\delta_{\gamma\nu}$.

Прежде чем переходить к дальнейшим преобразованиям, отметим, что, аппроксимируя множество Ω расширяющейся последовательностью полиэдров, мы представляем функцию $(x,\ \theta)\to\to|\pi(x,\ \theta)-x|$ как предел возрастающей последовательности измеримых функций на $\Omega\times S^{n-1}$. Поэтому функции a и b измеримы.

Пусть $r=|y-x|$, т. е. $\tau=r$, если $\tau>0$, и $\tau=-r$, если $\tau<0$. Умножим равенство (2) на $P_\gamma(\theta)$ и проинтегрируем по S^{n-1}. Тогда

$$\frac{(l-1)!}{\gamma!}D^\gamma u(x)=-\int_{S^{n-1}}P_\gamma(\theta)\,ds_\theta\int_0^{b(x,\theta)}\frac{\partial^l u(r,\theta)}{\partial r^l}\times$$
$$\times\Pi_{2[l/2]-1}\left(\frac{a(x,\theta)+b(x,\theta)-2r}{b(x,\theta)-a(x,\theta)}\right)dr+\int_{S^{n-1}}P_\gamma(\theta)\,ds_\theta\times$$
$$\times\int_0^{-a(x,\theta)}\Pi_{2[l/2]-1}\left(-\frac{2r+a(x,\theta)+b(x,\theta)}{b(x,\theta)-a(x,\theta)}\right)(-1)^l\frac{\partial^l u(r,-\theta)}{\partial r^l}dr.$$

Заменяя во втором слагаемом справа θ на $-\theta$ и замечая, что $a(x,\theta)=-b(x,-\theta)$ и $P_\gamma(\theta)=(-1)^{l-1}P_\gamma(-\theta)$, получаем, что это слагаемое совпадает с первым, т. е.

$$D_\gamma u(x)=\frac{-2\gamma!}{(l-1)!}\int_{S^{n-1}}P_\gamma(\theta)\,ds_\theta\int_0^{b(x,\theta)}\frac{\partial^l u(r,\theta)}{\partial r^l}\times$$
$$\times\Pi_{2[l/2]-1}\left(\frac{a(x,\theta)+b(x,\theta)-2r}{b(x,\theta)-a(x,\theta)}\right)dr=-2l\gamma!\int_{\Omega(x)}P_\gamma(\theta)\times$$
$$\times\Pi_{2[l/2]-1}\left(\frac{a(x,\theta)+b(x,\theta)-2r}{b(x,\theta)-a(x,\theta)}\right)\sum_{\{\beta:\,|\beta|=l\}}\frac{\theta^\beta}{\beta!}D^\beta u(y)\frac{dy}{r^{n-1}},$$

где $\Omega(x)=\{y\in\Omega:\ \theta\in S^{n-1},\ r<b(x,\theta)\}$. Обозначив через $K_{\beta,\gamma}(x,\cdot)$ функцию

$$y\to\frac{-2l\gamma!}{\beta!}P_\gamma(\theta)\,\Pi_{2[l/2]-1}\left(\frac{b(x,\theta)-b(x,-\theta)-2r}{b(x,\theta)+b(x,-\theta)}\right)\theta^\beta,$$

продолженную нулем на $\Omega\diagdown\Omega(x)$, получим тождество (1) при $x\in\omega$.

Остается избавиться от предположения о гладкости функции u на ω. Пусть u удовлетворяет условиям теоремы. Очевидно, что функцию u можно аппроксимировать по полунорме $\|\nabla_l u\|_{L(\Omega)}$ функциями, совпадающими с u вблизи $\partial\Omega$ и гладкими на $\bar\omega$. Отсюда и из непрерывности интегрального оператора с ядром $|x-y|^{1-n}\times\times K_{\beta,\gamma}(x,y)$ как оператора из $L(\Omega)$ в $L(\omega)$ следует справедливость тождества (1) при п. в. $x\in\omega$. В силу произвольности множества ω теорема доказана.

1.6.3. Теоремы вложения для функций, удовлетворяющих однородным граничным условиям. Перейдем к приложениям теоремы 1.6.2.

Теорема 1. *Пусть m, l, k — целые числа, $0\leqslant m<l\leqslant 2k$; $p\geqslant 1$ и $u\in W_p^l(\Omega)\cap\mathring{W}_1(\Omega)$ при $n<p(l-m)$. Тогда $u\in C^m(\Omega)$, $\nabla_m u\in L_\infty(\Omega)$ и справедлива оценка*

$$\|\nabla_m u\|_{L_\infty(\Omega)}\leqslant c\,(\operatorname{diam}\Omega)^{l-m-n/p}\,\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)}.\qquad(1)$$

Оператор вложения $W_p^l(\Omega)\cap\mathring{W}_1^k(\Omega)$ в $V_\infty^m(\Omega)$ вполне непрерывен.

Доказательство. Достаточно предположить, что $\operatorname{diam}\Omega=1$. Итерируя интегральное представление (1.6.2/1), получаем для любой производной $D^\gamma u$ порядка $m<l$ представление

$$D^\gamma u(x)=\int_\Omega \sum_{\{\beta:\,|\beta|=l\}} Q_{\beta\gamma}(x,\ y)\,D^\beta u(y)\,dy, \tag{2}$$

где $Q_{\beta\gamma}=O(r^{l-m-n}+1)$, если $n\neq l-m$, и $Q_{\beta\gamma}=O(\log 2r^{-1})$, если $n=l-m$.

Применяя к (2) неравенство Гельдера, получаем оценку (1). Непрерывность $\nabla_m u$ в Ω следует из возможности аппроксимации в $W_p^l(\Omega)$ любой функции из $W_p^l(\Omega)$ гладкими функциями в $\bar\omega$, совпадающими с u вблизи $\partial\Omega$ (здесь, как и в доказательстве теоремы 1, ω — произвольное открытое множество, расположенное в Ω вместе с замыканием). Доказательство оценки (1) закончено.

Построим открытое покрытие $\{\mathscr{B}^{(i)}\}$ пространства R^n шарами с диаметром δ, кратность которого не превышает некоторой константы, зависящей только от n. Пусть $\Omega_i=\Omega\cap\mathscr{B}^{(i)}$ и $\{\eta_i\}$ — гладкое разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{\mathscr{B}^{(i)}\}$, такое, что $\nabla_j\eta_i=O(\delta^{-j})$. В силу оценки (1)

$$\|\nabla_m u\|_{L_\infty(\Omega)}\leqslant c\max_i\|\nabla_m(\eta_i u)\|_{L_\infty(\Omega_i)}\leqslant$$
$$\leqslant c\delta^{l-m-n/p}\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)}+C(\delta)\|u\|_{V_p^{l-1}(\Omega)}.$$

Остается заметить, что из (2) следует компактность в $V_p^{l-1}(\Omega)$ любого ограниченного подмножества пространства $W_p^l(\Omega)\cap\cap\mathring{W}_1^k(\Omega)$. ■

Дальнейшие приложения интегрального представления (1.6.2/1) очевидным образом связаны с результатами § 1.4.

Пусть m и l — целые числа, $0\leqslant m<l$, $p>1$ и μ — мера в Ω, такая, что для любого шара $B_\rho(x)$

$$\mu(B_\rho(x)\cap\Omega)\leqslant K\rho^s,\ K=\mathrm{const},\ 0<s\leqslant n. \tag{3}$$

Пусть ω — открытое множество $\bar\omega\subset\Omega$, $n>p(l-m)>n-s$ и $q=ps(n-p(l-m))^{-1}$. Пусть еще $L_q(\omega,\ \mu)$ — пространство функций на ω, суммируемых по мере μ, и $L_q(\Omega,\ \mu,\ \mathrm{loc})=\bigcap_\omega L_q(\omega,\ \mu)$. Из теоремы 1.4.1/2 вытекает, что существует одно и только одно линейное отображение γ: $V_p^{l-m}(\Omega)\to L_q(\Omega,\ \mu,\ \mathrm{loc})$, такое, что

(i) если v — функция из $V_p^{l-m}(\Omega)$, гладкая на $\bar\omega$, то $\gamma v=v$ на $\bar\omega$;

(ii) оператор γ: $V_p^{l-m}(\Omega)\to L_q(\omega,\ \mu)$ непрерывен, каково бы ни было множество ω.

Теорема 2. *Пусть m, l и k — целые числа, $0\leqslant m<l\leqslant 2k$, $p>1$, $s>n-p(l-m)>0$ и μ — мера в Ω, удовлетворяющая условию (3). Тогда для любой функции $u\in L_p^l(\Omega)\cap\mathring{W}_1^k(\Omega)$ справедлива оценка*

$$\|\gamma(\nabla_m u)\|_{L_q(\Omega,\mu)} \leqslant cK^{1/q}\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)}, \tag{4}$$

где $q = ps(n - p(l-m))^{-1}$.

Доказательство немедленно следует из интегрального представления (2) и теоремы 1.4.1/2.

Теорема 3. *Пусть числа* m, l, k, p, q, s *те же, что и в теореме* 2, μ — *мера в* Ω, *удовлетворяющая условию*

$$\lim_{\rho\to 0}\sup_{x\in R^n} \rho^{-s}\mu(B_\rho(x)\cap\Omega) = 0. \tag{5}$$

Тогда оператор $\gamma\nabla_m$: $W_p^l(\Omega)\cap \mathring{W}_1^k(\Omega) \to L_q(\Omega, \mu)$ *вполне непрерывен.*

Доказательство. По любому $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $\delta > 0$, что при $\rho \leqslant \delta$ $\rho^{-s}\sup\limits_x \mu(B_\rho(x)\cap\Omega) < \varepsilon$.

Будем использовать обозначения $\mathscr{B}^{(i)}$, η_i и Ω_i, введенные в доказательстве теоремы 1. Очевидно, что

$$\int_\Omega |\gamma\nabla_m u|^q d\mu \leqslant c\sum\nolimits_i \int_{\Omega_i} |\gamma\nabla_m(\eta_i u)|^q d\mu.$$

Отсюда и из теоремы 2 получаем оценку

$$\|\gamma\nabla_m u\|_{L_q(\Omega,\mu)} \leqslant c\varepsilon\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)} + C(\varepsilon)\|u\|_{V_p^{l-1}(\Omega)}.$$

Остается так же, как и в доказательстве теоремы 1, воспользоваться компактностью в $V_p^{l-1}(\Omega)$ единичного шара в пространстве $V_p^l(\Omega)\cap\mathring{W}_1^k(\Omega)$. ■

Замечание 1. Из следствия 8.6/1 и теоремы 8.8.1/4 вытекает, что если условия (3) и (5) заменить следующими:

$$\mu(B_\rho(x)\cap\Omega) \leqslant K|\log\rho|^{q(1-p)/p}, \quad 0<\rho<1/2,$$

$$\lim_{\rho\to 0}\sup_{x\in R^n} |\log\rho|^{q(p-1)/p}\mu(B_\rho(x)\cap\Omega) = 0,$$

где $q > p > 1$, то утверждения теорем 2 и 3 останутся справедливыми и при $n = p(l-m)$.

Замечание 2. Иногда утверждения типа теорем 1—3 можно усилить, заменяя норму $\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)}$ нормой $\|(-\Delta)^{l/2}u\|_{L_p(\Omega)}$, где Δ — оператор Лапласа. Так, для любой ограниченной области Ω и произвольной функции $u \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$, такой, что $\Delta u \in L_p(\Omega)$, $2p > n$, имеем

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant c(\operatorname{diam}\Omega)^{2-n/p}\|\Delta u\|_{L_p(\Omega)}.$$

Это неравенство следует из очевидных оценок функции Грина задачи Дирихле для оператора Лапласа, вытекающих из принципа максимума.

Аналогичные неравенства полу аются из точечных оценок функции Грина $G_m(x, s)$ задачи Дирихле для m-гармонического оператора в n-мерной области [85, 215]. Например, при $n=5, 6, 7$, $m=2$ или $n=2m+1$, $2m+2$, $m>2$ имеем

$$|G_m(x, s)| \leqslant c|x-s|^{2m-n}, \quad c=c(m, n),$$

что вместе с теоремой 1.4.1/2 дает оценку

$$\|\gamma u\|_{L_q(\Omega, \mu)} \leqslant cK^{1/q} \|\Delta^m u\|_{L_p(\Omega)},$$

где $u \in \mathring{W}_2^m(\Omega)$, $n>2mp$, $p>1$ и μ — мера в Ω, удовлетворяющая условию (3).

1.6.4. Необходимость условия $l \leqslant 2k$. Здесь показано, что условие $l \leqslant 2k$ в теоремах предыдущего пункта не может быть ослаблено. Мы приведем пример ограниченной области Ω в R^n, для которой пространство $V_p^l(\Omega) \cap \mathring{W}_p^k(\Omega)$, $l>2k$, не вложено в $L_\infty(\Omega)$ при $pl>n>2pk$ и не вложено в $L_{pn(n-pl)}(\Omega)$ при $n>pl$.

В шаре $B_\delta(O)$ рассмотрим функцию $v_\delta(x)=(1-\delta^{-2}|x|^2)^k$. Так как v_δ обращается в нуль на $\partial B_\delta(O)$ вместе с производными до порядка $k-1$, то в ε-окрестности сферы $\partial B_\delta(O)$ имеет место оценка $|\nabla_m v_\delta| \leqslant c\delta^{-k}\varepsilon^{k-m}$ при $k \geqslant m$. Очевидно также, что градиент функции v_δ любого порядка m есть $O(\delta^{-m})$ в $B_\delta(O)$ и что $|\nabla_m v_\delta|=0$, если $m \geqslant 2k+1$.

Обозначим через P и Q нижнюю и верхнюю точки пересечения оси Ox_n со сферой $\partial B_\delta(O)$ и построим шары $B_\varepsilon(P)$, $B_\varepsilon(Q)$, $\varepsilon<\delta/2$. Обозначим через η гладкую функцию в R^n, равную единице вне шара $B_1(O)$ и нулю на $B_{1/2}(O)$. В шаре $B_\delta(O)$ определим функцию

$$w(x)=v_\delta(x)\,\eta(\varepsilon^{-1}(x-P))\,\eta(\varepsilon^{-1}(x-Q))$$

и оценим ее производные. Вне шаров $B_\varepsilon(P)$ и $B_\varepsilon(Q)$: $|\nabla_j w|=0$, если $j>2k$, $|\nabla_j w|=O(\delta^{-j})$, если $j \leqslant 2k$.

Кроме того, на $B_\varepsilon(P) \cup B_\varepsilon(Q)$ $|\nabla_j w| \leqslant c\sum_{m=0}^{\min\{j, 2k\}} \varepsilon^{m-j}|\nabla_m v_\delta|$. Поэтому на $B_\varepsilon(P) \cup B_\varepsilon(Q)$ $|\nabla_j w| \leqslant c\delta^{-k}\varepsilon^{k-j}$, $j=0, 1, \ldots, l$. Отсюда получаем $\|\nabla_j w\|^p_{L_p(B_\delta(O))} \leqslant c\delta^{-pk}\varepsilon^{p(k-j)+n}$, если $j>2k$.

Аналогично, так как $n>pk$, то

$$\|\nabla_j w\|^p_{L_p(B_\delta(O))} \leqslant c(\delta^{n-pj}+\delta^{-pk}\varepsilon^{p(k-j)+n}) \leqslant c_1\delta^{n-pj}, \text{ если } j \leqslant 2k.$$

Следовательно, $\|w\|^p_{V_p^l(B_\delta(O))} \leqslant c(\delta^{n-2pk}+\delta^{-pk}\varepsilon^{n-p(l-k)})$.

Положим $\varepsilon=\delta^\alpha$, где α — число, удовлетворяющее неравенствам $pk/(n-p(l-k))<\alpha<(n-pk)/(n-p(l-k))$, $\alpha>1$. Тогда $\|w\|^p_{V_p^l(B_\delta(O))} \leqslant c\delta^\beta$, где $\beta=\alpha(n-p(l-k))-pk>0$.

Рассмотрим изображенную на рис. 8 область Ω, которая представляет собой объединение шаров B_i с радиусами δ_i и центрами O_i, соединенных цилиндрическими перешейками C_i произвольной высоты и диаметром горизонтального сечения $\varepsilon_i = \delta_i^\alpha$. В каждом шаре B_i определим функцию w_i по описанному выше правилу. Будем считать каждую из этих функций продолженной нулем на $\Omega \diagdown B_i$. Положим

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i w_i(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

где $\{h_i\}$ — такая числовая последовательность, для которой

$$\sum_{i=1}^{\infty} |h_i|^p \delta_i^\beta < \infty. \tag{2}$$

Это условие означает, что $u \in V_p^l(\Omega)$. Частные суммы ряда (1) представляют собой функции из пространства $\mathring{V}_p^k(\Omega)$ и, следовательно, функция u принадлежит тому же пространству. Так как $w_i = 1$ в центре шара B_i, то $\|u\|_{L_\infty(\Omega)} \geqslant \sup_i |h_i|$.

Очевидно, что ряд (2) может сходиться, в то время как $h_i \to \infty$. Поэтому пространство $V_p^l(\Omega) \cap \mathring{V}_p^k(\Omega)$ не вложено в $L_\infty(\Omega)$.

В случае $n > pl$ положим $|h_i|^p = \delta_i^{lp-n}$. Тогда при $q = pn(n-lp)^{-1}$

$$\|u\|_{L_q(\Omega)}^q \geqslant c \sum_{i=1}^{\infty} |h_i|^q \delta_i^n = c \sum_{i=1}^{\infty} 1.$$

Вместе с тем

$$\|u\|_{V_p^l(\Omega)}^p \leqslant c \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i^\gamma,$$

где $\gamma = (\alpha - 1)(n - p(l-k)) > 0$.

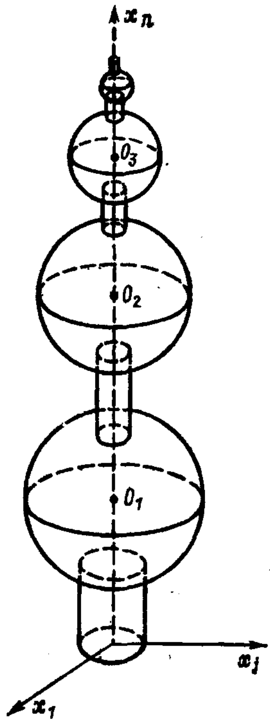

Рис. 8.

Итак, если $\{\delta_i\}$ — убывающая геометрическая прогрессия, то $u \in W_p^l(\Omega) \cap \mathring{W}_p^k(\Omega)$, но $u \overline{\in} L_q(\Omega)$.

Вопрос об условиях на область Ω, при которых для пространства $W_p^l(\Omega) \cap \mathring{W}_p^k(\Omega)$, $2k < l$, верны теоремы вложения типа Соболева, будет рассмотрен в п. 5.6.6.

Глава 2

НЕРАВЕНСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ ПЕРВЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИЙ, РАВНЫХ НУЛЮ НА ГРАНИЦЕ

В этой главе найдены необходимые и достаточные условия справедливости некоторых оценок нормы $\|u\|_{L_q(\Omega, \mu)}$, где $u \in \mathscr{D}(\Omega)$ и μ — мера в Ω. В правые части рассматриваемых здесь неравенств входит интеграл $\int_\Omega [\Phi(x, \nabla u)]^p dx$. Условия характеризуют область Ω и меры, входящие в оценки; они формулируются в терминах «изопериметрических» неравенств, связывающих меры и емкости.

§ 2.1. УСЛОВИЯ СПРАВЕДЛИВОСТИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ (СЛУЧАЙ $p=1$)

2.2.1. Условие в терминах любых допустимых множеств. Ограниченное открытое множество $g\subset R^n$ будем называть допустимым, если $\bar g\subset\Omega$ и ∂g — многообразие класса C^∞. (В главах 3—5 это определение будет заменено более широким.) Через $N(x)$ обозначим единичную нормаль к границе допустимого множества g в точке x, направленную внутрь g, и через s — площадь на ∂g.

Пусть $\Phi(x, \xi)$ — непрерывная в $\Omega\times R^n$ неотрицательная однородная первой степени по ξ функция и $\sigma(\partial g)=\int_{\partial g}\Phi(x, N(x))\,ds(x)$. Пусть еще $\omega_n=s(\partial B_1)$ и μ, ν — меры в Ω.

В следующей теореме дано необходимое и достаточное условие справедливости неравенства

$$\|u\|_{L_q(\Omega,\mu)}\leqslant C\left(\int_\Omega \Phi(x, \nabla u(x))\,dx\right)^\delta \|u\|^{1-\delta}_{L_r(\Omega,\nu)} \tag{1}$$

для всех $u\in\mathscr{D}(\Omega)$. Этот результат получен с помощью того же приема, что и теорема 1.4.2/1.

Теорема. 1) *Если для всех допустимых множеств*

$$\mu(g)^{1/q}\leqslant\alpha\sigma(\partial g)^\delta\,\nu(g)^{(1-\delta)/r}, \tag{2}$$

где $\alpha=\mathrm{const}>0$, $\delta\in[0, 1]$, r, $q>0$, $\delta+(1-\delta)r^{-1}\geqslant q^{-1}$, *то для всех функций* $u\in\mathscr{D}(\Omega)$ *справедливо неравенство* (1), *где* $C\leqslant\alpha r^\delta(r\delta+1-\delta)^{-\delta-r^{-1}(1-\delta)}$.

2) *Если для всех функций* $u\in\mathscr{D}(\Omega)$ *верно неравенство* (1), *в котором* $q>0$, $\delta\in[0, 1]$, *то для всех допустимых множеств* g *выполнено неравенство* (2), *где* $\alpha\leqslant C$.

Доказательство. 1) Отметим сначала, что в силу теоремы 1.2.4

$$\int_\Omega\Phi(x, \nabla u)\,dx=\int_{\{x:\,|\nabla u|>0\}}\Phi(x, \nabla u/|\nabla u|)\,|\nabla u|\,dx=$$
$$=\int_0^\infty dt\int_{E_t}\Phi(x, \nabla u/|\nabla u|)\,ds=\int_0^\infty\sigma(\partial L_t)\,dt. \tag{3}$$

(Здесь мы воспользовались тем, что при п. в. функция $|\nabla u|$ отлична от нуля на $E_t=\{x: |u(x)|=t\}$ и что при таких t множества $L_t=\{x: |u(x)|>t\}$ ограничены многообразиями класса C^∞.) По теореме 1.2.3 $\|u\|_{L_q(\Omega,\mu)}=\left(\int_0^\infty\mu(L_t)\,d(t^q)\right)^{1/q}$.

Так как $\mu(L_t)$ — невозрастающая функция, то, применяя (1.3.3/1), получаем

$$\|u\|_{L_q(\Omega,\,\mu)} \leqslant \left(\int_0^\infty \mu(L_t)^{\gamma/q}\, d(t^\gamma)\right)^{1/\gamma},$$

где $\gamma = r(r\delta + 1 - \delta)^{-1}$, $\gamma \leqslant q$.

Пользуясь тем, что при п. в. t множества L_t допустимы, из последнего выражения и из (2) выводим

$$\|u\|_{L_q(\Omega,\,\mu)} \leqslant \gamma^{1/\gamma}\alpha \left(\int_0^\infty \sigma(\partial L_t)^{\gamma\delta}\, \nu(L_t)^{\gamma r^{-1}(1-\delta)}\, t^{\gamma-1}\, dt\right)^{1/\gamma}.$$

Поскольку $\gamma\delta + \gamma r^{-1}(1-\delta) = 1$, то в силу неравенства Гельдера

$$\|u\|_{L_q(\Omega,\,\mu)} \leqslant \gamma^{1/\gamma}\alpha \left(\int_0^\infty \sigma(\partial L_t)\, dt\right)^{\delta} \left(\int_0^\infty \nu(L_t)\, t^{r-1}\, dt\right)^{(1-\delta)/r},$$

что в силу (3) и теоремы 1.2.3, эквивалентно неравенству (1).

2) Пусть g — любое допустимое подмножество Ω и пусть $d(x) = \operatorname{dist}(x, R^n \setminus g)$, $g_t = \{x \in \Omega,\ d(x) > t\}$. Подставим в (1) функцию $u_\varepsilon(x) = \alpha(d(x))$, где $\alpha(d)$ — неубывающая бесконечно дифференцируемая на $[0, \infty)$ функция, равная единице при $d \geqslant 2\varepsilon$ и нулю при $d \leqslant \varepsilon$ (ε — достаточно малое положительное число). В силу теоремы 1.2.4

$$\int_\Omega \Phi(x, \nabla u_\varepsilon)\, dx = \int_0^{2\varepsilon} \alpha'(t)\, dt \int_{\partial g_t} \Phi(x, N(x))\, ds(x),$$

где $N(x)$ — нормаль к ∂g_t, направленная внутрь g_t. Так как $\int_{\partial g_t} \Phi(x, N(x))\, ds(x) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \sigma(\partial g)$, то $\int_\Omega \Phi(x, \nabla u_\varepsilon)\, dx \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \sigma(\partial g)$.

Пусть K — компакт в g, такой, что $\operatorname{dist}(K, \partial g) > 2\varepsilon$. Тогда $u_\varepsilon(x) = 1$ на K и $\|u_\varepsilon\|_{L_q(\Omega,\,\mu)} \geqslant \mu(K)^{1/q}$. Поскольку $0 \leqslant u_\varepsilon(x) \leqslant 1$ и $\operatorname{supp} u_\varepsilon \subset g$, то $\|u_\varepsilon\|_{L_r(\Omega,\,\mu)} \leqslant \nu(g)^{1/r}$. Теперь из (1) получаем $\mu(g)^{1/q} = \sup\limits_{K \subset g} \mu(K)^{1/q} \leqslant C\sigma(\partial g)^\delta\, \nu(g)^{(1-\delta)/r}$. ■

2.1.2. Частный случай (условие в терминах шаров). В случае $\Phi(x, \xi) = |\xi|$, $\Omega = R^n$ и $\nu = m_n$ из (2.1.1/1) следует, что для всех шаров $B_\rho(x)$

$$\mu(B_\rho(x))^{1/q} \leqslant A\rho^{\delta(n-1) + (1-\delta)nr^{-1}}. \tag{1}$$

Незначительное усложнение доказательства теоремы 1.4.2/2 приводит к обратному утверждению.

Теорема. *Если для всех шаров* $B_\rho(x)$ *справедливо неравенство* (1), *где* $\delta \in [0, 1]$, q, $r > 0$, $\delta + (1-\delta)r^{-1} \geqslant q^{-1}$, *то для всех* $u \in \mathscr{D}(R^n)$ *справедливо неравенство* (2.1.1/1) *при* $C \leqslant cA$, $\Phi(x, \xi) = |\xi|$, $\Omega = R^n$, $\nu = m_n$.

Доказательство. Как показано в доказательстве теоремы 1.2.1/2, для любого ограниченного открытого множества g с гладкой границей существует последовательность $\{B_{\rho_i}(x_i)\}_{i \geqslant 1}$ непересекающихся шаров, обладающая следующими свойствами:

$$(\alpha)\ g\subset\bigcup_{i\geqslant 1}B_{3\rho_i}(x_i);\qquad(\beta)\ 2m_n\left(g\bigcap B_{\rho_i}(x_i)\right)=v_n\rho_i^n;$$

$$(\gamma)\ s(\partial g)\geqslant c\sum\nolimits_{i\geqslant 1}\rho_i^{n-1}.$$

Из условия (1) следует

$$\mu(g)\leqslant\sum\nolimits_{i\geqslant 1}\mu\left(B_{3\rho_i}(x_i)\right)\leqslant A^q\sum\nolimits_{i\geqslant 1}(3\rho_i)^{q[\delta(n-1)+(1-\delta)n/r]}.\qquad(2)$$

Так как $q\delta+(1-\delta)n/r\geqslant 1$, то из (2) получаем

$$\mu(g)\leqslant cA^q\left(\sum\nolimits_{i\geqslant 1}\rho_i^{q\frac{\delta(n-1)+(1-\delta)nr^{-1}}{q\delta+(1-\delta)qr^{-1}}}\right)^{q\delta+(1-\delta)qr^{-1}},$$

что в силу неравенства Гельдера не превосходит $cA^q\left(\sum_{i\geqslant 1}\rho_i^{n-1}\right)^{q\delta}\left(\sum_{i\geqslant 1}\rho_i^n\right)^{(1-\delta)qr^{-1}}$. Отсюда и из свойств ($\alpha$), ($\beta$), ($\gamma$) следует неравенство $[\mu(g)]^{1/q}\leqslant cA\,[s(\partial g)]^{\delta}\,[m_n(g)]^{(1-\delta)qr^{-1}}$. Остается воспользоваться теоремой 2.1.1.

2.1.3. Еще одно неравенство, содержащее нормы в $L_q(\Omega,\mu)$ и $L_r(\Omega,\nu)$ (случай $p=1$). Аналогично теореме 2.1.1 доказывается следующее утверждение.

Теорема. 1) *Если для всех допустимых множеств $g\subset\Omega$*

$$[\mu(g)]^{1/q}\leqslant\alpha\sigma(\partial g)+\beta\,[\nu(g)]^{1/r},\qquad(1)$$

где α, $\beta=\mathrm{const}$ и $q\geqslant 1\geqslant r$, то для всех функций $u\in\mathscr{D}(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\|u\|_{L_q(\Omega,\mu)}\leqslant\alpha\|\Phi(x,\nabla u)\|_{L(\Omega)}+\beta\|u\|_{L_r(\Omega,\nu)}.\qquad(2)$$

2) *Если для всех функций $u\in\mathscr{D}(\Omega)$ выполняется неравенство* (2), *то для всех допустимых множеств g выполнено неравенство* (1).

2.1.4. Два примера неравенств, содержащих конкретные меры. Важным частным случаем теорем 2.1.1 и 2.1.3 является неравенство (1.4.2/8). Приведем еще два примера приложения этих теорем.

Пример 1. Пусть $\Omega=R^n$, $R^{n-1}=\{x\in R^n,\ x_n=0\}$, $\mu(A)=m_{n-1}(A\cap R^{n-1})$, где A — любое борелевское подмножество R^n. Очевидно, что $\mu(g)\leqslant{}^1/_2 s(\partial g)$, и поэтому для всех $u\in\mathscr{D}(R^n)$

$$\|u\|_{L(R^{n-1})}\leqslant{}^1/_2\|\nabla u\|_{L(R^n)}.$$

Пример 2. Пусть A — любое борелевское подмножество R^n, $m_n(A)<\infty$ и $\mu(A)=\int_A|x|^{-\alpha}dx$, где $\alpha\in[0,1]$. Пусть еще B_r — шар с центром в начале координат, n-мерная мера которого равна $m_n(A)$. Иначе говоря, $r=(n\omega_n^{-1}m_n(A))^{1/n}$. Имеют место неравенства

$$\int_A |x|^{-\alpha} dx \leqslant \int_{A\cap B_r} |x|^{-\alpha} dx + r^{-\alpha} m_n (B_r \setminus A) \leqslant \int_{B_r} |x|^{-\alpha} dx.$$

Поэтому

$$[\mu(A)]^{(n-1)/(n-\alpha)} \leqslant (n-\alpha)^{(1-n)/(n-\alpha)}\, \omega_n^{\alpha(n-1)/n(n-\alpha)} [nm_n(A)]^{(n-1)/n}.$$

Пусть g — произвольное допустимое множество в R^n. В силу изопериметрического неравенства $[nm_n(g)]^{(n-1)/n} \leqslant \omega_n^{-1/n} s(\partial g)$ [59, 166, 188, 241]) имеет место оценка

$$[\mu(g)]^{(n-1)/(n-\alpha)} \leqslant (n-\alpha)^{(1-n)/(n-\alpha)}\, \omega_n^{(\alpha-1)/(n-\alpha)} s(\partial g),$$

в которой можно поставить знак равенства, если g — шар. Поэтому

$$\sup_{\{g\}} [\mu(g)]^{(n-1)/(n-\alpha)}/s(\partial g) = (n-\alpha)^{(1-n)/(n-\alpha)}\, \omega_n^{(\alpha-1)/(n-\alpha)}$$

и для всех $u \in \mathscr{D}(R^n)$ справедливо неравенство

$$\left(\int_{R^n} |u(x)|^{(n-\alpha)/(n-1)} |x|^{-\alpha} dx\right)^{(n-1)/(n-\alpha)} \leqslant \leqslant (n-\alpha)^{(1-n)/(n-\alpha)}\, \omega_n^{(\alpha-1)/(n-\alpha)} \|\nabla u\|_{L(R^n)} \tag{1}$$

с точной константой.

2.1.5. Случай весовой нормы в правой части. В этом пункте $z=(x, y)$ и $\zeta=(\xi, \eta)$ — точки R^{n+m}, $x, \xi \in R^n$ и $y, \eta \in R^m$. Пусть еще $B_r^d(q)$ — d-мерный шар с центром $q \in R^d$ и $B_r^d = B_r^d(O)$.

Лемма 1. *Пусть g — открытое подмножество R^{n+m} с компактным замыканием и гладкой границей ∂g, такое, что*

$$\int_{B_r^{(n+m)}(z)\cap g} |\eta|^\alpha d\zeta \Big/ \int_{B_r^{(n+m)}(z)} |\eta|^\alpha d\zeta = {}^1/_2, \tag{1}$$

где $\alpha > -m$ при $m > 1$ и $0 \geqslant \alpha > -1$ при $m = 1$. Тогда

$$\int_{B_r^{(n+m)}(z)\cap\partial g} |\eta|^\alpha ds(\zeta) \geqslant cr^{n+m-1}(r+|y|)^\alpha, \tag{2}$$

где s — $(n+m-1)$-мерная площадь.

Доказательство основано на следующем утверждении.

Лемма 2. *Пусть $\alpha > -m$ при $m > 1$ и $0 \geqslant \alpha > -1$ при $m = 1$. Тогда для любой функции $v \in C^\infty(\overline{B_r^{(n+m)}})$ существует такая константа V, что*

$$\int_{B_r^{(m+n)}} |v(\zeta) - V|\, |\eta|^\alpha d\zeta \leqslant cr \int_{B_r^{(m+n)}} |\nabla v(\zeta)|\, |\eta|^\alpha d\zeta. \tag{3}$$

Доказательство. Достаточно доказать (3) при $r=1$. Положим $B_1^{(m+n)} = B$ и $B_1^{(m)} \times B_1^{(n)} = Q$. Обозначим через $R(\zeta)$ расстояние от начала координат O до точки $\zeta\in\partial Q$, т. е. $R(\zeta)=(1+|\xi|^2)^{1/2}$ при $|\eta|=1$, $|\xi|<1$ и $R(\zeta)=(1+|\eta|^2)^{1/2}$ при $|\xi|=1$, $|\eta|<1$. Учитывая, что B — квазиизометрический образ Q при отображении $\zeta\to\zeta/R(\zeta)$, можно вывести (3) из неравенства

$$\int_Q|v(\zeta)-V|\,|\eta|^\alpha d\zeta\leqslant c\int_Q|\nabla v(\zeta)|\,|\eta|^\alpha d\zeta, \tag{4}$$

к выводу которого мы переходим. Так как $(m+\alpha)|\eta|^\alpha=\operatorname{div}(|\eta|^\alpha\eta)$, то, интегрируя по частям в левой части (4), находим, что она не превосходит

$$(m+\alpha)^{-1}\left(\int_Q|\nabla v|\,|\eta|^{\alpha+1}d\zeta+\int_{B_1^{(n)}}d\xi\int_{\partial B_1^{(m)}}|v(\zeta)-V|\,ds(\eta)\right). \tag{5}$$

Положим $T=B_1^{(n)}\times(B_1^{(m)}\setminus B_{1/2}^{(m)})$. Пусть $m>1$. Второе слагаемое в (5) не больше чем $c\int_T|\nabla v|\,d\zeta+c\int_T|v-V|\,d\zeta$. Применяя лемму 1.11.1, отсюда и из (5) получаем (4), где V — среднее значение v в T. (Здесь существенно, что T — область при $m>1$.)

Если $m=1$, то множество T имеет две компоненты: $T_+=B_1^{(n)}\times(^1/_2,\ 1)$ и $T_-=B^{(n)}\times(-1,\ -^1/_2)$. Рассуждение, только что использованное в случае $m>1$, показывает, что

$$\int_{B_1^{(n)}}|v(\xi,\ \pm1)-V_\pm|\,d\xi\leqslant c\int_{T_\pm}|\nabla v(\zeta)|\,d\zeta\leqslant c\int_Q|\nabla v(\zeta)|\,|\eta|^\alpha d\zeta,$$

где $V_\pm$ — средние значения v в $T_\pm$. Остается заметить, что при $\alpha\leqslant0$

$$|V_+-V_-|\leqslant c\int_{B_1^{(n)}}d\xi\int_{-1}^1|\partial v/\partial\eta|\,d\eta\leqslant c\int_Q|\nabla v(\zeta)|\,|\eta|^\alpha d\zeta.$$

Итак, и для $m=1$ доказано неравенство (4), в котором роль V может играть V_+ или V_-.

Доказательство леммы 1. Пусть для краткости $B=B_r^{(m+n)}(z)$. Подставим в неравенство (3) вместо функции v усреднение χ_ρ характеристической функции множества g с радиусом ρ. Тогда левая часть последнего неравенства оценивается снизу суммой $|1-V|\int_{e_1}|\eta|^\alpha d\zeta+|V|\int_{e_0}|\eta|^\alpha d\zeta$, где $e_i=\{\zeta\in B\colon \chi_\rho(\zeta)=i\}$, $i=0,\ 1$.

Пусть ε — сколь угодно малое положительное число. В силу (1) при достаточно малых ρ

$$(^1/_2-\varepsilon)(|1-V|+|V|)\int_B|\eta|^\alpha d\zeta\leqslant cr\int_B|\eta|^\alpha|\nabla\chi_\rho(\zeta)|\,d\zeta.$$

Следовательно,

$$(^1/_2)\int_B|\eta|^\alpha d\zeta\leqslant cr\varlimsup_{\rho\to+0}\int_B|\eta|^\alpha|\nabla\chi_\rho(\zeta)|\,d\zeta=cr\int_{B\cap\partial g}|\eta|^\alpha ds(\zeta).$$

Остается отметить, что $\int_B|\eta|^\alpha d\zeta\geqslant cr^{m+n}(r+|y|)^\alpha$. ■

Замечание 1. Лемма 1 неверна при $m=1$, $\alpha>0$. В самом деле, пусть $g=\{\zeta\in R^{n+1}: \eta>\varepsilon$ или $0>\eta>-\varepsilon\}$, где $\varepsilon=\mathrm{const}>0$. Очевидно, что условие (1) для этого множества выполнено. Однако $\int_{B_r^{(n+1)}\cap\partial g}|\eta|^\alpha ds(\zeta)\leqslant c\varepsilon^\alpha$, что противоречит оценке (2).

Теорема 1. *Пусть ν — мера в R^{n+m}, $q\geqslant 1$ и $\alpha>-m$. Точная константа в неравенстве*

$$\|u\|_{L_q(R^{n+m},\nu)}\leqslant C\int_{R^{n+m}}|y|^\alpha|\nabla_z u|\,dz,\qquad u\in C_0^\infty(R^{n+m}),\tag{6}$$

эквивалентна величине

$$K=\sup_{z;\,\rho}(\rho+|y|)^{-\alpha}\rho^{1-n-m}\left[\nu\left(B_\rho^{(n+m)}(z)\right)\right]^{1/q}.\tag{7}$$

Доказательство. 1) Пусть сначала $m>1$ или $0\geqslant\alpha>-1$, $m=1$. Согласно теореме 2.1.3 $C=\sup\limits_g\left([\nu(g)]^{1/q}\Big/\int_{\partial g}|y|^\alpha ds(z)\right)$, где g — любое открытое подмножество R^{n+m} с компактным замыканием и гладкой границей. Покажем, что для каждого g существует покрытие последовательностью шаров $B_{\rho_i}^{(n+m)}(z_i)$, $i=1, 2, \ldots$, такое, что

$$\sum_i\rho_i^{n+m-1}(\rho_i+|y_i|)^\alpha\leqslant c\int_{\partial g}|y|^\alpha ds(z).$$

Каждая точка $z\in g$ является центром шара $B_r^{(m+n)}(z)$, для которого выполнено равенство (1). (Действительно, отношение в левой части (1) — непрерывная функция r, равная единице при малых r и стремящаяся к нулю при $r\to\infty$.) В силу теоремы 1.2.1 о покрытии существует последовательность непересекающихся шаров $B_{r_i}^{(n+m)}(z_i)$, для которой $g\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}B_{3r_i}^{(n+m)}(z_i)$. Из леммы 1 получаем, что

$$\int_{B_{r_i}^{(n+m)}(z_i)\cap\partial g}|y|^\alpha ds(z)\geqslant cr_i^{n+m-1}(r_i+|y_i|)^\alpha.$$

Следовательно, $\left\{B_{3r_i}^{(n+m)}(z_i)\right\}_{i\geqslant 1}$ — требуемое покрытие.

Очевидно, что

$$\nu(g)\leqslant\sum_i\nu\left(B_{3r_i}^{(n+m)}(z_i)\right)\leqslant\left(\sum_i\left[\nu\left(B_{3r_i}^{(n+m)}(z_i)\right)\right]^{1/q}\right)^q\leqslant$$
$$\leqslant\left(cK\sum_i r_i^{n+m-1}(r_i+|y_i|)^\alpha\right)^q\leqslant\left(cK\int_{\partial g}|y|^\alpha ds(z)\right)^q.$$

Поэтому $C\leqslant cK$ при $m>1$ и при $m=1$, $0\geqslant\alpha>-1$.

2) Пусть $m=1$ и $\alpha>0$. Построим конечнократное покрытие множества $\{\zeta: \eta\neq 0\}$ шарами $\mathscr{B}_j$, так, чтобы радиус ρ_j шара $\mathscr{B}_j$

совпадал с расстоянием от $\mathscr{B}_j$ до гиперплоскости $\{\zeta: \eta=0\}$. Обозначим через $\{\varphi_j\}$ разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{\mathscr{B}_j\}$ и такое, что $|\nabla\varphi_j|\leqslant c/\rho_j$ [121, гл. VI, § 1]. Используя уже доказанное утверждение для случая $\alpha=0$ (или, что то же самое, теорему 1.4.2/2), получаем оценку

$$\|\varphi_j u\|_{L_q(R^{n+1}, \nu)}\leqslant c \sup_{\rho:\, z} \rho^{-n}\left[\nu_j\left(B_\rho^{(n+1)}(z)\right)\right]^{1/q} \|\nabla(\varphi_j u)\|_{L(R^{n+1})},$$

где ν_j — сужение меры ν на $\mathscr{B}_j$. Очевидно, что

$$\sup_{\rho:\, z} \rho^{-n}\left[\nu_j\left(B_\rho^{(n+1)}(z)\right)\right]^{1/q}\leqslant c \sup_{\rho\leqslant\rho_j;\, z\in\mathscr{B}_j} \rho^{-n}\left[\nu\left(B_\rho^{(n+1)}(z)\right)\right]^{1/q}.$$

Поэтому

$$\|\varphi_j u\|_{L_q(R^{n+1}, \nu)}\leqslant$$
$$\leqslant c \sup_{\rho\leqslant\rho_j,\, z\in\mathscr{B}_j} (\rho+\rho_j)^{-\alpha}\rho^{-n}\left[\nu\left(B_\rho^{(n+1)}(z)\right)\right]^{1/q}\int_{R^{n+1}}|\nabla(\varphi_j u)|\,|\eta|^\alpha d\zeta.$$

Суммируя по j и используя (7), находим

$$\|u\|_{L_q(R^{n+1}, \nu)}\leqslant cK\left(\int_{R^{n+1}}|\nabla u|\,|\eta|^\alpha d\zeta+\int_{R^{n+1}}|u|\,|\eta|^{\alpha-1}d\zeta\right).$$

Поскольку при $\alpha>0$ $\int_{R^{n+1}}|u|\,|\eta|^{\alpha-1}d\zeta\leqslant\alpha^{-1}\int_{R^{n+1}}|\nabla u|\,|\eta|^\alpha d\zeta$, т $C\leqslant cK$ и в случае $m=1$, $\alpha>0$.

3) Для того чтобы получить обратную оценку, положим в (6) $U(\zeta)=\varphi(\rho^{-1}(\zeta-z))$, где $\varphi\in C_0^\infty(B_2^{(n+m)})$, $\varphi=1$ на $B_1^{(n+m)}$, и отметим, что

$$\int_{B_{2\rho}^{(n+m)}(z)}|\eta|^\alpha|\nabla_\zeta u|\,d\zeta\leqslant c\rho^{-1}\int_{B_{2\rho}^{(n+m)}(z)}|\eta|^\alpha d\zeta\leqslant c\rho^{n+m-1}(\rho+|y|)^\alpha. \blacksquare$$

Следствие. *Пусть ν — мера в R^n, $q\geqslant 1$ и $\alpha>-m$. Тогда точная константа в неравенстве* (6) *эквивалентна величине*
$$\sup_{x\in R^n,\, \rho>0} \rho^{1-n-m-\alpha}\left[\nu\left(B_\rho^{(n)}(x)\right)\right]^{1/q}.$$

Для доказательства достаточно отметить, что если $\operatorname{supp}\nu\subset R^n$, то величина K, определенная в (7), эквивалентна последнему супремуму.

Замечание 2. Часть доказательства теоремы 1, относящаяся к случаю $m=1$, $\alpha>0$, проходит и для $m>1$, $\alpha>1-m$, так как при таких значениях α для всех $u\in C_0^\infty(R^{n+m})$

$$\int_{R^{n+m}}|u|\,|\eta|^{\alpha-1}d\zeta\leqslant(\alpha+m-1)^{-1}\int_{R^{n+m}}|\nabla u|\,|\eta|^\alpha d\zeta. \qquad (8)$$

Отсюда следует, что точная константа C в (6) при $m\geqslant 1$, $\alpha>$ $>1-m$ эквивалентна величине

$$K_1=\sup_{z\in R^{n+m};\, \rho<|y|/2} |y|^{-\alpha}\rho^{1-n-m}\left[\nu\left(B_\rho^{(n+m)}(z)\right)\right]^{1/q}. \blacksquare$$

Поскольку неравенство (8) верно и для $\alpha < 1-m$, если функция u равна нулю вблизи подпространства $\eta=0$, то, повторяя с очевидными изменениями вторую и третью части доказательства теоремы 1, приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Пусть* ν — *мера в* $\{\zeta \in R^{n+m}: \eta \neq 0\}$, $q \geqslant 1$ *и* $\alpha < 1-m$. *Тогда точная константа в неравенстве* (6), *где* $u \in C_0^\infty(\{\zeta: \eta \neq 0\})$, *эквивалентна величине* K_1.

2.1.6. Неравенства типа Харди — Соболева как следствия теоремы 2.1.5/1. Здесь получены некоторые часто встречающиеся в приложениях неравенства между весовыми нормами, частными случаями которых являются и неравенство Харди

$$\| |x|^{-l} u \|_{L_p(R^n)} \leqslant c \| \nabla_l u \|_{L_p(R^n)},$$

и неравенство Соболева

$$\| u \|_{L_{pn/(n-lp)}(R^n)} \leqslant c \| \nabla_l u \|_{L_p(R^n)}$$

(здесь $lp<n$ и $u \in \mathscr{D}(R^n)$). Сохраним обозначения, введенные в п. 2.1.5.

Следствие 1. *Пусть* $1 \leqslant q \leqslant (m+n)/(m+n-1)$ *и* $\beta = \alpha - 1 + ((q-1)/q)(m+n) - m/q$. *Тогда для всех* $u \in \mathscr{D}(R^{n+m})$ *справедливо неравенство*

$$\| |y|^\beta u \|_{L_q(R^{n+m})} \leqslant c \| |y|^\alpha \nabla u \|_{L(R^{n+m})}. \qquad (1)$$

Доказательство. Согласно теореме 2.1.5/1 достаточно проверить равномерную относительно ρ и z ограниченность величины

$$(\rho + |y|)^{-\alpha} \rho^{1-n-m} \left(\int_{|z-\zeta|<\rho} |\eta|^{\beta q} d\zeta \right)^{1/q},$$

которая очевидно не превосходит

$$c(\rho + |y|)^{-\alpha} \rho^{1-n-m+n/q} \left(\int_{|\eta-y|<\rho} |\eta|^{\beta q} d\eta \right)^{1/q}.$$

Последнее выражение не больше чем $c|y|^{\beta-\alpha} \rho^{1-(m+n)(q-1)/q}$ при $\rho \leqslant c|y|$ и не больше чем $c\rho^{\beta-\alpha+1-(m+n)(q-1)/q}$ при $\rho > c|y|$. ■

Заменим в (1) числа q^{-1}, α, β числами $1-p^{-1}+q^{-1}$, $\alpha + (1-p)^{-1} q\beta$, $((1-p^{-1})q+1)\beta$, а функцию u функцией $|u|^s$, где $s=(p-1)qp^{-1}+1$. Тогда, применяя к правой части неравенство Гельдера с показателями p, $p/(p-1)$, получаем следующее утверждение.

Следствие 2. *Пусть* $m+n>p\geqslant 1$, $p \leqslant q \leqslant p(n+m) \times (n+m-p)^{-1}$ *и* $\beta = \alpha - 1 + (n+m)(1/p - 1/q) > -m/q$. *Тогда для всех* $u \in \mathscr{D}(R^{n+m})$ *справедливо неравенство*

$$\| |y|^\beta u \|_{L_q(R^{n+m})} \leqslant c \| |y|^\alpha \nabla u \|_{L_p(R^{n+m})}. \qquad (2)$$

При $p=2$, $\alpha=1-m/2$ подстановка $u(z)=|y|^{-\alpha}v(z)$ в неравенство (2) приводит к следующему результату.

Следствие 3. *Пусть $m+n>2$, $2<q\leqslant 2(n+m)/(m+n-2)$ и $\gamma=-1+(n+m)(2^{-1}-q^{-1})$. Тогда для всех $v\in C_0^\infty(R^{n+m})$ (при $m=1$ подчиненных еще требованию $v(x, 0)=0$) имеет место неравенство*

$$\||y|^\gamma v\|_{L_q(R^{n+m})}\leqslant c\left(\int_{R^{n+m}}(\nabla v)^2\,dz-((m-2)^2/4)\int_{R^{n+m}}(v^2/|y|^2)dz\right)^{1/2}. \quad (3)$$

В частности, при $q=2(m+n)/(m+n-2)$ показатель γ обращается в нуль, и мы получаем следующее одновременное усиление неравенства Харди (с точной константой) и неравенства Соболева:

$$c\|v\|^2_{L_{2(m+n)/(m+n-2)}(R^{n+m})}+((m-2)^2/4)\int_{R^{n+m}}(v^2/|y|^2)dz\leqslant\int_{R^{n+m}}(\nabla v)^2\,dz.$$

Аналогичные результаты для случая $p\neq 2$, по-видимому, неизвестны.

В заключение пункта приведем обобщение неравенства (2), содержащее производные произвольного целого порядка l.

Следствие 4. *Пусть $m+n>lp$, $1\leqslant p\leqslant q\leqslant p(m+n)\times\times(m+n-lp)^{-1}$ и $\beta=\alpha-l+(m+n)(p^{-1}-q^{-1})>-mq^{-1}$. Тогда для всех $u\in\mathscr{D}(R^{n+m})$ справедливо неравенство*

$$\||y|^\beta\|_{L_q(R^{n+m})}\leqslant c\||y|^\alpha\nabla_l u\|_{L_p(R^{n+m})}. \quad (4)$$

Доказательство. Пусть $p_j=p(n+m)(n+m-p(l-j))^{-1}$. Последовательно применяя вытекающие из (2) неравенства

$$\||y|^\beta u\|_{L_q(R^{n+m})}\leqslant c\||y|^\alpha\nabla u\|_{L_{p_1}(R^{n+m})},$$

$$\||y|^\alpha\nabla_j u\|_{L_{p_j}(R^{n+m})}\leqslant c\||y|^\alpha\nabla_{j+1}u\|_{L_{p_{j+1}}(R^{n+m})},\qquad 1\leqslant j<l,$$

приходим к (4).

При $\alpha=l+nq^{-1}-(m+n)p^{-1}$ неравенство (4) и его частные случаи (1) и (2) очевидно неверны. Однако для этого критического значения α можно получить аналогичные неравенства (по-прежнему инвариантные относительно подобных преобразований пространства R^{n+m}), изменив весовую функцию в левой части. Ограничимся следующим утверждением.

Теорема *Для всех $u\in\mathscr{D}(R^n)$ справедливо неравенство*

$$\int_{R^n}|u(x)|^p\,(dx/(x_{n-1}^2+x_n^2)^{1/2})\leqslant(2p)^p\int_{R^n}|x_n|^{p-1}|\nabla u(x)|^p\,dx. \quad (5)$$

Доказательство. Положим $\rho^2=x_{n-1}^2+x_n^2$ и обозначим интегралы в левой и правой частях через I и J соответственно. Интегрируя по частям, получаем

$$I=-p\int_{R^n}x_n\rho^{-1}|u|^{p-1}\operatorname{sgn}u\,(\partial u/\partial x_n)\,dx+\int_{R^n}x_n^2\rho^{-3}|u|^p\,dx.$$

Обозначим слагаемые справа через I_1 и I_2. В силу неравенства Гельдера $|I_1| \leqslant pI^{(p-1)/p}J^{1/p}$. Для того чтобы оценить I_2, введем цилиндрические координаты $(z,\ \rho,\ \theta)$, где $z \in R^{n-2}$, $x_{n-1} + ix_n = \rho \exp(i\theta)$. Тогда

$$I_2 = -p\int_{R^{n-2}} dz \int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta \int_0^{\infty} |u|^{p-1} \operatorname{sgn} u\, (\partial u/\partial\rho)\, \rho\, d\rho \leqslant$$

$$\leqslant pI^{(p-1)/p}J^{1/p}.$$

Итак, $I \leqslant 2pI^{(p-1)/p}J^{1/p}$ и неравенство (5) доказано.

В случае $p=2$ из (5) при помощи подстановки $u(x) = |x_n|^{-1/2}v(x)$ вытекает следующее утверждение, дополняющее следствие 3.

Следствие 5. *Для всех $v \in \mathscr{D}(R^n)$, равных нулю при $x_n = 0$, имеет место неравенство*

$$\int_{R^n} \frac{v^2\,dx}{(x_{n-1}^2 + x_n^2)^{1/2}\,|x_n|} \leqslant 16\left(\int_{R^n} (\nabla v)^2\,dx - \frac{1}{4}\int_{R^n} \frac{v^2\,dx}{x_n^2}\right).$$

§ 2.2. О $(p,\ \Phi)$-ЕМКОСТИ

2.2.1. Определение и некоторые свойства $(p,\ \Phi)$-емкости. Пусть e — компакт, содержащийся в открытом множестве $\Omega \subset R^n$, и Φ — функция из п. 2.1.1. Назовем $(p,\ \Phi)$-*емкостью относительно* Ω число

$$(p,\ \Phi)\text{-cap}(e,\ \Omega) = \inf\left\{\int_\Omega [\Phi(x,\ \nabla u)]^p\,dx\colon\ u \in \mathfrak{N}(e,\ \Omega)\right\},$$

где $\mathfrak{N}(e,\ \Omega) = \{u \in \mathscr{D}(\Omega)\colon\ u \geqslant 1$ на $e\}$. Если $\Omega = R^n$, указание на Ω в обозначениях $(p,\ \Phi)\text{-cap}(e,\ \Omega)$, $\mathfrak{N}(e,\ \Omega)$ и т. п будем опускать. В случае $\Phi(x,\ \xi) = |\xi|$ будем говорить о p-емкости компакта e относительно Ω (обозначение $p\text{-cap}(e,\ \Omega)$).

Приведем несколько свойств $(p,\ \Phi)$-емкости.

(i) Для компактов $K \subset \Omega$ и $F \subset \Omega$ из включения $K \subset F$ следует неравенство $(p,\ \Phi)\text{-cap}(K,\ \Omega) \leqslant (p,\ \Phi)\text{-cap}(F,\ \Omega)$. Это — очевидное следствие определения емкости. (Из того же определения следует, что $(p,\ \Phi)$-емкость F относительно Ω не возрастает при расширении Ω.)

(ii) Справедливо равенство

$$(p,\ \Phi)\text{-cap}(e,\ \Omega) = \inf\left\{\int_\Omega [\Phi(x,\ \nabla u)]^p\,dx\colon\ u \in \mathfrak{P}(e,\ \Omega)\right\}, \quad (1)$$

где $\mathfrak{P}(e,\ \Omega) = \{u\colon\ u \in \mathscr{D}(\Omega),\ u = 1$ в окрестности e, $0 \leqslant u \leqslant 1$ в $R^n\}$.

Доказательство. Так как $\mathfrak{N}(e,\ \Omega) \supset \mathfrak{P}(e,\ \Omega)$, то достаточно оценить $(p,\ \Phi)\text{-cap}(e,\ \Omega)$ снизу. Пусть $\varepsilon \in (0,\ 1)$ и f —

функция из $\mathfrak{N}(e, \Omega)$, такая, что

$$\int_\Omega [\Phi(x, \nabla f)]^p dx \leqslant (p, \Phi)\text{-cap}(e, \Omega) + \varepsilon.$$

Обозначим через $\{\lambda_m(t)\}_{m\leqslant 1}$ последовательность функций из $C^\infty(R^1)$, удовлетворяющую условиям: $0 \leqslant \lambda'_m(t) \leqslant 1 + m^{-1}$, $\lambda_m(t) = 0$ в окрестности $(-\infty, 0]$ и $\lambda_m(t) = 1$ в окрестности $[1, +\infty)$, $0 \leqslant \leqslant \lambda_m(t) \leqslant 1$ при всех t. Так как $\lambda(f(x)) \in \mathfrak{P}(e, \Omega)$, то

$$\inf\left\{\int_\Omega [\Phi(x, \nabla u)]^p dx\colon u \in \mathfrak{P}(e, \Omega)\right\} \leqslant \int_\Omega [\lambda'(f(x))\, \Phi(x, \nabla f(x))]^p dx.$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем

$$\inf\left\{\int_\Omega [\Phi(x, \nabla u)]^p dx\colon u \in \mathfrak{P}(e, \Omega)\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \int_\Omega [\Phi(x, \nabla f)]^p dx \leqslant (p, \Phi)\text{-cap}(e, \Omega) + \varepsilon.$$

(iii) Для любого компакта $e \subset \Omega$ и числа $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность G, что для всех компактов K, $e \subset K \subset G$, верно неравенство

$$(p, \Phi)\text{-cap}(K, \Omega) \leqslant (p, \Phi)\text{-cap}(e, \Omega) + \varepsilon.$$

Доказательство. В силу (1) существует такая функция $u \in \mathfrak{P}(e, \Omega)$, что $\int_\Omega [\Phi(x, \nabla u)]^p dx \leqslant (p, \Phi)\text{-cap}(e, \Omega) + \varepsilon$. Обозначим через G окрестность e, в которой $u = 1$. Остается заметить, что для любого компакта K, $e \subset K \subset G$,

$$(p, \Phi)\text{-cap}(K, \Omega) \leqslant \int_\Omega [\Phi(x, \nabla u)]^p dx. \blacksquare$$

Аналогично доказывается следующее свойство.

(iv) Для любого компакта $e \subset \Omega$ и числа $\varepsilon > 0$ существует такое ограниченное открытое множество ω, $\bar{\omega} \subset \Omega$, что верно неравенство

$$(p, \Phi)\text{-cap}(e, \omega) \leqslant (p, \Phi)\text{-cap}(e, \Omega) + \varepsilon.$$

(v) Для любых компактов K, F в Ω верно неравенство Шоке:

$$(p, \Phi)\text{-cap}(K \cup F, \Omega) + (p, \Phi)\text{-cap}(K \cap F, \Omega) \leqslant$$
$$\leqslant (p, \Phi)\text{-cap}(K, \Omega) + (p, \Phi)\text{-cap}(F, \Omega).$$

Доказательство. Пусть u, v — любые функции из $\mathfrak{P}(K, \Omega)$ и $\mathfrak{P}(F, \Omega)$ соответственно. Положим $\varphi = \max(u, v)$, $\psi = \min(u, v)$. Очевидно, что φ и ψ имеют компактные носители и удовлетворяют условию Липшица в Ω, $\varphi = 1$ в окрестности $K \cup F$, $\psi = 1$ в окрестности $K \cap F$. Так как множество $\{x\colon u(x) \neq v(x)\}$ есть объединение открытых множеств, на которых либо $u > v$, либо $u < v$, и так как $\nabla u(x) = \nabla v(x)$ почти везде на множестве $\{x\colon u(x) =$

$=v(x)\}$, то

$$\int_\Omega [\Phi(x, \nabla\varphi)]^p\,dx + \int_\Omega [\Phi(x, \nabla\psi)]^p\,dx =$$
$$= \int_\Omega [\Phi(x, \nabla u)]^p\,dx + \int_\Omega [\Phi(x, \nabla v)]^p\,dx.$$

Отсюда, замечая, что осреднения функций φ и ψ принадлежат классам $\mathfrak{P}(K \cup F, \Omega)$ и $\mathfrak{P}(K \cap F, \Omega)$ соответственно приходим к требуемому неравенству.

Функция компактных множеств, удовлетворяющая условиям (i), (iii), (v), называется емкостью Шоке.

Пусть E — произвольное подмножество Ω. Назовем внутренней (p, Ф)-емкостью E относительно Ω число $(p, \Phi)\text{-}\underline{\mathrm{cap}}(E, \Omega) = \sup\limits_{\{K\}} (p, \Phi)\text{-cap}(K, \Omega)$, где $\{K\}$ — множество компактов, содержащихся в E. Внешней емкостью $(p, \Phi)\text{-}\overline{\mathrm{cap}}(E, \Omega)$ множества $E \subset \Omega$ называется $\inf\limits_{\{G\}} (p, \Phi)\text{-cap}(G, \Omega)$, где $\{G\}$ — все открытые подмножества Ω, содержащие E. Множество E называется (p, Ф)-измеримым, если $(p, \Phi)\text{-}\underline{\mathrm{cap}}(E, \Omega) = (p, \Phi)\text{-}\overline{\mathrm{cap}}(E, \Omega)$. Это число называется ($p$, Ф)-емкостью E.

Из этих определений следует, что любое открытое подмножество Ω является (p, Ф)-измеримым. Если e — компакт в Ω, то согласно свойству (iii) по любому числу $\varepsilon > 0$ можно найти такое открытое множество G, что $(p, \Phi)\text{-cap}(G, \Omega) \leqslant (p, \Phi)\text{-cap}(e, \Omega) + \varepsilon$. Следовательно, все компактные подмножества Ω обладают свойством (p, Ф)-измеримости.

Из общей теории емкостей Шоке следует, что аналитические (и, в частности, борелевские) множества (p, Ф)-измеримы [161].

2.2.2. Представление (p, Ф)-емкости, содержащее интеграл по поверхности уровня.

Лемма 1. *Для любого компакта F, $F \subset \Omega$, (p, Ф)-емкость при $p > 1$ может быть определена равенством*

$$(p, \Phi)\text{-cap}(F, \Omega) =$$
$$= \inf_{u \in \mathfrak{N}(F,\Omega)} \left\{ \int_0^1 \frac{d\tau}{\left(\int_{E_\tau} [\Phi(x, \nabla u)]^p (ds/|\nabla u|)\right)^{1/(p-1)}} \right\}^{1-p}, \tag{1}$$

где $E_t = \{x\colon |u(x)| = t\}$.

Введем обозначения: Λ — множество неубывающих функций $\lambda \in C^\infty(R^1)$, удовлетворяющих условиям: $\lambda(t) = 0$ при $t \leqslant 0$, $\lambda(t) = 1$ при $t \geqslant 1$, $\operatorname{supp} \lambda' \subset (0, 1)$; Λ_1 — множество абсолютно непрерывных на R^1 неубывающих функций, удовлетворяющих условиям: $\lambda(t) = 0$ при $t \leqslant 0$, $\lambda(t) = 1$ при $t \geqslant 1$, производная $\lambda'(t)$ ограничена.

В доказательстве леммы 1 используется следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть g — неотрицательная суммируемая на* $[0, 1]$ *функция. Тогда*

$$\inf_{\lambda \in \Lambda} \int_0^1 (\lambda')^p g\, dt = \left(\int_0^1 g^{1/(1-p)}\, dt\right)^{1-p}. \tag{2}$$

Доказательство. Отметим, что в силу неравенства Гельдера

$$1 = \int_0^1 \lambda'\, dt \leqslant \left(\int_0^1 (\lambda')^p g\, dt\right)^{1/p} \left(\int_0^1 g^{1/(1-p)}\, dt\right)^{1-1/p}$$

и, значит, левая часть (2) не меньше правой.

Пусть $\lambda \in \Lambda_1$, $\zeta_\nu(t) = \lambda'(t)$ при $t \in [\nu^{-1}, 1-\nu^{-1}]$, $\operatorname{supp} \zeta_\nu \subset \subset [\nu^{-1}, 1-\nu^{-1}]$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$. Положим $\eta_\nu(t) = \zeta_\nu(t)\left(\int_0^1 \zeta_\nu\, d\tau\right)^{-1}$.

Так как последовательность η_ν сходится к λ' на $(0, 1)$ и ограничена, то по теореме Лебега $\int_0^1 \eta_\nu^p g\, dt \to \int_0^1 (\lambda')^p g\, d\tau$.

Усредняя η_ν, получаем последовательность $\{\gamma_\nu\}$, $\gamma_\nu \in C^\infty(R^1)$, $\operatorname{supp} \gamma_\nu \subset (0, 1)$, $\int_0^1 \gamma_\nu\, d\tau = 1$, $\int_0^1 \gamma_\nu^p g\, dt \to \int_0^1 (\lambda')^p g\, d\tau$. Полагая $\lambda_\nu(t) = \int_0^t \gamma_\nu\, d\tau$, получаем последовательность функций из Λ, такую, что $\int_0^1 (\lambda_\nu')^p g\, d\tau \to \int_0^1 (\lambda')^p g\, d\tau$. Значит,

$$\inf_{\Lambda} \int_0^1 (\lambda')^p g\, d\tau = \inf_{\Lambda_1} \int_0^1 (\lambda')^p g\, d\tau. \tag{3}$$

Пусть $M_\varepsilon = \{t\colon\ g(t) \geqslant \varepsilon\}$, $\lambda_0(t) = \int_0^t \eta\, d\tau$, где $\eta(t) = 0$ на $R^1 \setminus M_\varepsilon$ и $\eta(t) = g(t)^{1/(1-p)} \left(\int_{M_\varepsilon} g^{1/(1-p)}\, d\tau\right)^{-1}$ при $t \in M_\varepsilon$. Очевидно, что $\lambda_0 \in \Lambda_1$ и $\int_0^1 (\lambda_0')^p g\, d\tau = \left(\int_{M_\varepsilon} g^{1/(1-p)}\, d\tau\right)^{1-p}$. В силу (3) левая часть (2) не превосходит $\left(\int_{M_\varepsilon} g^{1/(1-p)}\, d\tau\right)^{1-p}$. Остается перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство леммы 1. Пусть $u \in \mathfrak{N}(F, \Omega)$ и $\lambda \in \Lambda$. Из определения емкости и теоремы 1.2.4 получаем

$$(p, \Phi)\text{-}\mathrm{cap}(F, \Omega) \leqslant \int_\Omega [\lambda'(u)\Phi(x, \nabla u)]^p\, dx = \int_0^1 (\lambda')^p g\, dt,$$

где

$$g(t) = \int_{E_t} [\Phi(x, \nabla u)]^p (ds/|\nabla u|). \tag{4}$$

В силу леммы 2

$$(p, \Phi)\text{-}\mathrm{cap}(F, \Omega) \leqslant \left(\int_0^1 g^{1/(1-p)}\, d\tau\right)^{1-p}.$$

Для доказательства противоположного неравенства достаточно заметить, что

$$\int_\Omega [\Phi(x, \nabla u)]^p\, dx \geqslant \int_0^1 g\, d\tau \geqslant \left(\int_0^1 g^{1/(1-p)}\, d\tau\right)^{1-p}.$$

Используя свойство (2.2.1/1) (p, Φ)-емкости, замечаем, что попутно здесь доказана также следующая лемма.

Лемма 3. *Для любого компакта $F \subset \Omega$ (p, Φ)-емкость $(p>1)$ может быть определена равенством*

$$(p, \Phi)\text{-cap}(F, \Omega) = \\ = \inf_{u \in \mathfrak{P}(F, \Omega)} \left\{ \int_0^1 \frac{d\tau}{\left(\int_{E_\tau} [\Phi(x, \nabla u)]^p (ds/|\nabla u|)\right)^{1/(p-1)}} \right\}^{1-p}.$$

2.2.3. Нижние оценки (p, Φ)-емкости.

Лемма. *Для любой функции $u \in \mathscr{D}(\Omega)$ при* п. в. $t \geq 0$ *выполнено неравенство*

$$[\sigma(\partial L_t)]^{p/(p-1)} \leq [-(d/dt)\, m_n(L_t)] \left(\int_{\partial L_t} [\Phi(x, \nabla u)]^p (ds/|\nabla u|)\right)^{1/(p-1)}, \quad (1)$$

где, как обычно, $L_t = \{x \in \Omega: |u(x)| > t\}$.

Доказательство. В силу неравенства Гельдера при п. в. t и T, $t<T$,

$$\left(\int_{L_t \setminus L_T} |u|^{p-1} \Phi(x, \nabla u)\, dx\right)^{p/(p-1)} \leq \\ \leq \int_{L_t \setminus L_T} |u|^p dx \left(\int_{L_t \setminus L_T} [\Phi(x, \nabla u)]^p dx\right)^{1/(p-1)}.$$

Воспользуемся теоремой 1.2.4:

$$\left(\int_t^T \tau^{p-1} \sigma(\partial L_\tau)\, d\tau\right)^{p/(p-1)} \leq \\ \leq \int_{L_t \setminus L_T} |u|^p dx \left(\int_t^T d\tau \int_{E_\tau} [\Phi(x, \nabla u)]^p (ds/|\nabla u|)\right)^{1/(p-1)}.$$

Разделим обе части последнего неравенства на $(T-t)^{p/(p-1)}$ и оценим первый сомножитель в правой части:

$$\left((1/(T-t)) \int_t^T \tau^{p-1} \sigma(\partial L_\tau)\, d\tau\right)^{p/(p-1)} \leq \\ \leq T^p \frac{m_n(L_t \setminus L_T)}{T-t} \left((1/(T-t)) \int_t^T d\tau \int_{\partial L_\tau} [\Phi(x, \nabla u)]^p (ds/|\nabla u|)\right)^{1/(p-1)}.$$

Переходя к пределу при $T \to t$, получаем при п. в. $t>0$ неравенство (1).

Из леммы 2.2.2/3 и леммы этого пункта непосредственно вытекает следующий результат.

Следствие 1. *Справедливо неравенство*

$$(p, \Phi)\text{-cap}(F, \Omega) \geq \\ \geq \inf_{u \in \mathfrak{P}(F, \Omega)} \left\{ -\int_0^1 \frac{d}{d\tau} m_n(L_\tau) \frac{d\tau}{[\sigma(\partial L_\tau)]^{p/(p-1)}} \right\}^{1-p}. \quad (2)$$

Обозначим через $C(\rho)$ величину $\inf \sigma(\partial g)$ для всех допустимых множеств g, таких, что $m_n(g) \geq \rho$. Тогда из (2) получаем следующее утверждение.

Следствие 2. *Справедливо неравенство*

$$(p, \Phi)\text{-cap}(F, \Omega) \geqslant \left(\int_0^{m_n(\Omega)} (d\rho/[C(\rho)]^{p/(p-1)})\right)^{1-p}. \tag{3}$$

В силу классического изопериметрического неравенства

$$s(\partial g) \geqslant n^{(n-1)/n}\omega_n^{1/n}[m_n(g)]^{(n-1)/n} \tag{4}$$

в случае $\Phi(x, \xi) = |\xi|$ находим, что $C(\rho) = n^{(n-1)/n}\omega_n^{1/n}\rho^{(n-1)/n}$. Поэтому

$$p\text{-cap}(F, \Omega) \geqslant \omega_n^{p/n} n^{(n-p)/n} |(p-n)/(p-1)|^{p-1} \times \\ \times |m_n(\Omega)^{(p-n)/n(p-1)} - m_n(F)^{(p-n)/n(p-1)}|^{1-p} \tag{5}$$

при $p \neq n$ и

$$p\text{-cap}(F, \Omega) \geqslant n^{n-1}\omega_n(\log(m_n(\Omega)/m_n(F)))^{1-n} \tag{6}$$

при $p = n$. В частности, при $n > p$

$$p\text{-cap}(F) \geqslant \omega_n^{p/n} n^{(n-p)/n}((n-p)/(p-1))^{p-1}[m_n(F)]^{(n-p)/n}. \tag{7}$$

2.2.4. О p-емкости шара. Покажем, что если Ω и F — концентрические шары (с радиусами R и r, $R > r$), оценки (2.2.3/5), (2.2.3/6) превращаются в равенства, т. е. что в этом случае

$$p\text{-cap}(F, \Omega) =$$
$$= \begin{cases} \omega_n(|n-p|/(p-1))^{p-1}|R^{(p-n)/(p-1)} - r^{(p-n)/(p-1)}|^{1-p}, \text{ если } p \neq n, & (1) \\ \omega_n(\log(R/r))^{1-n}, \text{ если } p = n. & (2) \end{cases}$$

Пусть центр шаров Ω и F совпадает с началом сферических координат (ρ, ω), $|\omega| = 1$. Очевидно, что

$$p\text{-cap}(F, \Omega) \geqslant \inf_{u \in \mathfrak{N}(F, \Omega)} \int_{\partial B_1} d\omega \int_r^R |\partial u/\partial\rho|^p \rho^{n-1} d\rho \geqslant$$
$$\geqslant \int_{\partial B_1} d\omega \inf_{u \in \mathfrak{N}(F, \Omega)} \int_r^R |\partial u/\partial\rho|^p \rho^{n-1} d\rho.$$

Точная нижняя грань внутреннего интеграла достигается на функции

$$[r, R] \ni \rho \to v(\rho) = \begin{cases} \dfrac{R^{(p-n)/(p-1)} - \rho^{(p-n)/(p-1)}}{R^{(p-n)/(p-1)} - r^{(p-n)/(p-1)}} & \text{при } p \neq n, \\ \dfrac{\log(\rho R^{-1})}{\log(rR^{-1})} & \text{при } p = n, \end{cases}$$

что приводит к требуемым оценкам p-емкости снизу. Подстановка $v(\rho)$ в интеграл $\int_\Omega |\nabla u|^p dx$ приводит к (1), (2).

В частности, p-емкость n-мерного шара B_r относительно R^n равна $\omega_n((n-p)/(p-1))^{p-1}r^{n-p}$ при $n > p$ и нулю при $n \leqslant p$. Так как

p-емкость — монотонная функция множества, то при $n \leqslant p$ для любого компакта $p\text{-cap}(F, R^n)=0$. В случае $p \leqslant n$ емкость точки относительно любого содержащего ее открытого множества Ω равна нулю. Если $p>n$, то p-емкость центра шара B_R относительно R^n равна $\omega_n((p-n)/(p-1))^{p-1} R^{n-p}$. Значит, в этом случае p-емкость любого компакта относительно содержащего ее ограниченного множества положительна.

2.2.5. **О (p, Φ)-емкости в случае $p=1$.**

Лемма. *Для любого компакта $F \subset \Omega$ имеет место равенство* $(1, \Phi)\text{-cap}(F, \Omega)=\inf \sigma(\partial g)$, *где инфимум берется по совокупности всех допустимых множеств g, содержащих F.*

Доказательство. Пусть $u \in \mathfrak{N}(F, \Omega)$. Применяя теорему 1.2.4, получаем

$$\int_\Omega \Phi(x, \nabla u)\, dx \geqslant \int_0^1 \sigma(\partial L_t)\, dt \geqslant \inf_{g \supset F} \sigma(\partial g).$$

Отсюда следует оценка емкости снизу.

Пусть g — допустимое множество, содержащее F. Функция $u_\varepsilon(x)=\alpha(d(x))$, определенная в доказательстве второй части теоремы 2.1.1 при достаточно малых $\varepsilon>0$, принадлежит классу $\mathfrak{N}(F, \Omega)$. Поэтому $(1, \Phi)\text{-cap}(F, \Omega) \leqslant \int_\Omega \Phi(x, \nabla u_\varepsilon)\, dx$. Последний интеграл, как было показано в доказательстве второй части теоремы 2.1.1, стремится к $\sigma(\partial g)$, что дает требуемую оценку емкости сверху. ■

§ 2.3. УСЛОВИЯ СПРАВЕДЛИВОСТИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ (СЛУЧАЙ $p \geqslant 1$)

2.3.1. **Оценка интеграла, содержащего (p, Φ)-емкость множества N_t.** Пусть $u \in \mathscr{D}(\Omega)$ и g — функция, определенная равенством (2.2.2/4), где $p>1$. Пусть еще

$$T \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{t>0:\ (p, \Phi)\text{-cap}(N_t, \Omega)>0\}>0, \tag{1}$$

где $N_t=\{x \in \Omega:\ |u(x)| \geqslant t\}$. Из (1) следует, что при $0<t<T$

$$\psi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t (d\tau/[g(\tau)]^{1/(p-1)})<\infty. \tag{2}$$

Действительно, пусть $v(x)=t^{-2}[u(x)]^2$. Так как $v \in \mathfrak{N}(N_t, \Omega)$, то из леммы 2.2.2/1 и из (1) получаем

$$\int_0^1 \left(\int_{\{x:\, v(x)=\tau\}} [\Phi(x, \nabla v)]^p \frac{ds}{|\nabla v|}\right)^{1/(1-p)} d\tau \leqslant$$
$$\leqslant [(p, \Phi)\text{-cap}(N_t, \Omega)]^{1/(1-p)}<\infty,$$

и остается заметить, что

$$\int_0^t \frac{d\tau}{[g(\tau)]^{1/(p-1)}}=\int_0^1 \left(\int_{\{x:\, v(x)=\tau\}} [\Phi(x, \nabla v)]^p \frac{ds}{|\nabla v|}\right)^{1/(1-p)} d\tau. \ ■$$

Так как по теореме 1.2.4 $\int_0^\infty g(\tau)\,d\tau = \int_\Omega [\Phi(x, \nabla u)]^p\,dx < \infty$, то $g(t) < \infty$ при п. в. $t > 0$ и функция $\psi(t)$ строго монотонна. Следовательно, на промежутке $[0, \psi(T))$ существует обратная к $\psi(t)$ функция $t(\psi)$.

Лемма. *Пусть u — функция из $\mathcal{D}(\Omega)$, удовлетворяющая условию* (1). *Тогда функция $t(\psi)$ абсолютно непрерывна на любом отрезке $[0, \psi(T-\delta)]$, где $\delta \in (0, T)$, и справедливо неравенство*

$$\int_\Omega [\Phi(x, \nabla u)]^p\,dx \geqslant \int_0^{\psi(T)} [t'(\psi)]^p\,d\psi. \tag{3}$$

Если $T = \max|u|$, то в (3) *можно поставить знак равенства.*

Доказательство. Пусть $0 = \psi_0 < \psi_1 < \ldots < \psi_m = \psi(T-\delta)$ — произвольное разбиение отрезка $[0, \psi(T-\delta)]$. В силу неравенства Гельдера

$$\frac{[t(\psi_{k+1}) - t(\psi_k)]^p}{(\psi_{k+1} - \psi_k)^{p-1}} = \frac{[t(\psi_{k+1}) - t(\psi_k)]^p}{\left[\int_{t(\psi_k)}^{t(\psi_{k+1})} [g(\tau)]^{1/(1-p)}\,d\tau\right]^{p-1}} \int_{t(\psi_k)}^{t(\psi_{k+1})} g(\tau)\,d\tau$$

и, следовательно,

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{[t(\psi_{k+1}) - t(\psi_k)]^p}{(\psi_{k+1} - \psi_k)^{p-1}} \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} \int_{t(\psi_k)}^{t(\psi_{k+1})} g(\tau)\,d\tau =$$
$$= \int_0^{T-\delta} g(\tau)\,d\tau \leqslant \int_\Omega [\Phi(x, \nabla u)]^p\,dx \tag{4}$$

Последнее неравенство следует из теоремы 1.2.4. В силу (4) и теоремы Ф. Рисса (см. [100]) функция $t(\psi)$ абсолютно непрерывна и ее производная принадлежит $L_p(0, \psi(T-\delta))$. По теореме 1.2.4

$$\int_\Omega [\Phi(x, \nabla u)]^p\,dx \geqslant \lim_{\delta \to +0} \int_0^{T-\delta} g(\tau)\,d\tau. \tag{5}$$

Так как $t(\psi)$ — монотонная абсолютно непрерывная функция, то в последнем интеграле можно сделать замену переменной $\tau = t(\psi)$. Тогда

$$\int_0^{T-\delta} g(\tau)\,d\tau = \int_0^{\psi(T-\delta)} t'(\psi)\,g(\psi)\,d\psi = \int_0^{\psi(T-\delta)} [t'(\psi)]^p\,d\psi,$$

что в сочетании с (5) дает неравенство (3).

Если $T = \max|u|$, то в (5), а следовательно и в (3), можно поставить знак равенства. ■

Теорема. *Пусть u — произвольная функция из $\mathcal{D}(\Omega)$. Тогда при $p \geqslant 1$*

$$\int_0^\infty (p, \Phi)\text{-cap}(N_t, \Omega)\,d(t^p) \leqslant (p^p/(p-1)^{p-1}) \int_\Omega [\Phi(x, \nabla u)]^p\,dx. \tag{6}$$

(*При $p = 1$ коэффициент перед интегралом в правой части* (6) *равен единице.*)

Доказательство. Достаточно доказать (6) в предположении, что число T, определенное в (1), положительно.

Так как по лемме 2.2.5 $(1, \Phi)\text{-cap}(N_t, \Omega) \leqslant \sigma(\partial L_t)$ при п. в. $t > 0$, то при $p=1$ оценка (6) следует из (2.1.1/3).

Рассмотрим случай $p>1$. Пусть $\psi(t)$ — функция, определенная равенством (2), и $t(\psi)$ — обратная к $\psi(t)$. Сделаем замену переменной:

$$\int_0^\infty (p, \Phi)\text{-cap}(N_t, \Omega)\, d(t^p) = \int_0^T (p, \Phi)\text{-cap}(N_t, \Omega)\, d(t^p) =$$
$$= \int_0^{\psi(T)} (p, \Phi)\text{-cap}(N_{t(\psi)}, \Omega)\, d(t(\psi)^p).$$

Полагая в (2) $v = t^{-2}u^2$, $\xi = t^{-2}\tau^2$, получаем

$$\psi(t) = \int_0^1 \Big(\int_{\{x: v(x)=\xi\}} [\Phi(x, \nabla v)]^p (ds/|\nabla v|)\Big)^{1/(1-p)} d\xi. \tag{7}$$

Так как $v \in \mathfrak{N}(N_t, \Omega)$, то по лемме 2.2.2/1 правая часть (7) не превосходит $[(p, \Phi)\text{-cap}(N_{t(\psi)}, \Omega)]^{1/(1-p)}$. Следовательно,

$$\int_0^\infty (p, \Phi)\text{-cap}(N_t, \Omega)\, d(t^p) \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^{\psi(T)} \frac{d[t(\psi)]^p}{\psi^{p-1}} = p\int_0^{\psi(T)} [t(\psi)/\psi]^{p-1} t'(\psi)\, d\psi.$$

Применяя неравенство Гельдера и неравенство Харди

$$\int_0^{\psi(T)} ([t(\psi)]^p/\psi^p)\, d\psi \leqslant (p/(p-1))^p \int_0^{\psi(T)} [t'(\psi)]^p\, d\psi, \tag{8}$$

получаем

$$\int_0^\infty (p, \Phi)\text{-cap}(N_t, \Omega)\, d(t^p) \leqslant (p^p/(p-1)^{p-1}) \int_0^{\psi(T)} [t'(\psi)]^p\, d\psi,$$

что вместе с леммой 2.3.1 приводит к (6).

Замечание. Неравенство

$$\int_0^\infty (p, \Phi)\text{-cap}(N_t, \Omega)\, d(t^p) \leqslant C\int_\Omega [\Phi(x, \nabla u)]^p\, dx \tag{9}$$

с более грубой константой, чем в (6), можно доказать значительно проще следующим образом. В силу монотонности емкости интеграл в левой части не превосходит $\Xi \overset{\text{def}}{=} (2^p-1)\sum_{j=-\infty}^{+\infty} 2^{pj}(p, \Phi)\text{-cap}(N_{2^j}, \Omega)$.

Пусть $\lambda_\varepsilon \in C^\infty(R^1)$, $\lambda_\varepsilon(t)=1$ при $t \geqslant 1$, $\lambda_\varepsilon(t)=0$ при $t \leqslant 0$, $0 \leqslant \lambda'_\varepsilon(t) \leqslant 1+\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ и пусть $u_j(x) = \lambda_\varepsilon(2^{1-j}|u(x)|-1)$. Так как $u_j \in \mathfrak{N}(N_{2^j}, \Omega)$, то

$$\Xi \leqslant 2^{p-1}\sum_{j=-\infty}^{+\infty} 2^{pj}\int_{N_{2^{j-1}}\setminus N_{2^j}} [\Phi(x, \nabla u_j)]^p\, dx =$$
$$= 2^{2p-1}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\int_{N_{2^{j-1}}\setminus N_{2^j}} [\lambda'_\varepsilon(2^{1-j}|u|-1)]^p [\Phi(x, \nabla u)]^p\, dx \leqslant$$
$$\leqslant (1+\varepsilon)^p 2^{2p-1}\int_\Omega [\Phi(x, \nabla u)]^p\, dx.$$

Устремляя ε к нулю, получаем (9) с постоянной $C = 2^{2p-1}$. ■

2.3.2. Оценка нормы в пространстве Орлича. Напомним определение пространства Орлича (см. [43]).

Пусть функция M на оси $-\infty < u < +\infty$ допускает представление $M(u) = \int_0^{|u|} \varphi(t)\, dt$, где $\varphi(t)$ — положительная при $t > 0$, непрерывная справа при $t \geq 0$, неубывающая функция, удовлетворяющая условиям $\varphi(0) = 0$, $\varphi(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. Пусть еще $\psi(s) = \sup\{t\colon \varphi(t) \leq s\}$ — правая обратная к $\varphi(t)$ функция. Функция $P(u) = \int_0^{|u|} \psi(s)\, ds$ называется дополнительной к $M(u)$.

Через $\mathscr{L}_M(\Omega, \mu)$ обозначим пространство μ-измеримых функций, для которых

$$\|u\|_{\mathscr{L}_M(\Omega,\, \mu)} = \sup\left\{\left|\int_\Omega uv\, d\mu\right| \colon \int_\Omega P(v)\, d\mu \leq 1\right\} < \infty.$$

В частности, если $M(u) = q^{-1}|u|^q$, $q > 1$, то $P(u) = (q')^{-1}|u|^{q'}$, $q' = q(q-1)^{-1}$ и

$$\|u\|_{\mathscr{L}_M(\Omega,\, \mu)} = (q')^{1/q'} \|u\|_{L_q(\Omega,\, \mu)}. \ \blacksquare$$

Норма в $\mathscr{L}_M(\Omega, \mu)$ характеристической функции χ_E множества E вычисляется по формуле $\|\chi_E\|_{\mathscr{L}_M(\Omega,\, \mu)} = \mu(E) P^{-1}(1/\mu(E))$, где P^{-1} — обратная функция к сужению P на $[0, +\infty)$.

Действительно, если $v = P^{-1}(1/\mu(E))\chi_E$, то $\int_\Omega P(v)\, d\mu = 1$ и из определения нормы в $\mathscr{L}_M(\Omega, \mu)$ следует

$$\|\chi_E\|_{\mathscr{L}_M(\Omega,\, \mu)} \geq \int_\Omega \chi_E v\, d\mu = \mu(E) P^{-1}(1/\mu(E)).$$

Вместе с тем по неравенству Йенсена

$$\int_\Omega \chi_E v\, d\mu \leq \mu(E) P^{-1}\left((1/\mu(E)) \int_E P(v)\, d\mu\right).$$

Если предположить, что $\int_\Omega P(v)\, d\mu \leq 1$, то из определения нормы в $\mathscr{L}_M(\Omega, \mu)$ получим оценку $\|\chi_E\|_{\mathscr{L}_M(\Omega,\, \mu)} \leq \mu(E) P^{-1}(1/\mu(E))$.

Хотя формально функция $M(t) = |t|$ не укладывается в вышеприведенное определение пространства Орлича, все последующие относящиеся к $\mathscr{L}_M(\Omega, \mu)$ результаты включают и этот случай, если положить $P^{-1}(t) = 1$. При этом $\mathscr{L}_M(\Omega, \mu) = L_1(\Omega, \mu)$.

Теорема. 1) *Если существует такая постоянная* β, *что для любого компакта* $F \subset \Omega$

$$\mu(F) P^{-1}(1/\mu(F)) \leq \beta\ (p, \Phi)\text{-cap}(F, \Omega), \tag{1}$$

где $p \geq 1$, *то для всех функций* $u \in \mathscr{D}(\Omega)$ *справедливо неравенство*

$$\||u|^p\|_{\mathscr{L}_M(\Omega,\, \mu)} \leq C \int_\Omega [\Phi(x, \nabla u)]^p\, dx, \text{ где } C \leq p^p (p-1)^{1-p} \beta. \tag{2}$$

2) *Если для любой функции* $u \in \mathscr{D}(\Omega)$ *справедливо неравенство* (2), *то для всех компактов* $F \subset \Omega$ *верно неравенство* (1), *где* $\beta \leq C$.

Доказательство. 1) Из теоремы 1.2.3 и определения нормы в $\mathscr{L}_M(\Omega, \mu)$ получаем

$$\| |u|^p \|_{\mathscr{L}_M(\Omega, \mu)} = \sup \left\{ \int_0^\infty \int_{N_\tau} v \, d\mu d(\tau^p): \int_\Omega P(v) \, d\mu \leqslant 1 \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty \sup \left\{ \int_\Omega \chi_{N_\tau} v \, d\mu: \int_\Omega P(v) \, d\mu \leqslant 1 \right\} d(\tau^p) = \int_0^\infty \| \chi_{N_\tau} \|_{\mathscr{L}_M(\Omega, \mu)} d(\tau^p).$$

Следовательно,

$$\| |u|^p \|_{\mathscr{L}_M(\Omega, \mu)} \leqslant \int_0^\infty \mu(N_\tau) P^{-1}((1/\mu)(N_\tau)) \, d(\tau^p).$$

Используя (1) и теорему 2.3.1, отсюда получаем

$$\| |u|^p \|_{\mathscr{L}_M(\Omega, \mu)} \leqslant \beta \int_0^\infty (p, \Phi)\text{-cap}(N_\tau, \Omega) \, d(\tau^p) \leqslant$$

$$\leqslant p^p \beta/(p-1)^{p-1} \int_\Omega [\Phi(x, \nabla u)]^p \, dx.$$

2) Пусть u — любая функция из $\mathfrak{N}(F, \Omega)$. В силу (2)

$$\| \chi_F \|_{\mathscr{L}_M(\Omega, \mu)} \leqslant C \int_\Omega [\Phi(x, \nabla u)]^p \, dx.$$

Минимизируя правую часть по множеству $\mathfrak{N}(F, \Omega)$, получаем неравенство (1). ■

Замечание. Пусть $\Phi(x, y)$ — функция, удовлетворяющая сформулированным в 2.1.1 условиям, и пусть функция $\Psi(x, u, y)$: $\Omega \times R^1 \times R^n \to R^1$ такова, что $\Psi(x, u, y) \geqslant [\Phi(x, y)]^p$ и для всех $u \in \mathscr{D}(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\varliminf_{\lambda \to +\infty} \lambda^{-p} \int_\Omega \Psi(x, \lambda u, \lambda \nabla u) \, dx \leqslant K \int_\Omega [\Phi(x, \nabla u)]^p \, dx.$$

Тогда в теореме оценку (2) можно заменить следующим более общим неравенством:

$$\| |u|^p \|_{\mathscr{L}_M(\Omega, \mu)} \leqslant C \int_\Omega \Psi(x, u, \nabla u) \, dx. \tag{3}$$

(Доказывая необходимость неравенства (1) для (3), следует в (3) положить $u = \lambda v$, где $v \in \mathfrak{N}(F, \Omega)$, а затем устремить λ к бесконечности.)

Аналогичное замечание можно сделать о теоремах 2.1.1 и 2.1.2.

2.3.3. Неравенства типа Соболева как следствия теоремы 2.3.2. В теореме 2.3.2 содержится представляющее самостоятельный интерес следующее утверждение.

Следствие. 1) *Если существует такая постоянная* β, *что для любого компакта* $F \subset \Omega$

$$\mu(F)^{\alpha p} \leqslant \beta (p, \Phi)\text{-cap}(F, \Omega), \tag{1}$$

где $p \geq 1$, $\alpha > 0$, $\alpha p \leq 1$, *то для всех функций* $u \in \mathscr{D}(\Omega)$ *верно неравенство*

$$\|u\|^p_{L_q(\Omega,\,\mu)} \leq C \int_\Omega [\Phi(x, \nabla u)]^p\, dx, \tag{2}$$

где $q = \alpha^{-1}$ *и* $C \leq p^p (p-1)^{1-p} \beta$.

2) *Если для любой функции* $u \in \mathscr{D}(\Omega)$ *справедливо неравенство* (2) *и постоянная* C *не зависит от* u, *то для всех компактов* $F \subset \Omega$ *верно неравенство* (1), *где* $\alpha = q^{-1}$ *и* $\beta \leq C$.

Пример. 1. Из следствия и изопериметрического неравенства (2.2.3/7) получаем, что при $n > p \geq 1$ для всех $u \in \mathscr{D}(R^n)$ имеет место неравенство Соболева ($p > 1$) — Гальярдо ($p = 1$):

$$\|u\|_{L_{pn/(n-p)}} \leq C \|\nabla u\|_{L_p} \tag{3}$$

с константой $C = p(n-p)^{(1-p)/p} \omega_n^{-1/n} n^{(p-n)/pn}$.

Замечание. Указанное здесь значение постоянной C в неравенстве (3) точно только в случае $p = 1$ (см. теорему 1.4.2/1). Для того чтобы получить неулучшаемую постоянную, можно поступить следующим образом. По лемме 2.3.1 $\int_0^{\psi(\max|u|)} [t'(\psi)]^p d\psi = \int_{R^n} |\nabla u|^p dx$. Если положить здесь $\psi = (p-1)\,\omega_n^{1/(p-1)} (n-p)^{-1} \times r^{(n-p)/(1-p)}$, $t(\psi) = \gamma(r)$ и считать, что $t(\psi) = \mathrm{const}$ при $\psi \geq \psi(\max|u|)$, то получим

$$\omega_n \int_0^\infty |\gamma'(r)|^p r^{n-1} dr = \int_{R^n} |\nabla u|^p dx.$$

Вместе с тем по теореме 1.2.3

$$\int_{R^n} |u|^{pn/(n-p)} dx = \int_0^{\max|u|} m_n(N_t)\, d(t^{pn/(n-p)}).$$

Из определения функции ψ, леммы 2.2.3 и изопериметрического неравенства (2.2.3/4) вытекает оценка

$$\psi(t) \leq \omega_n^{1/(1-p)} (p-1)/(n-p) \left[(n/\omega_n)\, m_n(N_t)\right]^{(n-p)/n(1-p)}.$$

Следовательно, $m_n(N_{t(\psi)}) \leq \omega_n n^{-1} r^n$ и $\int_{R^n} |u|^{pn/(n-p)} dx \leq (\omega_n/n) \int_0^\infty r^n d[\gamma(r)]^{pn/(n-p)}$. В силу того что $\int_0^\infty |\gamma'(r)|^p r^{n-1} dr < \infty$, имеем $\gamma(r) r^{(n-p)/p} \to 0$ при $r \to \infty$. Поэтому, интегрируя по частям, получаем

$$\int_{R^n} |u|^{pn/(n-p)} dx \leq \omega_n \int_0^\infty [\gamma(r)]^{pn/(n-p)} r^{n-1} dr.$$

Итак,

$$\sup_{u \in \mathscr{D}} \frac{\|u\|_{L_{pn/(n-p)}}}{\|\nabla u\|_{L_p}} = \omega_n^{-1/n} \sup_{\{\gamma\}} \frac{\left(\int_0^\infty [\gamma(r)]^{pn/(n-p)} r^{n-1} dr\right)^{(n-p)/pn}}{\left(\int_0^\infty |\gamma'(r)|^p r^{n-1} dr\right)^{1/p}},$$

где $\{\gamma\}$ — множество всех невозрастающих неотрицательных функций на полуоси $[0, \infty)$, таких, что $\gamma(r) r^{(n-p)/p} \to 0$ при $r \to \infty$. Итак, вопрос о точной константе в неравенстве (3) сведен к одномерной вариационной задаче. Последняя допускает явное решение классическими методами вариационного исчисления *. Точная верхняя грань достигается на любой функции вида

$$\gamma(r) = (a + br^{p/(p-1)})^{1-n/p}, \qquad a,\ b = \mathrm{const} > 0,$$

и равна

$$n^{-1/p}((p-1)/(n-p))^{(p-1)/p}[\mathrm{B}(n/p,\ n(p-1)/p)(p-1)/p]^{-1/n},$$

где B — бета-функция. Окончательно точная константа в неравенстве (3) равна

$$\pi^{-1/2} n^{-1/p} \left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{(p-1)/p} \left\{\frac{\Gamma(1+n/2)\,\Gamma(n)}{\Gamma(n/p)\,\Gamma(1+n-n/p)}\right\}^{1/n},$$

и знак равенства достигается, если $u(x) = [a + b\,|x|^{p/(p-1)}]^{1-n/p}$, где a и b — положительные константы. (Хотя функция u и не принадлежит $\mathscr{D}$, ее можно аппроксимировать функциями из $\mathscr{D}$ в норме $\|\nabla u\|_{L_p}$.) ■

Лемма. *Для 2-емкости $(n-1)$-мерного шара $B_\rho^{(n-1)}$ в R^n при $n > 2$ справедливо равенство*

$$2\text{-cap}(B_\rho^{(n-1)},\ R^n) = (\omega_n/c_n)\,\rho^{n-2}, \tag{4}$$

где $c_3 = \pi/2$, $c_4 = 1$, $c_n = (n-4)!!/(n-3)!!$ при нечетном $n \geq 5$, $c_n = (\pi/2)(n-4)!!/(n-3)!!$ при четном $n \geq 6$.

Доказательство. Введем в R^n эллипсоидальные координаты $x_1 = \rho\,\mathrm{sh}\,\psi\cos\theta_1$, $x_j = \rho\,\mathrm{ch}\,\psi\sin\theta_1\ldots\sin\theta_{j-1}\cos\theta_j$ $(j = 2, \ldots, n-1)$, $x_n = \rho\,\mathrm{ch}\,\psi\sin\theta_1\ldots\sin\theta_{n-1}$. Стандартные вычисления приводят к формулам $dx = \rho^n(\mathrm{ch}^2\psi - \sin^2\theta)(\mathrm{ch}\,\psi)^{n-2}\,d\psi\,d\omega$ и

$$(\nabla u)^2 = \rho^{-2}(\partial u/\partial\psi)^2/(\mathrm{ch}^2\psi - \sin^2\theta_1) + \ldots,$$

где $d\omega$ — элемент поверхности единичного шара в R^n, а многоточием обозначена положительная квадратичная форма производных функции u, не содержащая $\partial u/\partial\psi$. Уравнение шара $B_\rho^{(n-1)}$ в новых координатах имеет вид $\psi = 0$. Следовательно,

$$2\text{-cap}(B_\rho^{(n-1)},\ R^n) \geq \rho^{n-2}\int_{|\omega|=1}\left(\inf_{\{u\}}\int_0^\infty (\partial u/\partial\psi)^2(\mathrm{ch}\,\psi)^{n-2}\,d\psi\right)d\omega,$$

где $\{u\}$ — множество гладких функций на $[0, \infty)$ с компактными носителями. Точная нижняя грань в правой части равна

* Эта задача была решена еще в 1930 г. (Bliss G. A. An integral inequality. — J. Lond. Math. Soc. 1930, vol. 5, p. 40—46).

$\left(\int_0^\infty d\psi/(\operatorname{ch}\psi)^{n-2}\right)^{-1}=c_n^{-1}$ и принимается на функции $v=\int_\psi^\infty d\tau/(\operatorname{ch}\tau)^{n-2}\times$ $\times\left(\int_0^\infty d\tau/(\operatorname{ch}\tau)^{n-2}\right)^{-1}$. Последняя равна единице на $B_\rho^{(n-1)}$ и достаточно быстро убывает на бесконечности. Если ее подставить в интеграл Дирихле, получится оценка

$$2\text{-cap}\,(B_\rho^{(n-1)},\ R^n)\leqslant \omega_n\rho^{n-2}\int_0^\infty\left(\frac{\partial v}{\partial\psi}\right)^2(\operatorname{ch}\psi)^{n-2}\,d\psi=\left(\frac{\omega_n}{c_n}\right)\rho^{n-2}. \ \blacksquare$$

Напомним теперь определение симметризации компакта K в R^n относительно $(n-s)$-мерного подпространства R^{n-s}.

Обозначим произвольную точку $x\in R^n$ через (y, z), где $y\in R^{n-s}$ и $z\in R^s$. Образ K^* компакта K при симметризации относительно подпространства $z=0$ определяется условиями: 1) множество K^* симметрично относительно подпространства $z=0$; 2) всякое s-мерное подпространство, параллельное подпространству $y=0$ и пересекающее одно из множеств K или K^*, пересекает также и другое, и лебеговы меры сечений этих множеств равны; 3) пересечение любого s-мерного подпространства, параллельного подпространству $y=0$, с K^* является s-мерным шаром с центром на гиперплоскости $z=0$.

Пример 2. Будем следовать книге Полиа и Сеге [108], где показано, в частности, что симметризация не увеличивает 2-емкость. Пусть π — $(n-1)$-мерная плоскость и $\mathrm{Pr}_\pi F$ — проекция F на π. Выберем π так, чтобы величина $m_{n-1}(\mathrm{Pr}_\pi F)$ принимала максимальное значение. Симметризуем F относительно π, а получившийся компакт — относительно прямой, перпендикулярной к π. Емкость полученного тела не превосходит $2\text{-cap}\,F$, а его пересечение с π есть $(n-1)$-мерный шар объема $m_{n-1}(\mathrm{Pr}_\pi F)$. Следовательно, из всех компактов с фиксированной 2-емкостью наибольшую площадь ортогональной проекции на $(n-1)$-мерную плоскость имеет $(n-1)$-мерный шар. Отсюда и из леммы получаем изопериметрическое неравенство

$$[m_{n-1}(F\cap R^{n-1})]^{(n-2)/(n-1)}\leqslant$$
$$\leqslant(\omega_{n-1}/(n-1))^{(n-2)/(n-1)}\,(c_n/\omega_n)\,2\text{-cap}\,(F,\ R^n),$$

где c_n — постоянная, определенная в лемме.

Теперь из следствия вытекает, что в оценке $\|u\|_{L_{2(n-1)/(n-2)}(R^{n-1})}\leqslant$ $\leqslant C\|\nabla u\|_{L_2(R^n)}$, $u\in\mathscr{D}(R^n)$, точная константа C удовлетворяет неравенствам ${}^1/_2C\leqslant[(\omega_{n-1}/(n-1))^{(n-2)/(n-1)}\,c_n/\omega_n]^{1/2}\leqslant C$.

2.3.4. Мультипликативное неравенство (случай $p\geqslant 1$).

Теорема. 1) *Пусть для любого компакта $F\subset\Omega$ выполнено неравенство* (2.3.3/1), *где $p\geqslant 1$, $\alpha>0$. Пусть еще q — положительное число, удовлетворяющее одному из условий:* (i) $q\leqslant q^*=\alpha^{-1}$, *если $\alpha p\leqslant 1$, или* (ii) $q<q^*=\alpha$, *если $\alpha p>1$. Тогда для любой* *функции* $u \in \mathscr{D}(\Omega)$ *справедливо неравенство*

$$\|u\|_{L_q(\Omega,\,\mu)} \leqslant C \left(\int_\Omega [\Phi(x, \nabla u)]^p\, dx\right)^{(1-\varkappa)/p} \|u\|^{\varkappa}_{L_r(\Omega,\,\mu)}, \tag{1}$$

где $r \in (0, q)$, $\varkappa = r(q^* - q)/q(q^* - r)$, $C \leqslant c\beta^{(1-\varkappa)/p}$.

2) *Пусть* $p \geqslant 1$, $q^* > 0$, $r \in (0, q^*]$ *и при некотором* $q \in (0, q^*]$ *для любой функции* $u \in \mathscr{D}(\Omega)$ *выполнено неравенство* (1), *в котором* $\varkappa = r(q^* - q)/q(q^* - r)$ *и* C — *постоянная, не зависящая от* u. *Тогда для всех компактов* $F \subset \Omega$ *выполнено неравенство* (2.3.3/1), *где* $\alpha = (q^*)^{-1}$ *и* $\beta \leqslant cC^{p/(1-\varkappa)}$.

Доказательство. 1) Пусть $\alpha p \leqslant 1$. Тогда при помощи неравенства Гельдера получаем

$$\int_\Omega |u|^q\, d\mu = \int_\Omega |u|^{q^*(q-r)/(q^*-r)} |u|^{r(q^*-q)/(q^*-r)}\, d\mu \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int_\Omega |u|^{q^*}\, d\mu\right)^{(q-r)/(q^*-r)} \left(\int_\Omega |u|^r\, d\mu\right)^{(q^*-q)/(q^*-r)},$$

или, что то же самое,

$$\|u\|_{L_q(\Omega,\,\mu)} \leqslant \|u\|^{1-\varkappa}_{L_{q^*}(\Omega,\,\mu)} \|u\|^{\varkappa}_{L_r(\Omega,\,\mu)}.$$

Оценивая первый сомножитель с помощью (2.3.3/2), получаем (1) при $\alpha p \leqslant 1$. Пусть $\alpha p > 1$. По теореме 1.2.3 $\int_\Omega |u|^q\, d\mu = q\int_0^\infty \mu(N_t)\, t^{q-1}\, dt$. Применим к последнему интегралу неравенство (1.3.3/2), где $x = t^q$, $f(x) = \mu(N_t)$, $b = p(q^*)^{-1} > 1$, $a > 1$ — произвольное число, $\lambda = a(q-r)q^{-1}$, $\mu = p(q^* - q)(q^*q)^{-1}$. Тогда

$$\int_0^\infty \mu(N_t)\, t^{q-1}\, dt \leqslant c\left(\int_0^\infty [\mu(N_t)]^a\, t^{ar-1}\, dt\right)^{(q^*-q)/a(q^*-r)} \times$$
$$\times \left(\int_0^\infty [\mu(N_t)]^{p/q^*}\, t^{p-1}\, dt\right)^{q^*(q-r)/p(q^*-r)}.$$

Так как $a > 1$ и функция $\mu(N_t)$ не возрастает, то к первому сомножителю можно применить неравенство (1.3.3/1) следующим образом:

$$\int_0^\infty [\mu(N_t)]^a\, t^{ar-1}\, dt \leqslant c\left(\int_0^\infty \mu(N_t)\, t^{r-1}\, dt\right)^a.$$

Итак,

$$\|u\|_{L_q(\Omega,\,\mu)} \leqslant c\left(\int_0^\infty [\mu(N_t)]^{p/q^*}\, t^{p-1}\, dt\right)^{(1-\varkappa)/p} \|u\|^{\varkappa}_{L_r(\Omega,\,\mu)}.$$

Из условия (2.3.3/1) и теоремы 2.3.1 получаем

$$\int_0^\infty [\mu(N_t)]^{p/q^*}\, t^{p-1}\, dt \leqslant c\beta \int_\Omega [\Phi(x, \nabla u)]^p\, dx.$$

Доказательство первой части теоремы закончено.

2) Пусть G — ограниченное открытое множество, $\bar{G} \subset \Omega$. Зафиксируем число $\delta > 0$ и положим $\beta_\delta = \sup(\mu(F)^{p\alpha}/((p, \Phi)\text{-cap}(F, G)))$

на множестве всех компактов F в G, удовлетворяющих условию (p, Φ)-$\operatorname{cap}(F, G) \geqslant \delta$ *. Очевидно, что $\beta_\delta \leqslant \delta^{-1}\mu(G)^{p\alpha} < \infty$.

Пусть v — произвольная функция из $\mathfrak{P}(F, G)$ и $\gamma = \max(pr^{-1}, q^* r^{-1})$. Подставим в (1) функцию $u = v^\gamma$. Тогда

$$\mu(F)^{1/q} \leqslant cC\left(\int_\Omega v^{p(\gamma-1)}[\Phi(x, \nabla v)]^p\,dx\right)^{(1-\varkappa)/p} \| v^\gamma \|^{\varkappa}_{L_r(\Omega, \mu)}. \qquad (2)$$

Пусть $\psi(t)$ — функция, определенная равенством (2.3.1/2). В нашем случае $T = \max v = 1$. Очевидно, что

$$\int_G v^{\gamma r}\,d\mu = \int_0^\infty \mu(N_t)\,d(t^{\gamma r}) = \int_0^1 \mu(N_t)[\psi(t)]^{q^*/p'}\,d(t^{\gamma r})/[\psi(t)]^{q^*/p'},$$

где $N_t = \{x \in : v(x) \geqslant t\}$. Так как $N_t \supset F$, то из леммы 2.2.2/3 следует

$$\mu(N_t)\,\psi(t)^{q^*/p'} \leqslant \mu(N_t)/[(p, \Phi)\text{-}\operatorname{cap}(N_t, G)]^{q^*/p} \leqslant \beta_\delta^{q^*/p}.$$

Значит,

$$\int_G v^{\gamma r}\,d\mu \leqslant \beta_\delta^{q^*/p}\int_0^1 [\psi(t)]^{-q^*/p'}\,d(t^{\gamma r}).$$

Поскольку $\psi(t)^{-q^*/p'}$ — невозрастающая функция, из неравенства (1.3.3/1) получаем

$$\int_G v^{\gamma r}\,d\mu \leqslant c\beta_\delta^{q^*/p}\left(\int_0^1 [\psi(t)]^{q^*(1-p)/\gamma r}\,d(t^p)\right)^{\gamma r/p} \leqslant$$
$$\leqslant c\beta_\delta^{q^*/p}\psi(1)^{(\gamma r - q^*)/p'}\left(\int_0^1 d(t^p)/[\psi(t)]^{p-1}\right)^{\gamma r/p}.$$

Полагая в последнем интеграле $t = t(\psi)$ и применяя неравенство (2.3.1/8) и лемму 2.3.1, получаем

$$\int_0^{\psi(1)} d[t(\psi)]^p/\psi^{p-1} \leqslant c\int_0^{\psi(1)} [t'(\psi)]^p\,d\psi = c\int_G [\Phi(x, \nabla v)]^p\,dx.$$

Итак,

$$\| v^\gamma \|_{L_r(\Omega, \mu)} \leqslant c\beta_\delta^{q^*/pr}\psi(1)^{(\gamma r - q^*)/rp'}\left(\int_G [\Phi(x, \nabla u)]^p\,dx\right)^{\gamma/p} \leqslant$$
$$\leqslant c\beta_\delta^{q^*/pr}[(p, \Phi)\text{-}\operatorname{cap}(F, G)]^{(q^* - \gamma r)/rp}\left(\int [\Phi(x, \nabla u)]^p\,dx\right)^{\gamma/p}. \qquad (3)$$

Последнее неравенство следует из оценки $[\psi(1)]^{p-1} \leqslant [(p, \Phi)$-$\operatorname{cap}(F, G)]^{-1}$ (см. лемму 2.2.2/3). Так как $0 \leqslant v \leqslant 1$ и $\gamma \geqslant 1$, то из (2) и (3) следует неравенство

$$\mu(F)^{1/q} \leqslant cC\beta_\delta^{q^*\varkappa/pr}[(p, \Phi)\text{-}\operatorname{cap}(F, G)]^{\varkappa(q^* - \gamma r)/rp} \times$$
$$\times \left(\int_G [\Phi(x, \nabla v)]^p\,dx\right)^{(1+\varkappa(\gamma-1))/p}.$$

---

*) В случае, когда (p, Φ)-$\operatorname{cap}(F, G) = 0$ для любого компакта $F \subset G$, подстановка в (1) произвольной функции $u \in \mathfrak{N}(F, G)$ приводит к равенству $\mu = 0$.

Минимизируя $\int_G [\Phi(x, \nabla v)]^p dx$ на множестве $\mathfrak{P}(F, G)$, получаем

$$\mu(F)^{1/q} \leqslant cC\beta_\delta^{q^*\varkappa/pr}[(p, \Phi)\text{-cap}(F, G)]^{1/p+\varkappa(q^*-r)/pr} = $$
$$= cC\beta_\delta^{q^*\varkappa/pr}[(p, \Phi)\text{-cap}(F, G)]^{q^*/qp}.$$

Отсюда $\mu(F)^{p/q^*} \leqslant cC^{qp/q^*}\beta_\delta^{(q^*-q)/(q^*-r)}(p, \Phi)\text{-cap}(F, G)$.

Следовательно, $\beta_\delta \leqslant cC^{pq(q^*-r)/q^*(q-r)} = cC^{p/(1-\varkappa)}$.

Так как величина β_δ мажорируется постоянной, не зависящей ни от δ, ни от G, то, используя свойство (iv) (p, Φ)-емкости, получаем, что $\beta \leqslant cC^{p/(1-\varkappa)}$. ■

2.3.5. Оценка нормы в $L_q(\Omega, \mu)$ при $q<p$ (необходимое и достаточное условия). В следствии 2.3.3 были приведены необходимое и достаточное условия справедливости неравенства (2.3.3/2) при $q \geqslant p$. Теперь мы получим такой же результат для $p>q\geqslant 1$.

Пусть $S=\{g_j\}_{j=-\infty}^{j=+\infty}$ — любая последовательность допустимых подмножеств Ω, такая, что $\bar{g}_i \subset g_{i+1}$. Положим $\mu_i=\mu(g_i)$, $\gamma_i = (p, \Phi)\text{-cap}(\bar{g}_i, g_{i+1})$ и

$$\beta = \sup_{\{S\}}\left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\left(\mu_i^{p/q}/\gamma_i\right)^{q/(p-q)}\right]^{(p-q)/q}. \tag{1}$$

(Слагаемые вида 0/0 считаем равными нулю.)

Теорема. 1) *Если $\beta<\infty$, то для всех $u \in \mathscr{D}(\Omega)$ справедливо неравенство*

$$\|u\|^p_{L_q(\Omega, \mu)} \leqslant C\int_\Omega [\Phi(x, \nabla u)]^p dx, \tag{2}$$

где $p>q>0$, $C \leqslant c\beta$.

2) *Если существует такая постоянная C, что для всех $u \in \mathscr{D}(\Omega)$ справедливо неравенство* (2), *где $p>q\geqslant 1$, то $\beta \leqslant cC$.*

Доказательство. 1) Пусть $t_j = 2^{-j}+\varepsilon_j$ $(j=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, где ε_j — убывающая последовательность положительных чисел, такая, что $\varepsilon_j 2^j \to 0$ при $j \to \pm\infty$. Потребуем еще, чтобы множества L_{t_j} были допустимыми. Очевидно, что

$$\|u\|^q_{L_q(\Omega, \mu)} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\int_{t_j}^{t_{j-1}}\mu(L_t)\,d(t^q) \leqslant c\sum_{j=-\infty}^{+\infty}2^{-qj}\mu(L_{t_j}).$$

Пусть $g_j = L_{t_j}$. Последнюю сумму представим в виде

$$c\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(\mu_j^{p/q}/\gamma_j\right)^{q/p}\left(2^{-pj}\gamma_j\right)^{q/p}$$

и применим неравенство Гельдера. Тогда

$$\|u\|^q_{L_q(\Omega, \mu)} \leqslant c\beta^{q/p}\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty}2^{-pj}\gamma_j\right)^{q/p}.$$

Пусть $\lambda_\varepsilon \in C^\infty(R^1)$, $\lambda_\varepsilon(t)=1$ при $t\geqslant 1$, $\lambda_\varepsilon(t)=0$ при $t\leqslant 0$, $0\leqslant\lambda'_\varepsilon(t)\leqslant 1+\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ и пусть $u_j(x) = \lambda_\varepsilon[(|u(x)|-t_{j+1})/(t_j-t_{j+1})]$.

Так как $u_j\in\mathfrak{N}(\bar g_j,\ g_{j+1})$, то

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty}2^{-pj}\gamma_j\leqslant c\sum_{j=-\infty}^{+\infty}(t_j-t_{j+1})^p\int_{g_{j+1}\setminus g_j}[\Phi(x,\ \nabla u_j)]^p\,dx=$$
$$=c\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\int_{g_{j+1}\setminus g_j}[\lambda_\varepsilon'((u-t_{j+1})/(t_j-t_{j+1}))]^p[\Phi(x,\ \nabla u)]^p\,dx.$$

Устремляя ε к нулю, получаем

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty}2^{-pj}\gamma_j\leqslant c\int_\Omega[\Phi(x,\ \nabla u)]^p\,dx. \tag{3}$$

2) Рассмотрим последовательность $S=\{g_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ и положим $\tau_{N+1}=0$ и $\tau_k=\sum_{j=k}^{N}(\mu_j/\gamma_j)^{1/(p-q)}$ при $k=-N,\ -N+1,\ \dots,\ 0,\ \dots$ $\dots,\ N-1,\ N$. Через u_k обозначим произвольную функцию из $\mathfrak{P}(\bar g_k,\ g_{k+1})$ и определим функцию $u=(\tau_k-\tau_{k+1})u_k+\tau_{k+1}$ на $g_{k+1}\setminus g_k$, $u=\tau_{-N}$ на g_{-N}, $u=0$ в $\Omega\setminus g_{N+1}$. Так как $u\in\mathscr{D}(\Omega)$, то для нее верно неравенство (2). Очевидно, что

$$\int_\Omega u^q\,d\mu=\int_0^\infty\mu(L_t)\,d(t^q)=$$
$$=\sum_{k=-N}^{N}\int_{\tau_{k+1}}^{\tau_k}\mu(L_t)\,d(t^q)\geqslant\sum_{k=-N}^{N}\mu_k(\tau_k^q-\tau_{k+1}^q).$$

Отсюда, из (2) и неравенства $(\tau_k-\tau_{k+1})^q\leqslant(\tau_k^q-\tau_{k+1}^q)$ следует, что

$$\Big[\sum_{k=-N}^{N}\mu_k(\tau_k-\tau_{k+1})^q\Big]^{p/q}\leqslant C\sum_{k=-N}^{N}\int_{g_{k+1}\setminus g_k}[\Phi(x,\ \nabla u)]^p\,dx=$$
$$=C\sum_{k=-N}^{N}(\tau_k-\tau_{k+1})^p\int_{g_{k+1}\setminus g_k}[\Phi(x,\ \nabla u_k)]^p\,dx.$$

Так как u_k — любая функция из $\mathfrak{P}(\bar g_k,\ g_{k+1})$, то, минимизируя последнюю сумму, получаем

$$\Big[\sum_{k=-N}^{N}\mu_k(\tau_k-\tau_{k+1})^q\Big]^{p/q}\leqslant C\sum_{k=-N}^{N}(\tau_k-\tau_{k+1})^p\gamma_k.$$

Подставляя в это выражение $\tau_k-\tau_{k+1}=\mu_k^{1/(p-q)}\gamma_k^{1/(q-p)}$, окончательно получаем

$$\Big[\sum_{k=-N}^{N}(\mu_k^{p/q}/\gamma_k)^{q/(p-q)}\Big]^{(p-q)/q}\leqslant C.\ \blacksquare$$

2.3.6. Оценка нормы в $L_q(\Omega,\ \mu)$ при $q<p$ (достаточное условие).

Лемма. *Пусть $g_1,\ g_2,\ g_3$ — допустимые подмножества Ω, такие, что $\bar g_1\subset g_2,\ \bar g_2\subset g_3$. Положим $\gamma_{ij}=(p,\ \Phi)$-cap$(g_i,\ g_j)$, где $i<j$. Тогда*

$$\gamma_{12}^{-1/(p-1)}+\gamma_{23}^{-1/(p-1)}\leqslant\gamma_{13}^{-1/(p-1)}.$$

Доказательство. Пусть ε — любое положительное число. Выберем такие функции $u_k\in\mathfrak{P}(\bar g_k,\ g_{k+1})$ $(k=1,\ 2)$, что

$$\gamma_{k,\,k+1}^{-1/(p-1)}\leqslant\int_0^1\Big\{\int_{E_\tau^k}[\Phi(x,\ \nabla u_k)]^p(ds/|\nabla u_k|)\Big\}^{-1/(p-1)}d\tau+\varepsilon,$$

где $E_\tau^k=\{x: u_k(x)=\tau\}$. Положим $u(x)={}^1/_2 u_2(x)$ при $x\in g_3\setminus g_2$ и $u(x)=(u_1(x)+1)/2$ при $x\in g_2$. Тогда

$$\int_0^1\left\{\int_{E_\tau^1}[\Phi(x, \nabla u_1)]^p ds/|\nabla u_1|\right\}^{1/(1-p)} d\tau=$$
$$=\int_{1/2}^1\left\{\int_{E_\tau}[\Phi(x, \nabla u)]^p ds/|\nabla u|\right\}^{1/(1-p)} d\tau,$$
$$\int_0^1\left\{\int_{E_\tau^2}[\Phi(x, \nabla u_2)]^p ds/|\nabla u_2|\right\}^{1/(1-p)} d\tau=$$
$$=\int_0^{1/2}\left\{\int_{E_\tau}[\Phi(x, \nabla u)]^p ds/|\nabla u|\right\}^{1/(1-p)} d\tau,$$

где $E_\tau=\{x: u(x)=\tau\}$. Поэтому

$$\gamma_{12}^{1/(1-p)}+\gamma_{23}^{1/(1-p)}\leqslant\int_0^1\left\{\int_{E_\tau}[\Phi(x, \nabla u)]^p ds/|\nabla u|\right\}^{1/(1-p)} d\tau+2\varepsilon.$$

Так как $u\in\mathfrak{P}(\bar g_1, g_3)$, то в силу леммы 2.2.2/3 правая часть последнего неравенства не превосходит $\gamma_{13}^{1/(1-p)}+2\varepsilon$. ■

Обозначим через $\nu(t)$ величину $\inf(p, \Phi)\text{-cap}(\bar g, \Omega)$, где инфимум берется по всем допустимым множествам g, удовлетворяющим условию $\mu(g)\geqslant t$.

Легко проверить, что условие (2.3.2/1) эквивалентно неравенству $\beta\nu(t)\geqslant tP^{-1}(1/t)$, а условие (2.3.3/1) — неравенству $\beta\nu(t)\geqslant t^{\alpha p}$.

Доказанная в этом пункте теорема дает следующее формулируемое в терминах функции $\nu(t)$ достаточное условие ограниченности величины β, определенной равенством (2.3.5/1) и, значит, условие справедливости неравенства (2.3.5/2) при $p>q\geqslant 1$:

$$\int_0^{\mu(\Omega)}[\tau/\nu(\tau)]^{q/(p-q)} d\tau<\infty.$$

Теорема. *Если* $p>q\geqslant 1$, *то*

$$\sup_{\{S\}}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(\mu_j^{p/q}/\gamma_j\right)^{q/(p-q)}\leqslant(p/(p-q))\int_0^{\mu(\Omega)}[\tau/\nu(\tau)]^{q/(p-q)} d\tau, \qquad (1)$$

где использованы обозначения, введенные в п. 2.3.5.

Доказательство. Пусть интеграл в правой части сходится, N — целое положительное число, $\Gamma_j=(p, \Phi)\text{-cap}(\bar g_j, g_{N+1})$ при $j\leqslant N$, $\Gamma_{N+1}=\infty$. По лемме $\gamma_j^{1/(1-p)}\leqslant\Gamma_j^{1/(1-p)}-\Gamma_{j+1}^{1/(1-p)}$, $j\leqslant N$. Так как $q(p-1)/(p-q)\geqslant 1$, то справедливо неравенство $|a-b|^{q(p-1)/(p-q)}\leqslant|a^{q(p-1)/(p-q)}-b^{q(p-1)/(p-q)}|$ и, значит, $\gamma_j^{-q/(p-q)}\leqslant$ $\leqslant\Gamma_j^{-q/(p-q)}-\Gamma_{j+1}^{-q/(p-q)}$. Отсюда получаем

$$\sigma_N\overset{\text{def}}{=}\sum_{|j|\leqslant N}\left(\mu_j^{p/q}/\gamma_j\right)^{q/(p-q)}\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{|j|\leqslant N}\mu_j^{p/(p-q)}\left(\Gamma_j^{-q/(p-q)}-\Gamma_{j+1}^{-q/(p-q)}\right)=\mu_{-N}^{p/(p-q)}\Gamma_{-N}^{-q/(p-q)}+$$
$$+\sum_{j=-N+1}^{N}\left(\mu_j^{p/(p-q)}-\mu_{j-1}^{p/(p-q)}\right)\Gamma_j^{-q/(p-q)}.$$

Ясно, что $\Gamma_j \geqslant (p,\ \Phi)\text{-cap}(\bar{g}_j,\ \Omega) \geqslant \nu(\mu_j)$. Так как функция ν не убывает, то

$$\mu_{-N}^{p/(p-q)}[\nu(\mu_{-N})]^{q/(q-p)} \leqslant \int_0^{\mu_{-N}} d(\tau^{p/(p-q)})/[\nu(\tau)]^{q/(p-q)}.$$

Аналогично

$$\left(\mu_j^{p/(p-q)} - \mu_{j-1}^{p/(p-q)}\right)[\nu(\mu_j)]^{q/(q-p)} \leqslant \int_{\mu_{j-1}}^{\mu_j} d(\tau^{p/(p-q)})/[\nu(\tau)]^{q/(p-q)}.$$

Следовательно, $\sigma_N \leqslant \int_0^{\mu_N} [\nu(\tau)]^{q/(q-p)}\, d(\tau^{p/(p-q)})$. ■

2.3.7. Неравенство, содержащее нормы в $L_q(\Omega,\ \mu)$ и $L_q(\Omega,\ \nu)$ (случай $p \geqslant 1$). В следующей теореме даны условия справедливости неравенства

$$\|u\|_{L_q(\Omega,\ \mu)}^p \leqslant C\left(\int_\Omega [\Phi(x,\ \nabla u)]^p\, dx + \|u\|_{L_r(\Omega,\ \nu)}^p\right) \tag{1}$$

для всех $u \in \mathscr{D}(\Omega)$ при $q \geqslant p \geqslant r$, $p \geqslant 1$ (ср. с теоремой 2.1.3).

Теорема. *Неравенство* (1) *верно в том и только в том случае, если для всех допустимых множеств* g *и* G, *таких, что* $\bar{g} \subset G$, *верна оценка*

$$[\mu(g)]^{p/q} \leqslant cC\,[(p,\ \Phi)\text{-cap}(\bar{g},\ G) + [\nu(G)]^{p/r}]. \tag{2}$$

Доказательство. Достаточность. В силу теоремы 1.2.3 и неравенства (1.3.3/1)

$$\|u\|_{L_q(\Omega,\ \mu)}^p = \left[\int_0^\infty \mu(L_t)\, d(t^q)\right]^{p/q} \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^\infty [\mu(L_t)]^{p/q}\, d(t^p) \leqslant c \sum_{j=-\infty}^{+\infty} 2^{-pj}[\mu(g_j)]^{p/q},$$

где $g_j = L_{t_j}$ и $\{t_j\}$ — последовательность уровней, определенная в доказательстве первой части теоремы 2.3.4. Положим $\gamma_j = (p,\ \Phi)\text{-cap}(\bar{g}_j,\ g_{j+1})$ и воспользуемся условием (2). Получим

$$\|u\|_{L_q(\Omega,\ \mu)}^p \leqslant cC\left[\sum_{j=-\infty}^{+\infty} 2^{-pj}\gamma_j + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} 2^{-pj}[\nu(g_j)]^{p/r}\right]. \tag{3}$$

Первую сумму в правой части этого неравенства оценим с помощью (2.3.5/3). Вторая сумма не превосходит

$$c\int_0^\infty [\nu(L_t)]^{p/r}\, d(t^p) \leqslant c\left(\int_0^\infty \nu(L_t)\, d(t^r)\right)^{p/r} = c\,\|u\|_{L_r(\Omega,\ \nu)}^p.$$

Необходимость. Пусть g и G — допустимые множества и $\bar{g} \subset G$. Подставим в (1) любую функцию $u \in \mathfrak{P}(\bar{g},\ G)$. Тогда

$$[\mu(g)]^{p/q} \leqslant C\left\{\int_\Omega [\Phi(x,\ \nabla u)]^p\, dx + [\nu(G)]^{p/r}\right\}.$$

Минимизируя первое слагаемое справа по множеству $\mathfrak{P}(\bar{g},\ G)$, получаем (2).

Замечание. Очевидно, что достаточным условием справедливости (1) является более простое, чем (2), условие

$$[\mu(g)]^{p/q} \leqslant C_1 [(p, \Phi)\text{-cap}(g, \Omega) + [\nu(g)]^{p/r}], \tag{4}$$

в котором в отличие от (1) фигурирует лишь одно множество g. Однако, как показывает следующий пример, это условие не является необходимым.

Пусть $\Omega = R^3$, $q = p = r = 2$, $\Phi(x, y) = |y|$, а меры μ и ν определены равенствами

$$\mu(A) = \sum_{k=0}^{\infty} s(A \cap \partial B_{2^k}), \quad \nu(A) = \sum_{k=0}^{\infty} s(A \cap \partial B_{2^k+1}),$$

где A — любое борелевское подмножество R^3, а s — двумерная мера Хаусдорфа. Условие (4) для этих мер и 2-емкости не выполнено. Действительно, для множеств $g_k = B_{2^k+1} \setminus \bar{B}_{2^k-1}$ $(k = 2, 3, \dots)$

$$\mu(g_k) = \pi 4^{k+1}, \quad \nu(g_k) = 0, \quad 2\text{-cap}(g_k, R^3) = 4\pi(2^k + 1).$$

Покажем, что неравенство (1) верно Пусть $u \in \mathscr{D}(R^3)$ и (ρ, ω) — сферические координаты. Очевидно, что

$$[u(2^k, \omega)]^2 \leqslant 2 \int_{2^k}^{2^k+1} ((\partial u/\partial \rho)(\rho, \omega))^2 d\rho + 2 [u(2^k + 1, \omega)]^2.$$

Отсюда заключаем, что

$$4^k \int_{\partial B_1} [u(2^k, \omega)]^2 d\omega \leqslant$$
$$\leqslant 2 \int_{B_{2^k+1} \setminus B_{2^k}} (\partial u/\partial \rho)^2 dx + 2 \cdot 4^k \int_{\partial B_1} [u(2^k + 1, \omega)]^2 d\omega.$$

Суммируя по k, получаем неравенство

$$\int_{R^3} u^2 d\mu \leqslant c \left(\int_{R^3} |\nabla u|^2 dx + \int_{R^3} u^2 d\nu \right). \ \blacksquare$$

2.3.8. Оценка интеграла $\int_\Omega |u|^p d\sigma$ (σ — заряд). В следующей теореме даны близкие (в некотором смысле) достаточное и необходимое условия справедливости неравенства

$$\int_\Omega |u|^p d\sigma \leqslant C \int_\Omega [\Phi(x, \nabla u)]^p dx, \qquad u \in \mathscr{D}(\Omega), \tag{1}$$

где σ — произвольный заряд в Ω (а не неотрицательная мера, как в теореме 2.3.4) *.

Теорема. *Пусть σ^+ и σ^- — положительная и отрицательная части заряда σ. Тогда*:

---

* В случае $p=1$ в теореме 2.1.3 содержится более точный результат.

1) *если при некотором* $\varepsilon\in(0, 1)$ *для всех допустимых множеств* g *и* G, $\bar{g}\subset G$, *имеет место оценка*

$$\sigma^+(g)\leqslant C_\varepsilon(p,\ \Phi)\text{-cap}(\bar{g},\ G)+(1-\varepsilon)\,\sigma^-(G), \tag{2}$$

где $C_\varepsilon=\text{const}$, *то справедливо неравенство* (1), *в котором* $C\leqslant cC_\varepsilon$;

2) *если для всех* $u\in\mathscr{D}(\Omega)$ *имеет место неравенство* (1), *то для всех допустимых множеств* g, G, $\bar{g}\subset G$

$$\sigma^+(g)\leqslant C(p,\ \Phi)\text{-cap}(\bar{g},\ G)+\sigma^-(G). \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $\delta=(1-\varepsilon)^{-1/2p}$ и $g_j=L_{\delta^j}$ ($j=0, \pm1, \ldots$). В силу теоремы 1.2.3

$$\|u\|^p_{L_p(\Omega,\ \sigma^+)}=\int_0^\infty\sigma^+(L_t)\,d(t^p)=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\int_{\delta^j}^{\delta^{j+1}}\sigma^+(L_t)\,d(t^p)\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sigma^+\left(L_{\delta^j}\right)\left(\delta^{(j+1)p}-\delta^{jp}\right).$$

Отсюда и из (2) получаем

$$\|u\|^p_{L_p(\Omega,\ \sigma^+)}\leqslant C_\varepsilon\sum_{j=-\infty}^{+\infty}(p,\ \Phi)\text{-cap}\left(\bar{L}_{\delta^j};\ L_{\delta^{j-1}}\right)\left(\delta^{(j+1)p}-\delta^{jp}\right)+$$
$$+(1-\varepsilon)\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sigma^-\left(L_{\delta^{j-1}}\right)\left(\delta^{(j+1)p}-\delta^{jp}\right). \tag{4}$$

Рассуждая так же, как при выводе (2.3.5/3), получаем, что первая сумма в (4) не превосходит

$$((\delta^p-1)\,\delta^p/(\delta-1)^p)\int_\Omega[\Phi(x,\ \nabla u)]^p\,dx.$$

Так как $\sigma^-(L_t)$ — невозрастающая функция, то

$$\left(\delta^{(j-1)p}-\delta^{(j-2)p}\right)\sigma^-\left(L_{\delta^{j-1}}\right)\leqslant\int_{\delta^{j-2}}^{\delta^{j-1}}\sigma^-(L_t)\,d(t^p)$$

и, следовательно,

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sigma^-\left(L_{\delta^{j-1}}\right)\left(\delta^{(j+1)p}-\delta^{jp}\right)\leqslant\delta^{2p}\int_0^\infty\sigma^-(L_t)\,d(t^p).$$

Итак,

$$\|u\|^p_{L_p(\Omega,\ \sigma_+)}\leqslant C_\varepsilon\frac{(\delta^p-1)\,\delta^p}{(\delta-1)^p}\int_\Omega[\Phi(x,\ \nabla u)]^p\,dx+\delta^{2p}(1-\varepsilon)\|u\|^p_{L_p(\Omega,\ \sigma^-)}.$$

Остается отметить, что $\delta^{2p}(1-\varepsilon)=1$.

Доказательство второй части теоремы совпадает с доказательством необходимости в теореме 2.3.7. ■

2.3.9. Мультипликативное неравенство, содержащее нормы в $L_q(\Omega,\ \mu)$ **и** $L_r(\Omega,\ \nu)$ **(случай** $p\geqslant 1$**).** Следующее утверждение дает необходимое и достаточное условие справедливости мультипликативного неравенства

$$\|u\|^p_{L_q(\Omega,\ \mu)}\leqslant C\left\{\int_\Omega[\Phi(x,\ \nabla u)]^p\,dx\right\}^\delta\|u\|^{p(1-\delta)}_{L_r(\Omega,\ \nu)} \tag{1}$$

при $p\geqslant 1$ (ср. с теоремой 2.1.1).

Теорема. *Пусть g и G — любые допустимые множества, такие, что $\bar{g} \subset G$. Тогда:*

1) *если существует такая постоянная α, что*

$$[\mu(g)]^{p/q} \leqslant \alpha [(p, \Phi)\text{-cap}(g, G)]^{\delta} [\nu(G)]^{(1-\delta)p/r}, \tag{2}$$

то для всех функций $u \in \mathscr{D}(\Omega)$ справедливо неравенство (1), *где $C \leqslant c\alpha$, $1/q \leqslant (1-\delta)/r + \delta/p$, $0 \leqslant \delta \leqslant 1$, r, $q > 0$;*

2) *если для всех функций $u \in \mathscr{D}(\Omega)$ верно* (1), *где $0 \leqslant \delta \leqslant 1$, r, $q > 0$, то для всех допустимых множеств g и G, таких, что $\bar{g} \subset G$, верно неравенство* (2), *где $\alpha \leqslant C$.*

Доказательство. 1) В силу теоремы 1.2.3 и неравенства (1.3.3/1)

$$\|u\|_{L_q(\Omega,\,\mu)} = \Big[\int_0^\infty \mu(L_\tau)\, d(\tau^q)\Big]^{1/q} \leqslant \gamma^{1/\gamma} \Big[\int_0^\infty [\mu(L_\tau)]^{\gamma/q} \tau^{\gamma-1} d\tau\Big]^{1/\gamma},$$

где $\gamma = pr[p(1-\delta) + \delta r]^{-1}$, $\gamma \leqslant q$. Следовательно,

$$\|u\|^p_{L_q(\Omega,\,\mu)} \leqslant c\Big[\sum_{j=-\infty}^{+\infty} 2^{-\gamma j} [\mu(g_j)]^{\gamma/q}\Big]^{p/\gamma} \leqslant$$

$$\leqslant c\alpha \Big\{\sum_{j=-\infty}^{+\infty} 2^{-\gamma j} [(p, \Phi)\text{-cap}(\bar{g}_j, g_{j+1})]^{\delta\gamma/p} [\nu(g_{j+1})]^{(1-\delta)\gamma/r}\Big\}^{p/\gamma},$$

где $g_j = L_{t_j}$ и $\{t_j\}$ — последовательность уровней, определенная в доказательстве первой части теоремы 2.3.5. Отсюда

$$\|u\|^p_{L_q(\Omega,\,\mu)} \leqslant c\alpha \Big[\sum_{j=-\infty}^{+\infty} 2^{-pj} (p, \Phi)\text{-cap}(\bar{g}_j, g_{j+1})\Big]^{\delta} \times$$

$$\times \Big[\sum_{j=-\infty}^{+\infty} 2^{-rj} \nu(g_{j+1})\Big]^{(1-\delta)p/r}. \tag{3}$$

Как было показано в доказательстве теоремы 2.3.5,

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} 2^{-pj} (p, \Phi)\text{-cap}(\bar{g}_j, g_{j+1}) \leqslant c \int_\Omega [\Phi(x, \nabla u)]^p dx.$$

Вторая сумма в (3) очевидно не превосходит $c\|u\|^r_{L_r(\Omega,\,\nu)}$.

2) Пусть g и G — допустимые множества и $\bar{g} \subset G$. Подставим в (1) любую функцию $u \in \mathfrak{P}(\bar{g}, G)$. Тогда

$$[\mu(g)]^{p/q} \leqslant C\Big\{\int_\Omega [\Phi(x, \nabla u)]^p dx\Big\}^{\delta} [\nu(G)]^{(1-\delta)p/r},$$

что и дает (2). ■

§ 2.4. НЕПРЕРЫВНОСТЬ И КОМПАКТНОСТЬ ОПЕРАТОРОВ ВЛОЖЕНИЯ $\mathring{L}^1_p(\Omega)$ И $\mathring{W}^1_p(\Omega)$ В ПРОСТРАНСТВО ОРЛИЧА

Пусть $\mathring{L}^l_p(\Omega)$ и $\mathring{W}^l_p(\Omega)$ — пополнения $\mathscr{D}(\Omega)$ по нормам $\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)}$ и $\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)} + \|u\|_{L_p(\Omega)}$.

В этом параграфе мы приведем некоторые следствия теоремы 2.3.2, содержащие необходимые и достаточные условия ограниченности и компактности операторов вложения пространств $\mathring{L}^1_p(\Omega)$ и $\mathring{W}^1_p(\Omega)$ в пространство $\mathscr{L}_{p,M}(\Omega, \mu)$ с нормой $\||u|^p\|^{1/p}_{\mathscr{L}_M(\Omega,\,\mu)}$, где μ — мера в Ω. Эти результаты в случае $p=2$, $M(t)=|t|$ будут использованы в § 2.5 при исследовании задачи Дирихле для оператора Шредингера.

2.4.1. Условия ограниченности операторов вложения. Произвольному компакту $F\subset\Omega$ поставим в соответствие число

$$\pi_{p,M}(F, \Omega)\overset{\text{def}}{=}\begin{cases}\dfrac{\mu(F)\,P^{-1}(1/\mu(F))}{p\text{-cap}(F, \Omega)}, & \text{если} \quad p\text{-cap}(F, \Omega)>0,\\ 0, & \text{если} \quad p\text{-cap}(F, \Omega)=0.\end{cases}$$

Если $p=2$, $M(t)=|t|$, будем использовать обозначение $\pi(F, \Omega)$ вместо $\pi_{p,M}(F, \Omega)$.

Частным случаем теоремы 2.3.2 является следующее утверждение.

Теорема 1. 1) *Если для любого компакта $F\subset\Omega$ справедливо неравенство $\pi_{p,M}(F, \Omega)\leqslant\beta$, то для всех $u\in\mathscr{D}(\Omega)$*

$$\||u|^p\|_{\mathscr{L}_M(\Omega,\mu)}\leqslant C\int_\Omega|\nabla u|^p\,dx, \tag{1}$$

где $C\leqslant p^p(p-1)^{1-p}\beta$.

2) *Если для всех $u\in\mathscr{D}(\Omega)$ справедливо неравенство* (1), *то $\pi_{p,M}(F, \Omega)\leqslant C$ для всех компактов $F\subset\Omega$.*

С помощью этого утверждения доказывается следующее утверждение.

Теорема 2. *Неравенство*

$$\||u|^p\|_{\mathscr{L}_M(\Omega,\mu)}\leqslant C\int_\Omega(|\nabla u|^p+|u|^p)\,dx, \tag{2}$$

где $p<n$, имеет место для всех $u\in\mathscr{D}(\Omega)$ в том и только в том случае, если при некотором $\delta>0$

$$\sup\{\pi_{p,M}(F, \Omega):\ F\subset\Omega,\ \operatorname{diam}(F)\leqslant\delta\}<\infty. \tag{3}$$

(*Здесь, как обычно, F — компактное подмножество Ω.*)

Доказательство. Достаточность. Построим в R^n кубическую решетку с длиной ребра $c\delta$, где c — достаточно малое положительное число, зависящее лишь от n. Каждый куб Q_i решетки заключим в концентрический куб $2Q_i$ с вдвое большим ребром, грани которого параллельны граням Q_i. Через u обозначим произвольную функцию из $\mathscr{D}(\Omega)$ и через η_i — бесконечно дифференцируемую в R^n функцию, равную единице в Q_i и нулю вне $2Q_i$, $|\nabla\eta_i|\leqslant c_0/\delta$.

В силу теоремы 1

$$\||u\eta_i|^p\|_{\mathscr{L}_M(\Omega,\mu)}\leqslant c\sup\left\{\frac{\mu(F)\,P^{-1}(1/\mu(F))}{p\text{-cap}(F,\ 2Q_i\cap\Omega)}:F\subset2Q_i\cap\Omega\right\}\times$$
$$\times\int_{2Q_i\cap\Omega}|\nabla(u\eta_i)|^p\,dx\leqslant c\sup\{\pi_{p,M}(F, \Omega):F\subset\Omega,\ \operatorname{diam}(F)\leqslant\delta\}\times$$
$$\times\int_{2Q_i\cap\Omega}|\nabla(u\eta_i)|^p\,dx.$$

Суммируя по i и замечая, что

$$\| |u|^p \|_{\mathscr{L}_M(\Omega, \mu)} \leqslant \Big\| \sum_i |u\eta_i|^p \Big\|_{\mathscr{L}_M(\Omega, \mu)} \leqslant \sum_i \| |u\eta_i|^p \|_{\mathscr{L}_M(\Omega, \mu)},$$

получаем требуемое неравенство

$$\| |u|^p \|_{\mathscr{L}_M(\Omega, \mu)} \leqslant c \sup \{\pi_{p, M}(F, \Omega) : F \subset \Omega, \ \operatorname{diam}(F) \leqslant \delta\} \times \\ \times \int_\Omega (|\nabla u|^p + \delta^{-p} |u|^p)\, dx. \tag{4}$$

Необходимость. Пусть F — любой компакт в Ω, диаметр которого не превосходит $\delta < 1$. Заключим F в два открытых концентрических шара B и $2B$ с радиусами δ и 2δ соответственно. Подставим в (2) произвольную функцию $u \in \mathfrak{P}(F, 2B \cap \Omega)$. Так как $u = 1$ на F, то в силу (2)

$$\| \chi_F \|_{\mathscr{L}_M(\Omega, \mu)} \leqslant C \left(\int_{2B} |\nabla u|^p dx + \int_{2B} |u|^p dx \right).$$

Следовательно, $\mu(F) P^{-1}(1/\mu(F)) \leqslant C(1 + c\delta^p) \int_{2B} |\nabla u|^p dx$.

Минимизируя последний интеграл на множестве $\mathfrak{P}(F, 2B \cap \Omega)$, получаем

$$\mu(F) P^{-1}(1/\mu(F)) \leqslant C(1 + c\delta^p)\, p\text{-cap}(F, 2B \cap \Omega).$$

Остается отметить, что так как $p < n$, то справедлива оценка

$$p\text{-cap}(F, 2B \cap \Omega) \leqslant c\, p\text{-cap}(F, \Omega) \tag{5}$$

с константой c, зависящей только от n и p.

Действительно, если $u \in \mathfrak{R}(F, \Omega)$ и $\eta \in \mathscr{D}(2B)$, $\eta = 1$ на B, $|\nabla \eta| \leqslant c/\delta$, то $u\eta \in \mathfrak{R}(F, \Omega \cap 2B)$ и, следовательно,

$$p\text{-cap}(F, \Omega \cap 2B) \leqslant \int_{\Omega \cap 2B} |\nabla(u\eta)|^p dx \leqslant c \left(\int_{2B} |\nabla u|^p dx + \right. \\ \left. + \delta^{-p} \int_{2B} |u|^p dx \right) \leqslant c \left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx + \|u\|^p_{L_{pn/(n-p)}(\Omega)} \right).$$

Отсюда и из теоремы Соболева получаем (5). ∎

2.4.2. Критерии компактности. Приведем две теоремы о необходимых и достаточных условиях компактности операторов вложения $\mathring{L}_p^1(\Omega)$ и $\mathring{W}_p^1(\Omega)$ в $\mathscr{L}_{p, M}(\Omega, \mu)$.

Теорема 1. *Условия*

$$\lim_{\delta \to 0} \sup \{\pi_{p, M}(F, \Omega) \colon F \subset \Omega, \ \operatorname{diam}(F) \leqslant \delta\} = 0, \tag{1}$$

$$\lim_{\rho \to \infty} \sup \{\pi_{p, M}(F, \Omega) \colon F \subset \Omega \setminus B_\rho\} = 0 \tag{2}$$

(здесь $B_\rho = \{x \colon |x| < \rho\}$) необходимы и достаточны для того, чтобы любое ограниченное в $\mathring{L}_p^1(\Omega)$ $(p < n)$ множество функций из $\mathscr{D}(\Omega)$ было относительно компактным в пространстве $\mathscr{L}_{p, M}(\Omega, \mu)$.

Теорема 2. *Условия* (1) *и*

$$\lim_{\rho\to\infty} \sup \{\pi_{p,M}(F, \Omega):\ F \subset \Omega \diagdown B_\rho,\ \operatorname{diam}(F) \leqslant 1\} = 0 \tag{3}$$

необходимы и достаточны для того, чтобы любое ограниченное в $\mathring{W}{}^1_p(\Omega)$ $(p<n)$ *множество функций из* $\mathscr{D}(\Omega)$ *было относительно компактным в пространстве* $\mathscr{L}_{p,M}(\Omega, \mu)$.

Доказательству теорем 1 и 2 предпошлем лемму.

Лемма. *Пусть* $\mu^{(\rho)}$ — *сужение* μ *на шар* B_ρ. *Для того чтобы произвольное ограниченное в* $\mathring{L}{}^1_p(\Omega)$ *или* $\mathring{W}{}^1_p(\Omega)$ $(p<n)$ *множество было относительно компактным в пространстве* $\mathscr{L}_{p,M}(\Omega, \mu^{(\rho)})$ *при всех* $\rho>0$, *необходимо и достаточно, чтобы при любом* $\rho>0$

$$\lim_{\delta\to 0} \sup \{\pi_{p,M}(F, \Omega):\ F \subset B_\rho \cap \Omega,\ \operatorname{diam}(F) \leqslant \delta\} = 0. \tag{4}$$

Доказательство. Достаточность. Так как p-емкость не возрастает с расширением Ω, то для любого компакта $F \subset B_\rho \cap \Omega$ $\pi_{p,M}(F, B_\rho \cap \Omega) \leqslant \pi_{p,M}(F, \Omega)$. Из этого неравенства и условия (4) получаем, что при всех $\rho>0$

$$\lim_{\delta\to 0} \sup \{\pi_{p,M}(F, B_\rho\cap\Omega):\ F \subset B_\rho \cap \Omega,\ \operatorname{diam}(F) \leqslant \delta\} = 0.$$

Отсюда и из неравенства (2.4.1/4), в котором роль Ω играет $B_{2\rho}\cap\Omega$, получаем, что при любом $\varepsilon>0$ для всех $u \in \mathscr{D}(B_{2\rho}\cap\Omega)$

$$\| |u|^p \|_{\mathscr{L}_M(\Omega,\, \mu^{(2\rho)})} \leqslant \varepsilon \int_{B_{2\rho}\cap\Omega} |\nabla u|^p\, dx + C_1(\varepsilon) \int_{B_{2\rho}\cap\Omega} |u|^p\, dx.$$

Заменим здесь функцию u функцией $u\eta$, где η — срезающая функция, равная единице на B_ρ и нулю вне $B_{2\rho}$. Тогда

$$\| |u|^p \|_{\mathscr{L}_M(\Omega,\, \mu^{(\rho)})} \leqslant \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^p\, dx + C_2(\varepsilon) \int_{B_{2\rho}\cap\Omega} |u|^p\, dx. \tag{5}$$

Остается отметить, что при $p<n$ всякое множество, ограниченное в $\mathring{L}{}^1_p(\Omega)$ (и тем более в $\mathring{W}{}^1_p(\Omega)$), компактно в $L_p(B_\rho\cap\Omega)$ при любом $\rho>0$. Достаточность условия (3) доказана.

Необходимость. Пусть $F \subset B_\rho \cap \Omega$ — компакт, диаметр которого не превосходит δ, $\delta<1$. Заключим F в концентрические шары B и $2B$ с радиусами δ и 2δ соответственно. Через u обозначим произвольную функцию из $\mathfrak{P}(F, 2B\cap\Omega)$. Так как любое ограниченное в $\mathring{W}{}^1_p(\Omega)$ множество функций из $\mathscr{D}(\Omega)$ относительно компактно в $\mathscr{L}_{p,M}(\Omega, \mu^{(\rho)})$, то для всех $v \in \mathscr{D}(\Omega)$

$$\| \chi_B |v|^p \|_{\mathscr{L}_M(\Omega,\, \mu^{(\rho)})} \leqslant \varepsilon(\delta) \int_\Omega (|\nabla v|^p + |v|^p\, dx,$$

где χ_B — характеристическая функция B и $\varepsilon(\delta)\to 0$ при $\delta\to 0$*.

* Доказательство этого неравенства легко можно получить, если заметить, что из теоремы 2.4.2/2, примененной к мере $\mu^{(\rho)}$, следует, что $\mu^{(\rho)}(2B)\to 0$ при $\delta\to 0$.

В силу того что функция u равна нулю вне $2B \cap \Omega$, верно неравенство $\int_\Omega |u|^p dx \leqslant c\delta^p \int_\Omega |\nabla u|^p dx$. Следовательно,

$$\mu(F) P^{-1}(1/\mu(F)) \leqslant (1+c\delta^p)\,\varepsilon(\delta) \int_{2B} |\nabla u|^p dx.$$

Минимизируя последний интеграл на $\mathfrak{P}(F, 2B \cap \Omega)$ и используя (2.4 1/5), получаем неравенство $\pi_{p,M}(F, \Omega) \leqslant (1+c\delta^p)\,\varepsilon(\delta)$, а вместе с ним и необходимость условия (4). ■

Доказательство теоремы 1. Достаточность. Пусть $\zeta \in C^\infty(R^n)$, $0 \leqslant \zeta \leqslant 1$, $|\nabla\zeta| \leqslant c\rho^{-1}$, $\zeta = 0$ в окрестности $B_{\rho/2}$, $\zeta = 1$ вне B_ρ очевидно, что

$$\| |u|^p \|^{1/p}_{\mathscr{L}_M(\Omega,\mu)} \leqslant \| (1-\zeta)^p |u|^p \|^{1/p}_{\mathscr{L}_M(\Omega,\mu)} + \| \zeta^p |u|^p \|^{1/p}_{\mathscr{L}_M(\Omega,\mu)} \leqslant$$
$$\leqslant \| |u|^p \|^{1/p}_{\mathscr{L}_M(\Omega,\mu^{(\rho)})} + \| |\zeta u|^p \|^{1/p}_{\mathscr{L}_M(\Omega,\mu)}. \tag{6}$$

В силу первой части теоремы 2.4.1/1, примененной к множеству $\Omega \setminus \bar{B}_{\rho/2}$, условия (2) и неравенства $\pi_{p,M}(F, \Omega\setminus\bar{B}_{\rho/2}) \leqslant \pi_{p,M}(F, \Omega)$ по любому ε можно найти такое число $\rho > 0$, что $\| |\zeta u|^p \|^{1/p}_{\mathscr{L}_M(\Omega,\mu)} \leqslant \varepsilon \| \nabla(\zeta u) \|_{L_p(\Omega)}$. Так как $|\nabla\zeta| \leqslant c\rho^{-1} \leqslant c|x|^{-1}$ и $\| |x|^{-1} u \|_{L_p(\Omega)} \leqslant c \| \nabla u \|_{L_p(\Omega)}$, то $\| |\zeta u|^p \|^{1/p}_{\mathscr{L}_M(\Omega,\mu)} \leqslant c\varepsilon \| \nabla u \|_{L_p(\Omega)}$. Отсюда и из (6) получаем

$$\| |u|^p \|^{1/p}_{\mathscr{L}_M(\Omega,\mu)} \leqslant \| |u|^p \|^{1/p}_{\mathscr{L}_M(\Omega,\mu^{(\rho)})} + c\varepsilon \| \nabla u \|_{L_p(\Omega)}. \tag{7}$$

Очевидно, что из (1) следует (4). Поэтому лемма гарантирует компактность в $\mathscr{L}_{p,M}(\Omega, \mu^{(\rho)})$ любого ограниченного в $\mathring{L}^1_p(\Omega)$ множества функций из $\mathscr{D}(\Omega)$. Это обстоятельство вместе с (7) и доказывает первую часть теоремы.

Необходимость. Пусть F — компакт в Ω, диаметр которого не превосходит δ, $\delta < 1$. Рассуждая точно так же, как и при доказательстве необходимости в лемме (следует только заменить $\mu^{(\rho)}$ на μ), приходим к неравенству $\pi_{p,M}(F, \Omega) \leqslant (1+c\delta^p)\,\varepsilon(\delta)$, а значит и к условию (1).

Пусть теперь $F \subset \Omega \setminus \bar{B}_\rho$. Из компактности в $\mathscr{L}_{p,M}(\Omega, \mu)$ любого ограниченного в $\mathring{L}^1_p(\Omega)$ множества функций из $\mathscr{D}(\Omega)$ следует оценка

$$\| \chi_{\Omega\setminus B_\rho} |u|^p \|^{1/p}_{\mathscr{L}_M(\Omega,\mu)} \leqslant \varepsilon_\rho \| \nabla u \|_{L_p(\Omega)},$$

где $\varepsilon_\rho \to 0$ при $\rho \to \infty$ и u — любая функция из $\mathscr{D}(\Omega)$. В частности, последнее неравенство верно для любой функции $u \in \mathfrak{P}(F, \Omega)$, и поэтому

$$\mu(F) P^{-1}(1/\mu(F)) \leqslant \varepsilon_\rho^p \| \nabla u \|^p_{L_p(\Omega)}.$$

Минимизируя правую часть на множестве $\mathfrak{P}(F, \Omega)$, приходим к (2). ■

Доказательство теоремы 2. Будем использов ть обозначения, введенные в доказательстве теоремы 1.

Достаточность. Из (2.4.1/4), где $\delta=1$ и множество Ω заменено на $\Omega\setminus\bar{B}_{\rho/2}$, и условия (3) следует, что для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\rho>0$, что

$$\| |\zeta u|^p \|^{1/p}_{\mathscr{L}_M(\Omega,\mu)} \leqslant \varepsilon (\| \nabla (\zeta u) \|_{L_p(\Omega)} + \| \zeta u \|_{L_p(\Omega)}).$$

Отсюда и из (6) получаем

$$\| |u|^p \|^{1/p}_{\mathscr{L}_M(\Omega,\mu)} \leqslant \| |u|^p \|^{1/p}_{\mathscr{L}_M(\Omega,\mu^{(\rho)})} + c\varepsilon \| u \|_{W^1_p(\Omega)}.$$

Доказательство заканчивается дословно так же, как и доказательство достаточности в предыдущей теореме.

Необходимость. Условие (1) выводится так же, как и в доказательстве необходимости в теореме 2.4.2/1.

Пусть $F\subset\Omega\setminus\bar{B}_\rho$, $\rho>8$, $\operatorname{diam}(F)\leqslant 1$. Из компактности в $\mathscr{L}_{p,M}(\Omega,\mu)$ любого ограниченного в $\mathring{W}^1_p(\Omega)$ множества функций из $\mathscr{D}(\Omega)$ следует оценка

$$\left\| \chi_{\Omega\setminus B_{\rho/2}} |u|^p \right\|_{\mathscr{L}_M(\Omega,\mu)} \leqslant \varepsilon_\rho \| u \|^p_{W^1_p(\Omega)},$$

где $\varepsilon_\rho\to 0$ при $\rho\to\infty$ и u — любая функция из $\mathscr{D}(\Omega)$. Заключим F в концентрические шары B и $2B$ с радиусами 1 и 2 и обозначим через u любую функцию из $\mathfrak{P}(F, 2B\cap\Omega)$. Рассуждая так же, как и при доказательстве необходимости в лемме 2.4.2, приходим к оценке $\pi_{p,M}(F,\Omega)\leqslant(1+c)\varepsilon_\rho$, которая равносильна условию (3). ∎

Замечание. Сравним (1) и (4). Очевидно, что (4) следует из (1). Обратное утверждение, как показывает следующий пример, неверно.

Рассмотрим последовательность единичных шаров $B^{(\nu)}$ ($\nu=1, 2, \ldots$), удаленных один от другого на расстояние, превосходящее 1. Пусть $\Omega=R^n$ и $\mu(F)=\int_F p(x)\,dx$, где

$$p(x)=\begin{cases} \rho^{-2+\nu^{-1}} & \text{при} \quad x\in B^{(\nu)}, \\ 0 & \text{при} \quad x\,\bar{\in}\,\bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} B^{(\nu)}. \end{cases}$$

Здесь через ρ обозначено расстояние от центра $B^{(\nu)}$ до точки x.

Покажем, что определенная таким образом мера μ удовлетворяет условию (4), где $p=2$, $M(t)=t$. Заметим прежде всего, что для любого компакта $F\subset B^{(\nu)}$

$$\mu(F)=\int_F \rho^{-2+\nu^{-1}}\,dx \leqslant \int_{\partial B_1}\int_0^{r(F)} \rho^{n-3+\nu^{-1}}\,d\rho\,d\omega,$$

где $r(F)=[(n/\omega_n)\,m_n(F)]^{1/n}$.

Для оценки емкости cap(F) (т. е. 2-cap(F)) применим изопериметрическое неравенство (2.2.3/12):

$$\omega_n^{-1}(n-2)^{-1}\operatorname{cap}(F)\geqslant[(n/\omega_n)\,m_n(F)]^{(n-2)/n}=[r(F)]^{n-2}.$$

Теперь для $\pi(F, R^n)$ получаем оценку

$$\pi(F, R^n)\leqslant r(F)^{1/\nu}/(n-2)(n-2+1/\nu),$$

откуда и следует (4).

Если F — шар $\{x\colon \rho\leqslant\delta\}$, то $\pi(F, R^n)=\delta^{1/\nu}/(n-2)(n-2+1/\nu)$. Следовательно,

$$\sup\{\pi(F, R^n)\colon F\subset R^n,\ \operatorname{diam}(F)\leqslant 2\delta\}\geqslant$$
$$\geqslant\lim_{\nu\to\infty}(\delta^{1/\nu}/(n-2)(n-2+1/\nu))=(n-2)^{-2}$$

и условие (1) не выполнено.

§ 2.5. ПРИЛОЖЕНИЯ К СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ МНОГОМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА

В этом параграфе мы покажем, как развитая в § 2.4 методика и некоторые результаты из § 2.4 могут быть применены к спектральной теории операторов Шредингера.

2.5.1. Предварительные сведения и обозначения. Начнем с нескольких определений теории квадратичных форм в гильбертовом пространстве H. Пусть L — плотное линейное подмножество пространства H и $S[u, u]$ — квадратичная форма, определенная на L. Если существует такая константа γ, что для всех $u\in L$ справедливо неравенство

$$S[u, u]\geqslant\gamma\|u\|_H^2, \tag{1}$$

то форма S называется полуограниченной снизу. Наибольшую постоянную γ в (1) обозначим через $\gamma(S)$. Если $\gamma(S)>0$, то S называется положительно определенной. Для такой формы множество L является предгильбертовым пространством со скалярным произведением $S[u, v]$. В том случае, когда L — гильбертово пространство, форма S называется замкнутой. Если сходимость в себе в метрике $(S[u, u])^{1/2}$ и к нулю в H влечет сходимость к нулю в метрике $(S[u, u])^{1/2}$, то говорят, что форма допускает замыкание в H. Пополняя L и распространяя форму S на пополнение $\bar L$ по непрерывности, получаем замыкание $\bar S$ формы S.

Допустим теперь, что форма $S[u, u]$ только полуограничена снизу, не предполагая, что $\gamma(S)>0$. Тогда при любом $c>-\gamma(S)$ форма

$$S[u, u]+c[u, u] \tag{2}$$

положительно определена. По определению форма S допускает замыкание, если допускает замыкание форма (2) при некотором, а значит, и при любом $c > -\gamma(S)$. Замыканием $\bar{S}$ формы S называется форма $\overline{S+cE}-cE$.

Как известно и легко проверяется, полуограниченная форма, допускающая замыкание, порождает единственный самосопряженный оператор $\tilde{S}$, для которого $(\tilde{S}u, u) = S[u, u]$ для всех $u \in L$.

Пусть Ω — открытое подмножество пространства R^n, $n > 2$, и h — положительное число. Будем рассматривать заданную на $\mathcal{D}(\Omega)$ квадратичную форму $S_h[u, u] = h\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega |u|^2 d\mu(x)$.

Будем изучать оператор $\tilde{S}_h$, порожденный формой S_h при условии, что она допускает замыкание. Если мера μ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега m_n и производная $p = d\mu/dm_n$ локально квадратично суммируема, то оператор $\tilde{S}_h$ является расширением по Фридрихсу оператора Шредингера $-h\Delta - p(x)$.

В этом параграфе, говоря о емкости, будем иметь в виду 2-емкость и использовать обозначение cap.

Прежде чем приступить к исследованию оператора $\tilde{S}_h$, сформулируем две леммы об оценках емкости, которые будут несколько раз использованы в дальнейшем. Доказательства этих лемм приведены в [65].

Лемма 1. *Пусть F — компакт в $\Omega \cap B_r$. Тогда при $R > r$*

$$\operatorname{cap}(F, B_R \cap \Omega) \leqslant \begin{cases} (1 + 2r(R-r)^{-1} \log(Re^{1/2}/r)) \operatorname{cap}(F, \Omega) & \text{при } n = 3, \\ (1 + 2(n-3)^{-1} r (R-r)^{-1}) & \text{при } n > 3. \end{cases}$$

Лемма 2. *Пусть F — компакт в $\Omega \setminus \bar{B}_R$. Тогда при $r < R$*

$$\operatorname{cap}(F, \Omega \setminus \bar{B}_r) \leqslant (1 + (n-2)^{-1} r (R-r)^{-1}).$$

Все факты об операторе $\tilde{S}_h$ будут формулироваться в терминах функции

$$\pi(F, \Omega) = \begin{cases} \mu(F)/\operatorname{cap}(F, \Omega), & \text{если } \operatorname{cap}(F, \Omega) > 0, \\ 0, & \text{если } \operatorname{cap}(F, \Omega) = 0, \end{cases}$$

которая получается из введенной в начале § 2.4 функции $\pi_{p, M}(F, \Omega)$ при $M(t) = |t|$, $p = 2$.

2.5.2. Положительность формы $S_1[u, u]$. Следующее утверждение есть частный случай теоремы 2.4.1/1.

Теорема. 1) *Если для любого компакта $F \subset \Omega$*

$$\pi(F, \Omega) \leqslant \beta, \tag{1}$$

то для всех $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\int_\Omega |u|^2 \mu(dx) \leqslant C \int_\Omega |\nabla u|^2 dx, \tag{2}$$

где $C \leqslant 4\beta$.

2) *Если неравенство* (2) *верно для всех* $u \in \mathscr{D}(\Omega)$, *то для любого компакта* $F \subset \Omega$

$$\pi(F, \Omega) \leqslant C. \tag{3}$$

Следствие. *Если* $\sup_{F \subset \Omega} \pi(F, \Omega) < 1/4$, *то форма* $S_1[u, u]$ *положительна, допускает замыкание в* $L_2(\Omega)$ *и, следовательно, порождает самосопряженный положительный оператор* $\tilde{S}_1$ *в* $L_2(\Omega)$.

Доказательство. Положительность $S_1[u, u]$ следует из теоремы. Более того, из неравенства (2) следует, что

$$S_1[u, u] \geqslant [1 - 4 \sup_{F \subset \Omega} \pi(F, \Omega)] \int_\Omega |\nabla u|^2 dx. \tag{4}$$

Пусть последовательность $\{u_\nu\}_{\nu \geqslant 1}$, $u_\nu \in \mathscr{D}(\Omega)$, сходится в себе в метрике $(S_1[u, u])^{1/2}$ к нулю в $L_2(\Omega)$. Тогда в силу (4) $\{u_\nu\}_{\nu \geqslant 1}$ сходится к нулю в $\overset{\circ}{L}{}_2^1(\Omega)$ и в себе в $L_2(\Omega, \mu)$. Так как

$$\int_\Omega |u_\nu|^2 d\mu \leqslant 4 \sup_{F \subset \Omega} \pi(F, \Omega) \int_\Omega |\nabla u_\nu|^2 dx,$$

то $u_\nu \to 0$ в $L_2(\Omega, \mu)$. Итак, $S[u_\nu, u_\nu] \to 0$ и, значит, форма $S_1[u, u]$ допускает замыкание в $L_2(\Omega)$. ■

Отметим, что близкие между собой достаточное и необходимое условия справедливости неравенства $\int_\Omega |u|^2 d\sigma \leqslant C \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$, $u \in \mathscr{D}(\Omega)$, где σ — произвольный заряд в Ω, содержатся в теореме 2.3.8 (при $\Phi(x, y) = |y|$, $p = 2$). Эти условия совпадают, если $\sigma \geqslant 0$, и превращаются в условие $\sup\{\pi(F, \Omega): F \subset \Omega\} < \infty$, следующее из теоремы.

2.5.3. Полуограниченность оператора Шредингера.

Теорема. 1) *Если*

$$\lim_{\delta \to 0} \sup\{\pi(F, \Omega): F \subset \Omega, \operatorname{diam}(F) \leqslant \delta\} < 1/4, \tag{1}$$

то форма $S_1[u, u]$ *полуограничена снизу в* $L_2(\Omega)$ *и допускает замыкание в* $L_2(\Omega)$.

2) *Если форма* $S_1[u, u]$ *полуограничена снизу в* $L_2(\Omega)$, *то*

$$\lim_{\delta \to 0} \sup\{\pi(F, \Omega): F \subset \Omega, \operatorname{diam}(F) \leqslant \delta\} \leqslant 1. \tag{2}$$

Доказательство. 1) Если Π — достаточно большое целое число, то существует такое $\delta > 0$, что

$$\sup\{\pi(F, \Omega): F \subset \Omega, \operatorname{diam}(F) \leqslant \delta\} \leqslant (1/4)((\Pi - 1)/(\Pi + 2))^n. \tag{3}$$

Построим в R^n кубическую решетку с ребром $H = \delta/(\Pi+2)\sqrt{n}$. Каждый куб Q_i решетки заключим в концентрические с ним кубы $Q_i^{(1)}$ и $Q_i^{(2)}$, грани которых параллельны граням Q_i. Пусть длины ребер кубов $Q_i^{(1)}$ и $Q_i^{(2)}$ равны соответственно $(\Pi + 1)H$ и $(\Pi + 2)H$.

Так как $\operatorname{diam}(Q_i^{(2)})=\delta$, то для любого компакта $F\subset Q_i^{(2)}\cap\Omega$

$$\pi(F,\ \Omega\cap Q_i^{(2)})\leqslant\pi(F,\ \Omega)\leqslant(1/4)((\Pi-1)/(\Pi+2))^n. \tag{4}$$

Обозначим через u произвольную функцию из $\mathscr{D}(\Omega)$ и через η — бесконечно дифференцируемую в R^n функцию, равную единице в $Q_i^{(1)}$ и нулю вне $Q_i^{(2)}$. В силу условия (4) и теоремы 2.5.2 имеет место неравенство

$$\int_{Q_i^{(2)}}|u\eta|^2\,d\mu\leqslant((\Pi-1)/(\Pi+2))^n\int_{Q_i^{(2)}}|\nabla(u\eta)|^2\,dx.$$

Отсюда следует

$$\int_{Q_i^{(1)}}|u|^2\,d\mu\leqslant((\Pi-1)/(\Pi+2))^n\int_{Q_i^{(2)}}(|\nabla u|^2+(c_1/H^2)|u|^2)\,dx.$$

Суммируя по i и отмечая, что кратность покрытия $\{Q_i^{(2)}\}$ не превосходит $(\Pi+2)^n$, а кратность покрытия $\{Q_i^{(1)}\}$ не меньше чем Π^n, получаем оценку

$$\int_\Omega|u|^2\,d\mu\leqslant(1-\Pi^{-n})\int_\Omega(|\nabla u|^2+c(\Pi^2/\delta^2)|u|^2)\,dx. \tag{5}$$

Итак, форма $S_1[u,\ u]$ полуограничена. Более того, если K — достаточно большая постоянная, то $S_1[u,\ u]+K\int_\Omega|u|^2\,dx\geqslant\geqslant\varepsilon\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx$, $\varepsilon>0$. Отсюда, рассуждая так же, как и при доказательстве следствия 2.5.2, легко вывести, что форма $S_1[u,\ u]$ допускает замыкание в $L_2(\Omega)$.

2) Пусть F — произвольный компакт в Ω, диаметр которого не превосходит $\delta<1$. Заключим F в шар B с радиусом δ и построим концентрический шар B' с радиусом $\sqrt{\delta}$.

Через u обозначим произвольную функцию из $\mathfrak{P}(F,\ B'\cap\Omega)$. В силу полуограниченности формы $S_1[u,\ u]$ существует такая постоянная K, что $\int_{B'}u^2\,d\mu\leqslant\int_{B'}(\nabla u)^2\,dx+K\int_{B'}u^2\,dx$. Правая часть последнего неравенства очевидно не превосходит $(1+K\lambda^{-1}\delta)\times\times\int_{B'\cap\Omega}(\nabla u)^2\,dx$, где λ — первое собственное число задачи Дирихле для оператора Лапласа в единичном шаре.

Минимизируя интеграл Дирихле и принимая во внимание, что $u=1$ на F, получаем

$$\mu(F)\leqslant(1+K\lambda^{-1}\delta)\operatorname{cap}(F,\ B'\cap\Omega).$$

В силу леммы 2.5.1 $\operatorname{cap}(F,\ B'\cap\Omega)\leqslant(1+o(1))\operatorname{cap}(F,\ \Omega)$, где $o(1)\to 0$ при $\delta\to 0$. Поэтому $\sup\{\pi(F,\ \Omega)\colon F\subset\Omega,\ \operatorname{diam}(F)\leqslant\delta\}\leqslant\leqslant 1+o(1)$. Остается перейти к пределу при $\delta\to+0$. ■

Формулируемые ниже два утверждения являются очевидными следствиями теоремы. (Второе из них содержится как частный случай в теореме 2.4.1/2.)

Следствие 1. *Условие*

$$\lim_{\delta\to 0}\sup\{\pi(F, \Omega):\ F\subset\Omega,\ \operatorname{diam}(F)\leqslant\delta\}=0 \tag{6}$$

необходимо и достаточно для полуограниченности в $L_2(\Omega)$ *формы* $S_h[u, u]$ *при всех* $h>0$.

Следствие 2. *Неравенство*

$$\int_\Omega |u|^2 d\mu\leqslant C\int_\Omega (|\nabla u|^2+|u|^2)\,dx,$$

где u — *любая функция из* $\mathscr{D}(\Omega)$ *и* C — *постоянная, не зависящая от* u, *верно в том и только в том случае, если при некотором* $\delta>0$

$$\sup\{\pi(F, \Omega):\ F\subset\Omega,\ \operatorname{diam}(F)\leqslant\delta\}<\infty. \tag{7}$$

Приведем пример, иллюстрирующий применение теоремы 2.5.2 и теоремы этого пункта к оператору Шредингера, порожденному сингулярной мерой.

Пример. Пусть M — плоское борелевское подмножество R^3. Определим на любом компакте $F\subset R^3$ меру $\mu(F)=m_2(F\cap M)$. (С точки зрения теории обобщенных функций в этом случае потенциал с точностью до знака равен δ-функции, сосредоточенной на плоском множестве M.) Тогда

$$\pi(F, R^3)=m_2(F\cap M)/\operatorname{cap}(F)\leqslant m_2(F\cap M)/\operatorname{cap}(F\cap M).$$

Так как $\operatorname{cap}(F\cap M)\geqslant 8\pi^{-1/2}[m_2(F\cap M)]^{1/2}$ (см. пример 2.3.3), то

$$\pi(F, R^3)\leqslant 8^{-1}\pi^{1/2}[m_2(F\cap M)]^{1/2} \tag{8}$$

В силу теоремы 2.5.2 достаточным условием положительности формы $S_1[u, u]=\int_{R^3}|\nabla u|^2dx-\int_M |u|^2 m_2(dx)$ является неравенство $m_2(M)\leqslant 4\pi^{-1}$. Используя следствие, из оценки (8) получаем, что форма $S_h[u, u]$ полуограничена и допускает замыкание в $L_2(R^3)$ при всех $h>0$, каково бы ни было плоское множество M.

2.5.4. Дискретность отрицательного спектра. Пусть ρ — фиксированное положительное число $\mu^{(\rho)}$ — сужение меры μ на $B_\rho=\{x:\ |x|<\rho\}$ и $\mu_{(\rho)}=\mu-\mu^{(\rho)}$. Для того чтобы исключить влияние особенностей меры μ, расположенных на конечном расстоянии, будем иногда предполагать, что любое ограниченное в $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ (или в $\mathring{L}_2^1(\Omega)$) подмножество пространства $\mathscr{D}(\Omega)$ компактно в $L_2(\mu^{(\rho)})$. Как показано в лемме 2.4.2, это условие эквивалентно равенству

$$\lim_{\delta\to 0}\sup\{\pi(F, \Omega):\ F\subset B_\rho\cap\Omega,\ \operatorname{diam}F\leqslant\delta\}=0 \tag{1}$$

при любом $\rho>0$.

Сформулируем два известных утверждения, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Лемма 1 [181]. *Пусть* $A[u, u]$ — *замкнутая квадратичная форма в гильбертовом пространстве* H *с положительной нижней гранью* $\gamma(A)$ *и областью определения* $\mathscr{D}[A]$, *а форма* $B[u, u]$ *вещественна и вполне непрерывна в* $\mathscr{D}[A]$. *Тогда форма* $A-B$ *полуограничена снизу в* H, *замкнута на* $\mathscr{D}[A]$ *и левее* $\gamma(A)$ *ее спектр дискретен.*

Лемма 2 [20]. *Для бесконечности отрицательного спектра самосопряженного оператора* A *необходимо и достаточно существование бесконечномерного линейного многообразия, на котором* $(Au, u)<0$.

Перейдем теперь к изучению условий дискретности отрицательного спектра оператора Шредингера.

Теорема. *Пусть выполнено условие* (1). *Тогда*:

1) *если*

$$\lim_{\delta\to\infty}\lim_{\rho\to\infty}\sup\{\pi(F, \Omega)\colon F\subset\Omega\setminus B_\rho,\ \operatorname{diam}(F)\leqslant\delta\}<1/4, \tag{2}$$

то форма $S_1[u, u]$ *полуограничена снизу, допускает замыкание в* $L_2(\Omega)$ *и отрицательный спектр оператора* $\tilde{S}_1$ *дискретен*;

2) *Если форма* $S_1[u, u]$ *полуограничена снизу, допускает замыкание в* $L_2(\Omega)$ *и отрицательный спектр оператора* $\tilde{S}_1$ *дискретен, то*

$$\lim_{\delta\to\infty}\lim_{\rho\to\infty}\sup\{\pi(F, \Omega)\colon F\subset\Omega\setminus B_\rho,\ \operatorname{diam}(F)\leqslant\delta\}\leqslant 1. \tag{3}$$

Доказательство. 1) Покажем, что форма $S_1[u, u]$ полуограничена снизу, допускает замыкание в $L_2(\Omega)$ и при любом положительном γ спектр оператора $\tilde{S}_1+2\gamma I$ левее γ дискретен. Отсюда будет следовать первая часть теоремы. Из (2) вытекает, что существует такое достаточно большое целое Π, что при всех $\delta>0$

$$\lim_{\rho\to\infty}\sup\{\pi(F, \Omega)\colon F\subset\Omega\setminus B_\rho,\ \operatorname{diam}(F)\leqslant\delta\}<(1/4)((\Pi-2)/(\Pi+2))^n.$$

Для каждого δ найдется столь большое $\rho=\rho(\delta)$, что выполняется неравенство

$$\sup\{\pi(F, \Omega)\colon F\subset\Omega\setminus B_\rho,\ \operatorname{diam}(F)\leqslant\delta\}<(1/4)((\Pi-1)/(\Pi+2))^n.$$

Отсюда

$$\sup\left\{\frac{\mu_{(\rho)}(F)}{\operatorname{cap}(F, \Omega)}\colon F\subset\Omega,\ \operatorname{diam}(F)\leqslant\delta\right\}<\frac{1}{4}\left(\frac{\Pi-1}{\Pi+2}\right)^n.$$

Если здесь меру $\mu_{(\rho)}$ заменить мерой μ, то мы получим условие (2.5.3/3), использованное в первой части теоремы 2.5.8 для доказательства неравенства (2.5.3/5). Перепишем это неравенство, заменив μ на $\mu_{(\rho)}$:

$$\int_\Omega |u|^2\,d\mu_{(\rho)}\leqslant(1-\Pi^{-n})\int_\Omega(|\nabla u|^2+c(\Pi^2/\delta^2)|u|^2)\,dx. \tag{4}$$

Обозначив через γ произвольное положительное число, найдем $\delta>0$ из равенства $\Pi^2(1-\Pi^{-n})\delta^{-2}=\gamma$ и для этого δ определим соответствующее ρ. Тогда

$$\int_\Omega |u|^2 d\mu_{(\rho)} \leqslant (1-\Pi^{-n})\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \gamma\int_\Omega |u|^2 dx.$$

Следовательно, форма

$$A[u, u]=\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega |u|^2 d\mu_{(\rho)} + 2\gamma\int_\Omega |u|^2 dx$$

мажорирует форму

$$\Pi^{-n}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \gamma\int_\Omega |u|^2 dx.$$

Этот факт позволяет утверждать, что форма $A[u, u]$ имеет положительную нижнюю грань γ и допускает замыкание в $L_2(\Omega)$. Замыкание $A[u, u]$ обозначим через $\bar{A}[u, u]$. Очевидно, что область определения формы $\bar{A}[u, u]$ совпадает с $\mathring{W}_2^1(\Omega)$.

В силу (1) и следствия 2.5.3/2 форма $B[u, u]=\int_\Omega |u|^2 d\mu^{(\rho)}$ непрерывна в $W_2^1(\Omega)$ и допускает замыкание $\bar{B}[u, u]$ в $\mathring{W}_2^1(\Omega)$. По лемме 2.4.2 форма $\bar{B}[u, u]$ вполне непрерывна в $\mathring{W}_2^1(\Omega)$.

Остается применить лемму 1 к формам $\bar{A}[u, u]$ и $\bar{B}[u, u]$.

2) Допустим, что при некотором δ

$$\limsup_{\rho\to\infty}\{\pi(F, \Omega): F\subset\Omega\setminus B_\rho,\ \operatorname{diam}(F)\leqslant\delta\}>1+\alpha,\ \alpha>0.$$

Тогда существует такая уходящая в бесконечность последовательность компактов F_ν, $\operatorname{diam}(F_\nu)\leqslant\delta$, что

$$\mu(F_\nu)>(1+\alpha)\operatorname{cap}(F_\nu, \Omega). \tag{5}$$

Заключим F_ν в шар $B_\delta^{(\nu)}$ с радиусом δ. Через $B_\rho^{(\nu)}$ обозначим концентрический шар с достаточно большим радиусом ρ. Величина ρ будет уточнена в дальнейшем. Очевидно, что, не теряя общности, можно считать шары $B_\delta^{(\nu)}$ непересекающимися.

По лемме 2.5.2

$$\operatorname{cap}(F_\nu, B_\rho^{(\nu)}\cap\Omega)\leqslant(1+\varepsilon(\rho))\operatorname{cap}(F_\nu, \Omega),$$

где $\varepsilon(\rho)\to 0$ при $\rho\to\infty$. Отсюда и из (5) получаем

$$\mu(F_\nu)>K\operatorname{cap}(F_\nu, B_\rho^{(\nu)}\cap\Omega), \tag{6}$$

где введено обозначение $K=(1+\alpha)/(1+\varepsilon(\rho))$.

Пусть число ρ выбрано так, чтобы постоянная K была больше единицы. Из неравенства (6) следует, что существует такая функция u_ν класса $\mathfrak{P}(F_\nu, B_\rho^{(\nu)}\cap\Omega)$, что $\int_{B_\rho^{(\nu)}} u_\nu^2\, d\mu > K\int_{B_\rho^{(\nu)}} (\nabla u_\nu)^2 dx.$

Отсюда $S_1[u_\nu, u_\nu] < -(K-1)(\lambda/\rho^2)\int_\Omega u_\nu^2\,dx$, где λ — первое собственное число задачи Дирихле для оператора Лапласа в единичном шаре.

Теперь из леммы 2 следует, что левее $-(K-1)\lambda\rho^{-2}$ спектр оператора $\tilde{S}_1$ имеет точку сгущения. Мы пришли к противоречию.

2.5.5. Дискретность отрицательного спектра оператора $\tilde{S}_h$ при всех h. Следующее утверждение содержит одновременно необходимое и достаточное условие дискретности отрицательного спектра оператора $\tilde{S}_h$ при всех $h>0$. Отметим, что если в теореме 2.5.4 мы дополнительно предполагали, что мера μ не имеет сильных особенностей на конечном расстоянии (условие (2.5.1/3)), то соответствующий критерий для всего семейства операторов $\{\tilde{S}_h\}_{h>0}$ установлен для любой неотрицательной меры.

Следствие. *Условия*

$$\lim_{\delta\to 0}\sup\{\pi(F, \Omega)\colon F\subset\Omega,\ \operatorname{diam}(F)\leqslant\delta\}=0, \tag{1}$$

$$\lim_{\rho\to\infty}\sup\{\pi(F, \Omega)\colon F\subset\Omega\setminus B_\rho,\ \operatorname{diam}(F)\leqslant 1\}=0 \tag{2}$$

необходимы и достаточны для полуограниченности формы $S_h[u, u]$ в $L_2(\Omega)$ и дискретности отрицательного спектра оператора $\tilde{S}_h$ при всех $h>0$.*

Доказательство. Достаточность. Введем обозначение:

$$l(\delta)=\lim_{\rho\to\infty}\sup\{\pi(F, \Omega)\colon F\subset\Omega\setminus B_\rho,\ \operatorname{diam}(F)\leqslant\delta\}.$$

Прежде всего отметим, что если выполнено условие (1), то выполнено и (2.5.4/1). Поэтому согласно теореме 2.5.4 условие $l(\delta)\equiv 0$, соединенное с (1), достаточно для полуограниченности формы $S_h[u, u]$ и дискретности отрицательного спектра оператора $\tilde{S}_h$ при всех $h>0$.

Для доказательства достаточности условий $l(1)=0$ и (1) представим произвольный компакт F, диаметр которого не превосходит δ', $\delta'>\delta$, в виде $\bigcup_{\nu=1}^{N} F_\nu$, где $\operatorname{diam}(F_\nu)\leqslant\delta$ и постоянная N зависит только от δ'/δ и n. Так как $\operatorname{cap}(F, \Omega)$ — неубывающая функция F, то

$$\mu(F)/\operatorname{cap}(F, \Omega)\leqslant\sum\nolimits_{\nu=1}^{N}\mu(F_\nu)/\operatorname{cap}(F_\nu, \Omega).$$

Отсюда и из монотонности $l(\delta)$ непосредственно следуют неравенства $l(\delta)\leqslant l(\delta')\leqslant Nl(\delta)$, которые доказывают эквивалентность условий $l(\delta)\equiv 0$ и $l(1)=0$.

*) Отметим, что из полуограниченности формы $S_h[u, u]$ при всех $h>0$ следует, что она допускает замыкание в $L_2(\Omega)$ при всех $h>0$.

Необходимость. Если форма $S_h[u, u]$ при всех $h>0$ полуограничена, то в силу следствия 2.5.3/1 выполнено условие (1), а вместе с ним и (2.5.4/1). Но при последнем условии из теоремы 2.5.4 следует необходимость условия $l(\delta)\equiv 0$, что эквивалентно $l(1)=0$. ■

§ 2.6. ОБ ОДНОЙ ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЕ

В предыдущих параграфах этой главы было показано, что довольно общие неравенства, содержащие интеграл $\int_\Omega [\Phi(x, \nabla u)]^p dx$, равносильны изопериметрическим неравенствам между (p, Φ)-емкостью и мерами. Хотя такие критерии и представляют принципиальный интерес, следует отметить, что их проверка в конкретных случаях часто оказывается трудной. Даже для довольно простых квадратичных форм $[\Phi(x, \xi)]^2=\sum_{i, j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j$ оценки соответствующих емкостей через меры неизвестны.

Тем самым общие необходимые и достаточные условия, полученные в настоящей главе, не умаляют значения прямых, не использующих емкости методов исследования интегральных неравенств. В настоящем пункте мы иллюстрируем это на примере квадратичной формы $[\Phi(x, \xi)]^2=(|x_n|+|x'|^2)\xi_n^2+|\xi'|^2$, где $x'=(x_1, \ldots, x_{n-1})$, $\xi'=(\xi_1', \ldots, \xi_{n-1}')$. Согласно следствию 2.3.3 неравенство

$$\int_{R^{n-1}}[v(x', 0)]^2 dx' \leqslant c\int_{R^n}[\Phi(x, \nabla u)]^2 dx \tag{1}$$

имеет место для всех $u\in\mathscr{D}(R^n)$ в том и только в том случае, если $\mathrm{mes}_{n-1}(\{x\in g,\ x_n=0\})\leqslant c\,(2, \Phi)\text{-cap}(g)$ для любого допустимого множества g. Непосредственный вывод последнего изопериметрического неравенства автору неизвестен, однако оценка (1) верна и будет сейчас доказана.

Теорема 1. *Для всех $u\in\mathscr{D}(R^n)$ справедливо неравенство* (1), *где* $[\Phi(x, \nabla u)]^2=(|x_n|+|x'|^2)(\partial u/\partial x_n)^2+\sum_{i=1}^{n-1}(\partial u/\partial x_i)^2$.

Доказательство. Обозначим интеграл в правой части неравенства (1) через $Q(u)$. Для любого δ из интервала $(0, 1/2)$ имеем

$$\int_{R^{n-1}}|u(x', 0)|^2 dx' \leqslant 2\int_{R^n}\frac{(|x_n|+|x_n'|^2)^{1/2}}{|x_n|^{(1-\delta)/2}|x'|^{\delta}}\left|u\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|dx\leqslant$$
$$\leqslant 2[Q(u)]^{1/2}\left(\int_{R^n}|x_n|^{\delta-1}|x'|^{-2\delta}|u|^2 dx\right)^{1/2}. \tag{2}$$

Для того чтобы оценить последний интеграл, воспользуемся следующим известным обобщением неравенства Харди и Литтлвуда:

$$\int_{R^{n-1}}\left(\int_{R^{n-1}}\frac{f(y)\,dy}{|x'-y|^{n-1-\delta}}\right)^2\frac{dx'}{|x'|^{2\delta}}\leqslant c\int_{R^{n-1}}[f(y)]^2 dy. \tag{3}$$

(Доказательство этой оценки можно найти в работе П. И. Лизоркина [56] или получить как следствие теоремы 8.3.) Так как свертке с ядром $|x'|^{\delta+1-n}$ в R^{n-1} соответствует умножение на $|\xi'|^{-\delta}$ преобразования Фурье, то неравенство (3) можно переписать в виде

$$\int_{R^{n-1}} |u|^2 |x'|^{-2\delta} dx' \leqslant c \int_{R^{n-1}} [(-\Delta_{x'})^{\delta/2} u]^2 dx',$$

где $(-\Delta_{x'})^{\delta/2}$ — дробная степень оператора Лапласа. Теперь находим, что правая часть в (2) превосходит

$$c\left(Q(u) + \int_{R^n} |x_n|^{\delta-1} [(-\Delta_{x'})^{\delta/2} u]^2 dx\right). \tag{4}$$

Из почти очевидной оценки $\int_0^\infty g^2 t^{\delta-1} dt \leqslant c\left(\int_0^\infty (g')^2 t\, dt + \int_0^\infty g^2 dt\right)$ следует неравенство

$$|\xi'|^{2\delta} \int_{R^1} |(F_{x'\to\xi'} u)(\xi', x_n)|^2 |x_n|^{\delta-1} dx_n \leqslant$$
$$\leqslant c\left(\int_{R^1} |(F_{x'\to\xi'}(\partial u/\partial x_n))(\xi', x_n)|^2 |x_n| dx_n + |\xi'|^2 \times\right.$$
$$\left.\times \int_{R^1} |(F_{x'\to\xi'} u)(\xi', x_n)|^2 dx_n\right),$$

где $F_{x'\to\xi'}$ — преобразование Фурье в R^{n-1}. Поэтому второй интеграл в (4) не больше чем $c\int_{R^n} (|x_n|(\partial u/\partial x_n)^2 + (\nabla_{x'} u)^2)\, dx$. ■

Следующее утверждение показывает точность теоремы 1.

Теорема 2. *Пространство сужений на* $R^{n-1} = \{x \in R^n \colon x_n = 0\}$ *функций из множества* $\{u \in \mathscr{D}(R^n)\colon Q(u) + \|u\|^2_{L_2(R^n)} \leqslant 1\}$ *не является относительно компактным в* $L_2(B_1^{(n-1)})$, *где* $B_\rho^{(n-1)} = \{x' \in R^{n-1}\colon |x'| < \rho\}$.

Доказательство. Обозначим через φ функцию из $C_0^\infty(B_1^{n-1})$, такую, что $\varphi(y) = \varphi(-y)$, $\|\varphi\|_{L_2(R^{n-1})} = 1$, и определим последовательность $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ равенством $\varphi_m(y) = m^{(n-1)/2}\varphi(my)$. Так как эта последовательность нормирована и слабо сходится в $L_2(B_1^{(n-1)})$ к нулю, то из нее нельзя выделить последовательность, сходящуюся в $L_2(B_1^{(n-1)})$.

Введем еще последовательность $\{v_m\}_{m=1}^\infty$ функций в R^n:

$$v_m(x) = F^{-1}_{\eta\to x'} \exp\{-\langle\eta\rangle^2 |x_n|\} F_{x'\to\eta}\varphi_m,$$

где $\eta \in R^{n-1}$ и $\langle\eta\rangle = (|\eta|^2 + 1)^{1/2}$.

Рассмотрим квадратичную форму

$$T(u) = \int_{R^n} [(|x_n| + |x'|^2) |\partial u/\partial x_n|^2 + |\nabla_{x'} u|^2 + |u|^2]\, dx.$$

Очевидно, что

$$T(u) = (2\pi)^{1-n} \int_{R^n} (|x_n| |\partial Fu/\partial t|^2 + |(\partial/\partial t)\nabla_\eta Fu|^2 + \langle\eta\rangle^2 |Fu|^2)\, d\eta\, dx_n.$$

Дифференцируя функцию Fv_m, из последнего равенства получаем, что $T(v_m)$ не превосходит

$$c\int_{R^n}[(1+\langle\eta\rangle^2|x_n|+\langle\eta\rangle^4|x_n|^3)\langle\eta\rangle^2|F\varphi_m|^2+ \\ +\langle\eta\rangle^4|\nabla F\varphi_m|^2]\exp(-2\langle\eta\rangle^2|x_n|)\,d\eta\,dx_n.$$

Отсюда находим

$$T(v_m)\leqslant c\int_{R^{n-1}}(\langle\eta\rangle^2|\nabla F\varphi_m|^2+|F\varphi_m|^2)\,d\eta= \\ =c_1\sum_{i=1}^{n-1}\|x_i\varphi_m\|^2_{W_2^1(R^{n-1})}+\|\varphi_m\|^2_{L_2(R^{n-1})}\leqslant \text{const}.$$

Пусть $\psi\in C_0^\infty(B_2^{(n-1)})$, $\psi=1$ на $B_1^{(n-1)}$. Очевидно, что $(v_m\psi)|_{R^{n-1}}=\varphi_m$ и $T(v_m\psi)\leqslant \text{const}$. Последовательность $\{v_m\psi/(T(v_m\psi))^{1/2}\}_{m=1}^\infty$ и доставляет требуемый контрпример. ■

§ 2.7. О ПОПОЛНЕНИИ В МЕТРИКЕ ОБОБЩЕННОГО ИНТЕГРАЛА ДИРИХЛЕ

Расмсотрим квадратичную форму

$$S[u,\ u]=\int_{R^n}(a_{ij}(x)(\partial u/\partial x_i)(\partial u/\partial x_j)+u^2)\,dx,$$

где $\|a_{ij}(x)\|_{i,j=1}^n$ — равномерно положительно определенная матрица, элементы которой — вещественные гладкие функции. По паре оди наковых индексов производится суммирование от 1 до n.

Пополнение пространства $C_0^{0,1}$ по норме $(S[u,\ u])^{1/2}$ обозначим через $\mathring{H}(S)$. Введем еще пространство $H(S)$, полученное пополнением множества функций из $C^{0,1}$ с конечным интегралом $S[u,u]$ по норме $(S[u,\ u])^{1/2}$.

Если элементы матрицы $\|a_{ij}\|_{i,j=1}^n$ — ограниченные функции, то $\mathring{H}(S)=\mathring{W}_2^1$ и $H(S)=W_2^1$ и оба эти пространства очевидно совпадают. Известно, что $\mathring{H}(S)=H(S)$ и в том случае, если функции a_{ij} не слишком быстро растут на бесконечности [7]. Здесь рассматривается вопрос о совпадении $\mathring{H}(S)$ и $H(S)$ в общей ситуации.

Пусть $E\subset R^n$. Будем говорить (только в этом параграфе), что E — множество конечной $H(S)$-емкости, если существует функция $u\in C^{0,1}\cap H(S)$, равная единице на E.

Теорема 1. *Пространства $\mathring{H}(S)$ и $H(S)$ совпадают в том и только в том случае, если, какова бы ни была область G конечной $H(S)$-емкости, существует последовательность $\{\varphi_m\}_{m\geqslant 1}$ функций из $C_0^{0,1}$, сходящаяся по мере к единице на G и такая, что*

$$\lim_{m\to\infty}\int_G a_{ij}(x)(\partial\varphi_m/\partial x_i)(\partial\varphi_m/\partial x_j)\,dx=0. \tag{1}$$

Прежде чем доказывать эту теорему, отметим, что если G — ограниченная область, то последовательность $\{\varphi_m\}_{m\geqslant 1}$ всегда существует и можно положить $\varphi_m=\varphi$, где $\varphi\in C_0^{0,1}$, $\varphi=1$ на G.

Доказательство. Достаточность. Покажем, что любую функцию $u\in C^{0,1}\cap H(S)$ можно приблизить в $H(S)$ функциями из $\mathring{H}(S)$. Без ограничения общности можно допустить, что $u\geqslant 0$.

Отметим сначала, что если $t>0$, то $L_t=\{x\colon\ u(x)>t\}$ — множество конечной $H(S)$-емкости. Действительно, функция $v(x)=t^{-1}\min\{u(x),\ t\}$ равна единице на L_t, удовлетворяет условию Липшица и $S[v,\ v]\leqslant t^{-2}S[u,\ u]<\infty$.

Из теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла следует сходимость последовательностей $\min\{u,\ m\}$, $(u-m^{-1})_+$, $m=1,\ 2,\ \ldots,$ в пространстве $H(S)$ к функции u (см. 3.1.2). Поэтому мы можем с самого начала считать функцию u ограниченной и равной нулю вне открытого множества G конечной $H(S)$-емкости.

Обозначим через G_j компоненты множества G и определим последовательность

$$u^{(m)}(x)=\begin{cases} u(x) \ \text{при}\ x\in \bigcup\limits_{j\leqslant m} G_j,\\ 0 \ \text{при}\ x\in R^n\diagdown \bigcup\limits_{j\leqslant m} G_j,\end{cases}$$

$m=1,\ 2,\ \ldots$ Очевидно, что $u^{(m)}\to u$ при $m\to\infty$ в $H(S)$. Так как каждая из функций $u^{(m)}$ обращается в нуль вне конечного числа областей, то мы можем без ограничения общности считать множество G областью.

Пусть $\{\varphi_m\}$ — построенная для области G последовательность функций, которая удовлетворяет условиям теоремы. Заменяя $\{\varphi_m\}$ последовательностью $\{\psi_m\}$, определенной равенствами: $|\psi_m|=\min\{2,\ |\varphi_m|\}$, $\operatorname{sgn}\psi_m=\operatorname{sgn}\varphi_m$, получаем ограниченную последовательность с теми же свойствами. Очевидно, что $\psi_m u\in\mathring{H}(S)$ и $\psi_m u\to u$ в L_2. Кроме того,

$$\int_{R^n} a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}(u-u\psi_m)\frac{\partial}{\partial x_j}(u-u\psi_m)\,dx\leqslant 2\int_G (1-\psi_m)^2 a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\,dx+ \\ +2\int_G u^2 a_{ij}\frac{\partial\psi_m}{\partial x_i}\frac{\partial\psi_m}{\partial x_j}\,dx. \qquad (2)$$

Так как последовательность функций $(1-\psi_m)^2\sum_{i,j}a_{ij}(\partial u/\partial x_i)\times (\partial u/\partial x_j)$ сходится к нулю по мере m_n в G и мажорируется суммируемой функцией $9\sum_{i,j}a_{ij}(\partial u/\partial x_i)(\partial u/\partial x_j)$, то первый интеграл справа в (2) стремится к нулю. Сходимость к нулю второго интеграла следует из ограниченности функции u и равенства (1). Итак, $u\psi_m\to u$ в $H(S)$. Требуемая аппроксимация построена.

Необходимость. Пусть G — любая область в R^n конечной $H(S)$-емкости. Обозначим через u функцию из $C^{0,1}\cap H(S)$, равную единице на G. Вследствие совпадения $H(S)$ и $\mathring{H}(S)$ эту функцию можно аппроксимировать в $H(S)$ последовательностью $\{\varphi_m\}_{m\geqslant 1}$ функций из $C_0^{0,1}$. Так как $u=1$ на G и $\varphi_m\to u$ в $L_2(G)$, то $\varphi_m\to 1$ в G по мере. Кроме того,

$$\int_G a_{ij}\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_j}\,dx=\int_G a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}(u-\varphi_m)\frac{\partial}{\partial x_j}(u-\varphi_m)\,dx\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}0. \blacksquare$$

Хотя полученный результат мало нагляден, он облегчает проверку конкретных условий равенства или неравенства пространств $H(S)$ и $\mathring{H}(S)$, к которой мы переходим.

Теорема 2 [67]. *Если $n=1$ или $n=2$, то $H(S)=\mathring{H}(S)$.*

Доказательство. Имея в виду теорему 1 и сказанное сразу же после формулировки этой теоремы, мы придем к равенству $\mathring{H}(S)=\mathring{H}(S)$, если покажем, что любая область G конечной $H(S)$-емкости ограничена. При $n=1$ это очевидно. Пусть $n=2$ и $u\in C^{0,1}\cap H(S)$, $u=1$ на G.

Обозначим через O и P произвольные точки области G и направим ось Ox_2 от точки O к точке P. Тогда

$$S[u,\ u]\geqslant c\int_0^{|P|}dx_2\int_{R^1}((\partial u/\partial x_1)^2+u^2)\,dx_1\geqslant c_1\int_0^{|P|}\max_{x_1}[u(x_1,\ x_2)]^2\,dx_2.$$

Ввиду того что G — область и $u=1$ на G, справедливо неравенство $\max\limits_{x_1}[u(x_1,\ x_2)]^2\geqslant 1$. Следовательно, $\operatorname{diam}(G)\leqslant cS[u,\ u]$. $\blacksquare$

Следующее утверждение показывает, что при $n\geqslant 3$ ограничения на форму $S[u,\ u]$ необходимы. Этот результат (с точностью до изложения) принадлежит Н. Н. Уральцевой [124].

Теорема 3. *Если $n>2$, то существует такая форма $S[u,\ u]$, что $H(S)\neq\mathring{H}(S)$.*

Доказательство. 1) Рассмотрим область $G=\{x\colon 0<x_n<\infty,\ |x'|<f(x_n)\}$, где $x'=(x_1,\ \ldots,\ x_{n-1})$ и f — положительная убывающая функция из $C^\infty[0,\ \infty)$, $f(0)<1$. При $x\,\overline{\in}\,G$ положим $a_{ij}(x)=\delta_i^j$.

Независимо от того, как функции a_{ij} определены в области G, для любой функции $u\in C^{0,1}$, равной единице на G, справедливо равенство $S[u,\ u]=\|u\|^2_{W_2^1}$. Отсюда следует, что G является областью конечной $H(S)$-емкости в том и только в том случае, если $\operatorname{cap}(G)<\infty$ (здесь, как и ранее, cap — емкость Винера, т. е. 2-cap). Очевидно, что

$$\operatorname{cap}(G)\leqslant\sum_{j=0}^{\infty}\operatorname{cap}(\{x\in G\colon\ j\leqslant x_n\leqslant j+1\})\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{j=0}^{\infty}\operatorname{cap}(\{x\colon\ |x'|\leqslant f(j),\ j\leqslant x_n\leqslant j+1\}).$$

Отсюда из известных оценок емкости цилиндра ([50, с. 354—355], или предложение 9.1.3/1 в настоящей книге) получаем оценки

$$\operatorname{cap}(G) \leqslant c \sum\nolimits_{j=0}^{\infty} [f(j)]^{n-3}, \text{ если } n > 3,$$
$$\operatorname{cap}(G) \leqslant c \sum\nolimits_{j=0}^{\infty} |\log f(j)|^{-1}, \text{ если } n = 3.$$

Следовательно, если мы предположим, что $\int_0^\infty [f(t)]^{n-3}\,dt < \infty$ при $n > 3$ и $\int_0^\infty |\log f(t)|^{-1}\,dt < \infty$ при $n = 3$, то G будет областью конечной $H(S)$-емкости.

2) Внутри области G определим квадратичную форму $a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j$ равенством

$$a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j = \xi^2 + (g(x_n)/f(x_n))^{n-1}\eta(x)\left(f'(x_n)\sum\nolimits_{i=1}^{n-1} x_i\xi_i + \xi_n\right)^2,$$

где $\eta \in C_0^\infty(G)$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, $\eta(x) = 1$ на множестве $\{x\colon 1 < x_n < \infty, |x'| < {}^1/_2 f(x_n)\}$ и g — любая положительная функция на $[0, \infty)$, для которой $\int_0^\infty [g(t)]^{1-n}\,dt < \infty$.

Отобразим G на цилиндр $\{y\colon 0 < y_n < \infty, |y'| < 1\}$ при помощи замены переменных $x_n = y_n$, $x_i = f(y_n)\,y_i$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Очевидно, что

$$\int_G (g(x_n)/f(x_n))^{n-1}\,\eta(x)\left(f'(x_n)\sum\nolimits_{i=1}^{n-1} x_i\,\partial\varphi/\partial x_i + \partial\varphi/\partial x_n\right)^2 dx \geqslant$$
$$\geqslant \int_C [g(y_n)]^{n-1}(\partial\varphi/\partial y_n)^2\,dy,$$

где $C = \{y\colon 1 < y_n < \infty, |y'| < 1/2\}$. Применяя к последнему интегралу неравенство Коши, получаем

$$\int_1^\infty [g(t)]^{1-n}\,dt \int_G a_{ij}(\partial\varphi/\partial x_i)(\partial\varphi/\partial x_j)\,dx \geqslant \int_{|y'|<{}^1/_2}\left(\int_1^\infty |\partial\varphi/\partial y_n|\,dy_n\right)^2 dy'.$$

Если $\varphi \in C_0^{0,1}$, то правая часть не меньше чем

$$\int_{|y'|<{}^1/_2} \max_{1<y_n<\infty} [\varphi(y', y_n)]^2\,dy' \geqslant \int_{C_1} \varphi^2\,dy,$$

где $C_1 = \{y \in C\colon y_n < 2\}$. Переходя в правой части к переменным $x_1, \ldots, x_n$, приходим к оценке

$$\int_1^\infty [g(t)]^{1-n}\,dt \int_G a_{ij}(\partial\varphi/\partial x_i)(\partial\varphi/\partial x_j)\,dx \geqslant \int_{G_1} \varphi^2 [f(x_n)]^{n-1}\,dx,$$

где $G_1 = \{x\colon |x'| < {}^1/_2 f(x_n), 1 < x_n < 2\}$. Поэтому для любой последовательности $\{\varphi_m\}_{m\geqslant 1}$ функций из $\mathring{C}^{0,1}$, сходящейся по мере в области G к единице, $\varliminf_{m\to\infty} \int_G a_{ij}(\partial\varphi_m/\partial x_i)(\partial\varphi_m/\partial x_j)\,dx > 0$. Остается воспользоваться теоремой 1.

Теорема 3 имеет интересное приложение к вопросу о самосопряженности в $L_2(R^n)$, $n \geqslant 3$, эллиптического оператора. Пусть оператор $u \to S_0 u = -(\partial/\partial x_i)(a_{ij}(x)\partial u/\partial x_j) + u$ определен на $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}_0$. Если $\|a_{ij}\|^n_{i,j=1}$ — матрица, построенная в теореме 3, то $H(S) = \overset{\circ}{H}(S)$ и, следовательно, существует функция $w \in H(S)$, отличная от тождественного нуля и ортогональная в $H(S)$ к любой функции $v \in C^{\infty}_0$:

$$0 = \int_{R^n} (a_{ij}(\partial w/\partial x_i)(\partial v/\partial x_j) + wv)\, dx = \int_{R^n} w S_0 v\, dx.$$

Поэтому область значений замыкания $\bar{S}_0$ оператора S_0 не совпадает с L_2. Если $\bar{S}_0$ — самосопряженный оператор, то $w \in \mathscr{D}(\bar{S}_0)$ и $\bar{S}_0 w = 0$. Отсюда, конечно, следует, что $w = 0$. Полученное противоречие означает, что оператор $\bar{S}_0$ несамосопряженный. Итак, одного требования равномерной положительной определенности матрицы $\|a_{ij}(x)\|^n_{i,j=1}$ не достаточно для самосопряженности оператора $\bar{S}_0$ [124].

Отметим в заключение, что теме этого параграфа посвящена также работа С. А. Лаптева [51], в которой рассматривается квадратичная форма $S[u, u] = \int_{R^n} (\alpha(x)(\nabla u)^2 + u^2)\, dx$, где $\alpha(x) \geqslant \geqslant \mathrm{const} > 0$. В работе [51] приведен пример функции α, для которой $H(S) \neq \overset{\circ}{H}(S)$, и показано, что совпадение $H(S)$ и $\overset{\circ}{H}(S)$ имеет место в каждом из следующих случаев: (i) α не убывает по $|x|$; (ii) $\alpha(x) = O(|x|^2 + 1)$, (iii) $n = 3$ и α зависит только от $|x|$.

§ 2.8. КОММЕНТАРИИ К ГЛАВЕ 2

§ 2.1. Большая часть результатов этого параграфа получена в статье автора [71] (см. также В. Г. Мазья [213]). Содержание п. 2.1.5 взято из статьи В. Г. Мазьи [78], а п. 2.1.6 публикуется впервые. Предположение о существовании неравенства (2.1.6/3) было сообщено автору Г. М. Тащияном, который установил близкую оценку в [122] при помощи приема, отличного от изложенного в п. 2.1.6. Вообще оценки типа (2.1.6/4) известны (за исключением, может быть, некоторых значений параметров p, q, l, α), но доказаны другими методами (см. например, В. П. Ильин [32]). Теорема 2.1.6 при $p = 2$ доказана в работе автора [74], где она оказалась полезной при исследовании вырождающейся задачи с косой производной.

§ 2.2. Емкость, порожденная интегралом $\int_\Omega f(x, u, \nabla u)\, dx$, введена Шоке [161], где она служит для иллюстрации общей теории емкостей. Здесь изложение следует статье автора [71].

Лемма 2.2.2/1 при $p = 2$, $\Phi(x, \xi) = |\xi|$ представляет собой так называемый принцип Дирихле с предписанными поверхностями уровня, обоснованный в книге Полиа и Сеге [108, с. 74—76], при жестких предположениях относительно множеств уровня функции u. Использованные в упомянутой книге соображения в применении к рассмотренному в § 2.2 общему случаю являются весьма убедительными эвристическими рассуждениями. В той же книге выводится изопериметрическое свойство емкости (см. (2.2.3/5) и (2.2.3/6)).

Лемма 2.2.5 — непосредственное обобщение аналогичного утверждения Флеминга [177] о 1-емкости.

§§ 2.3 и 2.4. Основные результаты этих параграфов получены автором в [65] при $p=2$, $\Phi(x, \xi)=|\xi|$, $M(u)=|u|$ и в [71] в общем случае. К неравенствам типа (2.3.1/6) мы еще вернемся в главе 7.

Свойства симметризации изучены в книгах Полиа и Сеге [108] и Хадвигера [188]. См. также книгу Хеймана [129], где рассматриваются, правда, только круговая симметризация и симметризация относительно прямой в R^2. Однако доказательства Хеймана обобщаются на n-мерный случай.

Неравенство (2.3.3/3) (с точностью до константы) есть неравенство Соболева ($p>1$) и Гальярдо ($p=1$). Неулучшаемое значение константы при $p=1$ (см. (1.4.2/8)) независимо и одним и тем же методом найдено Федерером и Флемингом [176] и автором [60].

Приведенное в замечании 2.3.1 точное значение константы при $p>1$ получено Г. Таленти [250] и Т. Обеном [149] (случай $n=3$, $p=2$ ранее рассмотрен Розеном [240]).

§ 2.5. Изложение следует работе автора [65]. Изучению природы спектра многомерного оператора Шредингера прямыми методами качественного спектрального анализа посвящены работы К. Фридрихса, И. М. Глазмана, А. М. Молчанова, М. Ш. Бирмана и многих других авторов. Первым результатом в этом направлении была теорема Фридрихса о дискретности спектра оператора $-\Delta+q(x)$ левее точки $\varliminf_{x\to\infty} q(x)$ [181]. А. М. Молчанов [99] нашел необходимое и достаточное условие компактности вложения пространства, полученного пополнением $\mathscr{D}(\Omega)$ по норме

$$\left\{\int_\Omega (|\nabla u|^2+q(x)\,|u|^2)\,dx\right\}^{1/2}, \quad q(x)\geqslant 0,$$

в $L_2(\Omega)$ и тем самым установил критерий дискретности спектра задачи Дирихле для оператора Шредингера с полуограниченным снизу потенциалом. В этой работе Молчанова впервые была выяснена важность понятия емкости Винера при изучении характера спектра сингулярных эллиптических операторов. Ряд результатов о спектре оператора Шредингера с помощью так называемого метода расщепления получен в монографии И. М. Глазмана [20]; М. Ш. Бирман [7, 8] установил ряд новых фактов теории возмущений квадратичных форм в гильбертовом пространстве, из которых следует, в частности, что дискретность (конечность) при всех $h>0$ отрицательного спектра оператора $S_h=-h\Delta-p(x)$ в R^n при $p(x)\geqslant 0$ эквивалентна компактности вложения $W_2^1(R^n)$ $(\mathring{L}_2^1(R^n))$ в пространство с нормой $\left(\int_{R^n}|u|^2 p(x)\,dx\right)^{1/2}$. Исходя из таких критериев, Бирман вывел достаточные или необходимые условия дискретности, конечности или бесконечности при всех $h>0$ отрицательного спектра оператора S_h. Формулировки этих условий не используют понятия емкости. Результаты работы М. Ш. Бирмана [8] были развиты в статье автора [65]. Кроме результатов, изложенных в пп. 2.5.2—2.5.5, в [65] найдены критерии конечности отрицательного спектра оператора $\hat{S}_1$, а также критерии бесконечности и конечности отрицательного спектра оператора $\hat{S}_h$ при всех h. Близкие вопросы позднее рассмотрены в диссертации К. Ханссона [191].

Теоремы из § 2.5 оказались полезными при изучении асимптотического поведения собственных чисел задачи Дирихле для оператора Шредингера. В работе Г. В. Розенблюма [112] рассматривается оператор Шредингера в R^n: $H=-\Delta+q(x)$ с потенциалом $q=q_+-q_-$, $q_-\in L_{n/2,\,\mathrm{loc}}$, $n\geqslant 3$. Сформулируем один из результатов этой работы. Наложим на пространство решетку кубов с ребром d и определим множество $F(d)$ как объединение тех кубов Q решетки, для которых

$$\sup\left\{\left(\int_E q_-(x)\,dx/\mathrm{cap}(E)\right):\ E\subset 2Q\right\}>\gamma,$$

где $2Q$ — концентрический подобно расположенный куб вдвое большего размера, γ — некоторое число. Тогда при $\lambda>0$ для числа $N(-\lambda, H)$ собственных значений оператора H, меньших $-\lambda$, верна оценка $N(-\lambda, H)\leqslant c_1\int_{F(c_2\lambda^{-1/2})}(c_3\lambda-q(x))_+^{n/2}+dx$, где c_1, c_2, c_3 — некоторые константы, зависящие лишь от n.

Результаты § 2.6 получены автором. Из доказательства теоремы 2.6/2 следует отсутствие дискретности спектра задачи Стеклова:

$$-\sum_{i,j=1}^n\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\right)+a(x)u=0 \text{ в } \Omega,$$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\cos(\nu, x_j)\,\partial u/\partial x_i=\lambda u \text{ на } \partial\Omega$$

при условии, что граница области Ω хотя бы в одной точке является характеристической. Здесь ν — нормаль к $\partial\Omega$, матрица $\|a_{ij}\|_{i,j=1}^n$ неотрицательна, $a(x)>0$, коэффициенты a_{ij}, a и поверхность $\partial\Omega$ гладкие. Рассмотренный в § 2.7 вопрос поставлен М. Ш. Бирманом.

Глава 3

О СУММИРУЕМОСТИ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВА $L_1^1(\Omega)$

В настоящей главе получены необходимые и достаточные условия непрерывности и компактности оператора вложения пространства $L_1^1(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$, характеризующие множество Ω.

§ 3.1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

3.1.1. Обозначения. В этой главе, а также в главах 4 и 5 будем использовать обозначения, введенные в п. 1.1.1, а также следующие обозначения.

Ограниченное открытое подмножество G множества Ω назовем *допустимым*, если $\Omega \cap \partial G$ — многообразие класса C^∞ (в главе 2 этот термин понимался в более узком смысле).

Пусть $\bar{E}$ — замыкание множества $E \subset R^n$, ∂E — граница E, $\operatorname{clos}_\Omega E$ — замыкание E в Ω, $\partial_i E$ — внутренняя по отношению к Ω часть границы E, т. е. $\partial_i E = \Omega \cap \partial E$.

Положим еще $\Omega_\rho = \Omega \cap B_\rho$, $u_+ = \max\{u, 0\}$, $u_- = u_+ - u$, $E_t = \{x: |u(x)| = t\}$, $L_t = \{x: |u(x)| > t\}$, $N_t = \{x: |u(x)| \geqslant t\}$.

В этой главе, как и ранее, будем писать $\|u\|_{L_q(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^q dx\right)^{1/q}$. Это обозначение используется и при $q \in (0, 1)$, когда правая часть является псевдонормой *. Отметим, что в случае $0 < q < 1$ функционал $\rho(u, v) = \int_\Omega |u - v|^q dx$ очевидно удовлетворяет аксиомам метрики.

Через $C^{0,1}(\Omega)$ обозначим пространство функций, удовлетворяющих условию Липшица на любом компактном подмножестве множества Ω.

Если Ω — область, то в пространстве $L_p^l(\Omega)$, $p \geqslant 1$, $l = 1, 2, \ldots$, (см. п. 1.1.2) введем норму $\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)} + \|u\|_{L_p(\omega)}$, где ω — некоторое (непустое) открытое множество с компактынм замыканием $\bar{\omega} \subset \Omega$. Из неравенства (1.1.11/2) следует, что изменение множества ω приводит к эквивалентной норме.

Пусть еще $W_{p,r}^l(\Omega)$ — пересечение $L_p^l(\Omega) \cap L_r(\Omega)$, снабженное при $r \geqslant 1$ нормой и при $r \in (0, 1)$ псевдонормой $\|u\|_{W_{p,r}^l(\Omega)} = \|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)} + \|u\|_{L_r(\Omega)}$. В соответствии с п. 1.1.4 $W_{p,p}^l(\Omega) = W_p^l(\Omega)$.

---

*) Линейное пространство называется псевдонормированным, если на его элементах задан функционал $\|x\| \geqslant 0$, удовлетворяющий условиям: 1) если $\|x\| = 0$, то $x = 0$; 2) $\|\alpha x\| = \alpha \|x\|$, где $\alpha \in R^1$; 3) если $\|x_m\| \to 0$, $\|y_m\| \to 0$, то $\|x_m + y_m\| \to 0$.

Согласно теоремам 1.1.5/1 и 1.1.5/2 множества $L^l_p(\Omega)\cap C^\infty(\Omega)$ и $\mathring{V}^l_l(\Omega)\cap C^\infty(\Omega)$ плотны в $L^l_p(\Omega)$ и $W^l_p(\Omega)$.

3.1.2. Леммы об аппроксимации функций из $W^1_{p,r}(\Omega)$ и $L^1_p(\Omega)$.

Лемма 1. *Если $v\in L^1_p(\Omega)$, то последовательность функций*

$$v^{(m)}(x)=\begin{cases}\min\{v(x),\ m\}, & \text{если } v(x)\geqslant 0,\\ \max\{v(x),\ -m\}, & \text{если } v(x)\leqslant 0,\end{cases}$$

$(m=1,\ 2,\ \ldots)$ *сходится к v в $L^1_p(\Omega)$.*

То же верно для последовательности

$$v_{(m)}(x)=\begin{cases}v(x)-m^{-1}, & \text{если } v(x)\geqslant m^{-1},\\ 0, & \text{если } |v(x)|<m^{-1},\\ v(x)+m^{-1}, & \text{если } v(x)\leqslant -m^{-1}.\end{cases}$$

Доказательство. Так как функции из $L^1_p(\Omega)$ абсолютно непрерывны на почти всех параллелях координатным осям (теорема 1.1.3/1), то почти всюду в Ω: $\nabla v^{(m)}=\chi^{(m)}\nabla v$, где $\chi^{(m)}$ — характеристическая функция множества $\{x\in\Omega:\ |v(x)|<m^{-1}\}$. Поэтому

$$\int_\Omega|\nabla(v-v^{(m)})|^p dx=\int_\Omega|\nabla v|^p(1-\chi^{(m)})^p dx.$$

Сходимость последнего интеграла к нулю следует из теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.

Доказательство для последовательности $v_{(m)}$ проводится точно так же.

Лемма 2. *Множество функций из пространства $L^1_p(\Omega)\cap C^\infty(\Omega)\cap$ $\cap L_\infty(\Omega)$ $(p\geqslant 1)$ с ограниченными носителями плотно в $W^1_{p,r}(\Omega)$ $(\infty>r>0)$.*

Доказательство. Пусть $v\in W^1_{p,r}(\Omega)$. Так как $v^{(m)}\to v$ и $v_{(m)}\to v$ в пространстве $W^1_{p,r}(\Omega)$, то в $W^1_{p,r}(\Omega)$ плотно множество ограниченных функций $v\in L^1_p(\Omega)$, таких, что $m_n(\operatorname{supp} u)<\infty$. Предположим, что функция v удовлетворяет этим условиям, и определим последовательность $v_m(x)=\eta(m^{-1}x)v(x)$, $m=1,\ 2,\ \ldots,$ где $\eta\in C_0^\infty(\mathscr{B}_2)$, $\eta=1$ на $\mathscr{B}_1$. Очевидно, что

$$\|v_m-v\|_{W^1_{p,r}(\Omega)}\leqslant c\|\nabla v\|_{L_p(\Omega\setminus\mathscr{B}_m)}+(c/m)\|v\|_{L_\infty(\Omega)}\times$$
$$\times[m_n(\operatorname{supp} v)]^{1/p}+\|v\|_{L_r(\Omega\setminus\mathscr{B}_m)}\to 0 \text{ при } m\to\infty.$$

Для того чтобы аппроксимировать каждую функцию v_m гладкими, достаточно воспользоваться разбиением единицы и операторами усреднения (ср. с доказательством теоремы 1.1.11/2).

Из доказанной леммы получаем такое очевидное утверждение.

Следствие. *Если Ω — область конечного объема, то множество функций из пространства $L^1_p(\Omega)\cap C^\infty(\Omega)\cap L_\infty(\Omega)$ с ограниченными носителями плотно в $L^1_p(\Omega)$.*

Лемма 3. *Пусть G — открытое подмножество множества Ω и $u \in C^{0,1}(\Omega) \cap L_p^1(\Omega)$, $u=0$ вне G. Тогда существует последовательность функций из $C^\infty(\Omega) \cap L_p^1(\Omega)$, также обращающихся в нуль вне G, сходящаяся к u в $L_p^1(\Omega)$.*

Доказательство. Так как функцию u можно приблизить в $L_p^1(\Omega)$ последовательностью $u_{(m)}$, определенной в лемме 1, то можно с самого начала считать, что $u=0$ вне некоторого открытого множества g, расположенного в G вместе с $\operatorname{clos}_\Omega g$.

Обозначим через $\{\mathscr{B}^{(k)}\}$ локально-конечное покрытие g открытыми шарами $\mathscr{B}^{(k)}$, $\overline{\mathscr{B}^{(k)}} \subset G$, и повторим дословно доказательство теоремы 1.1.5/1. ■

Замечание. Если в условии леммы 3 предположить, чтобы функция u была непрерывной в $\bar{\Omega}$, то от функций аппроксимирующей последовательности также можно потребовать непрерывности в $\bar{\Omega}$ (см. замечание 1.1.5).

Если дополнительно в условии леммы 3 $u \in L_r(\Omega)$, то аппроксимирующую последовательность можно считать сходящейся в $W_{p,r}^1(\Omega)$.

Оба эти утверждения — непосредственные следствия доказательства леммы 3.

§ 3.2. КЛАССЫ МНОЖЕСТВ J_α И ВЛОЖЕНИЕ $L_1^1(\Omega)$ В $L_q(\Omega)$

3.2.1. Классы J_α.

Определение. Открытое множество Ω принадлежит классу J_α $(\alpha \geqslant (n-1)/n)$, если существует такая постоянная $M \in (0, m_n(\Omega))$, что

$$\mathfrak{A}_\alpha(M) \overset{\text{def}}{=} \sup_{\{G\}} ([m_n(G)]^\alpha / s(\partial_i G)) < \infty, \tag{1}$$

где $\{G\}$ — совокупность допустимых подмножеств Ω, таких, что $m_n(G) \leqslant M$, и s — $(n-1)$-мерная площадь.

Условие (1) характеризует границу Ω «в малом». Поясним это обстоятельство. Если Ω — область с достаточно гладкой границей, то, как нетрудно понять, $(n-1)$-мерная площадь поверхности $\partial G \cap \partial\Omega$ для любого множества G достаточно малого объема оценивается снизу (с точностью до постоянного множителя) площадью $\partial_i G = \Omega \cap \partial G$. Поэтому в силу классического изопериметрического неравенства $[m_n(G)]^{(n-1)/n} \leqslant \operatorname{const} s(\partial_i G)$, и, значит, область Ω принадлежит классу $J_{(n-1)/n}$. Если на $\partial\Omega$ имеются «пики», направленные внутрь Ω, то интуитивно ясно, что последнее неравенство остается выполненным. Если же острие направлено во внешность области, то существует последовательность множеств $G_\nu \subset \Omega$, для которой $\lim\limits_{\nu\to\infty} ([m_n(G_\nu)]^{(n-1)/n} / s(\partial_i G_\nu)) = \infty$. Наряду с этим для области может выполняться условие (1) с некоторым $\alpha>(n-1)/n$. Показатель α характеризует в этом случае степень заострения пика.

Мы увидим в дальнейшем, что именно «изопериметрические» неравенства типа (1) (и более сложные) определяют показатели суммируемости функций из пространств Соболева.

Лемма 1. *Пусть Ω — открытый единичный шар и g — открытое подмножество Ω, такое, что $\partial_i G$ — многообразие класса $C^{0,1}$. Тогда*

$$\min\{m_n(g),\ m_n(\Omega\setminus g)\}\leqslant {}^1\!/_2 v_n v_{n-1}^{n/(1-n)} s(\partial_i g)^{n/(n-1)}. \tag{2}$$

Константа в неравенстве (2) *точная.*

Доказательство. Достаточно предположить, что $2m_n(g)<v_n$. В результате сферической симметризации множества g относительно луча l с началом в центре шара Ω получим симметричное относительно l множество $f\subset\Omega$, такое, что $m_n(f)=m_n(g)$, $s(\partial_i f)\leqslant s(\partial_i g)$ *. Пусть b — такой шар, что $b\cap\partial\Omega=\partial f\cap\partial\Omega$ и $m_n(b\cap\Omega)=m_n(f)$. Поскольку $m_n[f\cup(b\setminus\Omega)]=m_n(b)$, то в силу изопериметрического свойства шара $s(\Omega\cap\partial b)\leqslant s(\partial_i f)$.

Элементарный подсчет показывает, что среди всех шаров b, таких, что $m_n(\Omega\cap b)=\mathrm{const}<{}^1\!/_2 m_n(\Omega)$, наименьшее значение величине $s(\Omega\cap\partial b)$ сообщает шар, ортогональный $\partial\Omega$.

Нетрудно проверить, что для ортогональных к шару Ω шаров b_ρ с радиусом ρ, таких, что $m_n(b_\rho\cap\Omega)<{}^1\!/_2 m_n(\Omega)$, функция $s(\Omega\cap\partial b_\rho)[m_n\Omega\cap b_\rho)]^{(1-n)/n}$ убывает. ■

Из леммы 1 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Если Ω — n-мерный шар, то $\Omega\in J_{(n-1)/n}$ и $\mathfrak{P}_{(n-1)/n}({}^1\!/_2 m_n(\Omega))=v_{n-1}^{-1}(v_n/2)^{(n-1)/n}$, где v_s — объем s-мерного единичного шара.*

Следствие 2. *Ограниченная область, звездная относительно шара, принадлежит классу $J_{(n-1)/n}$.*

Доказательство. Согласно лемме 1.1.8 множество Ω есть квазиизометрический образ шара. Отсюда и из леммы 1 получаем, что какова бы ни была константа $M\in(0,\ m_n(\Omega))$, для всех открытых множеств $g\subset\Omega$, таких, что $\partial_i g$ — многообразие класса $C^{0,1}$ и $m_n(g)\leqslant M$, выполнено неравенство

$$[m_n(g)]^{(n-1)/n}\leqslant C(M)\,s(\partial_i g) \tag{3}$$

($C(M)$ — константа, не зависящая от g).

---

*) Сферическая симметризация относительно луча определяется аналогично симметризации относительно $(n-s)$-мерного подпространства. Следует лишь в определении, проведенном в 2.3.3, заменить s-мерные подпространства, ортогональные R^{n-s}, $(n-1)$-мерными сферами с центром в начале луча. Относительно свойств симметризации см. [108, 129, 188, 235, 237].

Замечание. При $\alpha<(n-1)/n$ условие (1) никогда не выполняется, так как в этом случае

$$\lim_{\rho\to 0}[m_n(B_\rho)]^\alpha/s(\partial B_\rho)=c\lim_{\rho\to 0}\rho^{1-n+n\alpha}=\infty. \blacksquare$$

Приведем пример области, не принадлежащей классу J_α при любых α.

Пример. Пусть Ω — область, изображенная на рис. 9. Для последовательности подмножеств Q_m, $m=3, 4, \ldots$, имеем $m_2(Q_m)=$ $=m^{-4}$, $s(\partial_i Q_m)=m^{-2m}$,

$$[m_2(Q_m)]^\alpha/s(\partial_i Q_m)=m^{2m-4\alpha}\to\infty \quad \text{при} \quad m\to\infty$$

и, следовательно, $\Omega \overline{\in} J_\alpha$.

Лемма 2. *Если ограниченное открытое множество есть объединение конечного числа открытых множеств из класса J_α, то оно принадлежит тому же классу.*

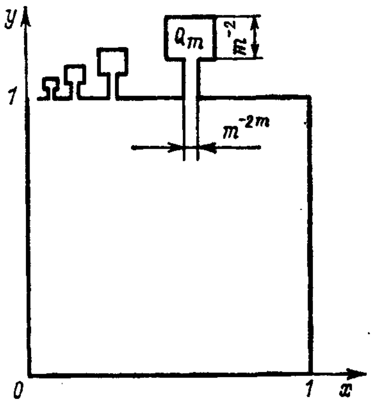

Рис. 9.

Доказательство. Пусть $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$ $\Omega_k\in J_\alpha$, $k=1, 2$, и $M=\min\{M_1, M_2\}$, где M_1, M_2 — константы из определения класса J_α для Ω_1, Ω_2. Через G обозначим допустимое подмножество Ω, такое, что $m_n(G)\leqslant M$.

Так как $m_n(G)\leqslant m_n(G\cap\Omega_1)+$ $+m_n(G\cap\Omega_2)$ и $s(\Omega\cap\partial G)\geqslant s(\Omega_k\cap$ $\cap\partial G)$, то

$$\frac{[m_n(G)]^\alpha}{s(\Omega\cap\partial G)}\leqslant c\sum_{k=1}^{2}\frac{[m_n(\Omega_k\cap G)]^\alpha}{s(\Omega_k\cap\partial G)}. \blacksquare$$

Отсюда из леммы 1.1.9/1 и следствия 3.2.1/2 получаем следующее утверждение.

Следствие 3. *Ограниченная область, удовлетворяющая условию конуса, принадлежит классу $J_{(n-1)/n}$.*

3.2.2. Лемма технического характера. Следующее утверждение будет использовано в п. 3.2.3.

Лемма. *Пусть G — допустимое подмножество Ω, такое, что $s(\partial_i G)<\infty$. Тогда существует последовательность функций $\{w_m\}_{m\geqslant 1}$, такая, что* 1) $w_m\in C^{0,1}(\Omega)$; 2) $w_m=0$ *в* $\Omega\setminus G$; 3) $w_m\in$ $\in[0, 1]$ *в* Ω; 4) *для любого компакта $e\subset G$, начиная с некоторого номера $m(e)$, справедливо равенство $w_m(x)=1$ при $x\in e$;* 5) $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\int_\Omega|\nabla w_m|\,dx=s(\partial_i G)$.

Доказательство. Пусть ω — ограниченное открытое множество, $\bar\omega\subset\Omega$, $s[(\Omega\setminus\omega)\cap\partial G]<m^{-1}$. Существует столь малое

положительное число $\varepsilon=\varepsilon(m)$, что для некоторого локально-конечного в Ω ε-покрытия множества $(\Omega\setminus\omega)\cap\partial G$ открытыми шарами $\mathscr{B}_i$

$$\sum_i r_i^{n-1}<2m^{-1}, \tag{1}$$

где r_i — радиус шара $\mathscr{B}_i$. Разумеется, можно считать, что каждый шар $\mathscr{B}_i$ пересекается с $(\Omega\setminus\omega)\cap\partial G$.

Введем следующие обозначения: $\mathscr{B}'_i$ — концентрический $\mathscr{B}_i$ шар с радиусом $2r_i$; $C_1=\bigcup\limits_i \mathscr{B}_i$, $C_2=\bigcup\limits_i \mathscr{B}'_i$, $\rho(x)=\operatorname{dist}(x, \partial_i G)$.

Пусть $g=\{x\in G\colon \rho(x)<\delta\}$, где $\delta=\delta(m)$ — столь малое число из интервала $(0, \varepsilon)$, что $g\cap\partial\omega$ содержится в C_1 (этого можно добиться, так как покрытие $\{\mathscr{B}_i\}$ локально-конечно в Ω).

Построим функцию v, равную нулю в $\Omega\setminus G$, $\delta^{-1}\rho(x)$ при $x\in\in g\cap\omega$ и единице в оставшейся части Ω. Эта функция разрывна на множествах $(\Omega\setminus\omega)\cap\partial G$ и $g\cap\partial\omega$. Исправим ее с помощью срезающей функции η, к определению которой перейдем.

Пусть $\eta_i\in C^{0,1}(R^n)$, $\eta_i=1$ вне $\mathscr{B}'_i$, $\eta_i=0$ в $\mathscr{B}_i$, $0\leqslant\eta_i\leqslant 1$, $|\nabla\eta_i|\leqslant r_i^{-1}$ в $\mathscr{B}'_i$ и $\eta(x)=\inf\limits_i\{\eta_i(x)\}$. Очевидно, что $\eta\in C^{0,1}(\Omega)$, $\eta=0$ в C_1, $\eta=1$ вне C_2. Рассмотрим функцию $w_m=\eta v$, которая равна нулю в $C_1\cap\Omega$ и, следовательно, в окрестности множества разрывов функции v. Ясно, что

$$\int_\Omega|\nabla w_m|\,dx=\int_{\Omega\setminus C_1}|\nabla(\eta v)|\,dx\leqslant\int_{\Omega\setminus C_1}|\nabla\eta_1|\,dx+\int_{\Omega\setminus C_1}|\nabla v|\,dx.$$

Отметим, что

$$\int_{\Omega\setminus C_1}|\nabla\eta|\,dx\leqslant\sum_i\int_{\Omega\setminus C_1}|\nabla\eta_i|\,dx\leqslant\sum_i\int_{\mathscr{B}'_i}|\nabla\eta_i|\,dx\leqslant c\sum_i r_i^{n-1}.$$

(Здесь и далее в этой лемме c — постоянные, зависящие только от n.) Отсюда и из (1) получаем оценку $\int_{\Omega\setminus C_1}|\nabla\eta|\,dx\leqslant cm^{-1}$. Далее, так как по теореме 1.2.4

$$\int_{\Omega\setminus C_1}|\nabla v|\,dx\leqslant\delta^{-1}\int_{g\cap\omega}|\nabla\rho|\,dx=\delta^{-1}\int_0^\delta s(\Gamma_\tau)\,d\tau,$$

где $\Gamma_\tau=\{x\in\omega\cap g\colon \rho(x)=\tau\}$, то при достаточно малом $\delta=\delta(m)$

$$\int_{\Omega\setminus C_1}|\nabla v|\,dx\leqslant s(\partial G)+cm^{-1}.$$

Окончательно имеем

$$\int_\Omega|\nabla w_m|\,dx\leqslant s(\partial G)+cm^{-1}.$$

Функция w_m равна нулю вне G и единице вне ε-окрестности $\Omega\cap\partial G$. ■

3.2.3. Вложение $L_1^1(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$. Пусть G — открытое подмножество Ω и

$$\mathfrak{A}_G^{(\alpha)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sup\, [m_n(g)]^\alpha / s(\partial_i g), \tag{1}$$

где супремум берется по всем допустимым множествам g, $\operatorname{clos}_\Omega g \subset G$.

Лемма 1. 1) *Если $\mathfrak{A}_G^{(\alpha)} < \infty$, $\alpha \leqslant 1$, то для всех функций $u \in C^{0,1}(\Omega) \cap L_1^1(\Omega)$, равных нулю вне G, справедливо неравенство*

$$\|u\|_{L_q(\Omega)} \leqslant C\, \|\nabla u\|_{L(\Omega)}, \tag{2}$$

где $q = \alpha^{-1}$ и $C \leqslant \mathfrak{A}_G^{(\alpha)}$.

2) *Если для всех функций $u \in C^{0,1}(\Omega) \cap L_1^1(\Omega)$, обращающихся в нуль вне G, выполнено неравенство* (2), *то $C \geqslant \mathfrak{A}_G^{(\alpha)}$.*

Доказательство. 1) По лемме 3.1.2/3 достаточно доказать (2) для функций $u \in C^\infty(\Omega) \cap L_1^1(\Omega)$, равных нулю вне G. Поскольку $\|u\|_{L_q(\Omega)}^q = \int_0^\infty m_n(N_t)\, d(t^q)$, то из неравенства (1.3.1/1) получаем $\|u\|_{L_q(\Omega)} \leqslant \int_0^\infty [m_n(N_t)]^{1/q}\, dt$.

Отметим теперь, что $[m_n(N_t)]^{1/q} \leqslant \mathfrak{A}_G^{(\alpha)} s(E_t)$ при п. в. $t > 0$. Отсюда и из теоремы 1.2.4 получаем

$$\|u\|_{L_q(\Omega)} \leqslant \mathfrak{A}_G^{(\alpha)} \int_0^\infty s(E_t)\, dt = \mathfrak{A}_G^{(\alpha)}\, \|\nabla u\|_{L(\Omega)}.$$

2) Пусть g — допустимое подмножество G, $\operatorname{clos}_\Omega g \subset G$. Подставим в (2) последовательность $\{w_m\}_{m \geqslant 1}$ из леммы 3.2.2. Для любого компакта $e \subset g$ имеем $\left(\int_e |w_m|^q\, dx\right)^{1/q} \leqslant Cs(\partial_i g)$ и, следовательно, $[m_n(g)]^{1/q} \leqslant Cs(\partial_i g)$. ■

Для области Ω конечного объема положим $\mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{A}_\alpha(^1/_2 m_n(\Omega))$.

Теорема. *Пусть Ω — область и $m_n(\Omega) < \infty$. Тогда:*

1) *Если $\Omega \in J_\alpha$, где $\alpha \in [(n-1)/n,\ 1]$, то для всех функций $u \in L_1^1(\Omega)$ справедливо неравенство*

$$\inf_{c \in R^1} \|u - c\|_{L_q(\Omega)} \leqslant C\, \|\nabla u\|_{L(\Omega)}, \tag{3}$$

где $q = \alpha^{-1}$ и $C \leqslant \mathfrak{A}_\alpha$;

2) *если для всех $u \in L_1^1(\Omega)$ справедливо неравенство* (3), *то $\Omega \in J_\alpha$ при $\alpha = q^{-1}$ и $2^{(q-1)/q} \geqslant \mathfrak{A}_\alpha$, если $q > 1$, $C \geqslant \mathfrak{A}$, если $0 < q \leqslant 1$.*

Доказательство. 1) В силу следствия 3.1.2 достаточно получить (3) для функций $u \in L_1^1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ с ограниченными носителями. Обозначим через τ такое число, что $2m_n(\{x\colon u(x) \geqslant \tau\}) \geqslant m_n(\Omega)$ и $2m_n(\{x\colon u(x) > \tau\}) \leqslant m_n(\Omega)$. Согласно лемме 1

$$\left(\int_\Omega (u-\tau)_+^q\, dx\right)^{1/q} \leqslant \mathfrak{A}_\alpha \int_{\{x\colon u(x) \geqslant \tau\}} |\nabla u|\, dx$$

и

$$\left(\int_\Omega (\tau-u)_+^q\,dx\right)^{1/q} \leqslant \mathfrak{A}_\alpha \int_{\{x:\ u<\tau\}} |\nabla u|\,dx,$$

что и доказывает первую часть теоремы.

2) Пусть для всех $u \in L_1^1(\Omega)$ выполнено неравенство (3) и G — произвольное допустимое подмножество Ω, такое, что $2m_n(G) \leqslant m_n(\Omega)$. Подставим в (3) последовательность функций $\{w_m\}$, построенную в лемме 3.2.2. Для любого компакта $e \subset G$

$$\inf_{c\in R^1} \left(\int_e |1-c|^q\,dx + \int_{\Omega\setminus G} |c|^q\,dx\right)^{1/q} \leqslant Cs(\partial_i G)$$

и, следовательно,

$$\min_c (|1-c|^q\, m_n(G) + |c|^q\, m_n(\Omega\setminus G))^{1/q} \leqslant Cs(\partial_i G).$$

Минимум в левой части в случае $q>1$ достигается при

$$c = [m_n(G)]^{1/(q-1)} \big/ \{[m_n(G)]^{1/(q-1)} + [m_n(\Omega\setminus G)]^{1/(q-1)}\}.$$

Следовательно,

$$\frac{[m_n(G)\, m_n(\Omega\setminus G)]^{1/q}}{\{[m_n(G)]^{1/(q-1)} + [m_n(\Omega\setminus G)]^{1/(q-1)}\}^{(q-1)/q}} \leqslant Cs(\partial_i G).$$

Учитывая условие $2m_n(G) \leqslant m_n(\Omega)$, отсюда получаем $[m_n(G)]^{1/q} \leqslant 2^{(q-1)/q} Cs(\partial_i G)$. Случай $0<q\leqslant 1$ рассматривается аналогично. ■

Лемма 2. *Пусть Ω — область и $m_n(\Omega)<\infty$. Пространство $L_p^1(\Omega)$ вложено в $L_q(\Omega)$ $(p\geqslant 1,\ q>0)$ в том и только в том случае, если для всех функций $u \in L_p^1(\Omega)$ выполнено неравенство*

$$\inf_{c\in R^1} \|u-c\|_{L_q(\Omega)} \leqslant C\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}. \tag{4}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть Z — подпространство функций, равных константе на Ω, и пусть $\dot W_{p,q}^1(\Omega)$ — фактор-пространство $W_{p,q}^1(\Omega)/Z$, снабженное нормой $\inf_{c\in Z} \|u-c\|_{L_q(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}$. Обозначим через $\mathscr{E}$ тождественное отображение $\dot W_{p,q}^1(\Omega)$ в $\dot L_p^1(\Omega)$. Это — линейное непрерывное и взаимно однозначное отображение, и так как $L_p^1(\Omega) \subset L_q(\Omega)$, то $\mathscr{E}$ — сюръективное отображение. По теореме Банаха* $\mathscr{E}$ — изоморфизм и, следовательно, имеет место неравенство (4).

Достаточность. Пусть выполнено неравенство (4). Мы должны показать, что $\mathscr{E}$ — сюръективное отображение. В силу (4)

* Теорема Банаха (см. Бурбаки [12, с. 23]). Пусть E и F — вполне метризуемые векторные пространства над недискретным нормированным телом. Каждое непрерывное взаимно однозначное линейное отображение E на F есть изоморфизм.

образ $\mathring{W}_{p,q}^1(\Omega)$ замкнут в $L_p^1(\Omega)$. Поэтому достаточно принять во внимание, что согласно следствию 3.1.2 пространство $\mathring{W}_{p,q}^1(\Omega)$, рассматриваемое как подпространство $\dot{L}_p^1(\Omega)$, плотно в $\dot{L}_p^1(\Omega)$. ■

Из теоремы и леммы 2 немедленно получается следующее утверждение.

Следствие. *Если Ω — область и $m_n(\Omega)<\infty$, то пространство $L_1^1(\Omega)$ вложено в $L_q(\Omega)$, $q\geqslant 1$, в том и только в том случае. если $\sup[m_n(G)]^{1/q}/s(\partial_i G)<\infty$, где супремум берется по всем допустимым подмножествам Ω, таким, что $m_n(G)\leqslant {}^1/_2 m_n(\Omega)$.*

Замечание. Так как плоская область, ограниченная квазикругом, принадлежит классу EV_1^1 (см. п. 1.4.8), то для нее $L_1^1(\Omega)\subset L_2(\Omega)$. Отсюда, из леммы 3.2.1 и из сформулированного только что следствия вытекает, что объединение конечного числа квазикругов принадлежит классу $J_{1/2}$.

3.2.4. Функция λ_M.

Определение. Пусть $M\in(0,\ m_n(\Omega))$. Обозначим через $\lambda_M(\mu)$ точную нижнюю границу чисел $s(\partial_i G)$ на совокупности всех допустимых множеств $G\subset\Omega$, удовлетворяющих условию $\mu\leqslant m_n(G)\leqslant M$. ■

Очевидно, что функция $\lambda_M(\mu)$ не убывает с ростом μ и не возрастает с ростом M.

В терминах функции λ_M можно дать эквивалентное определение класса J_α. Именно $\Omega\in J_\alpha$ в том и только в том случае, если

$$\varliminf_{\mu\to+0}\mu^{-\alpha}\lambda_M(\mu)>0. \tag{1}$$

Лемма. *Если $M\in(0,\ m_n(\Omega))$ и Ω — область конечного объема, то $\lambda_M(\mu)>0$ при всех $\mu\in(0,\ M]$.*

Доказательство. Пусть $0<\mu\leqslant\min\{M,\ m_n(\Omega)-M\}$ и ω — область с гладкой границей, такая, что $\bar\omega\subset\Omega$ и $2m_n(\Omega\setminus\omega)<\mu$. Если G — допустимое подмножество Ω, $M\geqslant m_n(G)\geqslant\mu$, то очевидно, что $2m_n(G\cap\omega)\geqslant\mu$ и $2m_n(\omega\setminus G)\geqslant m_n(\Omega)-M\geqslant\mu$. Поскольку $\partial\omega$ — гладкая поверхность, то для всех $u\in L_1^1(\omega)$ справедливо неравенство

$$\inf_{c\in R^1}\|u-c\|_{L(\omega)}\leqslant C(\omega)\|\nabla u\|_{L(\omega)}.$$

Поэтому согласно второй части теоремы 3.2.3 для любого допустимого подмножества G области Ω

$$\min\{m_n(G\cap\omega),\ m_n(\omega\setminus G)\}\leqslant C(\omega)\,s(\omega\cap\partial G).$$

Итак, $\mu\leqslant C(\omega)\,s(\Omega\cap\partial G)$ и, следовательно, $\lambda_M(\mu)>0$ при малых μ. Так как $\lambda_M(\mu)$ не убывает с ростом μ, то $\lambda_M(\mu)>0$ при всех $\mu\in(0,\ M]$. ■

Легко видеть, что как требование связности Ω, так и условие $m_n(\Omega)<\infty$ существенны для справедливости леммы.

Из леммы немедленно получаем следующее утверждение.

Следствие. *Если Ω — область из класса J_α и $m_n(\Omega)<\infty$, то, какова бы ни была константа $m\in(0, m_n(\Omega))$, величина*

$$\sup\{[m_n(G)]^\alpha/s(\partial_i G):\ G \text{ — допустимое подмножество } \Omega,\ m_n(G)\leqslant m\}$$

конечна.

В дальнейшем для упрощения записи мы будем вместо $\lambda_{m_n(\Omega)/2}(\mu)$ писать просто $\lambda(\mu)$.

3.2.5. Пример области из класса J_1. Покажем, что область Ω, равная сумме квадратов $Q_m=\{(x, y):\ 2^{-m-1}\leqslant x\leqslant 3\cdot 2^{-m-2},\ 0<y<2^{-m-2}\}$ и прямоугольников $R_m=\{(x, y):\ 3\cdot 2^{-m-2}<x<2^{-m},\ 0<y<1\}$, $m=0, 1, \ldots$ (рис. 10) принадлежит классу J_1 и не принадлежит никакому классу J_α при $\alpha<1$.

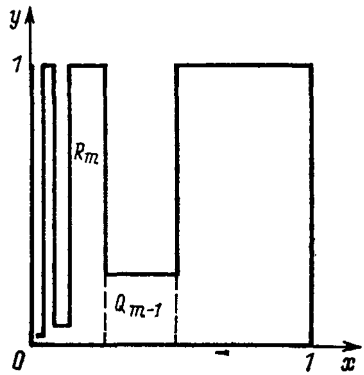

Рис. 10.

Пусть T — треугольник $\{(x, y):\ 0<y<x/3,\ 0<x<1\}$, содержащийся в Ω. Пусть $v=u$ на $\Omega\setminus T$ и $v=3yx^{-1}u$ на T. Ясно, что

$$\|v\|_{L(\Omega)}\leqslant\|\partial v/\partial y\|_{L(\Omega)}\leqslant\leqslant\|\partial u/\partial y\|_{L(\Omega)}+c\,\|u/r\|_{L(T)},$$

где $r=(x^2+y^2)^{1/2}$. Следовательно,

$$\|u\|_{L(\Omega)}\leqslant\|\nabla u\|_{L(\Omega)}+c\,\|u/r\|_{L(T)}.$$

Так как из очевидного неравенства

$$\int_0^1|w(r)|\,dr\leqslant\int_0^1|w'_r|\,r\,dr,\quad w(1)=0,$$

следует вложение $L_1^1(\Omega)$ в пространство с нормой $\|r^{-1}u\|_{L(T)}$, то $L_1^1(\Omega)\subset L(\Omega)$. Применяя лемму 3.2.3/2, получаем, что $\Omega\in J_1$. Вместе с тем для прямоугольников $G_m=R_m\cap\{(x, y):\ y>2^{-m-1}\}$ справедливо соотношение $\lim m_2(G_m)/s(\partial_i G_m)=1$. Следовательно, $c_1\mu\leqslant\lambda(\mu)\leqslant c_2\mu$ при малых μ.

§ 3.3. СУБАРЕАЛЬНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И КЛАССЫ J_α

В этом параграфе вводится понятие и изучаются свойства «субареального» отображения области, т. е. отображения, при котором $(n-1)$-мерная площадь подмножеств области существенно не увеличивается. Использование таких отображений позволит проверять условия принадлежности конкретных областей классу J_α.

3.3.1. Субареальные отображения. Рассмотрим локально-квазиизометрическое отображение $\Omega\ni x\to\xi\in R^n$. Образ произвольного множества $A \subset \Omega$ при отображении ξ будем обозначать ξA. Пусть еще ξ'_x — матрица $(\partial\xi_i/\partial x_k)^n_{i,k=1}$ и $\det \xi'_x$ — якобиан отображения ξ. Аналогичный смысл имеют обозначения x'_ξ и $\det x'_\xi$.

Определение. Назовем отображение ξ субареальным, если существует такая постоянная k, что для любого допустимого подмножества G множества Ω справедливо неравенство

$$s(\xi\,\partial_i G) \leqslant ks(\partial_i G). \tag{1}$$

Лемма 1. *Отображение ξ является субареальным в том и только в том случае, если при* п. в. $x \in \Omega$

$$|\det x'_\xi| \geqslant k \| x'_\xi \|, \tag{2}$$

где $\|\cdot\|$ — норма матрицы.

В доказательстве этой леммы будет использовано следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть $u \in C^\infty(\Omega) \cap L^1_1(\Omega)$ и E — любое измеримое подмножество Ω. Тогда для того чтобы имело место неравенство*

$$\int_E |\nabla_x u|\, dx \geqslant k \int_{\xi E} |\nabla_\xi u|\, d\xi \tag{3}$$

с постоянной k, не зависящей от u и E, необходимо и достаточно, чтобы отображение ξ удовлетворяло условию (2). (*Более того, для справедливости* (2) *достаточно, чтобы* (3) *выполнялось для любого шара в* Ω.)

Доказательство. Достаточность немедленно следует из (2) и равенств

$$\int_{\xi E} |\nabla_\xi u|\, d\xi = \int_E \Big| \sum_{i=1}^n (\partial u/\partial x_i) \nabla_\xi x_i \Big| |\det \xi'_x|\, dx =$$
$$= \int_E |\nabla_x u| \, |(x'_\xi)^* \alpha| \, |\det x'_\xi|^{-1} dx,$$

где $\alpha = |\nabla_x u|^{-1} \nabla_x u$.

Необходимость. Фиксируем вектор α единичной длины и рассмотрим шар $B_\rho(x_0) \subset \Omega$ Положим $u(x) = \alpha x$. Тогда в силу (3) справедливо неравенство

$$\int_{B_\rho(x_0)} dx \geqslant k \int_{\xi B_\rho(x_0)} |\nabla_\xi u|\, d\xi = k \int_{B_\rho(x_0)} |(x'_\xi)^* \alpha| \, |\det x'_\xi|^{-1} dx.$$

Переходя к пределу при $\rho \to 0$ и используя произвольность α, получаем при п. в. $x_0 \in \Omega$ неравенство (3). ■

Доказательство леммы 1. Достаточность. Пусть G — произвольное допустимое подмножество области Ω. Возьмем любую точку $y \in \partial_i G$ и некоторую ее окрестность $\mathcal{U}_y$, столь малую, что множество $\overline{\mathcal{U}_y \cap G}$ может быть задано в некоторой декартовой системе координат неравенством $x_n \leqslant f(x')$, где $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ и f — бесконечно дифференцируемая функция.

Пусть δ — фиксированное малое положительное число. Множество точек x из $\mathcal{U}_y$, заданное уравнением $x_n=\varepsilon+f(x')$, где $\varepsilon\in[0, \delta]$, обозначим через V_ε. Положим $u_\delta(x)=1$ при $x_n<f(x')$, $u_\delta(x)=0$ при $x_n\geqslant f(x')+\delta$ и $u_\delta(x)=1-\varepsilon\delta^{-1}$ при $x\in V_\varepsilon$. Очевидно, что функция u_δ удовлетворяет условию Липшица. В силу (2) и леммы 2

$$\int_{\mathcal{U}_y}|\nabla_x u_\delta|\,dx\geqslant k\int_{\xi\mathcal{U}_y}|\nabla_\xi u_\delta(x(\xi))|\,d\xi.$$

Используя теорему 1.2.4, последнее неравенство можно представить в виде $\delta^{-1}\int_0^\delta s(V_\varepsilon)\,d\varepsilon\geqslant k\delta^{-1}\int_0^\delta s(\xi V_\varepsilon)\,d\varepsilon$. Так как функция $s(V_\varepsilon)$ непрерывна, то $s(V_0)\geqslant k\varliminf\limits_{\delta\to 0}\delta^{-1}\int_0^\delta s(\xi V_\varepsilon)\,d\varepsilon$. Поэтому, принимая во внимание полунепрерывность площади снизу, получаем неравенство $s(V_0)\geqslant ks(\xi V_0)$. Так как точка y произвольна отсюда следует оценка (1).

Необходимость. Пусть ξ — субареальное отображение Ω. Рассмотрим произвольную функцию $u\in C^\infty(\Omega)\cap L_1^1(\Omega)$. Согласно теореме 1.2.2 множества уровня функции $|u|$ при п. в. $t>0$ — гладкие многообразия. Пусть B — произвольный шар в Ω. По теореме 1.2.4

$$\int_B|\nabla_x u|\,dx=\int_0^\infty s(B\cap E_t)\,dt,\qquad \int_{\xi B}|\nabla_\xi u|\,d\xi=\int_0^\infty s(\xi B\cap\xi E_t)\,dt.$$

По определению субареального отображения $s(E_t)\geqslant ks(\xi E_t)$. Следовательно, выполняется неравенство (3). Остается сослаться на лемму 2. ∎

3.3.2. Оценка функции λ в терминах субареальных отображений. Следующая теорема позволяет получать нижние оценки введенной в конце 3.2.4 функции λ в конкретных случаях.

Теорема. *Пусть Ω — область конечного объема, для которой существует субареальное отображение на ограниченную область $\xi\Omega$, звездную относительно шара. Положим*

$$\pi(\mu)=\inf_{\{G\}}\int_G|\det\xi_x'|\,dx,$$

где инфимум берется по всем допустимым подмножествам области Ω, удовлетворяющим условию $\mu\leqslant m_n(G)\leqslant{}^1/_2 m_n(\Omega)$. Тогда существует такая постоянная Q, что

$$Q\lambda(\mu)\geqslant[\pi(\mu)]^{(n-1)/n}. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть G — такое допустимое подмножество Ω, что $m_n(G)<m_n(\Omega)/2$. Положим $M=\sup m_n(\xi G)$ на множестве таких G. Так как $|\det\xi_x'|\geqslant\mathrm{const}>0$ на любом компактном подмножестве области Ω, то $M<m_n(\xi\Omega)$. Принимая во внимание звездность области $\xi\Omega$ относительно шара, а также то, что

ξG — многообразие класса $C^{0,1}$, из неравенства (3.2.1/2) получаем: $[m_n(\xi G)]^{(n-1)/n} \leqslant Cs(\xi(\partial_i(G))$. Отсюда и из (3.3.1/1) следует оценка $[m_n(\xi G)]^{(n-1)/n} \leqslant Cks(\partial_i G)$. Поэтому если $m_n(G) \geqslant \mu$, то $[\pi(\mu)]^{(n-1)/n} \leqslant$ $\leqslant [m_n(\xi G)]^{(n-1)/n} \leqslant Ck\lambda(\mu)$. ■

3.3.3. Оценки функции λ для некоторых конкретных областей. Приведем несколько примеров применения теоремы 3.3.2.

Пример 1. Рассмотрим n-мерную область $\Omega = \{x = (x', x_n): |x'| < f(x_n),\ 0 < x_n < a\}$, где f — неотрицательная выпуклая вниз функция, такая, что $f'(a-0) < \infty$ и $f(0) = 0$ (рис. 11).

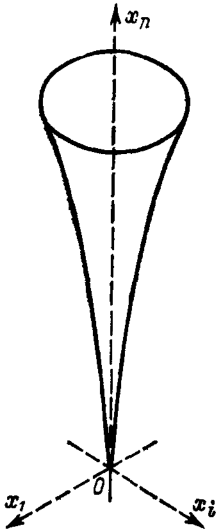

Рис. 11.

Покажем, что функция $\lambda(\mu)$ для области Ω удовлетворяет неравенствам

$$k[f(\alpha(\mu))]^{n-1} \leqslant \lambda(\mu) \leqslant [f(\alpha(\mu))]^{n-1}, \qquad (1)$$

где $k \in (0, 1)$ и $\alpha(\mu)$ — функция, определенная уравнением $\mu = v_{n-1}\int_0^{\alpha(\mu)} [f(\tau)]^{n-1}\,d\tau$.

Доказательство. Рассмотрим область $G_t = \Omega \cap \{x: 0 < x_n < t\}$, где t подчинено условию $m_n(G_t) = v_{n-1}\int_0^t [f(\tau)]^{n-1}\,d\tau \leqslant {}^1/_2 m_n(\Omega)$. Очевидно, что $s(\Omega \cap \partial G_t) = v_{n-1}[f(t)]^{n-1}$. Так как $\lambda[m_n(G_t)] \leqslant s(\Omega \cap \partial G_t)$ согласно определению функции λ, то правое неравенство (1) доказано.

Отображение $x \to \xi = (x_1, \ldots, x_{n-1}, f(x_n))$ переводит область Ω в конус $\xi\Omega = \{\xi = (\xi', \xi_n): |\xi'| < \xi_n, 0 < \xi_n < f(a)\}$. В данном случае условие (3.3.1/2) эквивалентно требованию ограниченности f'. Следовательно, отображение $x \to \xi$ субареально.

Остается оценить снизу функцию π, определенную в теореме 3.3.2. Так как якобиан отображения $x \to \xi$ равен $f'(x_n)$, то нужно оценить снизу интеграл

$$\int_G f'(x_n)\,dx \qquad (2)$$

при условии ${}^1/_2 m_n(\Omega) > m_n(G) \geqslant \mu$. Так как f' — неубывающая функция, то из всех множеств G наименьшее значение интегралу (2) дает множество $G_{\alpha(\mu)}$. Следовательно,

$$\int_G f'(x_n)\,dx \geqslant \int_0^{\alpha(\mu)} f'(c)\,dc \int_{|x'| \leqslant f(c)} dx' = (v_{n-1}/n)\,[f(\alpha(\mu))]^n.$$

Итак, $\pi(\mu) \geqslant n^{-1}v_{n-1}[f(\alpha(\mu))]^n$. Применяя теорему 3.3.2, отсюда выводим левую оценку (1). ■

Из оценок (1) немедленно получаем, что для области $\Omega = \{x: |x'| < x_n^\beta, 0 < x_n < a\}$, $\beta \geqslant 1$, при малых μ:

$$c_1\mu^\alpha \leqslant \lambda(\mu) \leqslant c_2\mu^\alpha, \quad \alpha = \beta(n-1)/(\beta(n-1)+1). \qquad (3)$$

т. е. $\Omega \in J_{\beta(n-1)/(\beta(n-1)+1)}$ и $\Omega \overline{\in} J_\alpha$ при $\alpha < \beta(n-1)/(\beta(n-1)+1)$.

Пример 2. Рассмотрим область $\Omega = \{x = (x', x_n): 0 < x_n < \infty, |x'| < f(x_n)\}$, где f — неотрицательная выпуклая вниз функция, такая, что $f'(+0) > -\infty$ и $f(+\infty) = 0$ (рис. 12). Допустим еще, что $m_n(\Omega) < \infty$, т. е. что $\int_0^\infty [f(t)]^{n-1}\,dt < \infty$.

Можно показать, что справедливы оценки

$$k[f(\alpha(\mu))]^{n-1} \leqslant \lambda(\mu) \leqslant [f(\alpha(\mu))]^{n-1}, \tag{4}$$

где $k \in (0, 1)$ и $\alpha(\mu)$ — функция, определенная уравнением $\mu = v_{n-1}\int_{\alpha(\mu)}^\infty [f(t)]^{n-1}\,dt$.

Доказательство проводится так же, как в предыдущем примере. Роль вспомогательного субареального отображения играет при этом отображение $x \to \xi = (x_1, \ldots, x_{n-1}, -f(x_n))$ на конус $\{\xi: |\xi'| < |\xi_n|, 0 > \xi_n > -f(0)\}$. В частности, для области $\Omega = \{x = (x', x_n): 0 < x_n < \infty, |x'| < (1 + x_n)^{-\beta}\}$, где $\beta(n-1) > 1$ при малых μ справедливы неравенства

$$c_1\mu^\alpha \leqslant \lambda(\mu) \leqslant c_2\mu^\alpha,$$
$$\alpha = \beta(n-1)/(\beta(n-1)-1), \tag{5}$$

т. е. $\Omega \in J_{\beta(n-1)/(\beta(n-1)-1)}$ и $\Omega \overline{\in} J_\alpha$ при $\alpha < \beta(n-1)/(\beta(n-1)-1)$.

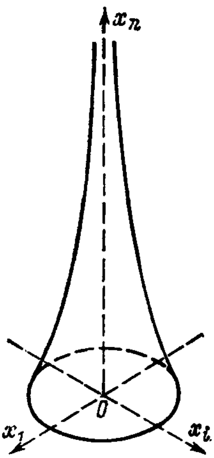

Рис. 12.

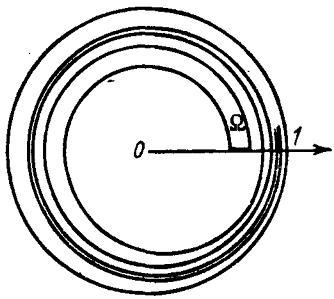

Рис. 13.

Пример 3. Рассмотрим плоскую спиралевидную область Ω, определенную в полярных координатах неравенствами $1 - \varepsilon_1(\theta) > \rho > 1 - \varepsilon_2(\theta)$, $0 < \theta < \infty$, где $0 < \varepsilon_2(\theta + 2\pi) < \varepsilon_1(\theta) < \varepsilon_2(\theta) < 1$ и ε_1, ε_2 — функции, удовлетворяющие равномерному условию Липшица на $[0, \infty)$ и такие, что функция $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$ выпукла вниз на $[0, \infty)$ (рис. 13). Допустим еще, что площадь Ω конечна, т. е. что $\int_0^\infty (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\,d\theta < \infty$.

Применяя теорему 3.3.2 к субареальному отображению ξ: $\xi_1 = 1 - \rho - {}^1/_2[\varepsilon_1(\theta) + \varepsilon_2(\theta)]$, $\xi_2 = {}^1/_2[\varepsilon_2(\theta) - \varepsilon_1(\theta)]$ области Ω на треугольник $|\xi_1|<\xi_2$, $0<\xi_2<{}^1/_2[\varepsilon_2(\theta)-\varepsilon_1(\theta)]$ и рассуждая так же, как в примере 1, получаем

$$c_1[\varepsilon_2(\theta(\mu))-\varepsilon_1(\theta(\mu))]\leqslant\lambda(\mu)\leqslant c_2[\varepsilon_2(\theta(\mu))-\varepsilon_1(\theta(\mu))],\qquad(6)$$

где $\theta(\mu)$ — функция, определенная равенством

$$\mu=\iint_{\{\rho e^{i\theta}\in\Omega:\ \theta>\theta(\mu)\}}\rho\,d\rho\,d\theta.\qquad(7)$$

В частности, для области

$$\{\rho e^{i\theta}:\ 1-(8+\theta)^{1-\beta}>\rho>1-(8+\theta)^{1-\beta}-c(8+\theta)^{-\beta}\},\qquad(8)$$

где $0<c<2\pi(\beta-1)$, $\beta>1$, при малых μ справедливы оценки $c_1\mu^\alpha\leqslant\lambda(\mu)c_2\mu^\alpha$, где $\alpha=\beta(\beta-1)^{-1}$. Таким образом, область (8) принадлежит классу $J_{\beta(\beta-1)^{-1}}$.

Более сложный пример области из класса J_α, $\alpha>1$, рассмотрен в следующем параграфе.

Замечание. Между прочим, если $x\to\xi$ — субареальное отображение Ω на ограниченную звездную область, то очевидно, что пространство $L_1^1(\Omega)$ вложено в пространство с нормой

$$\left(\int_\Omega|u|^{n/(n-1)}\,|\det\xi'_x|\,dx\right)^{(n-1)/n}.$$

В частности, для областей из примеров 1 и 2 $L_1^1(\Omega)\subset L_{n/(n-1)}(\Omega,\mu)$, где $d\mu=|f'(x_n)|\,dx$. Это — иллюстрация той естественной мысли, что предельный показатель $n(n-1)^{-1}$ сохраняется и для «плохих» областей, если вместо m_n рассматривать меру Лебега с весом, вырождающимся в «плохих» точках границы.

В связи с этим замечанием отметим, что хотя в настоящей главе рассматривается вопрос о степени суммируемости функций из $L_1^1(\Omega)$ только по мере Лебега, но доказательства результатов п. 3.2.3 в существенном не изменятся после замены пространства $L_q(\Omega)$ пространством $L_q(\Omega,\mu)$, где μ — произвольная мера в Ω (ср. с результатами главы 2).

§ 3.4. ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ ФУНКЦИИ λ ДЛЯ ОБЛАСТИ ИЗ ПРИМЕРА НИКОДИМА

В этом параграфе мы рассмотрим область Ω из примера 1.1.4/1 при условии $\varepsilon_m=\delta(2^{-m-1})$, где δ — липшицева функция на $[0, 1]$, такая, что $\delta(2t)\sim\delta(t)$. Здесь будет показано, что $\lambda(\mu)\sim\delta(\mu)$.

Лемма. *Если G — допустимое подмножество Ω, $G\cap C=\varnothing$, то*

$$s(\partial_iG)\geqslant k\delta(m_2(G)),\qquad k=\mathrm{const}>0.\qquad(1)$$

Доказательство. Пусть $G_m=(A_m\cup B_m)\cap G$. Обозначим через N наименьший номер, для которого $s(\partial_iG_N)\geqslant\delta(2^{-N-1})$.

Отсюда и из очевидного неравенства $m_2(G_m) \leqslant 2^{-m-1}$ получаем

$$\delta\left[m_2\left(\bigcup_{m \geqslant N} G_m\right)\right] \leqslant \delta(2^{-N}) \leqslant ks(\partial_i G). \tag{2}$$

Так как $s(\partial_i G_m) < \delta(2^{-m-1})$ для всех $m < N$, то в $A_m \cup B_m$ нет ни одной компоненты множества $\partial_i G$, соединяющей ломаную $abcd$ с отрезком ef (рис. 14). Поэтому при $m < N$ справедливо неравенство $2s(\partial_i G_m) \geqslant s(\partial_e G_m)$, где $\partial_e A = \partial A \setminus \partial_i A$. Отсюда и из изопериметрического неравенства $[s(\partial G_m)]^2 \geqslant \leqslant 4\pi m_2(G_m)$ выводим оценку

$$[m_2(G_m)]^{1/2} \leqslant cs(\partial_i G_m). \tag{3}$$

Суммируя (3) по m и используя неравенство $(\Sigma a_m)^{1/2} \leqslant \Sigma a_m^{1/2}$, $a_m > 0$, находим

$$\left[m_2\left(\bigcup_{m < N} G_m\right)\right]^{1/2} \leqslant cs(\partial_i G) \tag{4}$$

Объединяя (2) и (4), получаем требуемую оценку.

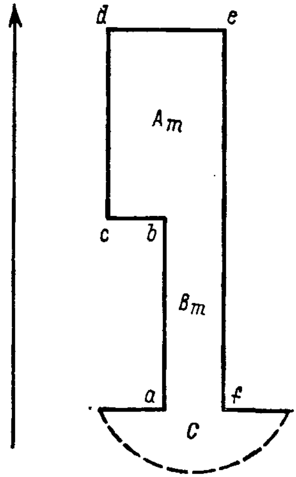

Рис. 14.

Предложение. *Для функции λ справедливы оценки $k_1\delta(\mu) \leqslant \lambda(\mu) \leqslant k_2\delta(\mu)$, где k_1, k_2 — положительные константы.*

Доказательство. Из (1) и теоремы 1.2.4 следует, что для всех функций $u \in C^\infty(\Omega)$, обращающихся в нуль на C, справедливо неравенство

$$k\int_0^\infty \delta(m_2(N_t))\,dt \leqslant \int_\Omega |\nabla u|\,dx. \tag{5}$$

Из леммы 3.1.2/3 заключаем, что неравенство верно и для всех $u \in C^{0,1}(\Omega)$, $u = 0$ на C.

Пусть теперь u — произвольная функция из $C^{0,1}(\Omega)$ и η — непрерывная кусочно-линейная функция на $[0, 1]$, равная нулю на $[0, {}^1/_3]$ и единице на $({}^2/_3, 1)$. Положим $u^{(1)}(x, y) = u(x, y)\eta(y)$ и $u^{(2)}(x, y) = u(x, y)(1 - \eta(y))$. Так как $|u| \leqslant |u^{(1)}| + |u^{(2)}|$, то $N_t \subset \subset N_{t/2}^{(1)} \cup N_{t/2}^{(2)}$ и, следовательно, $m_2(N_t) \leqslant m_2(N_{t/2}^{(1)}) + m_2(N_{t/2}^{(2)})$. Принимая во внимание условие $\delta \in C^{0,1}[0, 1]$, получаем

$$\delta(m_2(N_t)) \leqslant \delta(m_2(N_{t/2}^{(1)})) + km_2(N_{t/2}^{(2)}).$$

Отсюда и из оценки (5), примененной к функции $u^{(1)}$, выводим

$$\int_0^\infty \delta(m_2(N_t))\,dt \leqslant K\left(\int\int_\Omega |\nabla u^{(1)}|\,dx\,dy + \int\int_\Omega |u^{(2)}|\,dx\,dy\right).$$

Правая часть этого неравенства не превосходит

$$K\left(\iint_\Omega |\nabla u|\, dx\, dy + \iint_\omega |u|\, dx\, dy\right), \tag{6}$$

где $\omega = \{(x, y) \in \Omega: |y| < {}^2/_3\}$.

Оценим интеграл по ω в (6). Пусть $(x, y) \in \omega$ и $(x, z) \in C$. Очевидно, что

$$|u(x, y)| \leqslant |u(x, z)| + \int |\nabla u(x, \bar{y})|\, d\bar{y},$$

где интегрирование проводится по вертикальному отрезку, заключенному в Ω и проходящему через точку $(x, 0)$. После интегрирования по x, y и z находим

$$\iint_\omega |u|\, dx\, dy \leqslant c\left(\iint_C |u|\, dx\, dy + \iint_\Omega |\nabla u|\, dx\, dy\right).$$

Итак, $\int_0^\infty \delta(m_2(N_t))\, dt \leqslant K\left(\iint_\Omega |\nabla u|\, dx\, dy + \iint_C |u|\, dx\, dy\right)$.

Прямоугольник C принадлежит классу $J_{1/2}$. Поэтому, если $u = 0$ на подмножестве Ω, площадь которого не меньше чем ${}^1/_2 m_2(\Omega)$, то $\iint_C |u|\, dx\, dy \leqslant K \iint_C |\nabla u|\, dx\, dy$. Следовательно, для всех таких функций

$$\int_0^\infty \delta(m_2(N_t))\, dt \leqslant K \iint_\Omega |\nabla u|\, dx\, dy. \tag{7}$$

Подставляя в (7) последовательность функций $\{w_m\}$, построенную в лемме 3.2.2, получим оценку (1) для любого допустимого множества, площадь которого не превосходит ${}^1/_2 m_2(\Omega)$. Итак, нижняя оценка $\lambda(\mu)$ доказана.

Для того чтобы вывести оценку $\lambda(\mu) \leqslant c\delta(\mu)$, достаточно заметить, что для последовательности $\{G_m\}_{m \geqslant 1}$, где G_m — внутренность $A_m \cup B_m$, справедливо равенство $s(\partial_i G_m) = \delta(2^{-m-1})$ и оценки ${}^1/_3 \delta(2^{-m-1}) \leqslant m_2(G_m) \leqslant {}^2/_3 \delta(2^{-m-1})$. ■

Очевидно, что область Ω принадлежит классу J_α, $\alpha \geqslant 1$, в том и только в том случае, если

$$\varliminf_{t \to +0} t^{-\alpha} \delta(t) > 0. \quad ■ \tag{8}$$

К рассмотренной здесь области мы еще вернемся в § 5 следующей главы.

§ 3.5. КОМПАКТНОСТЬ ВЛОЖЕНИЯ $\mathring{L}_1^1(\Omega)$ В $L_q(\Omega)$ $(q \geqslant 1)$

3.5.1. Класс $\mathring{J}_\alpha$.

Определение. Множество Ω принадлежит классу $\mathring{J}_\alpha$, где $\alpha > (n-1)/n$, если

$$\lim_{\mu \to 0} \sup\, [m_n(G)]^\alpha / s(\partial_i G) = 0, \tag{1}$$

где супремум берется по всем открытым подмножествам G множества Ω, удовлетворяющим условию $m_n(G) \leq \mu$.

Замечание 1. Легко видеть, что условие (1) эквивалентно равенству

$$\lim_{\mu \to 0} \mu^{-\alpha} \lambda_M(\mu) = \infty, \tag{2}$$

где M — любое фиксированное число из промежутка $(0, m_n(\Omega))$.

Замечание 2. В определении класса $\overset{\circ}{J}_\alpha$ показатель α больше чем $(n-1)n^{-1}$, так как $[m_n(B_\rho)]^{(n-1)/n} = \text{const}\, s(\partial B_\rho)$.

3.5.2. Критерий компактности.

Теорема. *Пусть* $m_n(\Omega) < \infty$ *и* Ω — *область. Для компактности вложения* $\overset{\circ}{L}{}_1^1(\Omega)$ *в* $L_q(\Omega)$, *где* $n/(n-1) > q \geq 1$, *необходимо и достаточно, чтобы область* Ω *принадлежала классу* $\overset{\circ}{J}_\alpha$, *где* $\alpha = q^{-1}$.

Доказательство. Достаточность. Пусть u — произвольная функция из $\overset{\circ}{L}{}_1^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ с ограниченным носителем. (По следствию 3.1.2 множество таких функций плотно в $\overset{\circ}{L}{}_1^1(\Omega)$.) Очевидно, что при $\tau \geq 0$

$$\int_\Omega |u|^q dx \leq c\left(\int_{N_\tau} |u|^q dx + \tau^q m_n(\Omega)\right) \leq c_1\left(\int_\Omega (|u| - \tau)_+^q dx + \tau^q m_n(\Omega)\right).$$

Обозначим через τ такое число, что $m_n(N_\tau) \geq \mu$, $m_n(L_\tau) \leq \mu$, где μ — произвольное число из промежутка $(0, M]$, а M — константа из определения класса J_α. Используя лемму 3.2.3/1, получаем:

$$\int_\Omega (|u| - \tau)_+^q dx \leq (\mu/[\lambda_M(\mu)]^q) \left(\int_\Omega |\nabla u| dx\right)^q.$$

Пусть ω — ограниченная область с гладкой границей, такая, что $\bar{\omega} \subset \Omega$ и $2m_n(\Omega \setminus \omega) < \mu$. Тогда в силу того что $m_n(N_\tau) \geq \mu$, находим $2m_n(\omega \cap N_\tau) \geq \mu$. Следовательно, $\int_\omega |u|^q dx \geq 2^{-1}\mu\tau^q$. Таким образом,

$$c\|u\|_{L_q(\Omega)} \leq (\mu^{1/q}/\lambda_M(\mu)) \int_\Omega |\nabla u| dx + [m_n(\Omega)/\mu]^{1/q} \|u\|_{L_q(\omega)}. \tag{1}$$

Пусть $\{u_k\}_{k \geq 1}$ — последовательность функций, удовлетворяющих неравенству $\|\nabla u_k\|_{L(\Omega)} + \|u_k\|_{L(\omega)} \leq 1$.

Так как граница области ω гладкая, то оператор вложения $L_1^1(\omega)$ в $L_q(\omega)$ вполне непрерывен и можно считать, что $\{u_k\}_{k \geq 1}$ сходится в себе в $L_q(\omega)$. В силу (1)

$$c\|u_m - u_l\|_{L_q(\Omega)} \leq 2\mu^{1/q}/\lambda_M(\mu) + [m_n(\Omega)/\mu]^{1/q} \|u_m - u_l\|_{L_q(\omega)}$$

и, следовательно, $c \varlimsup_{m, l \to \infty} \|u_m - u_l\|_{L_q(\Omega)} \leq 2\mu^{1/q}/\lambda_M(\mu)$.

Остается перейти к пределу в правой части при $\mu \to +0$, имея в виду (3.5.1/2).

Необходимость. Пусть вложение $L^1_1(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$ компактно. Тогда $L^1_1(\Omega) \subset L_1(\Omega)$ и элементы единичного шара в $W^1_1(\Omega)$ имеют равностепенно абсолютно непрерывные нормы в $L_q(\Omega)$. Следовательно, для всех $u \in L^1_1(\Omega)$

$$\left(\int_G |u|^q\,dx\right)^{1/q} \leqslant \varepsilon(\mu) \int_\Omega (|\nabla u| + |u|)\,dx, \tag{2}$$

где G — произвольное допустимое подмножество Ω, мера которого не превосходит μ, а функция $\varepsilon(\mu)$ стремится к нулю при $\mu \to +0$.

Подставим в (2) последовательность функций $\{w_m\}$, построенную в лемме 3.2.2. Тогда для любого компакта $K \subset G$ $[m_n(K)]^{1/q} \leqslant c\varepsilon(\mu)(s(\partial_i G) + m_n(G))$ и, следовательно, $[m_n(G)]^{1/q} \leqslant c_1\varepsilon(\mu)\,s(\partial_i G)$. ■

Пример. Для области $\Omega = \{x\colon |x'| < f(x_n),\ 0 < x_n < a\}$ (см. пример 3.3.3/1) условие (3.5.1/1) эквивалентно равенству

$$\lim_{x\to 0}\left(\int_0^x [f(\tau)]^{n-1}\,d\tau\right)^\alpha [f(x)]^{1-n} = 0. \tag{3}$$

Так как $\int_0^x [f(t)]^{n-1}\,dt \leqslant [f(x)]^{n-1}x$, то равенство (3) выполнено, если $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha [f(x)]^{(n-1)(\alpha-1)} = 0$ (в частности, всегда при $\alpha = 1$).

§ 3.6. ВЛОЖЕНИЕ $W^1_{1,r}(\Omega, \partial\Omega)$ В $L_q(\Omega)$

3.6.1. Класс множеств $K_{\alpha,\beta}$. Пусть $r > 0$, $u \in C(\bar\Omega)$ и $\|u\|_{L_r(\partial\Omega)} = \left(\int_{\partial\Omega} |u|^r\,ds\right)^{1/r}$, где s — $(n-1)$-мерная мера Хаусдорфа. Если $r \geqslant 1$, то $\|u\|_{L_r(\partial\Omega)}$ — норма, а при $r \in (0, 1)$ — псевдонорма (см. п. 3.1.1).

Определение 1. Обозначим через $W^1_{p,r}(\Omega, \partial\Omega)$ пополнение множества заданных в Ω функций с ограниченными носителями, принадлежащих пересечению пространств $L^1_p(\Omega) \cap C^\infty(\Omega) \cap C(\bar\Omega)$ в норме или псевдонорме $\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)} + \|u\|_{L_r(\partial\Omega)}$. ■

В этом параграфе изучаются условия, при которых $W^1_{1,r}(\Omega, \partial\Omega)$ вкладывается в $L_q(\Omega)$. В отличие от теоремы Соболева для областей из класса $C^{0,1}$ норма в $L_r(\partial\Omega)$ в неравенстве

$$\|u\|_{L_q(\Omega)} \leqslant C\left(\|\nabla u\|_{L(\Omega)} + \|u\|_{L_r(\partial\Omega)}\right) \tag{1}$$

не всегда играет роль «слабой добавки» к норме градиента в $L(\Omega)$.

Для областей с «плохими» границами показатель q может зависеть от степени суммируемости функции по границе множества. Мы увидим, в частности, что для произвольных открытых множеств Ω функции из $W^1_{1,r}(\Omega, \partial\Omega)$ суммируемы в Ω со степенью $q = n/(n-1)$, если $r = n/(n-1)$.

Определение 2. Открытое множество Ω принадлежит классу $K_{\alpha,\beta}$, если существует такая постоянная $\mathscr{E}$, что для любого допустимого множества $g \subset \Omega$ имеет место неравенство

$$[m_n(g)]^{\alpha} \leqslant \mathscr{E}\{s(\partial_i g)+[s(\partial_e g)]^{\beta}\}, \tag{2}$$

где $\partial_e g = \partial g \cap \partial\Omega$.

3.6.2. Примеры множеств из класса $K_{\alpha,\beta}$.

Пример 1. Произвольное открытое множество Ω принадлежит классу $K_{(n-1)/n,\,1}$, так как условие (3.6.1/2) при $\alpha=(n-1)/n$, $\beta=1$ есть классическое изопериметрическое неравенство

$$[m_n(g)]^{(n-1)/n} \leqslant \left([\Gamma(1+n/2)]^{1/n}/(n\sqrt{\pi})\right)s(\partial g) \tag{1}$$

(см. п. 6.1.5 и замечание 6.2.2).

Предложение. *Если $\Omega \in K_{\alpha,1}$, где $\alpha \geqslant (n-1)/n$, то $\Omega \in K_{\alpha\beta,\beta}$, где β — произвольное число из отрезка $[(n-1)/n\alpha,\ 1]$.*

Доказательство. Из (1) и неравенства

$$[m_n(g)]^{\alpha} \leqslant \mathscr{E}s(\partial g) \tag{2}$$

следует, что при любом $\theta \in [0,\ 1]$

$$[m_n(g)]^{\alpha\beta} \leqslant c\mathscr{E}^{\theta}s(\partial g), \text{ где } \beta=\theta+(1-\theta)(n-1)/n\alpha.$$

Если $s(\partial_e g) \leqslant s(\partial_i g)$, то отсюда получаем

$$[m_n(g)]^{\alpha\beta} \leqslant 2c\mathscr{E}^{\theta}s(\partial_i g). \tag{3}$$

Если же $s(\partial_e g) > s(\partial_i g)$, то в силу (2)

$$[m_n(g)]^{\alpha\beta} \leqslant \mathscr{E}^{\beta}[s(\partial g)]^{\beta}. \tag{4}$$

Объединяя (3) и (4), заканчиваем доказательство.

Пример 2. Покажем, что двумерная область $\Omega=\{(x,\ y)\colon 0<x<\infty,\ 0<y<(1+x)^{\gamma-1}\}$, где $0<\gamma\leqslant 1$, принадлежит классу $K_{1/\gamma,\,1}$ и в силу предложения $\Omega \in K_{\beta/\gamma,\,\beta}$, где β — любое число из отрезка $[\gamma/2,\ 1]$.

Пусть g — произвольное допустимое подмножество Ω. Прежде всего очевидно, что

$$s(\partial g) \geqslant s(\mathrm{Pr}_{Ox}\, g), \tag{5}$$

где s — длина, а Pr_{Ox} — проекция на ось Ox. Так как $\gamma \leqslant 1$, то

$$\int_{\mathrm{Pr}_{Ox}g}(1+x)^{\gamma-1}d\,x \leqslant \int_0^{s(\mathrm{Pr}_{Ox}g)}(1+x)^{\gamma-1}dx =$$
$$=\gamma^{-1}[(s(\mathrm{Pr}_{Ox}g)+1)^{\gamma}-1] \leqslant \gamma^{-1}[s(\mathrm{Pr}_{Ox}g)]^{\gamma}.$$

Следовательно,

$$\left(\int_{\mathrm{Pr}_{Ox}g}(1+x)^{\gamma-1}dx\right)^{1/\gamma} \leqslant \gamma^{-1/\gamma}s(\partial g). \tag{6}$$

Замечая, что $m_2(g) \leqslant \int_{\mathrm{Pr}_{Ox}g} (1+x)^{\gamma-1}\,dx$, из (6) получаем оценку

$$[m_2(g)]^{1/\gamma} \leqslant \gamma^{-1/\gamma} s(\partial g), \tag{7}$$

которая означает, что $\Omega \in K_{1/\gamma, 1}$.

Пример 3. Покажем, что всякое множество Ω из класса J_α, имеющее конечный объем, принадлежит классу $K_{\alpha, \beta}$, где β — любое положительное число.

Для любого допустимого подмножества Ω, удовлетворяющего условию $m_n(g) \leqslant M$, справедливо неравенство

$$[m_n(g)]^\alpha \leqslant \mathfrak{A}(M)\, s(\partial_i g). \tag{8}$$

Пусть $m_n(g) > M$ и

$$2\alpha_n s(\partial_e g) < M^{(n-1)/n}, \text{ где } \alpha_n = [\Gamma(1+n/2)]^{1/n}/n\sqrt{\pi}. \tag{9}$$

Тогда в силу изопериметрического неравенства (1)

$$M^{(n-1)/n} \leqslant [m_n(g)]^{(n-1)/n} \leqslant \alpha_n (s(\partial_i g) + s(\partial_e g))$$

и, следовательно, $M^{(n-1)/n} \leqslant 2\alpha_n s(\partial_i g)$. Отсюда получаем

$$[m_n(g)]^\alpha \leqslant [m_n(\Omega)]^\alpha\, 2\alpha_n M^{(1-n)/n} s(\partial_i g). \tag{10}$$

Если неравенство (9) не выполнено, то

$$[m_n(g)]^\alpha \leqslant [m_n(\Omega)]^\alpha (2\alpha_n)^\beta [s(\partial_e g)]^\beta. \tag{11}$$

Из (8), (10) и (11) следует, что Ω принадлежит классу $K_{\alpha, \beta}$.

3.6.3. О непрерывности оператора вложения $W^1_{1,1}(\Omega, \partial\Omega)$ в $L_q(\Omega)$.

Теорема. *Если $\Omega \in K_{\alpha, \beta}$, где $\alpha \leqslant 1$, $\beta \geqslant \alpha$, то для всех $u \in W^1_{1, 1/\beta}(\Omega, \partial\Omega)$ справедливо неравенство* (3.6.1/1), *где* $q = 1/\alpha$, $r = 1/\beta$.

Доказательство. Рассмотрим случай $1 > \beta \geqslant \alpha$. Пусть u — произвольная функция из $C^\infty(\Omega) \cap C(\bar\Omega)$ с ограниченным носителем. Из теоремы 1.2.3 и леммы 1.3.3/1 получаем

$$\|u\|_{L_{1/\alpha}(\Omega)} \leqslant \left(\int_0^\infty [m_n(N_t)]^{\alpha/\beta} d(t^{1/\beta})\right)^\beta. \tag{1}$$

Введем множество $A_t = \{t > 0 \colon s(E_t) \leqslant [s(\bar N_t \cap \partial\Omega)]^\beta\}$ и представим последний интеграл в виде $\int_{A_t} + \int_{CA_t}$, где CA_t — дополнение A_t до положительной полуоси.

Оценим интеграл $\mathcal{J}_1 = \int_{A_t} [m_n(N_t)]^{\alpha/\beta} d(t^{1/\beta})$. Так как $\Omega \in K_{\alpha, \beta}$, то $[m_n(N_t)]^\alpha \leqslant 2\mathscr{E}[s(\bar N_t \cap \partial\Omega)]^\beta$ для п. в. $t \in A_t$ и, значит,

$$\mathcal{J}_1 \leqslant (2\mathscr{E})^{1/\beta} \int_{A_t} s(\bar N_t \cap \partial\Omega)\, d(t^{1/\beta}) \leqslant (2\mathscr{E})^{1/\beta} \int_{\partial\Omega} |u|^{1/\beta} ds. \tag{2}$$

Рассмотрим интеграл $\mathcal{J}_2 = \int_{CA_t} [m_n(N_t)]^{\alpha/\beta} d(t^{1/\beta})$. Очевидно, что

$$\mathcal{J}_2 \leq \beta^{-1} \int_0^\infty [m_n(N_t)]^\alpha dt \sup_{\tau \in CA_t} (\tau [m_n(N_\tau)]^\alpha)^{(1-\beta)/\beta}.$$

При $\tau \in CA_t$ в силу оценки (3.6.1/2) имеем $[m_n(N_\tau)]^\alpha \leq 2\mathcal{E} s(E_\tau)$ и, следовательно,

$$\mathcal{J}_2 \leq 2\mathcal{E}\beta^{-1} \int_0^\infty s(E_t)\,dt \sup_{\tau>0} (\tau [m_n(N_\tau)]^\alpha)^{(1-\beta)/\beta}.$$

Отсюда с помощью теоремы 1.2.4, получаем

$$\mathcal{J}_2 \leq 2\mathcal{E}\beta^{-1} \| \nabla u \|_{L(\Omega)} \| u \|^{(1-\beta)/\beta}_{L_{1/\alpha}(\Omega)}. \tag{3}$$

Из неравенств (1) — (3) следует

$$\| u \|_{L_{1/\alpha}(\Omega)} \leq c\mathcal{E} \left(\| \nabla u \|^\beta_{L(\Omega)} \| u \|^{1-\beta}_{L_{1/\alpha}(\Omega)} + \| u \|_{L_{1/\beta}(\partial\Omega)} \right).$$

Рассмотрим теперь случай $\beta \geq 1$. Из условия $\Omega \in K_{\alpha,\beta}$ вытекает оценка

$$\int_0^\infty [m_n(N_t)]^\alpha dt \leq \mathcal{E} \left(\int_0^\infty s(E_t)\,dt + \int_0^\infty [s(\bar{N}_t \cap \partial\Omega)]^\beta dt \right). \tag{4}$$

Применяя теорему 1.2.3 и лемму 1.3.3/1, имеем

$$\int_\Omega |u|^{1/\alpha} dx \leq \left(\int_0^\infty [m_n(N_t)]^\alpha dt \right)^{1/\alpha},$$

$$\left(\int_0^\infty [s(\bar{N}_t \cap \partial\Omega)]^\beta dt \right)^{1/\beta} \leq \int_0^\infty s(\bar{N}_t \cap \partial\Omega)\, d(t^{1/\beta}) = \int_{\partial\Omega} |u|^{1/\beta} ds.$$

Из этих оценок и из (4) получаем неравенство

$$\| u \|_{L_{1/\alpha}(\Omega)} \leq \mathcal{E} \left(\| \nabla u \|_{L(\Omega)} + \| u \|_{L_{1/\beta}(\partial\Omega)} \right). \blacksquare \tag{5}$$

Приведем пример, показывающий, что для $\Omega \in K_{\alpha,\beta}$ при $\alpha > \beta$ в предельном случае $r = 1/\beta$ теорема неверна.

Пример. Как было показано в примере 3.6.2/2, область $\Omega = \{(x, y): 0 < x < \infty,\ 0 < y < (1+x)^{2\beta-1}\}$, где $\beta \in (0, 1/2)$ принадлежит классу $K_{1/2,\beta}$. Рассмотрим последовательность функций *

$$\Omega \ni (x, y) \to u_m(x, y) = (1+x)^{-\varkappa_m}, \quad \varkappa_m < \beta.$$

Имеем

$$\| u_m \|_{L_2(\Omega)} = 2^{-1/2} (\varkappa_m - \beta)^{-1/2}, \quad \| \nabla u_m \|_{L(\Omega)} = \varkappa_m / (\varkappa_m - 2\beta + 1),$$

$$\| u_m \|_{L_{1/\beta}(\partial\Omega)} > \beta^\beta (\varkappa_m - \beta)^{-\beta}.$$

---

* Каждая из них очевидно принадлежит классу $W^1_{1,1/\beta}(\Omega, \partial\Omega)$, так как, умножая на «расплывающуюся» последовательность срезающих функций, ее можно приблизить в норме $W^1_{1,1/\beta}(\Omega, \partial\Omega)$ функциями с ограниченными носителями.

Для $u=u_m$ левая часть неравенства $\|u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C(\|\nabla u\|_{L(\Omega)}+$ $+\|u\|_{L_{1/\beta}(\partial\Omega)})$ при $\varkappa_m \to \beta-0$ растет быстрее, чем правая, и, следовательно, неравенство (3.6.1/1) при $q=1/\alpha$, $r=1/\beta$ неверно.

Замечание. Из доказательства теоремы 3.6.3 следует, что она останется справедливой и при $\beta<\alpha$, если в ее формулировке заменить (3.6.1/1) неравенством

$$\|u\|_{L_q(\Omega)} \leqslant C\left(\|\nabla u\|_{L(\Omega)}+\int_0^\infty [s(\bar{N}_t \cap \partial\Omega)]^{1/r}\,dt\right). \tag{6}$$

Следствие. *Каково бы ни было открытое множество Ω, для всех $u \in W^1_{1,1}(\Omega, \partial\Omega)$ справедливо неравенство*

$$\|u\|_{L_{n/(n-1)}(\Omega)} \leqslant \frac{[\Gamma(1+n/2)]^{1/n}}{n\pi^{1/2}}(\|\nabla u\|_{L(\Omega)}+\|u\|_{L(\Omega)}) \tag{7}$$

с точной константой.

Доказательство непосредственно следует из изопериметрического неравенства (3.6.2/1) и из (5). Точность константы уже отмечалась в 1.4.2, когда речь шла о неравенстве (1.4.2/8).

§ 3.7. КОММЕНТАРИИ К ГЛАВЕ 3

Результаты настоящей главы в существенной части были сформулированы в работе автора [60].

§ 3.1. Лемма 3.1.2/1 доказана в статье Ж. Дени и Ж. Л. Лионса [167].

§ 3.2. Классы J_α были введены автором [60] (см. также [62], [70]). Лемма 3.2.1/1 доказана Ю. Д. Бураго и автором [11]. Другие результаты этого параграфа (кроме леммы 3.2.3/2) получены автором. Близкое к теореме 3.2.3 утверждение о функциях класса $BV(\Omega)$, т. е. о функциях, градиенты которых суть векторные заряды, одновременно (и тем же методом) доказано Флемингом и Ришелем [178].

О дальнейшем развитии идеи о связи интегральных и геометрических неравенств см. Ю. Д. Бураго и В. Г. Мазья [11] (суммируемость следов функций из $BV(\Omega)$ на $\partial\Omega$, точные константы в некоторых интегральных неравенствах для функций из $BV(\Omega)$ и др.; эти результаты изложены в главе 6), М. Миранда [221], Мичел и Симонс [220], Гоффман и Спрак [199], Оцуки [233], Обен [149] (неравенства Соболева — Гальярдо для функций на многообразиях), Федерер (теоремы вложения для потоков) [174], Климов [36—38] (теоремы вложения, связанные с пространствами Орлича). Лемма 3.2.3/2 доказана Дени и Лионсом [167].

§ 3.3. Содержание этого параграфа взято из работы автора [69].

§ 3.4. Полученные здесь оценки функции λ приведены в [213].

§ 3.5. Результаты этого параграфа получены автором [78].

§ 3.6. Содержание этого параграфа взято из диссертации автора [62].

Глава 4

О СУММИРУЕМОСТИ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВА $L_p^1(\Omega)$

§ 4.1. О p-ПРОВОДИМОСТИ

4.1.1. Эквивалентность некоторых определений p-проводимости. Через F будем обозначать замкнутые в Ω ограниченные подмножества открытого множества Ω и через G — ограниченные открытые подмножества Ω Пусть $F\subset G$. Множество $K=G\setminus F$ назовем проводником. Объединим в класс $U_\Omega(K)$ функции $f\in C^{0,1}(\Omega)$, такие, что $f(x)\geqslant 1$ при $x\in F$ и $f(x)\leqslant 0$ при $x\in\Omega\setminus G$. Назовем p-проводимостью проводника K величину

$$c_p(K)=\inf\left\{\int_\Omega|\nabla f|^p\,dx\colon\ f\in U_\Omega(K)\right\}.$$

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$c_p(K)=\inf\left\{\int_\Omega|\nabla f|^p\,dx\colon\ f\in V_\Omega(K)\right\},$$

где через $V_\Omega(K)$ обозначен класс функций $\{f\in C^\infty(\Omega)\colon f(x)=1$ при $x\in F$ и $f(x)=0$ при $x\in\Omega\setminus G\}$.

Доказательство. Так как $U_\Omega(K)\supset V_\Omega(K)$, то достаточно оценить $c_p(K)$ только снизу. Пусть ε — произвольное число из промежутка $(0, 1)$, а f — функция из класса $U_\Omega(K)$, такая, что $\int_\Omega|\nabla f|^p\,dx\leqslant c_p(K)+\varepsilon$. Пусть еще $\psi=(1+\varepsilon)^2 f-\varepsilon$ и $\varphi=\min\{\psi_+, 1\}$. Тогда

$$\|\nabla\psi\|_{L_p(\Omega)}\leqslant(c_p(K)+\varepsilon)^{1/p}(1+\varepsilon)^2. \tag{1}$$

Введем обозначения: $\Phi_1=\{x\colon\ \varphi=1\}$, $\Phi_2=\{x\colon\ \varphi=0\}$, $Q=\{x\colon\ 1>\varphi(x)>0\}$. Так как $Q=\{x\colon\ (1+\varepsilon)^{-1}>f>\varepsilon(1+\varepsilon)^{-2}\}$, то $\operatorname{clos}_\Omega Q\subset K$.

Построим локально-конечное в Ω покрытие множества $\operatorname{clos}_\Omega Q$ открытыми шарами $\mathscr{B}_{0,i}$ $(i=1, 2, \ldots)$. Обозначим объединение этих шаров через $\mathfrak{A}_0$. Так как $\operatorname{clos}_\Omega Q\subset K$, то можно построить это покрытие так, чтобы $\operatorname{clos}_\Omega\mathfrak{A}_0$ содержалось в K. Построим теперь локально-конечные в Ω покрытия множеств $\Phi_k\setminus\mathfrak{A}_0$, $k=1, 2$, открытыми шарами $\mathscr{B}_{k,i}$ так, чтобы замыкания в Ω множеств $\mathfrak{A}_k=\bigcup\limits_i\mathscr{B}_{k,i}$, $k=1, 2$, не пересекались с $\operatorname{clos}_\Omega Q$. Это возможно, так как $(\Phi_k\setminus\mathfrak{A}_0)\cap\operatorname{clos}_\Omega Q=\varnothing$. Очевидно, что $F\subset\mathfrak{A}_1$ и $(\Omega\setminus G)\subset\mathfrak{A}_2$.

Пусть $\alpha_{k,i}\in\mathscr{D}(\mathscr{B}_{k,i})$ $(k=0, 1, 2;\ i=1, 2, \ldots)$ и пусть в Ω справедливо равенство $\sum_{k=0}^{2}\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{k,i}=1$. Определим при каждом $i=1, 2, \ldots$ функцию $\beta_i\in\mathscr{D}(\mathscr{B}_{0,i})$, такую, что $\|\nabla(\alpha_{0,i}\varphi-\beta_i)\|_{L_p(\Omega)}\leqslant$

$\leqslant \varepsilon^i$. Далее положим $v_{0,i}=\beta_i$, $v_{1,i}=\alpha_{1,i}$, $v_{2,i}=0$,

$$u=\sum_{k=0}^{2}\sum_{i=1}^{\infty} v_{k,i}. \tag{2}$$

Функция u бесконечно дифференцируема в Ω, так как каждая точка области Ω содержится лишь в конечном числе шаров $\mathscr{B}_{k,i}$, и поэтому в сумме (2) всегда лишь конечное число слагаемых. Очевидно, что

$$\|\nabla(\varphi-\psi)\|_{L_p(\Omega)}\leqslant \sum_{k=0}^{2}\sum_{i=1}^{\infty}\|\nabla(\alpha_{k,i}\varphi-v_{k,i})\|_{L_p(\Omega)}.$$

Так как $\varphi=1$ на $\mathscr{B}_{1,i}$ и $v_{1,i}=\alpha_{1,i}$, а также $\varphi=0$ на $\mathscr{B}_{2,i}$ и $v_{2,i}=0$, то

$$\|\nabla(\varphi-u)\|_{L_p(\Omega)}\leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\|\nabla(\alpha_{0,i}\varphi-\beta_i)\|_{L_p(\Omega)}\leqslant \varepsilon/(1-\varepsilon). \tag{3}$$

Поскольку $F\subset\mathfrak{A}_1$ и $F\cap\mathfrak{A}_0=\varnothing$, то на множестве F: $v_{0,i}=\beta_i=0$, $v_{2,i}=0$, $v_{1,i}=\alpha_{1,i}$, $\alpha_{0,i}=0$, $\alpha_{2,i}=0$. Поэтому на F $u=\sum_{i=1}^{\infty}v_{1,i}=$ $=\sum_{k=0}^{2}\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{k,i}=1$. Кроме того, $v_{k,i}=0$ на $\Omega\setminus G$ и, значит, на этом множестве $u=0$. Итак, $u\in V_\Omega(K)$.

Наконец, в силу (1) и (3)

$$\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}\leqslant(1+\varepsilon)^2(c_p(K)+\varepsilon)^{1/p}+\varepsilon(1-\varepsilon)^{-1}. \ ■$$

Пусть $T_\Omega(K)=\{f\in V_\Omega(K),\ 0\leqslant f\leqslant 1$ на $K\}$. В дальнейшем будет полезным следующий вариант леммы 1.

Лемма 2. *Справедливо равенство*

$$c_p(K)=\inf\left\{\int_\Omega|\nabla f|^p\,dx:\ f\in T_\Omega(K)\right\}.$$

Доказательство. Поскольку $T_\Omega(K)\subset V_\Omega(K)$, достаточно оценить $c_p(K)$ только снизу. Пусть $\varepsilon>0$, $\lambda_\varepsilon\in C^\infty(-\infty,+\infty)$, $\lambda_\varepsilon(t)=1$ при $t\geqslant 1$, $\lambda_\varepsilon(t)=0$ при $t\leqslant 0$, $0\leqslant\lambda_\varepsilon'(t)\leqslant 1+\varepsilon$ и пусть $\varphi\in V_\Omega(K)$. Введем функцию $f=\lambda_\varepsilon(\varphi)\in T_\Omega(K)$. Очевидно, что

$$\int_\Omega|\nabla f|^p\,dx=\int_\Omega[\lambda_\varepsilon'(\varphi)]^p\,|\nabla\varphi|^p\,dx\leqslant(1+\varepsilon)^p\int_\Omega|\nabla\varphi|^p\,dx$$

и, следовательно,

$$\inf\left\{\int_\Omega|\nabla f|^p\,dx:\ f\in T_\Omega(K)\right\}\leqslant c_p(K). \ ■$$

4.1.2. Некоторые свойства p-проводимости. Остановимся на некоторых простых свойствах p-проводимости.

Рассмотрим два расположенных в области Ω проводника $K=G\setminus F$ и $K'=G'\setminus F'$. Будем говорить, что проводник K' является частью K ($K'\subset K$), если $F\subset F'\subset G'\subset G$.

Из определения p-проводимости немедленно вытекает следующее утверждение.

Предложение 1. *Если $K'\subset K$, то $c_p(K)\leqslant c_p(K')$.*

Предложение 2. *По любому $\varepsilon > 0$ для произвольного проводника K, имеющего конечную p-проводимость, можно построить проводник $K' \subset K$, такой, что*

$$\varepsilon \geqslant c_p(K') - c_p(K) \geqslant 0. \tag{1}$$

Проводник K' можно выбрать так, чтобы $\partial_i F'$ и $\partial_i G'$ были многообразиями класса C^∞.

Доказательство. Правое неравенство следует из предложения 1. Пусть функция $f \in U_\Omega(K)$ такова, что

$$c_p(K) + \varepsilon/2 > \int_\Omega |\nabla f|^p dx, \tag{2}$$

и пусть $2\delta = 1 - [(\varepsilon + 2c_p(K))/(2\varepsilon + 2c_p(K))]^{1/p}$. Можно считать, что множества $\{x \in \Omega: f(x) = 1 - \delta\}$ и $\{x \in \Omega: f(x) = \delta\}$ — многообразия класса C^∞, так как в противном случае можно заменить δ сколь угодно близким числом, удовлетворяющим этому условию. Построим проводник K' следующим образом: $K' = G' \setminus F'$, где $F' = \{x \in \Omega: f(x) \geqslant 1 - \delta\}$, $G' = \{x \in \Omega: f(x) > \delta\}$. Тогда из (2) получим

$$(c_p(K) + \varepsilon/2)/(1 - 2\delta)^p > \int_\Omega |\nabla ((f(x) - \delta)/(1 - 2\delta))|^p dx.$$

Но функция $(1 - 2\delta)^{-1}(f - \delta)$ принадлежит классу $U_\Omega(K')$. Следовательно, $(c_p(K) + \varepsilon/2)/(1 - 2\delta)^p > c_p(K')$, что равносильно левому неравенству (1).

Предложение 3. *Пусть $K_1 = G_1 \setminus F_1$ и $K_2 = G_2 \setminus F_2$ — произвольные проводники в Ω. Тогда*

$$c_p(K_\cup) + c_p(K_\cap) \leqslant c_p(K_1) + c_p(K_2), \tag{3}$$

где $K_\cup = (G_1 \cup G_2) \setminus (F_1 \cup F_2)$, $K_\cap = (G_1 \cap G_2) \setminus (F_1 \cap F_2)$.

Доказательство. Пусть ε — произвольное положительное число и функции f_1 и f_2 из классов $U_\Omega(K_1)$ и $U_\Omega(K_2)$ соответственно таковы, что

$$\int_{K_i} |\nabla f_i|^p dx < c_p(K_i) + \varepsilon. \tag{4}$$

Введем функции $M = \sup\{f_1, f_2\}$, $m = \inf\{f_1, f_2\}$. Очевидно, что M и m удовлетворяют условию Липшица в Ω и что $M \geqslant 1$ на $F_1 \cup F_2$ и $M \leqslant 0$ на $\Omega \setminus (G_1 \cup G_2)$, а также $m \geqslant 1$ на $F_1 \cap F_2$ и $m \leqslant 0$ на $\Omega \setminus (G_1 \cap G_2)$. Кроме того,

$$\int_{K_\cup} |\nabla M|^p dx + \int_{K_\cap} |\nabla m|^p dx = \sum_{i=1}^2 \int_{K_i} |\nabla f_i|^p dx.$$

Отсюда, используя (4) и лемму 4.1.1/1, получаем (3).

4.1.3. Принцип Дирихле с предписанными поверхностями уровня и его следствия. Доказательства следующих лемм 1 и 2 и следствий 1 и 2 существенно не отличаются от доказательств аналогичных утверждений для (p, Φ)-емкости в пп. 2.2.1 — 2.2.3.

Лемма 1. *Для любого проводника K в Ω с конечной p-проводимостью справедливо равенство*

$$c_p(K) = \inf_{u \in V_\Omega(K)} \left(\int_0^1 \| \nabla f \|^{-1}_{L_{p-1}(E_\tau)} d\tau\right)^{1-p}, \qquad (1)$$

где $E_\tau = \{x \in \Omega \colon f(x) = \tau\}$.

Лемма 2. *Пусть f — функция из $C^\infty(\Omega) \cap L^1_p(\Omega)$. Тогда при* п. в. t

$$[s(E_t)]^{p/(p-1)} \| \nabla f \|^{-1}_{L_{p-1}(E_t)} \leqslant -(d/dt)[m_n(L_t)], \qquad (2)$$

где $L_t = \{x \colon f(x) > t\}$.

Следствие 1. *Для любого проводника K в Ω верно неравенство*

$$c_p(K) \geqslant \inf \left\{ \left(- \int_0^1 \frac{d}{dt} m_n(L_t) \frac{dt}{[s(E_t)]^{p/(p-1)}} \right)^{1-p} \colon f \in V_\Omega(K) \right\}. \qquad (3)$$

Следствие 2. *Пусть F — ограниченное замкнутое в Ω, а G и H — ограниченные открытые подмножества Ω, причем $F \subset G$,* $\mathrm{clos}_\Omega G \subset H$.

Рассмотрим проводники $K_1 = G \setminus F$, $K_2 = H \setminus \mathrm{clos}_\Omega G$, $K_3 = H \setminus F$. Тогда

$$[c_p(K_1)]^{-1/(p-1)} + [c_p(K_2)]^{-1/(p-1)} \leqslant [c_p(K_3)]^{-1/(p-1)}. \qquad (4)$$

Приведем еще одно свойство p-проводимости, доказательство которого аналогично доказательству теоремы 2.3.1 (см. также замечание 2.3.1).

Лемма 3. *Пусть $u \in C^{0,1}(\Omega)$, $u = 0$, вне открытого ограниченного множества $G \subset \Omega$ и пусть K_t — проводник $G \setminus N_t$. Тогда при $p \geqslant 1$ справедливо неравенство*

$$\int_0^\infty c_p(K_t)\, d(t^p) \leqslant (p^p/(p-1)^{p-1}) \int_\Omega |\nabla u|^p dx. \qquad (5)$$

При $p = 1$ коэффициент перед вторым интегралом в (5) *равен единице.*

§ 4.2. О МУЛЬТИПЛИКАТИВНОМ НЕРАВЕНСТВЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ, РАВНЫХ НУЛЮ НА ПОДМНОЖЕСТВЕ Ω

В этом параграфе найдено необходимое и достаточное условие справедливости неравенства

$$\| u \|_{L_q(\Omega)} \leqslant C \| \nabla u \|^{1-\varkappa}_{L_p(\Omega)} \| u \|^{\varkappa}_{L_r(\Omega)} \qquad (1)$$

для всех функций, обращающихся в нуль на некотором подмножестве Ω.

Пусть G — открытое ограниченное подмножество Ω. При $p > 1$ положим

$$\mathfrak{A}_G^{(p,\,\alpha)} = \sup_{\{F\}} ([m_n(F)]^\alpha / [c_p(G \setminus F)]^{1/p}),$$

где $\{F\}$ — совокупность замкнутых в Ω подмножеств G, таких, что $c_p(G\setminus F)>0$.

Через $\mathfrak{A}_G^{(1,\alpha)}$ обозначим величину $\mathfrak{A}_G^{(\alpha)}$, введенную в п. 3.2.3, т. е.

$$\mathfrak{A}_G^{(1,\alpha)}=\sup_{\{g\}}([m_n(g)]^\alpha/s(\partial_i g)),$$

где $\{g\}$ — совокупность допустимых подмножеств G.

Следующее утверждение обобщает лемму 3.2.3/1 (случай $q^*\geqslant p=1$).

Лемма. *Положим $p\geqslant 1$ и обозначим через G открытое ограниченное подмножество Ω.*

1) *Пусть $\mathfrak{A}_G^{(p,\alpha)}<\infty$ и числа q, α, p связаны одним из условий:*

$$\text{(i)}\quad q\leqslant q^*=\alpha^{-1}\quad \text{при}\quad \alpha p\leqslant 1,$$

$$\text{(ii)}\quad q<q^*=\alpha^{-1}\quad \text{при}\quad \alpha p>1.$$

Тогда для всех функций $u\in C^{0,1}(\Omega)$, равных нулю вне G, справедливо неравенство (1), в котором $r\in(0,q)$, $\varkappa=r(q^*-q)/q(q^*-r)$, $C\leqslant c\left(\mathfrak{A}_G^{(p,\alpha)}\right)^{1-\varkappa}$.

2) *Пусть $q^*>0$, $r\in(0,q^*)$ и при некотором $q\in(0,q^*]$ для любой функции $u\in C^{0,1}(\Omega)$, равной нулю вне G, выполнено неравенство (1), в котором $\varkappa=r(q^*-q)/q(q^*-r)$ и C — постоянная, не зависящая от u. Тогда $C\geqslant c\left(\mathfrak{A}_G^{(p,\alpha)}\right)^{1-\varkappa}$.*

Доказательство. 1) Дословно повторяя доказательство первой части теоремы 2.3.4 (при $\mu=m_n$), приходим к неравенству

$$\|u\|_{L_q(\Omega)}\leqslant c\left(\int_0^\infty [m_n(N_t)]^{p\alpha}t^{p-1}\,dt\right)^{(1-\varkappa)/p}\|u\|_{L_r(\Omega)}^{\varkappa}. \tag{2}$$

Отсюда при $p>1$ получаем

$$\|u\|_{L_q(\Omega)}\leqslant c\left(\mathfrak{A}_G^{(p,\alpha)}\right)^{1-\varkappa}\left(\int_0^\infty c_p(K_t)\,t^{p-1}\,dt\right)^{(1-\varkappa)/p}\|u\|_{L_r(\Omega)}^{\varkappa},$$

где K_t — проводник $G\setminus N_t$. Остается воспользоваться леммой 4.1.3/3.

В случае $p=1$ неравенство (1) следует из (2), леммы 3.1.2/3 и формулы

$$\int_\Omega |\nabla u|\,dx=\int_0^\infty s(E_t)\,dt \tag{3}$$

(см. теорему 1.2.4).

Пусть $p>1$. Зафиксируем малое число $\delta>0$ и положим

$$\beta_\delta=\sup([m_n(F)]^{p\alpha}/c_p(G\setminus F))$$

на множестве всех $F\subset G$, таких, что $c_p(G\setminus F)\geqslant\delta$. (После подстановки в (1) произвольной функции из $T_\Omega(G\setminus F)$ получается неравенство

$$[C_p(G\setminus F)]^{1-\varkappa}\geqslant C^{-p}[m_n(F)]^{p/q}[m_n(G)]^{-\varkappa p/r}.$$

6*

Отсюда следует, что совокупность множеств F, содержащихся в G и удовлетворяющих условию $c_p(G\setminus F)\geqslant\delta$, непуста.) Очевидно, что $\beta_\delta\leqslant\delta^{-1}[m_n(G)]^{p\alpha}$. Далее следует повторить доказательство второй части теоремы 2.3.4, используя лемму 4.1.3/1 вместо леммы 2.2.2/1 и заменяя $(p, \Phi)-\operatorname{cap}(F, \Omega)$ на $c_p(G\setminus F)$. Тогда придем к неравенству $\beta_\delta\leqslant cC^{p/(1-\varkappa)}$, которое в силу произвольности δ дает оценку $C\geqslant c\big(\mathfrak{A}_G^{(p,\alpha)}\big)^{1-\varkappa}$ при $p>1$.

Рассмотрим случай $p=1$. Пусть g — любое допустимое подмножество G. Подставим в (1) построенную в лемме 3.2.2 последовательность функций $\{w_m\}_{m\geqslant 1}$. Тогда

$$[s(\partial_i g)]^{1-\varkappa}\geqslant C^{-1}[m_n(e)]^{1/q}[m_n(g)]^{-\varkappa/r},$$

что в силу произвольности e дает $s(\partial_i g)\geqslant C^{-1}[m_n(g)]^{\alpha}$. ■

Следствие. *Если* $p_1>p\geqslant 1$ *и* $\alpha_1-p_1^{-1}=\alpha-p^{-1}$, *то* $\mathfrak{A}_G^{(p_1,\alpha_1)}\leqslant c\mathfrak{A}_G^{(p,\alpha)}$.

Доказательство. Подставим в (1) вместо u функцию $|u|^{q_1/q}$, где $q_1>q$, $q_1^{-1}-p_1^{-1}=q^{-1}-p^{-1}$. Тогда

$$\|u\|_{L_{q_1}(\Omega)}\leqslant c(q_1/q)^{1-\varkappa}\big(\mathfrak{A}_G^{(p,\alpha)}\big)^{1-\varkappa}\||u|^{(q_1-q)/p}\nabla u\|_{L_p(\Omega)}\|u\|^{\varkappa q_1/q}_{L_{r_1}(\Omega)}, \qquad (4)$$

где $r_1=rq_1/q$. Применяя неравенство Гельдера, получаем

$$\int_\Omega |u|^{p(q_1-q)/q}|\nabla u|^p dx\leqslant\Big(\int_\Omega |u|^{(q_1-q)pp_1/(p_1-p)q}dx\Big)^{(p_1-p)/p_1}\times$$
$$\times\Big(\int_\Omega|\nabla u|^{p_1}dx\Big)^{p/p_1}=\|u\|^{(p_1-p)q_1/p_1}_{L_{q_1}(\Omega)}\|\nabla u\|^p_{L_{p_1}(\Omega)}.$$

Отсюда и из (4) следует неравенство

$$\|u\|_{L_q(\Omega)}\leqslant c\big(\mathfrak{A}_G^{(p,\alpha)}\big)^{1-\varkappa_1}\|\nabla u\|^{1-\varkappa_1}_{L_{p_1}(\Omega)}\|u\|^{\varkappa_1}_{L_{r_1}(\Omega)},$$

где $\varkappa_1=r_1(q_1^*-q_1)/q_1(q_1^*-r_1)$, $q_1^*=\alpha_1^{-1}$. Используя вторую часть леммы 1, получаем неравенство $\mathfrak{A}_G^{(p_1,\alpha_1)}\leqslant c\mathfrak{A}_G^{(p,\alpha)}$. ■

§ 4.3. КЛАССЫ МНОЖЕСТВ $I_{p,\alpha}$

4.3.1. Определение и простейшие свойства классов $I_{p,\alpha}$.

Определение 1. Область Ω принадлежит классу $I_{p,\alpha}$ ($p\geqslant 1$, $\alpha>0$), если существует такая постоянная $M\in(0, m_n(\Omega))$, что

$$\mathfrak{A}_{p,\alpha}(M)\overset{\text{def}}{=}\sup_{\{K\}}([m_n(F)]^{\alpha}/[c_p(K)]^{1/p})<\infty, \qquad (1)$$

где $\{K\}$ — совокупность проводников $K=G\setminus F$ в Ω с положительной p-проводимостью, удовлетворяющих условию $m_n(G)\leqslant M$.

Из предложения 4.1.2/2 следует, что если $\Omega\in I_{p,\alpha}$, то $m_n(F)=0$ для любого проводника $K=G\setminus F$ с нулевой p-проводимостью.

Замечание. При $\alpha<(n-p)/np$, $n>p$, класс $I_{p,\alpha}$ пуст, так как в этом случае $c_p(B_{2r}\setminus\bar B_r)=\mathrm{const}\,r^{n-p}$, и поэтому

$$[m_n(B_r)]^\alpha/[c_p(B_{2r}\setminus\bar B_r)]^{1/p}=\mathrm{const}\,r^{n(\alpha-(n-p)/np)}\to\infty \quad \text{при } r\to 0.$$

Предложение 1. *Если область Ω есть объединение конечного числа областей из класса $I_{p,\alpha}$, то она принадлежит тому же классу.*

Доказательство. Пусть $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$, $\Omega_i\in I_{p,\alpha}$, где $i=1, 2$. Тогда существуют такие постоянные M_1, M_2, что для любого проводника $K_i=G_i\setminus F_i$ в Ω_i, такого, что $m_n(G_i)\leqslant M_i$, справедливо неравенство

$$[m_n(F_i)]^\alpha\leqslant\mathfrak{A}^{(i)}_{p,\alpha}(M_i)\,[c_p(K_i)]^{1/p}.$$

Положим $M=\min\{M_1, M_2\}$ и обозначим через K такой проводник $G\setminus F$, что $m_n(G)\leqslant M$. Пусть еще $G_i=G\cap\Omega_i$, $K_i=G_i\setminus F_i$. Если $c_p(K_1)=0$, то $m_n(F_1)=0$ и, значит, $m_n(F)=m_n(F_2)$. Следовательно,

$$[m_n(F)]^\alpha\leqslant\mathfrak{A}^{(2)}_{p,\alpha}(M_2)\,[c_p(K_2)]^{1/p}\leqslant\mathfrak{A}^{(2)}_{p,\alpha}(M_2)\,[c_p(K)]^{1/p}.$$

В случае $c_p(K_i)>0$ $(i=1, 2)$

$$\frac{[m_n(F)]^\alpha}{[c_p(K)]^{1/p}}\leqslant c\left(\frac{[m_n(F_1)]^\alpha}{[c_p(K_1)]^{1/p}}+\frac{[m_n(F_2)]^\alpha}{[c_p(K_2)]^{1/p}}\right)\leqslant c\sum_{i=1}^{2}\mathfrak{A}^{(i)}_{p,\alpha}(M_i). \blacksquare$$

Определение 2. Будем говорить, что *$\mathscr{K}$ — допустимый проводник*, если $\mathscr{K}=\mathscr{G}\setminus\mathrm{clos}_\Omega\, g$, где $\mathscr{G}$ и g — допустимые подмножества Ω (см. определение в начале п. 3.1.1).

Предложение 2. *Справедливо равенство*

$$\mathfrak{A}_{p,\alpha}(M)=\sup_{\{\mathscr{K}\}}\left([m_n(g)]^\alpha/[c_p(\mathscr{K})]^{1/p}\right), \tag{2}$$

где $\{\mathscr{K}\}$ — совокупность допустимых проводников $\mathscr{K}=\mathscr{G}\setminus\mathrm{clos}_\Omega\, g$ с положительной p-проводимостью, таких, что $m_n(g)\leqslant M$. (Следовательно, в определении класса $I_{p,\alpha}$ можно ограничиться допустимыми проводниками.)

Докажем неравенство

$$\mathfrak{A}_{p,\alpha}(M)\leqslant\sup_{\{\mathscr{K}\}}\left([m_n(g)]^\alpha/[c_p(\mathscr{K})]^{1/p}\right). \tag{3}$$

Обратное неравенство очевидно. Пусть K — любой проводник из определения 1. По любому $\varepsilon>0$ найдется допустимый проводник $\mathscr{K}=\mathscr{G}\setminus\mathrm{clos}_\Omega\, g$, $\mathscr{K}\subset K$, такой, что $c_p(K)\geqslant(1-\varepsilon)c_p(\mathscr{K})$ (см. предложение 4.1.2/2). Очевидно, что $m_n(g)\leqslant M$ и

$$[m_n(F)]^\alpha/[c_p(K)]^{1/p}\leqslant[m_n(g)]^\alpha/(1-\varepsilon)^{1/p}[c_p(\mathscr{K})]^{1/p},$$

что немедленно дает (3).

4.3.2. Совпадение классов $I_{1,\alpha}$ и J_α.

Лемма. *Классы* $I_{1,\alpha}$ *и* J_α *совпадают и*

$$\mathfrak{A}_{1,\alpha}(M)=\sup_{\{g\}}([m_n(g)]^\alpha/s(\partial_i g)), \tag{1}$$

где $\{g\}$ — *совокупность допустимых подмножеств* Ω, *таких, что* $m_n(g)\leqslant M$.

Доказательство. Пусть g — допустимое подмножество Ω, такое, что $m_n(g)\leqslant M$ и $\{w_m\}_{m\geqslant 1}$ — последовательность функций, построенная в лемме 3.2.2. Из свойств $\{w_m\}$ следует неравенство $s(\partial_i g)\geqslant c_1(g\setminus e)$ для любого компакта e, содержащегося в g. Если $\Omega\in I_{1,\alpha}$, то $[m_n(e)]^\alpha\leqslant \mathfrak{A}_{1,\alpha}(M)\,s(\partial_i g)$ и, следовательно,

$$[m_n(g)]^\alpha=\sup_{e\subset g}[m_n(e)]^\alpha\leqslant\mathfrak{A}_{1,\alpha}(M)\,s(\partial_i g).$$

Допустим, что $\Omega\in J_\alpha$, и обозначим через K произвольный проводник $G\setminus F$, удовлетворяющий условию $m_n(G)\leqslant M$. Из формулы (4.2/3) для любой функции $f\in T_\Omega(K)$ получаем

$$\begin{aligned}\int_\Omega|\nabla f|\,dx &\geqslant \inf_{\{g\}}\{s(\partial_i g):\ G\supset g\supset F\}\geqslant\\ &\geqslant \inf_{\{g\}}(s(\partial_i g)/[m_n(g)]^\alpha)\,[m_n(F)]^\alpha.\end{aligned} \tag{2}$$

Так как по лемме 4.1.1/2 $\inf\left\{\int|\nabla f|\,dx\colon f\in T_\Omega(K)\right\}=c_1(K)$, то из (2) следует неравенство $\mathfrak{A}_{1,\alpha}(M)=\sup_{\{g\}}([m_n(g)]^\alpha/s(\partial_i g))$. ■

4.3.3 Необходимое и достаточное условие справедливости мультипликативного неравенства для функций из $W^1_{p,s}(\Omega]$. Из лемм 4.2 и 4.3.2 получаем следующее очевидное утверждение.

Следствие. 1) *Пусть* $\mathfrak{A}_{p,\alpha}(M)<\infty$ *при некотором* $M\in(0,\ m_n(\Omega))$. *Тогда для всех функций* $u\in C^{0,1}(\Omega)$, *таких, что* $m_n(\operatorname{supp}u)\leqslant M$, *верно неравенство* (4.2/1), *где* $r\in(0,\ q)$, $\varkappa=r(q^*-q)/q(q^*-r)$, q — *число, определенное в лемме* 4.2/1 *и* $C\leqslant c\,[\mathfrak{A}_{p,\alpha}(M)]^{1-\varkappa}$.

2) *Если неравенство* (4.2/1) *справедливо для всех функций* $u\in C^{0,1}(\Omega)$, *таких, что* $m_n(\operatorname{supp}u)\leqslant M<m_n(\Omega)$, *то* $C\geqslant c[\mathfrak{A}_{p,\alpha}(M)]^{1-\varkappa}$.

Целесообразность введения классов $I_{p,\alpha}$ оправдывается следующим утверждением.

Теорема. 1) *Пусть* $\Omega\in I_{p,\alpha}$ *и* q — *положительное число, удовлетворяющее одному из условий:* (i) $q\leqslant q^*=\alpha^{-1}$, *если* $p\leqslant q^*$, *или* (ii) $q<q^*$, *если* $p>q^*$. *Тогда для любой функции* $u\in W^1_{p,s}(\Omega)$ *справедливо неравенство*

$$\|u\|_{L_q(\Omega)}\leqslant\left(C_1\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}+C_2\|u\|_{L_s(\Omega)}\right)^{1-\varkappa}\|u\|^{\varkappa}_{L_r(\Omega)}, \tag{1}$$

где $s<q^*$, $r<q$, $\varkappa=r(q^*-q)/q(q^*-r)$, $C_2=cM^{(s-q^*)/sq^*}$, $C_1\leqslant c\mathfrak{A}_{p,\alpha}(M)$.

2) *Пусть $q^*>0$ и при некотором $q\in(0, q^*]$ для всех функций $u\in W^1_{p,s}(\Omega)$ выполняется неравенство* (1), *где* $0<s<q^*$, $0<r<q^*$, $\varkappa=r(q^*-q)/q(q^*-r)$. *Тогда $\Omega\in I_{p,\alpha}$ при $\alpha=1/q^*$, и если постоянную M из определения класса $I_{p,\alpha}$ ввести равенством $M=cC_2^{sq^*/(s-q^*)}$, где c — достаточно малая положительная постоянная, зависящая только от p, q^*, s, то $C_1\geqslant c\mathfrak{A}_{p,\alpha}(M)$.*

Доказательство. 1) В силу леммы 4.1.1/1 достаточно получить (1) для функций $u\in L^1_p(\Omega)\cap L_\infty(\Omega)\cap C^\infty(\Omega)$ с ограниченными носителями. Пусть $T=\inf\{t\colon m_n(N_t)<M\}$. Очевидно, что $m_n(L_t)\leqslant M\leqslant m_n(N_t)$. Отметим далее, что

$$\int_\Omega |u|^q\,dx\leqslant\int_{\Omega\setminus N_T}|u|^q\,dx+cT^q m_n(N_T)+c\int_{N_T}(|u|-T)^q\,dx. \qquad (2)$$

Для оценки первого слагаемого справа преобразуем его следующим образом:

$$\int_{\Omega\setminus N_T}|u|^q\,dx=\int_{\Omega\setminus N_T}|u|^{q^*(q-r)/(q^*-r)}\,|u|^{r(q^*-q)/(q^*-r)}\,dx$$

и воспользуемся неравенством Гельдера:

$$\int_{\Omega\setminus N_T}|u|^q\,dx\leqslant$$
$$\leqslant\Big(\int_{\Omega\setminus N_T}|u|^{q^*}dx\Big)^{(q-r)/(q^*-r)}\Big(\int_{\Omega\setminus N_T}|u|^r\,dx\Big)^{(q^*-q)/(q^*-r)}.$$

Так как $u<T$ на $\Omega\setminus N_T$, то правая часть последнего неравенства не превосходит

$$T^{(q^*-s)(q-r)/(q^*-r)}\Big(\int_{\Omega\setminus N_T}|u|^s\,dx\Big)^{(q-r)/(q^*-r)}\times$$
$$\times\Big(\int_{\Omega\setminus N_T}|u|^r\,dx\Big)^{(q^*-q)/(q^*-r)}.$$

Отсюда получаем

$$\int_{\Omega\setminus N_T}|u|^q\,dx\leqslant M^{(s-q^*)(q-r)/s(q^*-r)}\Big(\int_{\Omega\setminus N_T}|u|^r\,dx\Big)^{(q^*-q)/(q^*-r)}\times$$
$$\times\Big(\int_{N_T}|u|^s\,dx\Big)^{(q^*-s)(q-r)/s(q^*-r)}\Big(\int_{\Omega\setminus N_T}|u|^s\,dx\Big)^{(q-r)/(q^*-r)}\leqslant$$
$$\leqslant M^{(s-q^*)(q-r)/s(q^*-r)}\Big(\int_\Omega|u|^s\,dx\Big)^{q^*(q-r)/s(q^*-r)}\times$$
$$\times\Big(\int_\Omega|u|^r\,dx\Big)^{(q^*-q)/(q^*-r)}. \qquad (3)$$

Оценим второе слагаемое в правой части (2). Учитывая, что $|u(x)|\geqslant T$ на N_T и $m_n(N_T)\geqslant M$, получаем неравенство

$$T^q m_n(N_T)\leqslant M^{(s-q^*)(q-r)/s(q^*-r)}\times$$
$$\times\Big(\int_{N_T}|u|^s\,dx\Big)^{q^*(q-r)/s(q^*-r)}\Big(\int_{N_T}|u|^r\,dx\Big)^{(q^*-q)/(q^*-r)}.$$

Объединяя эту оценку с (3) и (2), находим

$$\|u\|_{L_q(\Omega)} \leqslant c\,\|(|u|-T)^+\|_{L_q(\Omega)} + cM^{(1-\varkappa)(s-q^*)/sq^*}\,\|u\|^{1-\varkappa}_{L_s(\Omega)}\,\|u\|^{\varkappa}_{L_r(\Omega)}.$$

Остается применить к функции $(|u|-T)^+$ первую часть следствия.

2) Пусть M — любая постоянная, удовлетворяющая неравенству $2c_0M^{1/s-1/q^*}C_2<1$, где c_0 — зависящая только от s, p, q, q^*, r постоянная, которая будет введена в конце доказательства.

Через δ обозначим произвольно малое положительное число, а через K — проводник $G\setminus F$ в Ω, удовлетворяющий условиям $m_n(G)\leqslant M$, $c_p(K)\geqslant\delta$. Определим еще функцию $\beta_\delta=\sup\,[m_n(G)]^{p/q}/c_p(K)$, где супремум вычисляется на множестве всех только что выделенных проводников. Очевидно, что $\beta_\delta<\infty$ и что

$$\mathfrak{A}_{p,\alpha}(M)=\lim_{\delta\to+0}\beta_\delta^{1/p}. \tag{4}$$

Так как $s<q^*$, то для любой функции $u\in T_\Omega(K)$ справедливо неравенство

$$\|u\|_{L_s(\Omega)}\leqslant$$
$$\leqslant c\Big(\sup_{0<t<1}\big([m_n(N_t)]^{1/q^*}/[c_p(G\setminus N_t)]^{1/p}\big)\,\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}\Big)^{q^*(s-t)/s(q^*-t)}\times$$
$$\times\|u\|^{t(q^*-s)/s(q^*-t)}_{L_t(\Omega)},$$

где $t<s$ (см. доказательство первой части леммы 4.2/1).

Отметим теперь, что поскольку $c_p(G\setminus N_t)\geqslant c_p(K)\geqslant\delta$, то $[m_n(N_t)]^{p/q^*}\leqslant\beta_\delta c_p(G\setminus N_t)$. Кроме того, $\|u\|_{L_t(\Omega)}\leqslant M^{1/t-1/s}\|u\|_{L_s(\Omega)}$. Следовательно, $\|u\|_{L_s(\Omega)}\leqslant cM^{1/s-1/q}\beta_\delta^{1/p}\,\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}$. С помощью этой оценки из (1) выводим

$$[m_n(F)]^{1/q}\leqslant\big(C_1+c\beta_\delta^{1/s}M^{1/s-1/q^*}C_2\big)^{1-\varkappa}\,\|\nabla u\|^{1-\varkappa}_{L_p(\Omega)}\,\|u\|^{\varkappa}_{L_r(\Omega)}.$$

Далее следует повторить доказательство второй части теоремы 2.3.4, используя вместо леммы 2.2.2/3 лемму 4.1.3/1 и заменяя (p,Φ) — — cap (F, G) на $c_p(K)$. В результате получим оценку

$$\beta_\delta^{1/p}\leqslant c\big(C^1+\beta_\delta^{1/p}M^{1/s-1/q^*}C_2\big).$$

Учитывая определение постоянной M, отсюда выводим, что $\beta_\delta(M)\leqslant(2c_0C_1)^p$. Остается воспользоваться равенством (4). ■

4.3.4. Функция $\nu_{M,p}$ и связь классов $I_{p,\alpha}$ и J_α.

Определение. Пусть $\nu_{M,p}(t)$ — точная нижняя граница $c_p(K)$ на множестве всех проводников $K=G\setminus F$, удовлетворяющих условию: $m_n(F)\geqslant t$, $m_n(G)\leqslant M$.

Аналогично предложению 4.3.1/2 доказывается, что в этом определении можно ограничиться допустимыми проводниками. Из неравенства (4.2.3/3) немедленно получаем следующее утверждение, связывающее $\nu_{M,p}$ с функцией λ_M, определенной в 3.2.4.

Предложение 1. *Справедливо неравенство*

$$\nu_{M,p}(t) \geqslant \left(\int_t^M [\lambda_M(\sigma)]^{p/(1-p)} d\sigma\right)^{1-p}. \tag{1}$$

Очевидно, что при $p \geqslant 1$

$$\mathfrak{A}_{p,\alpha}(M) = \sup_{0<t\leqslant M} t^\alpha [\nu_{M,p}(t)]^{-1/p}. \tag{2}$$

Отсюда следует, что множество Ω принадлежит классу $I_{p,\alpha}$ в том и только в том случае, если

$$\varliminf_{t\to+0} t^{-\alpha p}\nu_{M,p}(t) > 0. \tag{3}$$

Как уже было отмечено в 3.2.4, множество Ω принадлежит классу $J_\alpha = I_{1,\alpha}$ в том и только в том случае, если $\varliminf_{t\to+0} t^{-\alpha}\lambda_M(t) > 0$.

Предложение 2. *Если* $\Omega \in J_{\alpha+(p-1)/p}$, *то* $\Omega \in I_{p,\alpha}$ *и имеет место оценка*

$$\mathfrak{A}_{p,\alpha}(M) \leqslant ((p-1)/p\alpha)^{(p-1)/p} \mathfrak{A}_{1,\alpha+(p-1)/p}(M). \tag{4}$$

Доказательство. Из (1) получаем

$$\nu_{M,p}(t) \geqslant [\mathfrak{A}_{1,\alpha+(p-1)/p}(M)]^{-p} \left(\int_t^M \sigma^{-p/(p-1)(\alpha+(p-1)/p)} d\sigma\right)^{1-p} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{p\alpha}{p-1}\right)^{p-1} [\mathfrak{A}_{1,\alpha+(p-1)/p}(M)]^{-p} t^{\alpha p}. \blacksquare$$

Вообще в силу следствия 4.2, $p_1 > p \geqslant 1$ и $\alpha_1 - p_1^{-1} = \alpha - p^{-1}$, то класс $I_{p,\alpha}$ является частью класса I_{p_1,α_1} и $\mathfrak{A}_{p_1,\alpha_1}(M) \leqslant c\mathfrak{A}_{p,\alpha}(M)$.

4.3.5. Оценки $\nu_{M,p}$ для некоторых конкретных областей. Рассмотрим несколько областей, для которых можно дать явные двусторонние оценки функции $\nu_{M,p}$.

Пример 1. Пусть Ω — область $\{x\colon |x'| < f(x_n),\ 0 < x_n < a\}$, уже рассмотренная в начале п. 3.3.3. Покаж м, что справедливы оценки

$$k^p \left(\int_{\alpha(\mu)}^{\alpha(M)} [f(\tau)]^{(1-n)/(p-1)} d\tau\right)^{1-p} \leqslant \nu_{M,p}(\mu) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_{\alpha(\mu)}^{\alpha(M)} [f(\tau)]^{(1-n)/(p-1)} d\tau\right)^{1-p}, \tag{1}$$

где k — постоянная из неравенства (4.3.2/2), зависящая от M, а функция α определена равенством $\mu = v_{n-1}\int_0^{\alpha(\mu)} [f(\tau)]^{n-1} d\tau$.

Рассмотрим проводник $K_{\mu,M} = G_{\alpha(M)} \setminus \operatorname{clos}_\Omega G_{\alpha(\mu)}$, где $G_\alpha = \{x \in \Omega\colon 0 < x_n < \alpha\}$. Очевидно, что функция u, определенная равенствами $u(x) = 0$ вне $G_{\alpha(M)}$, $u(x) = 1$ на $G_{\alpha(\mu)}$ и

$$u(x) = \int_{x_n}^{\alpha(M)} d\tau/[f(\tau)]^{(n-1)/(p-1)} \times$$

$$\times \left(\int_{\alpha(\mu)}^{\alpha(M)} d\tau/[f(\tau)]^{(n-1)/(p-1)}\right)^{-1} \quad \text{на} \quad G_{\alpha(M)} \setminus G_{\alpha(\mu)},$$

принадлежит классу $U_\Omega(K_{\mu,M})$. Поэтому, подставляя ее в интеграл $\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx$, находим

$$c_p(K_{\mu,M}) \leqslant \left(\int_{\alpha(\mu)}^{\alpha(M)} [f(\tau)]^{(1-n)/(p-1)}\,d\tau\right)^{1-p}.$$

Используя определение $\nu_{M,p}(\mu)$, отсюда получаем правое неравентсво (1).

Подставляя левое неравенство (3.3.3/1) в (4.3.4/1), выводим требуемую нижнюю оценку для функции $\nu_{M,p}$.

Из (1) следует, что $\Omega \in I_{p,\alpha}$ в том и только в том случае, если

$$\overline{\lim_{x\to+0}} \left(\int_0^x [f(\tau)]^{n-1}\,d\tau\right)^{\alpha p/(p-1)} \int_x^a [f(\tau)]^{(1-n)/(p-1)}\,d\tau < \infty.$$

В частности, для области

$$\Omega^{(\lambda)} = \left\{x\colon\ (x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2)^{1/2} < ax_n^\lambda,\ 0<x_n<1\right\}, \qquad (2)$$

где $\lambda > (p-1)/(n-1)$, при малых t справедливы неравенства $ct^{\alpha p} \leqslant \nu_{M,p}(t) \leqslant c' t^{\alpha p}$, где $\alpha = [\lambda(n-1)+1-p]/p[\lambda(n-1)+1]$. Таким образом, область (2) принадлежит классу $I_{p,\alpha}$ и для нее $p\alpha < 1$.

Пример 2. Пусть Ω — область из примера 3.3.3/2. С помощью оценок (3.3.3/4) для функции λ_M, рассуждая так же, как в примере 1, получаем неравенства

$$k^p \left(\int_{\alpha(M)}^{\alpha(\mu)} [f(\tau)]^{(1-n)/(p-1)}\,d\tau\right)^{1-p} \leqslant \nu_{M,p}(\mu) \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int_{\alpha(M)}^{\alpha(\mu)} [f(\tau)]^{(1-n)/(p-1)}\,d\tau\right)^{1-p}. \qquad (3)$$

Следовательно, $\Omega \in I_{p,\alpha}$ в том и только в том случае, если

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} \left(\int_x^\infty [f(\tau)]^{n-1}\,d\tau\right)^{\alpha p/(p-1)} \int_0^x [f(\tau)]^{(1-n)/(p-1)}\,d\tau < \infty.$$

В частности, для области $\{x\colon\ x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2 < (1+x_n)^{-2\beta}$, $0<x_n<\infty\}$, где $\beta(n-1)>1$, при малых t справедливы неравенства $ct^{\alpha p} \leqslant \nu_{M,p}(t) \leqslant c't^{\alpha p}$ при $\alpha p = [\beta(n-1)-1+p]\times$ $\times[\beta(n-1)-1]^{-1}$ (здесь $\alpha p > 1$).

Для области $\left\{x: x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2 < e^{-cx_n},\ 0<x_n<\infty\right\}$, где $c = \mathrm{const} > 0$, из (3) получаем $c\mu \leqslant \nu_{M,p}(\mu) \leqslant c'\mu$, и, следовательно, эта область принадлежит к классу $I_{p,1/p}$.

Пример 3. Пусть Ω — область на плоскости, рассмотренная в примере 3.3.3/3. Предложение 3 вместе с нижней оценкой (3.3.3/6) для функции λ дает следующую оценку $\nu_{M,p}(t)$ снизу:

$$\nu_{M,p}(t) \geqslant C_M^{(1)} \left(\int_{\theta(M)}^{\theta(t)} [\delta(\varphi)]^{-1/(p-1)}\,d\varphi\right)^{1-p}, \qquad (4)$$

где θ — функция, определенная формулой (3.3.3/7) и $\delta = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$.

Для того чтобы получить аналогичную оценку сверху, введем проводник $G_{\theta(t)} \setminus \operatorname{clos}_\Omega G_{\theta(M)}$, где $G_\theta = \{\rho e^{i\varphi} \in \Omega \colon 0 < \varphi < \theta\}$, и функцию u, определенную равенствами: $u = 0$ вне $G_{\theta(t)}$, $u = 1$ на $G_{\theta(M)}$,

$$u(\theta) = \int_{\theta(M)}^{\theta} [\delta(\varphi)]^{1/(1-p)}\, d\varphi \times$$
$$\times \left(\int_{\theta(M)}^{\theta(t)} [\delta(\varphi)]^{1/(1-p)}\, d\varphi\right)^{-1} \text{ на } G_{\theta(t)} \setminus \bar{G}_{\theta(M)}.$$

Очевидно, что

$$c_p[G_{\theta(t)} \setminus \bar{G}_{\theta(M)}] \leqslant$$
$$\leqslant \iint_{G_{\theta(t)} \setminus G_{\theta(M)}} |\rho^{-1} u'(\varphi)|^p \rho\, d\rho\, d\varphi \leqslant$$
$$\leqslant C_M^{(2)} \left(\int_{\theta(M)}^{\theta(t)} [\delta(\varphi)]^{1/(1-p)}\, d\varphi\right)^{1-p}.$$

Отсюда и из (4) получаем

$$C_M^{(1)} \left(\int_{\theta(M)}^{\theta(t)} [\delta(\varphi)]^{1/(1-p)}\, d\varphi\right)^{1-p} \leqslant \nu_{M,p}(t) \leqslant$$
$$\leqslant C_M^{(2)} \left(\int_{\theta(M)}^{\theta(t)} [\delta(\varphi)]^{1/(1-p)}\, d\varphi\right)^{1-p}. \qquad (5)$$

В частности, для области

$$\{\rho e^{i\theta} : 1 - (8+\varphi)^{1-\beta} > \rho > 1 - (8+\varphi)^{1-\beta} -$$
$$- c(8+\varphi)^{-\beta}, \qquad 0 < \varphi < \infty\}, \qquad (6)$$

где $0 < c < 2\pi(\beta - 1)$, $\beta > 1$, при малых t справедливы оценки $ct^{\alpha p} \leqslant \nu_{M,p}(t) \leqslant c' t^{\alpha p}$, где $\alpha = (\beta - 1 + p)/p(\beta - 1)$. Таким образом, область (6) является примером ограниченной области из класса $I_{p,\alpha}$ при $p\alpha > 1$.

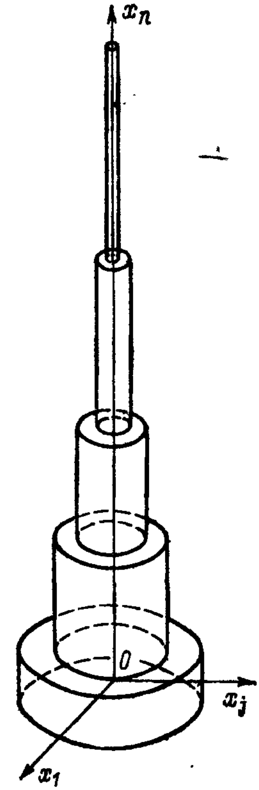

Рис. 15.

Пример 4. Покажем, что примыкающие друг к другу непересекающиеся цилиндры $G_j = \{x : |x_n - \alpha_j| < a_j,\ x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 < b_j^2\}$, где $\sum_j a_j b_j^{n-1} < \infty$, (рис. 15) образуют область, которая в случае $\overline{\lim\limits_{j \to \infty}}\, a_j = \infty$ не принадлежит классу $I_{p,1/p}$. Пусть $F_j = \{x \in G_j \colon |x_n - \alpha_j| \leqslant a_j/2\}$ и $\eta \in C_0^\infty([0, 1))$, $\eta(t) = 1$ при $t \in [0, 1/2)$. Подставляя в норму $\|\nabla u\|_{L_p(G_j)}$ функцию $x \to \eta(|x_n - \alpha_j|/a_j)$, получаем, что $c_p(G_j \setminus F_j) \leqslant c a_j^{-p} m_n(F_j)$. Поэтому $\underline{\lim\limits_{\mu \to 0}}\, \mu^{-1} \nu_{M,p}(\mu) = 0$.

§ 4.4. ВЛОЖЕНИЕ $W_{p,s}^1(\Omega)$ В $L_{q^*}(\Omega)$ ПРИ $q^* < p$

4.4.1. Об оценке нормы в $L_{q^*}(\Omega)$ при $q^* < p$ для функций, равных нулю на подмножестве Ω. Если множество Ω принадлежит классу $I_{p,\alpha}$, $\alpha p\leqslant 1$, то согласно теореме 4.3.3 оператор вложения $W^1_{p,s}(\Omega)$ в $L_{q^*}(\Omega)$, где $q^*=\alpha^{-1}$, ограничен. Следующий пример показывает, что при $\alpha p>1$ (или, что равносильно, при $p>q^*$) неравенство (4.3.3/1) с предельным показателем $q=q^*=\alpha^{-1}$ может не выполняться.

Пример. Рассмотрим двумерную область $\Omega=\{(x_1, x_2): |x_1|<(1+x_2)^{-\beta},\ 0<x_2<\infty\}$, где $\beta>1$. Как было показано в примере 4.3.5/2, эта область принадлежит классу $I_{p,1/p+1/(\beta-1)}$. Докажем, что при $q=q^*=p(\beta-1)/(p+\beta-1)$ неравенство (4.3.3/1) неверно.

Для последовательности функций $u_m(x_1, x_2)=(1+x_2)^{\gamma_m}$, $\gamma_m<1+(\beta-1)/p$, $m=1, 2, \ldots$, справедливы равенства

$$\|u\|^{q^*}_{L_{q^*}(\Omega)}=2[1+(\beta-1)/p]/[\beta-1-p(\gamma_m-1)],$$

$$\|\nabla u_m\|^p_{L_p(\Omega)}=2\gamma_m/[\beta-1-p(\gamma_m-1)],\quad \|u_m\|^s_{L_s(\Omega)}=2/(\beta-1-\gamma_m s).$$

Так как $s<q^*<p$, то левая часть неравенства (4.3.3/1) для функции u_m стремится к бесконечности при $m\to\infty$ быстрее, чем правая.

Итак, при $p>q^*=\alpha^{-1}$ принадлежность области Ω классу $I_{p,\alpha}$ необходима, но не достаточна для справедливости неравенства (4.3.3/1) с предельным показателем $q=q^*$. В теореме 4.4.2 будет получено необходимое при $q\geqslant 1$ и достаточное при $q>0$ условие.

Пусть G — ограниченное открытое подмножество Ω. Обозначим через $S(G)$ любую неубывающую последовательность $\{G_j\}$ $(-\infty<j<\infty)$ открытых подмножеств G и через K_j — проводник $G_{j+1}\setminus \operatorname{clos}_\Omega G_j$. Положим

$$\mathfrak{B}_G^{(p,\alpha)}=\sup_{\{S(G)\}}\left[\sum_{j=-\infty}^{+\infty}[m_n(G_j)]^{\alpha p/(\alpha p-1)}/[c_p(K_j)]^{1/(\alpha p-1)}\right]^{\alpha-1/p},$$

где $\alpha p>1$, $p\geqslant 1$.

Лемма. 1) *Если* $\mathfrak{B}_G^{(p,\alpha)}<\infty$, *то для всех* $u\in C^{0,1}(\Omega)$, *обращающихся в нуль вне* G, *справедливо неравенство*

$$\|u\|_{L_{q^*}(\Omega)}\leqslant C\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)},\tag{1}$$

где $q^*=\alpha^{-1}$, $\alpha p>1$ *и* $C\leqslant c\mathfrak{B}_G^{(p,\alpha)}$.

2) *Если неравенство* (1) *справедливо при некотором* $q^*\in[1, p)$ *для всех функций* $u\in C^{0,1}(\Omega)$, *равных нулю вне* G, *то* $C\geqslant c\mathfrak{B}_G^{(p,\alpha)}$.

Доказательство. 1) В силу теоремы 1.2.3

$$\|u\|^{q^*}_{L_{q^*}(\Omega)}=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\int_{2^j}^{2^{j+1}}m_n(N_t)\,d(t^{q^*})\leqslant$$

$$\leqslant(2^{q^*}-1)\sum_{j=-\infty}^{+\infty}2^{jq^*}m_n(N_{2^j}),$$

где, как обычно, $N_t = \{x : |u(x)| \geqslant t\}$. Применяя неравенство Гельдера, получаем

$$\|u\|_{L_{q^*}(\Omega)} \leqslant (2^{q^*}-1)^{1/q^*} \left\{ \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{(m_n(N_{2^j}))^{p/q^*}}{c_p(L_{2^{j-1}} \setminus N_{2^j})} \right]^{q^*/(p-q^*)} \right\}^{1/q^*-1/p} \times$$

$$\times \left[\sum_{j=-\infty}^{+\infty} 2^{jp} c_p (L_{2^{j-1}} \setminus N_{2^j}) \right]^{1/p}.$$

Определим функцию v_j равенствами $v_j = 1$ на N_{2^j}, $v_j = 2^{1-j}|u| - 1$ на $L_{2^{j-1}} \setminus N_{2^j}$, $v_j = 0$ на $\Omega \setminus L_{2^{j-1}}$. Так как $v_j \in U_\Omega(L_{2^{j-1}} \setminus N_{2^j})$, то

$$c_p(L_{2^{j-1}} \setminus N_{2^j}) \leqslant \int_\Omega |\nabla v_j|^p \, dx = 2^{(1-j)p} \int_{L_{2^{j-1}} \setminus N_{2^j}} |\nabla u|^p \, dx.$$

Поэтому

$$\|u\|_{L_{q^*}(\Omega)} \leqslant 2(2^{q^*}-1) \mathfrak{B}_G^{(p,\alpha)} \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_{L_{2^{j-1}} \setminus N_{2^j}} |\nabla u|^p \, dx \right)^{1/p} =$$

$$= c \mathfrak{B}_G^{(p,\alpha)} \|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}.$$

2) Рассмотрим какую-либо последовательность $S(G)$ и положим

$$t_\nu = \sum_{j=\nu}^{N} ([m_n(G_j)]^{p/q^*} / c_p(K_j))^{q^*/(p-q^*)}$$

при $\nu \leqslant N$, $t_\nu = 0$ при $\nu > N$, $t_\nu = t_{-N}$ при $\nu < -N$. Через u_ν обозначим произвольную функцию из класса $U_\Omega(K_\nu)$ и определим в Ω функцию u равенством $u(x) = (t_\nu - t_{\nu+1}) u_\nu(x) + t_{\nu+1}$ при $x \in K_\nu$. Так как функция u принадлежит классу $C^{0,1}(\Omega)$ и равна нулю вне G, то для нее верно неравенство (1).

Используя теорему 1.2.3, получаем

$$\sum_{j=-N}^{N} (t_j^{q^*} - t_{j+1}^{q^*}) m_n(G_j) \leqslant \int_\Omega u^{q^*} \, dx.$$

Отсюда из (1) и из неравенства $(t_j - t_{j+1})^{q^*} \leqslant t_j^{q^*} - t_{j+1}^{q^*}$ следует, что

$$\left[\sum_{j=-N}^{N} (t_j - t_{j+1})^{q^*} m_n(G_j) \right]^{p/q^*} \leqslant C^p \sum_{j=-N}^{N} \int_{K_j} |\nabla u|^p \, dx =$$

$$= C \sum_{j=-N}^{N} (t_j - t_{j+1})^p \int_\Omega |\nabla u_j|^p \, dx.$$

Поскольку u_j — произвольная функция из $U_\Omega(K_j)$, то, минимизируя последнюю сумму, получаем

$$\left[\sum_{j=-N}^{N} (t_j - t_{j+1})^{q^*} m_n(G_j) \right]^{p/q^*} \leqslant C \sum_{j=-\infty}^{N} c_p(K_j) (t_j - t_{j+1})^p.$$

Наконец, замечая, что

$$t_j - t_{j+1} = ([m_n(G_j)]^{p/q^*} / c_p(K_j))^{q/(p-q^*)}, \qquad |j| \leqslant N,$$

приходим к оценке

$$\sum_{j=-N}^{N} ([m_n(G_j)]^{p/q^*} / c_p(K_j))^{q^*/(p-q^*)} \leqslant C^{pq^*/(p-q^*)}.$$

4.4.2. Классы множеств $H_{p,\alpha}$ и вложение $W^1_{p,s}(\Omega)$ в $L_{q^*}(\Omega)$ при $q^*<p$. В этом пункте вводятся классы $H_{p,\alpha}$ множеств, в терминах которых удается дать необходимое и достаточное условие вложения $W^1_{p,s}(\Omega)$ в $L_{q^*}(\Omega)$ при $q^*<p$.

Пусть $\alpha p>1$. Положим

$$\mathfrak{B}_{p,\alpha}(M)=\sup_{\{S\}}\left\{\sum\nolimits_{j=-\infty}^{+\infty}[(m_n(G_j)]^{\alpha p/(p-1)}/[c_p(K_j)]^{1/(\alpha p-1)}\right\}^{\alpha-1/p},$$

где M — постоянная из промежутка $(0,\ m_n(\Omega))$, а $\{S\}$ — совокупность всех неубывающих последовательностей S открытых ограниченных множеств G_j, $-\infty<j<\infty$, содержащихся в Ω и таких, что $m_n\left(\bigcup_j G_j\right)\leqslant M$; через K_j обозначен проводник $G_{j+1}\setminus \operatorname{clos}_\Omega G_j$.

Определение. Множество Ω принадлежит классу $H_{p,\alpha}$, если $\mathfrak{B}_{p,\alpha}(M)<\infty$ при некотором $M\in(0,\ m_n(\Omega))$.

Из леммы 4.4.1 получаем следующее очевидное утверждение.

Следствие 1. 1) *Пусть $\alpha p>1$ и $\mathfrak{B}_{p,\alpha}(M)<\infty$. Тогда для всех функций $u\in C^{0,1}(\Omega)$, таких, что $m_n(\operatorname{supp} u)\leqslant M$, верно неравенство* (4.4.1/1), *где $q^*=\alpha^{-1}$ и $C\leqslant c\mathfrak{B}_{p,\alpha}(M)$.*

2) *Если неравенство* (4.4.1/1) *справедливо для всех функций $u\in C^{0,1}(\Omega)$, $m_n(\operatorname{supp} u)\leqslant M$, то $C\geqslant c\mathfrak{B}_{p,\alpha}(M)$.*

Повторяя с очевидными упрощениями доказательство теоремы 4.3.3, из следствия 1 получаем следующее утверждение.

Теорема. 1) *Пусть $\alpha p>1$ и $\Omega\in H_{p,\alpha}$. Тогда для всех $u\in W^1_{p,s}(\Omega)$ верно неравенство*

$$\|u\|_{L_{q^*}(\Omega)}\leqslant C_1\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}+C_2\|u\|_{L_s(\Omega)}, \tag{1}$$

где $q^*=\alpha^{-1}$, $s<q^*$, $C_2=cM^{(s-q^*)/sq^*}$, $C_1\leqslant c\mathfrak{B}_{p,\alpha}(M)$.

2) *Пусть неравенство* (1), *где $1\leqslant q^*<p$, $s<q^*$, справедливо для всех функций $u\in W^1_{p,s}(\Omega)$. Тогда $\Omega\in H_{p,\alpha}$ и если постоянную M из определения класса $H_{p,\alpha}$ ввести равенством $M=cC_2^{sq^*/(s-q^*)}$, где c — достаточно малая положительная константа, зависящая только от p, q^*, s, то $C_1\geqslant c\mathfrak{B}_{p,\alpha}(M)$.*

Следствие 2. *Если $p_1>p\geqslant 1$ и $\alpha_1-p_1^{-1}=\alpha-p^{-1}$, то $\mathfrak{B}_G^{(p_1,\alpha_1)}\leqslant c\mathfrak{B}_G^{(p,\alpha)}$ для любого множества G. (Следовательно, $\mathfrak{B}_{p_1,\alpha_1}(M)\leqslant c\mathfrak{B}_{p,\alpha}(M)$ и $H_{p,\alpha}\subset H_{p_1,\alpha_1}$.)*

Это утверждение доказывается так же, как и следствие 4.2.

4.4.3. Вложение $L^1_p(\Omega)$ в $L_{q^*}(\Omega)$ для областей конечного объема. Приведем необходимое и достаточное условие справедливости «неравенства Пуанкаре»

$$\inf_{c\in R^1}\|u-c\|_{L_{q^*}(\Omega)}\leqslant C\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)} \tag{1}$$

в предположении, что Ω — область и $m_n(\Omega)<\infty$.

По лемме 3.2.3/2 это неравенство и вложение $L_p^1(\Omega)$ в $L_{q^*}(\Omega)$ $(p \geqslant 1,\ q^* \geqslant 1)$ эквивалентны. Случай $m_n(\Omega) = \infty$ рассмотрен в п. 4.7.5.

Теорема 1. *Пусть Ω — область конечного объема. Тогда:*

1) *если $\mathfrak{A}_{p,\alpha}(^1/_2 m_n(\Omega)) < \infty$ при $\alpha p \leqslant 1$ или $\mathfrak{B}_{p,\alpha}(^1/_2 m_n(\Omega)) < \infty$ при $\alpha p > 1$, то для всех функций $u \in L_p^1(\Omega)$ верно неравенство* (1), *в котором $q^* = \alpha^{-1}$, $C \leqslant c\mathfrak{B}_{p,\alpha}(^1/_2 m_n(\Omega))$ при $\alpha p \leqslant 1$ и $C \leqslant c\mathfrak{B}_{p,\alpha}(^1/_2 m_n(\Omega))$ при $\alpha p > 1$;*

2) *если существует такая постоянная C, что для всех функций $u \in L_p^1(\Omega)$ справедливо неравенство* (1), *где $q^* \geqslant 1$, то $C \geqslant c\mathfrak{A}_{p,\alpha}(^1/_2 m_n(\Omega))$ при $\alpha^{-1} = q^* \geqslant p$ и $C \geqslant c\mathfrak{B}_{p,\alpha}(^1/_2 m_n(\Omega))$ при $\alpha^{-1} = q^* < p$.*

Доказательство. Достаточность доказывается так же, как и теорема 3.2.3. При этом вместо леммы 3.2.3/1 следует применить следствие 4.3.3 в случае $\alpha p \geqslant 1$ и следствие 4.4.2/1 в случае $\alpha p < 1$.

Необходимость. Пусть u — произвольная функция из $C^{0,1}(\Omega) \cap L_p^1(\Omega)$, такая, что

$$m_n(\operatorname{supp} u) \leqslant {}^1/_2 m_n(\Omega). \tag{2}$$

Существует число c_0, для которого

$$\| u - c_0 \|_{L_{q^*}(\Omega)} = \inf_{c \in R^1} \| u - c \|_{L_{q^*}(\Omega)}. \tag{3}$$

Отсюда и из неравенства (1) получаем

$$\int_{\operatorname{supp} u} | u - c_0 |^{q^*} dx + | c_0 |^{q^*} m_n(\Omega \setminus \operatorname{supp} u) \leqslant C^{q^*} \| \nabla u \|_{L_p(\Omega)}^{q^*}.$$

Следовательно, $$^1/_2 m_n(\Omega) \, | c_0 |^{q^*} \leqslant C^{q^*} \| \nabla u \|_{L_p(\Omega)}^{q^*}.$$

Так как $$\| u \|_{L_{q^*}(\Omega)} \leqslant | c_0 | \, [m_n(\Omega)]^{1/q^*} + \| u - c_0 \|_{L_{q^*}(\Omega)},$$

то, используя (1) и (3), получаем для всех функций $u \in C^{0,1}(\Omega)$, удовлетворяющих условию (2), неравенство

$$\| u \|_{L_{q^*}(\Omega)} \leqslant cC \| \nabla u \|_{L_p(\Omega)}.$$

Остается сослаться на следствия 4.3.3 и 4.4.2/1. ■

Теорема 2. *Пусть Ω — область конечного объема. Пространство $L_p^1(\Omega)$ вложено в $L_{q^*}(\Omega)$ в том и при $q^* \geqslant 1$ только в том случае, если $\Omega \in I_{p,\,1/q^*}$ при $p \leqslant q^*$ и $\Omega \in H_{p,\,1/q^*}$ при $p > q^*$.*

Доказательство. Необходимость следует из леммы 3.2.3/2 и теоремы 1. Для того чтобы доказать достаточность, следует показать, что если при некотором $M \in (0,\ {}^1/_2 m_n(\Omega))$ величины $\mathfrak{A}_{p,\alpha}(M)$ и $\mathfrak{A}_{p,\alpha}(M)$ конечны, то справедливо неравенство (1). Пусть

$u\in L^1_p(\Omega)\cap C^{0,1}(\Omega)$ и $T=\inf\{t: m_n(N_t)\leqslant M\}$. Отметим, что

$$\int_\Omega |u|^{q^*}dx\leqslant c\left[\int_\Omega (|u|-T)_+^{q^*}dx+T^{q^*}M\right].$$

Используя следствия 4.3.3 и 4.4.2/1, отсюда выводим

$$\|u\|_{L_{q^*}(\Omega)}\leqslant C\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}+cTM^{1/q},$$

где C — постоянная, не зависящая от u.

Обозначим через ω ограниченную подобласть Ω с гладкой границей, такую, что $m_n(\Omega\diagdown\omega)<M/2$. Очевидно, что

$$\int_\omega |u|^p dx\geqslant \int_{\omega\cap N_T}|u|^p dx\geqslant {}^1/_2T^pM.$$

Следовательно,

$$\|u\|_{L_{q^*}(\Omega)}\leqslant C\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}+cM^{1/q^*-1/p}\|u\|_{L_p(\omega)}. \tag{4}$$

Так как для области ω верно неравенство

$$\inf_{c\in R^1}\|u-c\|_{L_p(\omega)}\leqslant K\|\nabla u\|_{L_p(\omega)},$$

то из (4) получаем неравенство (1) для области Ω.

4.4.4. Достаточные условия принадлежности множества классу $H_{p,\alpha}$. Доказываемые здесь предложения приводят к следующим формулируемым в терминах функций $\nu_{M,p}$ и λ_M достаточным условиям принадлежности области классу $H_{p,\alpha}$:

$$\int_0^M [\tau/\nu_{M,p}(\tau)]^{1/(\alpha p-1)}d\tau<\infty, \tag{1}$$

$$\int_0^M [\tau/\lambda_M(\tau)]^{p/(\alpha p-1)}d\tau<\infty. \tag{2}$$

Предложение 1. *Если* $\alpha p>1$, $\alpha\leqslant 1$, *то*

$$\mathfrak{A}_{p,\alpha}(M)\leqslant\{(\alpha p/(\alpha p-1))\int_0^M [\tau/\nu_{M,p}(\tau)]^{1/(\alpha p-1)}d\tau\}^{\alpha-1/p}. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $G=\bigcup\limits_{j=-\infty}^{+\infty}G_j$, где $\{G_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ — неубывающая последовательность открытых подмножеств Ω, такая, что $m_n(G)\leqslant M$ и пусть K_j — проводник $G_{j+1}\diagdown \operatorname{clos}_\Omega G_j$. Так как функция $\nu_{M,p}$ не убывает, то

$$\frac{[m_n(G_j)]^{p/(p-q^*)}-[m_n(G_{j-1})]^{p/(p-q^*)}}{[\nu_{M,p}(m_n(G_j))]^{q^*/(p-q^*)}}\leqslant\int_{m_n(G_{j-1})}^{m_n(G_j)}\frac{d(t^{p/(p-q^*)})}{[\nu_{M,p}(t)]^{q^*/(p-q^*)}}$$

и аналогично

$$\frac{[m_n(G_j)]^{p/(p-q^*)}}{[\nu_{M,p}(m_n(G_j))]^{q^*/(p-q^*)}}\leqslant\int_0^{m_n(G_j)}\frac{d(t^{p/(p-q^*)})}{[\nu_{M,p}(t)]^{q^*/(p-q^*)}}.$$

Отсюда получаем при любом $N=1, 2, \ldots$

$$\sum_{|j|\leqslant N} \frac{[m_n(G_j)]^{p/(p-q^*)}-[m_n(G_{j-1})]^{p/(p-q^*)}}{[\nu_{M,p}(m_n(G_j))]^{q^*/(p-q^*)}}+$$
$$+\frac{[m_n(G_{-N-1})]^{p/(p-q^*)}}{[\nu_{M,p}(m_n(G_{-N-1}))]^{q^*/(p-q^*)}}\leqslant \int_0^M \frac{d(t^{p/(p-q^*)})}{[\nu_{M,p}(t)]^{q^*/(p-q^*)}}.$$

Обозначим через $K^{(j)}$ проводник $G\diagdown \operatorname{clos}_\Omega G_j$. Согласно определению функции $\nu_{M,p}$ имеет место неравенство $c_p(K^{(j)})\geqslant \nu_{M,p}(m_n(G_j))$. Поэтому

$$\sum_{|j|\leqslant N} \frac{[m_n(G_j)]^{p/(p-q^*)}-[m_n(G_{j-1})]^{p/(p-q^*)}}{[c_p(K^{(j)})]^{q^*/(p-q^*)}}+$$
$$+\frac{[m_n(G_{-N-1})]^{p/(p-q^*)}}{[c_p(K^{(-N-1)})]^{q^*/(p-q^*)}}\leqslant \int_0^M \frac{d(t^{p/(p-q^*)})}{[\nu_{M,p}(t)]^{q^*/(p-q^*)}}.$$

Выражение в левой части не меньше чем

$$\sum_{|j|\leqslant N}[m_n(G_j)]^{p/(p-q^*)}\left([c_p(K^{(j)})]^{q^*/(q^*-p)}-[c_p(K^{(j+1)})]^{q^*/(q^*-p)}\right).$$

Так как $(p-1)q^*/(p-q^*)\geqslant 1$, то для всех $a, b>0$ $|a^s-b^s|\geqslant$ $\geqslant |a-b|^s$, $s=(p-1)q^*/(p-q^*)$. Поэтому последняя сумма мажорирует величину

$$\sum_{|j|\leqslant N}[m_n(G_j)]^{p/(p-q^*)}\left([c_p(K^{(j)})]^{1/(1-p)}-[c_p(K^{(j+1)})]^{1/(1-p)}\right)^{\frac{q^*(p-1)}{p-q^*}},$$

что в силу следствия 4.1.3/2 мажорирует сумму

$$\sum_{|j|\leqslant N}\left([m_n(G_j)]^{p/(p-q^*)}/[c_p(K_j)]^{q^*/(p-q^*)}\right).$$

Остается воспользоваться определением функции $\mathfrak{B}_{p,\alpha}(M)$. ■

Предложение 2. *Если* $\alpha p>1$, $\alpha\leqslant 1$, *то*

$$\mathfrak{B}_{p,\alpha}(M)\leqslant ((\alpha p)^{\alpha-1}(p-1)^{(p-1)/p}/(\alpha p-1)^{\alpha-1/p})\times$$
$$\times\left\{\int_0^M [\tau/\lambda_M(\tau)]^{p/(\alpha p-1)}\,d\tau\right\}^{\alpha-1/p}. \tag{4}$$

Доказательство. В силу неравенств (4.3.4/1) и (3)

$$[\mathfrak{B}_{p,\alpha}(M)]^{p/(\alpha p-1)}\leqslant (\alpha p/(\alpha p-1))\int_0^M \tau^{1/(\alpha p-1)}\times$$
$$\times\left[\int_\tau^M [\lambda_M(\sigma)]^{p/(1-p)}\,d\sigma\right]^{(p-1)/(\alpha p-1)}d\tau.$$

Для оценки правой части воспользуемся неравенством (1.3/1) в форме

$$\int_0^M \tau^{-r}\left(\int_\tau^M f(\sigma)\,d\sigma\right)^q d\tau\leqslant (q/(1-r))^q\int_0^M \tau^{q-r}[f(\tau)]^q\,d\tau, \tag{5}$$

где $f(\tau)\geqslant 0$, $r<1$, $q>1$. Полагая в (5) $r=1/(1-\alpha p)$, $q=$ $=(p-1)/(\alpha p-1)$, получаем (4).

Следующим замечанием мы воспользуемся в § 4.5.

Замечание. Пусть G — фиксированное открытое подмножество Ω. Обозначим через $\nu_G^{(p)}(t)$ точную нижнюю границу $c_p(K)$ на множестве всех проводников $K=G\setminus F$, удовлетворяющих условию $m_n(F)\geqslant t$.

Заменяя в доказательстве предложения 1 $\mathfrak{B}_{p,\alpha}(M)$ на $\mathfrak{B}_G^{(p,\alpha)}$ и $\nu_{M,p}$ на $\nu_G^{(p)}$, получаем оценку

$$\mathfrak{B}_G^{(p,\alpha)}\leqslant\left\{(\alpha p/(\alpha p-1))\int_0^M\left[\tau/\nu_G^{(p)}(\tau)\right]^{1/(\alpha p-1)}d\tau\right\}^{\alpha-1/p},$$

которая вместе с леммой 4.4.1 показывает, что условие $\int_0^M\left[\tau/\nu_G^{(p)}(\tau)\right]^{1/(\alpha-1)}d\tau<\infty$ достаточно для справедливости неравенства (4.4.1/1) для всех $u\in C^{0,1}(\Omega)$, обращающихся в нуль вне G.

4.4.5. Необходимые условия принадлежности множества классам $I_{p,\alpha}$ и $H_{p,\alpha}$. Выбирая специальным образом проводники K в определении класса $I_{p,\alpha}$ или последовательности $\{G_j\}$ в определении класса $H_{p,\alpha}$, мы можем получать различные необходимые условия принадлежности множества Ω этим классам. Приведем некоторые утверждения такого рода.

Предложение 1. *Пусть O — произвольная точка множества $\bar{\Omega}$ и $s(t)$ — площадь пересечения Ω со сферой ∂B_t (с центром O).*

Если $\Omega\in I_{p,\alpha}$, то при всех достаточно малых ρ и при $r<\rho$

$$\left(\int_0^r s(t)\,dt\right)^{\alpha p/(p-1)}\int_r^\rho dt/[s(t)]^{1/(p-1)}\leqslant\text{const}.$$

Доказательство. Если $\Omega\in I_{p,\alpha}$, то очевидно, что при малых ρ и при $r<\rho$

$$[m_n(\Omega_r)]^\alpha\leqslant\text{const}\,[c_p(\Omega_\rho\setminus\text{clos}_\Omega\,\Omega_r)]^{1/p},\quad\text{где}\quad\Omega_\delta=\Omega\cap B_\delta.\tag{1}$$

Пусть функция u равна единице в Ω_r, нулю вне Ω_ρ и

$$u(x)=\int_{|x|}^\rho(dt/[s(t)]^{1/(p-1)})\left(\int_r^\rho(dt/[s(t)]^{1/(p-1)})\right)^{-1},\quad x\in\Omega_\rho\setminus\Omega_r.$$

Подставляя u в определение p-проводимости, получаем оценку

$$c_p(\Omega_\rho\setminus\text{clos}_\Omega\,\Omega_r)\leqslant\left(\int_r^\rho(dt/[s(t)]^{1/(p-1)})\right)^{1-p},\tag{2}$$

которая вместе с (1) доказывает предложение.

Точно так же устанавливается следующее необходимое условие принадлежности классу $I_{p\alpha}$.

Предложение 2. *Если $m_n(\Omega)<\infty$ и $\Omega\in I_{p,\alpha}$, то при всех достаточно больших ρ и при $r>\rho$*

$$\left(\int_r^\infty s(t)\,dt\right)^{\alpha p/(p-1)}\int_\rho^r(dt/[s(t)]^{1/(p-1)})\leqslant\text{const}.\tag{3}$$

Отсюда выводится следующее утверждение.

Следствие. *Если Ω — неограниченная область, $m_n(\Omega)<\infty$ и $\Omega\in I_{p,\alpha}$, то $\alpha p\geqslant 1$.*

Доказательство. В силу неравенства Гельдера при $r>\rho$

$$r-\rho=\int_\rho^r[s(t)]^{1/p}dt/[s(t)]^{1/p}\leqslant\left(\int_\rho^r s(t)\,dt\right)^{1/p}\left(\int_\rho^r dt/[s(t)]^{1/(p-1)}\right)^{(p-1)/p}.$$

Поэтому из (2) получаем

$$r-\rho\leqslant\text{const}\left(\left(\int_\rho^r s(t)\,dt\right)^{1/p}/\left(\int_r^\infty s(t)\,dt\right)^\alpha\right).$$

Пусть последовательность $\{\rho_j\}$ определена условием $\int_{\rho_j}^\infty s(t)\,dt=2^{-j}$. Тогда

$$\rho_j-\rho_{j-1}\leqslant\text{const}\left(\left(\int_{\rho_{j-1}}^{\rho_j}s(t)\,dt\right)^{1/p}/\left(\int_{\rho_j}^\infty s(t)\,dt\right)^\alpha\right)=\text{const}\,(2^{\alpha-1/p})^j.$$

Если $\alpha p<1$, то ряд $\sum_j(\rho_j-\rho_{j-1})$ сходится, что противоречит предположению о неограниченности области Ω. ■

Так как условие $\Omega\in I_{p,1/q}$ необходимо для непрерывности оператора вложения $L_p^1(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$, то согласно следствию, если для неограниченной области Ω конечного объема $L_p^1(\Omega)\subset L_q(\Omega)$, то $p\geqslant q$.

Приведем необходимое условие принадлежности множества Ω классу $H_{p,\alpha}$.

Предложение 3. *Если $m_n(\Omega)<\infty$ и $\Omega\in H_{p,\alpha}$, $\alpha p>1$, то для любой убывающей числовой последовательности $\{\rho_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$, стремящейся к нулю при $j\to-\infty$ и к бесконечности при $j\to+\infty$,*

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(\int_{\rho_j}^{+\infty}s(t)\,dt\right)^{\frac{\alpha p}{(p-1)}}\left(\int_{\rho_{j+1}}^{\rho_j}\frac{dt}{[s(t)]^{1/(p-1)}}\right)^{\frac{p-1}{(\alpha p-1)}}\leqslant\text{const}.$$

Доказательство получится из (2), если оценить $\mathfrak{B}_{p,\alpha}(M)$ снизу с помощью последовательности $S=\{G_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$, где $G_j=\{x\in\Omega:|x|>\rho_j\}$.

4.4.6. Примеры областей из класса $H_{p,\alpha}$.

Пример 1. Область Ω, рассмотренная в примере 4.3.5/2, принадлежит классу $H_{p,\alpha}$ если

$$\int_0^\infty\left(\int_x^\infty[f(t)]^{n-1}dt\right)^{p/(\alpha p-1)}[f(x)]^{(n-1)(\alpha-1)(p-1)/(\alpha p-1)}dx<\infty.\qquad(1)$$

Последнее условие является также необходимым при дополнительных предположениях:

$$f(2t)\geqslant cf(t),\quad\int_t^\infty[f(x)]^{n-1}dx\leqslant ct\,[f(t)]^{n-1}\text{ при больших } t.\qquad(2)$$

Из (2) следует, что интеграл (1) сходится в том и только в том случае, если

$$\int_0^\infty x^{p/(\alpha p-1)}[f(x)]^{n-1}dx<\infty.\qquad(3)$$

Доказательство. Достаточность (1) немедленно получается из левой оценки (4.3.5/3) и предложения 4.4.4/1.

Докажем необходимость условия (3). Пусть $G_j=\{x\in\Omega\colon x_n<2^{-j}\}$, $-\infty<j<+\infty$ и при $x\in G_j\setminus G_{j+1}$

$$u_j(x)=\int_{x_n}^{2^{-j}}[f(t)]^{(1-n)/(p-1)}\,dt\left\{\int_{2^{-j-1}}^{2^{-j}}[f(t)]^{(1-n)/(p-1)}\,dt\right\}^{-1}.$$

Очевидно, что

$$c_p(G_j\setminus\operatorname{clos}G_{j+1})\leqslant\int_{G_j\setminus G_{j+1}}|\nabla u_j|^p\,dx\leqslant c\left(\int_{2^{-j-1}}^{2^{-j}}[f(t)]^{(1-n)/(p-1)}\,dt\right)^{1-p}.$$

Следовательно, при достаточно больших N

$$[\mathfrak{B}_{p,\alpha}(M)]^{p/(\alpha p-1)}\geqslant c\sum_{j=-\infty}^{-N}\left\{\int_{2^{-j}}^{+\infty}[f(t)]^{n-1}\,dt\right\}^{\alpha p/(\alpha p-1)}\times$$
$$\times\left\{\int_{2^{-j-1}}^{2^{-j}}[f(t)]^{(1-n)/(p-1)}\,dt\right\}^{(p-1)/(\alpha p-1)}.$$

Правая часть в силу (2) не меньше, чем $c\sum_{j=-\infty}^{-N}f(2^{-j})\,2^{-j(1+p/(\alpha p-1))}$. Поэтому из конечности $\mathfrak{B}_{p,\alpha}(M)$ следует сходимость интеграла (3).

Пример 2. Рассмотрим спираль Ω из примеров 3.3.3./3. и 4.3.5/3. Предположим дополнительно, что при больших θ справедливы неравенства:

$$\delta(2\theta)\geqslant c\delta(\theta),\qquad\int_\theta^\infty\delta(\varphi)\,d\varphi\leqslant c\theta\delta(\theta).$$

Тогда, рассуждая так же, как и в примере 1, можно показать, что $\Omega\in H_{p,\alpha}$ в том и только в том случае, если

$$\int_0^\infty\delta(\varphi)\,\varphi^{p/(\alpha p-1)}\,d\varphi<\infty.\tag{4}$$

Более сложный пример области из класса $H_{p,\alpha}$ приведен в следующем параграфе.

4.4.7. Другие описания классов $I_{p,\alpha}$ и $H_{p,\alpha}$. Покажем, что класс проводников $K=G\setminus F$, использованный в определении 4.3.1/1 класса $I_{p,\alpha}$, можно существенно сузить.

Теорема 1. *Пусть Ω — ограниченная область и ω — фиксированное открытое множество, такое, что $\bar\omega\subset\Omega$. Область Ω принадлежит классу $I_{p,\alpha}$ ($p\geqslant1$, $\alpha>0$, $\alpha\geqslant p^{-1}-n^{-1}$) в том и только в том случае, если*

$$\sup_{\{F\}}\left([m_n(F)]^\alpha/[c_p(G\setminus F)]^{1/p}\right)<\infty,\tag{1}$$

где $G=\Omega\setminus\bar\omega$ и $\{F\}$ — совокупность замкнутых в Ω подмножеств множества G.

Доказательство. Обозначим левую часть неравенства (1) через $S(\omega)$. Необходимость условия (1) очевидна, так как $S(\omega)\leqslant$ $\leqslant\mathfrak{A}_{p,\alpha}(m_n(\Omega\setminus\bar\omega))$. Докажем достаточность. Пусть D — область с гладкой границей, такая, что $\bar\omega\subset D\subset\bar D\subset\Omega$, и пусть η — гладкая функция, равная единице на $\Omega\setminus D$, нулю на ω и удовлетворяющая неравенствам $0\leqslant\eta\leqslant 1$. Для любой функции $u\in L_p^1(\Omega)$ имеем

$$\int_0^\infty [m_n(\{x:\ (\eta\,|u|)(x)\geqslant t\})]^{\alpha p}\,d(t^p)\leqslant[S(\omega)]^p\int_0^\infty c_p(K_t^{(1)})\,d(t^p),$$

где $K_t^{(1)}$ — проводник $(\Omega\setminus\bar\omega)\setminus\{x\in\Omega:\ (\eta\,|u|)(x)\geqslant t\}$. Отсюда и из леммы 4.1.3/3 получаем

$$\int_0^\infty [m_n(\{x:\ (\eta\,|u|)(x)\geqslant t\})]^{\alpha p}\,d(t^p)\leqslant c\,[S(\omega)]^p\int_\Omega|\nabla(\eta\,|u|)|^p\,dx+$$
$$+c\int_0^\infty [m_n(\{x:\ (1-\eta(x)\,|u(x)|\geqslant t\})\,d(t^p). \qquad (2)$$

Так как $\operatorname{supp}(1-\eta)\,|u|\subset\bar D$ и D — область с гладкой границей, то

$$[m_n(\{x:\ (1-\eta(x))\,|u(x)|\geqslant t\})]^{\alpha p}\leqslant\operatorname{const}c_p(K_t^{(2)}),$$

где $K_t^{(2)}$ — проводник $D\setminus\{x:\ (1-\eta(x))\,|u(x)|\geqslant t\}$. Отсюда, из (2) и леммы 4.1.3/3 находим

$$\int_0^\infty \{m_n(\{x:\ |u(x)|\geqslant t\})]^{\alpha p}\,d(t^p)\leqslant\operatorname{const}\Big(\int_\Omega|\nabla(\eta\,|u|)|^p\,dx+$$
$$+\int_\Omega|\nabla((1-\eta)\,|u|)|^p\,dx\Big)\leqslant\operatorname{const}\Big(\int_\Omega|\nabla u|^p\,dx+\int_D|u|^p\,dx\Big).$$

Пусть $M={}^1/_2 m_n(D)$ и $m_n(\operatorname{supp}u)\leqslant M$. Тогда $\int_D|u|^p\,dx\leqslant$ $\leqslant\operatorname{const}\int_D|\nabla u|^p\,dx$ и, следовательно,

$$\int_0^\infty [m_n(\{x:\ |u(x)|\geqslant t\})]^{\alpha p}\,d(t^p)\leqslant\operatorname{const}\int_\Omega|\nabla u|^p\,dx. \qquad (3)$$

Рассмотрим проводник $K^*=G^*\setminus F^*$ в Ω, подчиненный единственному условию $m_n(G^*)\leqslant M$, и подставим в (3) функцию $u\in$ $\in T_\Omega(K^*)$ (см. п. 4.1.1). Тогда получим оценку $[m_n(F^*)]^{\alpha p}\leqslant$ $\leqslant\operatorname{const}c_p(K^*)$, равносильную включению $\Omega\in I_{p,\alpha}$.

Замечание. В случае $p=1$ доказанное утверждение остается справедливым, если под $S(\omega)$ понимать супремум величины $[m_n(g)]^\alpha/s(\partial_i g)$, взятый по всем допустимым подмножествам g, области Ω, таким, что $\operatorname{clos}_\Omega g\subset\Omega\setminus\bar\omega$.

Точно так же, как и теорема 1, устанавливается, что принадлежность области Ω классу $H_{p,\alpha}$ равносильна конечности величины $\mathfrak{B}_G^{(p,\,\alpha)}$, где $G=\Omega\setminus\bar\omega$ (см. п. 4.4.1).

При $\alpha p<1$ класс $I_{p,\alpha}$ можно охарактеризовать и иначе, взяв вместо любого множества G пересечение $\Omega_\rho(x)$ области Ω с шаром $B_\rho(x)$, $x\in\partial\Omega$. Именно введем функцию

$$[0,\ 1]\ni\rho\to a_{p,\alpha}(\rho)=\sup_{x\in\partial\Omega}\sup_{\{F\}}\Big(\frac{[m_n(F)]^\alpha}{[c_p(\Omega_\rho(x)\setminus F)]^{1/p}}\Big).$$

Теорема 2. *Пусть Ω — ограниченная область и $\alpha p<1$. Тогда $\Omega\in I_{p,\alpha}$ в том и только в том случае, если $a_{p,\alpha}(\rho)<\infty$ при некотором ρ.*

Доказательство. Необходимость не требует обоснования. Пусть $a_{p,\alpha}(\rho)<\infty$. Построим конечное покрытие множества $\bar\Omega$ открытыми шарами с радиусом ρ и подчиненное этому покрытию разбиение единицы $\{\eta_i\}$. В силу леммы 4.2 справедливо неравенство

$$\|u\eta_i\|_{L_{q^*}(\Omega)}\leqslant ca_{p,\alpha}(\rho)\|\nabla(u\eta_i)\|_{L_p(\Omega)},$$

где $q^*=\alpha^{-1}$. Суммируя по i, заключаем, что $W^1_p(\Omega)\subset L_{q^*}(\Omega)$. Следовательно, $\Omega\in I_{p,\alpha}$ по теореме 4.3.3 (п. 2)).

4.4.8. Интегральные неравенства для области со степенным заострением. Рассмотрим подробнее область $\Omega^{(\lambda)}=\{x=(x',x_n): |x'|<ax_n^\lambda,\ 0<x_n<1\}$ из примера 4.3.5/1, где было показано, что $\Omega^{(\lambda)}\in I_{p,\alpha}$ при $n>p$, $\lambda>(p-1)/(n-1)$, $\alpha=[\lambda(n-1)+1-p]/p[\lambda(n-1)+1]$. Это в силу теоремы 4.4.3/2 равносильно вложению $L^1_p(\Omega^{(\lambda)})\subset L_{q^*}(\Omega^{(\lambda)})$, где $q^*=p[\lambda(n-1)+1]/[\lambda(n-1)+1-p]$. Хотя увеличить показатель q^* и невозможно, естественно попытаться улучшить сформулированный результат за счет использования весовых пространств (ср. с замечанием 3.3.3). Пусть

$$\|u\|_{L_r(\sigma,\Omega^{(\lambda)})}=\left(\int_{\Omega^{(\lambda)}}|u(x)|^r x_n^{r\sigma}dx\right)^{1/r}.$$

Преобразование координат $\varkappa$: $x\to\xi$, определенное равенствами $\xi_i=x_i$, $1\leqslant i\leqslant n-1$, $\xi_n=x_n^\lambda$, отображает $\Omega^{(\lambda)}$ на $\Omega^{(1)}$. Так как $\Omega^{(1)}$ — область класса $C^{0,1}$, то для нее из следствия 2.1.6/2 без труда получаем неравенство

$$\|v\|_{L_q(\beta,\Omega^{(1)})}\leqslant c\left(\|\nabla v\|_{L_p(\alpha,\Omega^{(1)})}+\|v\|_{L(\varkappa(\omega))}\right),$$

где $n>p\geqslant 1$, $p\leqslant q\leqslant pn/(n-p)$, $\beta=\alpha-1+n(p^{-1}-q^{-1})>-n/q$ и ω — непустая область, $\bar\omega\subset\Omega^{(\lambda)}$. Возвращаясь к переменным x, приходим к оценке

$$\|u\|_{L_q(\lambda\beta+(\lambda-1)/q,\ \Omega^{(\lambda)})}\leqslant c\Big(\|\nabla_{x'}u\|_{L_p(\alpha\lambda+(\lambda-1)/p,\ \Omega^{(\lambda)})}+$$
$$+\|\partial u/\partial x_n\|_{L_p(\alpha\lambda-(\lambda-1)(p-1)/p,\ \Omega^{(\lambda)})}+\|u\|_{L(\omega)}\Big),$$

где $\nabla_{x'}=(\partial/\partial x_1,\ldots,\partial/\partial x_{n-1})$. Если положить здесь $\alpha=(\lambda-1)\times\times(p-1)/\lambda p$, то получим оценку

$$\|u\|_{L_q(\lambda\beta+(\lambda-1)/q,\ \Omega^{(\lambda)})}\leqslant c\Big(\|\nabla_{x'}u\|_{L_p(\lambda-1,\ \Omega^{(\lambda)})}+$$
$$+\|\partial u/\partial x_n\|_{L_p(\Omega^{(\lambda)})}+\|u\|_{L(\omega)}\Big). \qquad (1)$$

Выбирая q так, чтобы вес в левой части исчез, приходим к неравенству

$$\|u\|_{L_{q^*}(\Omega^{(\lambda)})} \leqslant c\left(\|\nabla_{x'}u\|_{L_p(\lambda-1,\ \Omega^{(\lambda)})} + \|\partial u/\partial x_n\|_{L_p(\Omega^{(\lambda)})} + \|u\|_{L(\omega)}\right),$$

где, как и ранее, $q^* = p[\lambda(n-1)+1]/[\lambda(n-1)+1-p]$. Так как $\lambda > 1$, то этот результат точнее, чем вложение $L_p^1(\Omega^{(\lambda)}) \subset L_{q^*}(\Omega^{(\lambda)})$.

При любом $\lambda > 1$ можно взять в качестве q предельный показатель $pn/(n-p)$ в теореме Соболева. Тогда неравенство (1) перепишется в виде

$$\|u\|_{L_{pn/(n-p)}((\lambda-1)(n-1)/n,\ \Omega^{(\lambda)})} \leqslant c\left(\|\nabla_{x'}u\|_{L_p(\lambda-1,\ \Omega^{(\lambda)})} + \right.$$
$$\left. + \|\partial u/\partial x_n\|_{L_p(\Omega^{(\lambda)})} + \|u\|_{L(\omega)}\right),$$

что, в частности, гарантирует вложение $L_p^1(\Omega) \subset L_{pn/n-p}((\lambda-1)\times \times(n-1)/n,\ \Omega^{(\lambda)})$. На примере функции x_n^τ, где $\tau = 1+\varepsilon - -[\lambda(n-1)+1/p$ (ε — малое положительное число), легко убедиться, что показатель степени веса точен.

Отметим в заключение, что для области $\Omega^{(\lambda)}$ можно получить аналог интегрального представления (1.1.10/1) (ср. с работой И. В. Глобенко [21]).

В силу (1.1.10/1) для любой функции $v \in C^1(\Omega^{(1)} \cap L_1^1(\Omega^{(1)})$ имеем

$$v(\xi) = \int_{\Omega^{(1)}} \varphi(\eta)\, v(\eta)\, d\eta + \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega^{(1)}} (f_i(\xi, \eta)/|\xi-\eta|^{n-1})\, (\partial v/\partial \eta_i)(\eta)\, d\eta,$$

где $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega^{(1)})$ и $f_i \in L_\infty(\Omega^{(1)} \times \Omega^{(1)})$.

Поэтому для функции $u = v \circ \varkappa$ получается интегральное представление

$$u(x) = \int_{\Omega^{(\lambda)}} \Phi(y)\, u(y)\, dy +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\Omega^{(\lambda)}} \frac{F_i(x, y)\, y_n^{\lambda-1}}{\left(|x'-y'|^2 + \left(x_n^\lambda - y_n^\lambda\right)^2\right)^{(n-1)/2}} \frac{\partial u}{\partial y_i}(y)\, dy +$$
$$+ \int_{\Omega^{(\lambda)}} \frac{F_n(x, y)}{\left(|x'-y'|^2 + \left(x_n^\lambda - y_n^\lambda\right)^2\right)^{(n-1)/2}} \frac{\partial u}{\partial y_n}(y)\, dy, \qquad (2)$$

где $\Phi \in \mathscr{D}(\Omega^{(\lambda)})$ и $F_i \in L_\infty(\Omega^{(\lambda)} \times \Omega^{(\lambda)})$. Легко проверить, что в качестве u можно было взять любую функцию из $C^1(\Omega^{(\lambda)})$. Так как по теореме 1.1.6/1 $C^1(\bar{\Omega}^{(\lambda)})$ плотно в $L_1^1(\Omega^{(\lambda)})$, интегральное представление (2) справедливо для всех $u \in L_1^1(\Omega^{(\lambda)})$.

§ 4.5. ЕЩЕ О ПРИМЕРЕ НИКОДИМА

В этом параграфе мы рассмотрим область, описанную в примере 1.1.4/1 (см. также § 4.3), при условии $\varepsilon_m=\delta(2^{-m-1})$, где δ — неубывающая функция, такая, что $2\delta(t)<t$. Здесь будет показано, что необходимым и достаточным условием принадлежности Ω классу $H_{p,\alpha}$ (при $p\alpha>1$) является сходимость интеграла

$$\int_0^1 [t/\delta(t)]^{1/(\alpha p-1)}\, dt. \tag{1}$$

Лемма. *Если g_m — неотрицательные измеримые на отрезке* $[0, 1]$ *функции, то справедливо неравенство*

$$\left\{\int_0^1 \frac{dt}{\left[\sum_m g_m(t)\right]^{1/(p-1)}}\right\}^{1-p} \geqslant \sum_m \left\{\int_0^1 \frac{dt}{[g_m(t)]^{1/(p-1)}}\right\}^{1-p}. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть λ — абсолютно непрерывная на отрезке $[0, 1]$ неубывающая функция, удовлетворяющая условиям $\lambda(0)=0$, $\lambda(1)=1$. Положим $g(t)=\sum_m g_m(t)$. Тогда $\int_0^1 (\lambda')^p g\, dt = \sum_m \int_0^1 (\lambda')^p g_m\, dt$. В силу неравенства Гельдера

$$\sum_m \int_0^1 (\lambda')^p g_m\, dt \geqslant \sum_m \frac{\left(\int_0^1 \lambda'\, dt\right)^p}{\left(\int_0^1 g_m^{1/(1-p)}\, dt\right)^{p-1}} = \sum_m \left(\int_0^1 \frac{dt}{g_m^{1/(p-1)}}\right)^{1-p}.$$

Наконец, по лемме 2.2.2/2 $\inf\limits_{\lambda} \int_0^1 (\lambda')^p g\, dt = \left\{\int_0^1 dt/g^{1/(p-1)}\right\}^{1-p}$. Следовательно, имеет место неравенство (2).

Перейдем к доказательству принадлежности Ω классу $H_{p,\alpha}$ при условии сходимости интеграла (1).

Рассмотрим любую неотрицательную функцию $u\in L_p^1(\Omega)$, бесконечно дифференцируемую в $A_m\cup B_m$ при любом m и равную нулю в прямоугольнике C. Зафиксируем произвольный номер m. Заметим, что для почти всех уровней $t\in(0, \infty)$ каждое множество уровня $E_t^{(m)}=\{(x, y)\colon u(x, y)=t\}\cap(A_m\cup B_m)$ состоит из конечного числа гладких гомеоморфов окружности и простых дуг с концами на $\partial(A_m\cup B_m)\setminus\{y=2/3\}$ (см. следствие 1.2.2). В дальнейшем, не оговаривая особо, мы будем всегда иметь в виду только такие уровни.

Если число t таково, что

$$s(E_t^{(m)})\geqslant 2^{-m-3}, \tag{3}$$

то справедливы неравенства

$$m_2(N_t^{(m)})\leqslant {}^1/_8[1+2^{m+1}\delta(2^{-m-1})]\,2^{-m-1}<s(E_t^{(m)}), \tag{4}$$

где $N_t^{(m)} = \{(x, y): u \geqslant t\} \cap (A_m \cup B_m)$. Множество уровней t, для которых выполнено (3) обозначим через $\mathfrak{B}_m$. Покажем, что для $t \in C\mathfrak{B}_m$ имеет место один из следующих трех случаев:

$$\begin{cases} s(E_t^{(m)}) \geqslant \delta(2^{-m-1}), & (5) \\ m_2(N_t^{(m)}) \leqslant k\delta(2^{-m-1}), & (6) \end{cases}$$

где k — постоянная, зависящая от интеграла (1);

$$\begin{cases} s(E_t^{(m)}) \geqslant \delta(2^{-m-1}), & (7) \\ m_2(L_t^{(m)}) \leqslant k\delta(2^{-m-1}), & (8) \end{cases}$$

где $L_t^{(m)} = (A_m \cup B_m) \setminus N_t^{(m)}$;

$$\begin{cases} s(E_t^{(m)}) < \delta(2^{-m-1}), & (9) \\ m_2(N_t^{(m)}) \leqslant ks(E_t^{(m)}). & (10) \end{cases}$$

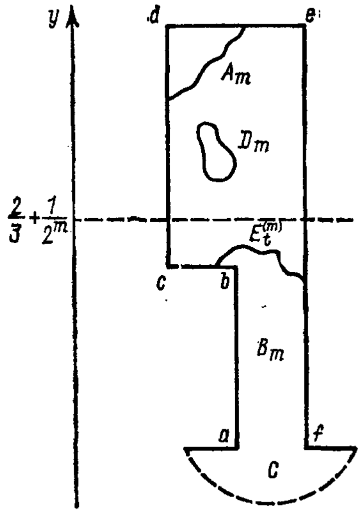

Рис. 16.

Отметим, что так как $t \in C\mathfrak{B}_m$, то нет ни одной компоненты множества $E_t^{(m)}$, соединяющей cd и ef (рис. 16). Кроме того, в силу условия $u = 0$ в C множество $E_t^{(m)}$ $(t > 0)$ не пересекает прямую $y = {}^2/_3$.

а) Пусть выполнено неравенство (5). Обозначим через $\tilde{E}_t^{(m)}$ самую верхнюю компоненту множества $E_t^{(m)}$, соединяющую ломаную abc с отрезком fe. Множество $\tilde{E}_t^{(m)}$ разбивает $A_m \cup B_m$ на компоненты. Компоненту, которая содержит отрезок de, обозначим через D_m. Так как $t \in C\mathfrak{B}_m$, то множество $\tilde{E}_t^{(m)}$ расположено ниже прямой $y = {}^2/_3 + 2^{-m}$ и, значит,

$$m_2(N_t^{(m)} \setminus D_m) \leqslant (2^{-2m-1} + {}^1/_3\delta(2^{-m-1})),$$
$$m_2(L_t^{(m)} \setminus D_m) \leqslant (2^{-2m-1} + {}^1/_3\delta(2^{-m-1})).$$

Так как δ возрастает и так как $2\delta(t) < t$, то, полагая $\gamma = (\alpha p - 1)^{-1}$, получаем

$$\int_0^{2^{-m-1}} \left[\frac{t}{\delta(t)}\right]^\gamma dt \geqslant 2^{\gamma-1} \int_0^{2^{-m-1}} \frac{t\,dt}{\delta(t)} \geqslant 2^{\gamma-2} \frac{2^{-2(m+1)}}{\delta(2^{-m-1})}. \tag{11}$$

Следовательно,

$$m_2(N_t^{(m)} \setminus D_m) \leqslant k_1\delta(2^{-m-1}), \quad m_2(L_t^{(m)} \setminus D_m) \leqslant k_1\delta(2^{-m-1}), \tag{12}$$

где $$k_1 = {}^1/_3 + 2^{\gamma-1}\int_0^1 (t/\delta(t))^\gamma\, dt.$$

Множество $E_t^{(m)} \setminus D_m$ разбивает CD_m на компоненты. Компоненту, граница которой содержит $\tilde{E}_t^{(m)}$ и точки отрезка de, обозначим через $\tilde{D}_m$. Допустим, что $\tilde{D}_m \subset L_t^{(m)}$ и оценим $m_2(N_t^{(m)} \cap D_m)$. Для этого отметим, что множество $N_t^{(m)} \cap D_m$ ограничено компонентами множества $E_t^{(m)}$, каждая из которых (за исключением $\dot{E}_t^{(m)}$) либо замкнута в $A_m \cup B_m$, либо соединяет точки или ломаной $abcde$, или ломаной def. Отсюда следует, что

$$s(\partial(A_m \cup B_m) \cap \overline{N^{(m)}} \cap D_m) \leqslant 2s(E_t^{(m)} \cap D_m).$$

Используя изопериметрическое неравенство, получаем

$$[m_2(N_t^{(m)} \cap D_m)]^{1/2} \leqslant (3/2\sqrt{\pi})s(E_t^{(m)} \cap D_m). \tag{13}$$

Так как $t \in C\mathfrak{B}_m$, то из последней оценки и из (11) следует

$$m_2(N_t^{(m)} \cap D_m) \leqslant \frac{9}{4\pi} 2^{-2(m+1)} \leqslant \frac{9 \cdot 2^{2-\gamma}}{4\pi} \delta(2^{-m-1}) \int_0^1 \left(\frac{t}{\delta(t)}\right)^{\gamma} dt,$$

что в сочетании с (12) дает неравенство (6).

б) Если предположить, что $\tilde{D}_m \subset N_t^{(m)}$, то точно так же получим неравенство (8).

в) Допустим, что выполнено неравенство (9). Тогда множество $E_t^{(m)}$ не содержит ни одной компоненты, соединяющей $abcd$ и ef и, рассуждая так же, как при выводе неравенства (13), получаем $[m_2(N_t^{(m)})]^{1/2} \leqslant (3/2\sqrt{\pi})s(E_t^{(m)})$. Отсюда и из (9) следует (10).

Итак, мы пришли к выводу, что возможен один из следующих случаев: либо справедливо неравенство (10), либо неравенства (5) и (6), либо неравенства (7) и (8). Множество уровней t, для которых верно (10), обозначим через $\mathfrak{B}'_m$. Через $\mathfrak{B}''_m$ и $\mathfrak{B}'''_m$ обозначим множества уровней t, для которых выполнены неравенства (5), (6) и (7), (8) соответственно.

Определим функцию $\psi_m(t)$ равенством

$$\psi_m(t) = \int_0^t \left(\int_{E_t^{(m)}} |\nabla u|^{p-1} ds\right)^{1/(1-p)}.$$

Для этой функции имеем оценку

$$\psi_m(t) \leqslant -\int_0^t (d/d\tau)[m_2(N_\tau^{(m)})](d\tau/[s(E_\tau^{(m)})]^{p/(p-1)})$$

(ср. следствие 4.1.3/1). Интеграл справа представим в виде суммы $\int_{\mathfrak{B}'_m} + \int_{\mathfrak{B}''_m} + \int_{\mathfrak{B}'''_m}$. Из неравенства (10) следует

$$\int_{\mathfrak{B}'_m} \leqslant -\int_0^1 \frac{d}{d\tau}[m_2(N_\tau^{(m)})] \frac{d\tau}{[m_2(N_t^{(m)})]^{p/(p-1)}} \leqslant \frac{p-1}{[m_2(N_t^{(m)})]^{1/(p-1)}}.$$

Используя (5) и (6), получаем

$$\int_{\mathfrak{B}_m''} \leqslant [\delta(2^{-m-1})]^{p/(1-p)} \sup_{\tau \in \mathfrak{B}_m''} m_2(N_\tau^{(m)}) \leqslant k[\delta(2^{-m-1})]^{1/(1-p)}.$$

Заметим, что $-(d/d\tau)\, m_2(N_\tau^{(m)}) = (d/d\tau)\, m_2(L_\tau^{(m)})$, и воспользуемся неравенствами (7) и (8). Тогда

$$\int_{\mathfrak{B}_m'''} \leqslant \int_{\mathfrak{B}_m'''} \frac{d}{d\tau} m_2(L_\tau^{(m)}) \frac{d\tau}{[s(E_\tau^{(m)})]^{p/(p-1)}} \sup_{\tau \in \mathfrak{B}_m'''} m_2(L_t^{(m)}) \leqslant$$
$$\leqslant k[\delta(2^{-m-1})]^{1/(-p)}.$$

Следовательно, $$\psi_m(t) \leqslant 2k[\delta(2^{-m-1})]^{1/(1-p)} + [m_2(N_t^{(m)})]^{1/(1-p)}. \quad (14)$$

Обозначим через l наименьший номер, для которого $m_2(N_t^{(l)}) \geqslant (2c)^{1-p}\delta(2^{-l-1})$. Тогда из (14) следует

$$\psi_l(t) \leqslant 4k[\delta(2^{-l-1})]^{1/(1-p)}. \quad (15)$$

Далее, замечая, что $m_2(N_t^{(m)}) < {}^1/_3 \cdot 2^{-m}$, получаем

$$\delta\left[{}^3/_4 m_2\left(\bigcup_{m=l}^{\infty} N_t^{(m)}\right)\right] \leqslant \delta(2^{-l-1}),$$

что в сочетании с (15) дает

$$\delta\left[{}^3/_4 m_2\left(\bigcup_{m=l}^{\infty} N_t^{(m)}\right)\right] \leqslant [4k/\psi_l(t)]^{p-1}. \quad (16)$$

Так как при $m < l$ имеет место неравенство $m_2(N_t^{(m)}) < (2c)^{1-p}\,\delta(2^{-m-1})$, то в силу (14) при $m < l$

$$\psi_m(t) \leqslant 2[m_2(N_t^{(m)})]^{1/(1-p)}.$$

Следовательно, $$m_2\left(\bigcup_{m=1}^{l-1} N_t^{(m)}\right) \leqslant 2^{p-1} \sum_{m=1}^{l-1} [\psi_m(t)]^{1-p},$$

и так как $\delta(t) < t/2$,

$$\delta\left[m_2\left(\bigcup_{m=1}^{l-1} N_t^{(m)}\right)\right] \leqslant 2^{p-2} \sum_{m=1}^{l-1} [\psi_m(t)]^{1-p}. \quad (17)$$

Если $$m_2\left(\bigcup_{m=1}^{l-1} N_t^{(m)}\right) < {}^3/_4\, m_2\left(\bigcup_{m=l}^{\infty} N_t^{(m)}\right), \quad (18)$$

то в силу (16) $$\delta[{}^3/_8 m_2(N_t)] \leqslant (4k/\psi_l(t))^{p-1}.$$

Если же выполнено неравенство, противоположное (18), то в силу (17)

$$\delta\,[{}^3/_8 m_2(N_t)] \leqslant 2^{p-2} \sum_{m=1}^{l-1} [\psi_m(t)]^{1-p}.$$

Итак, всегда

$$\delta\,[{}^3/_8 m_2(N_t)] \leqslant k' \sum_{m=1}^{\infty} [\psi_m(t)]^{1-p}, \tag{19}$$

где k' — наибольшее из чисел $(4k)^{p-1}$ и 2^{p-2}.

Определим функцию $\psi(t)$ равенством

$$\psi(t) = \int_0^t \left(\int_{E_\tau} |\nabla u|^{p-1} ds\right)^{1/(1-p)} d\tau.$$

Так как по лемме $[\psi(t)]^{1-p} \geqslant \sum_{m\geqslant 1} [\psi_m(t)]^{1-p}$, то из неравенства (19) получим

$$\delta\,[{}^3/_8 m_2(N_t)] \leqslant k' [\psi(t)]^{1-p}. \tag{20}$$

Пусть F — произвольное замкнутое в Ω подмножество множества $G = \Omega \diagdown \bar{C}$, $K = G \diagdown F$ и u — произвольная функция из класса $V_\Omega(K)$. Согласно (20) $\delta({}^3/_8 m_2(F)) \leqslant k' [\psi(1)]^{1-p}$, что вместе с леммой 4.1.3/1 дает оценку $\delta({}^3/_8 m_2(F)) \leqslant k' c_p(K)$. Следовательно,

$$\delta({}^3/_8 t) \leqslant k' \nu_G^{(p)}(t), \tag{21}$$

где $\nu_G^{(p)}$ — функция, введенная в замечании 4.4.4.

Принимая во внимание сходимость интеграла (1) и замечание 4.4.4, из (21) выводим, что для всех $u \in C^{0,1}(\Omega)$, равных нулю в C, существует такая постоянная Q, что

$$\| u \|_{L_q(\Omega)} \leqslant Q \| \nabla u \|_{L_p(\Omega)}, \quad \text{где } q = \alpha^{-1}. \tag{22}$$

Пусть теперь u — произвольная функция из $C^{0,1}(\Omega)$ и пусть η — непрерывная в Ω функция, равная нулю в C, единице в $\bigcup_{m\geqslant 1} A_m$ и линейная в B_m $(m = 1, 2, \ldots)$. Тогда

$$\| u \|_{L_q(\Omega)} \leqslant \| u\eta \|_{L_q(\Omega \diagdown C)} + \| u \|_{L_q\left(\Omega \diagdown \bigcup_{m\geqslant 1} A_m\right)}. \tag{23}$$

Используя (22), получаем

$$\| u\eta \|_{L_q(\Omega \diagdown C)} \leqslant Q_1 \left(\| \nabla u \|_{L_p(\Omega)} + \| u \|_{L_p\left(\bigcup_{m\geqslant 1} B_m\right)}\right).$$

Отсюда и из (23) следует неравенство

$$\| u \|_{L_q(\Omega)} \leqslant Q_2 \left(\| \nabla u \|_{L_p(\Omega)} + \| u \|_{L_p\left(\Omega \diagdown \bigcup_{m\geqslant 1} A_m\right)}\right). \tag{24}$$

Оценим вторую норму в правой части (4). Пусть $(x, y) \in \Omega \setminus \bigcup_{m \geqslant 1} A_m$ и $(x, z) \in C$. Очевидно, что

$$|u(x, y)|^p \leqslant Q_3 \Big(|u(x, z)|^p + \int |\nabla(x, \bar{y})|^p d\bar{y}\Big),$$

где интегрирование проводится по вертикальному отрезку, заключенному в Ω и проходящему через точку $(x, 0)$. После интегрирования по x, y и z получим

$$\iint_{\Omega \setminus \bigcup_{m \geqslant 1} A_m} |u|^p dx\,dy \leqslant Q_4 \left(\iint_C |u|^p dx\,dy + \iint_{\Omega \setminus \bigcup_{m \geqslant 1} A_m} |\nabla u|^p dx\,dy \right).$$

Следовательно, $\quad \|u\|_{L_q(\Omega)} \leqslant Q_5 (\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)} + \|u\|_{L_p(C)}).$

Отсюда $\quad \inf\limits_{c \in R^1} \|u - c\|_{L_q(\Omega)} \leqslant Q_5 \Big(\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)} + \inf\limits_{c \in R^1} \|u - c\|_{L_p(C)} \Big).$

Используя неравенство Пуанкаре для прямоугольника C, получаем

$$\inf_{c \in R^1} \|u - c\|_{L_q(\Omega)} \leqslant Q_6 \|\nabla u\|_{L_p(\Omega)},$$

что согласно теореме 4.3.3/2 эквивалентно принадлежности области Ω классу $H_{p,\alpha}$, $\alpha = q^{-1}$.

Покажем теперь, что сходимость интеграла (1) является необходимым условием принадлежности области Ω классу $H_{p,\alpha}$. Пусть $\int_0^1 [t/\delta(t)]^\gamma dt = \infty$, где $\gamma = q/(p-q)$, $q = \alpha^{-1}$. Тогда

$$\sum_{m \geqslant 1} (\lambda_m^{\gamma+1}/\delta(\lambda_m)) = \infty, \tag{25}$$

где $\lambda_m = 2^{-m-1}$. Рассмотрим непрерывную в Ω функцию u_m, равную нулю в C, линейную в B_m и равную $[\lambda_m/\delta(\lambda_m)]^{(\gamma+1)/p}$ в A_m, $m \geqslant 1$. Для функции $v_N = \sum_{1 \leqslant m \leqslant N} u_m$ имеем

$$\iint_\Omega v_N^{p\gamma/(\gamma+1)} dx\,dy \geqslant {}^1/_3 \sum_{m=1}^N u_m^{p\gamma/(\gamma+1)} \lambda_m = \sum_{m=1}^N \lambda_m^{\gamma+1} [\delta(\lambda_m)]^{-\gamma}.$$

Вместе с тем

$$\iint_\Omega |\nabla v_N|^p dx\,dy = 3^p \sum_{m=1}^N u_m^p \delta(\lambda_m) = 3^p \sum_{m=1}^N \lambda_m^{\gamma+1} [\delta(\lambda_m)]^{-\gamma}.$$

Если бы область Ω принадлежала классу $H_{p,\alpha}$, то для всех $u \in C^{0,1}(\Omega)$, равных нулю в C, было бы выполнено неравенство

$$\|u\|^p_{L_{p\gamma/(\gamma+1)}(\Omega)} \leqslant Q \iint_\Omega |\nabla u|^p dx\,dy, \tag{26}$$

где Q не зависит от u. Из (26) получаем

$$\Big(\sum_{m=1}^N (\lambda_m^{\gamma+1}/[\delta(\lambda_m)]^\gamma)\Big)^{(\gamma+1)/\gamma} \leqslant Q \sum_{m=1}^N (\lambda_m^{\gamma+1}/[\delta(\lambda_m)]^\gamma).$$

Отсюда $\sum_{m=1}^{N}(\lambda_m^{\gamma+1}/[\delta(\lambda_m)]^\gamma) \leqslant Q^\gamma$, что противоречит условию (25).

Замечание 1. Из (2) и леммы 4.1.3/2 следует, что для всех $u \in C^\infty(\Omega)$, $u=0$ в C, справедливо неравенство

$$\int_0^\infty \delta(^3/_8 m_2(N_t))\, d(t^p) \leqslant Q \int\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx\, dy. \tag{27}$$

Пусть дополнительно $\delta \in C^{0,1}[0, 1]$ и $\delta(2t) \leqslant \mathrm{const}\, \delta(t)$. Тогда, рассуждая точно так же, как и при доказательстве предложения 3.4, мы можем вывести из (2) оценку $\nu_p(t) \geqslant k\delta(t)$. Обратная оценка получится, если мы рассмотрим последовательность проводников $\{G_m \diagdown F_m\}$, где G_m — внутренность $A_m \cup B_m$, а $F_m = \mathrm{clos}_\Omega A_m$. В самом деле, если u_m — кусочно-линейная функция, равная единице в A_m и нулю в C, то

$$c_p(G_m \diagdown F_m) \leqslant \int\int_\Omega |\nabla u_m|^p\, dx\, dy = 3^p \delta(2^{-m-1}) \leqslant k\delta(m_2(F)).$$

Итак, для области Никодима при любом $p \geqslant 1$

$$\nu_p(t) \sim \delta(t) \tag{28}$$

и, следовательно, $\Omega \in I_{p,\alpha}$ в том и только в том случае, если

$$\lim_{t \to +0} t^{-\alpha p}\delta(t) > 0. \tag{29}$$

(Так как $\delta(t) \leqslant t$, то $\alpha p \geqslant 1$.)

Замечание 2. Рассмотренная в этом параграфе область интересна в следующем отношении. В то время как для областей из примеров п. 4.3.5 условия принадлежности классам $J_{\alpha+1-1/p}$ и $I_{p,\alpha}$ совпадают (т. е. предложение 4.3.4/2 является точным), область Никодима в силу (29) одновременно принадлежит классам $J_{\alpha p}$ и $I_{p,\alpha}$. Это означает, что, если, например, $\delta(t) = t^\beta$, $\beta > 1$, то достаточные условия вложения $L_p^1(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$ $(p > 1)$ в терминах имеющей простой геометрический смысл функции λ дают неправильное значение предельного показателя $p/(1+p(\beta-1))$. В действительности здесь максимальное значение q^*, полученное непосредственной оценкой функции ν_p, равно p/β.

4.6. НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

В теоремах 4.3.3, 4.4.2, 4.4.3/1 и других пространства $L_s(\Omega)$, $L_r(\Omega)$, $L_q(\Omega)$ можно заменить пространствами $L_s(\Omega, \sigma)$, $L_r(\Omega, \sigma)$, $L_q(\Omega, \sigma)$ функций, суммируемых со степенями s, r, q по мере σ в Ω. При этом, конечно, в соответствующих необходимых и достаточных условиях следует заменить меру Лебега мерой σ. Остановимся для примера на обобщении леммы 4.2.

Пусть G — открытое ограниченное подмножество Ω. При $p>1$ положим

$$\mathfrak{A}_{G,\,\sigma}^{(p,\,\alpha)}=\sup_{\{F\}}\left([\sigma(F)]^{\alpha}/[c_p(G\setminus F)]^{1/p}\right),$$

где $\{F\}$ — совокупность замкнутых в Ω подмножеств G. Пусть еще

$$\mathfrak{A}_{G,\,\sigma}^{(1,\,\alpha)}=\sup_{\{g\}}\left([\sigma(g)]^{\alpha}/s(\partial_i g)\right),$$

где $\{g\}$ — совокупность допустимых подмножеств множества G.

Таким образом, по определению $\mathfrak{A}_{G,\,m_n}^{(p,\,\alpha)}=\mathfrak{A}_G^{(p,\,\alpha)}$.

Теорема. *Положим $p\geqslant 1$ и обозначим через G открытое ограниченное подмножество Ω.*

1) *Пусть $\mathfrak{A}_{G,\,\sigma}^{(p,\,\alpha)}<\infty$ и числа q, α, p связаны одним из условий:*

(i) $q\leqslant q^*=\alpha^{-1}$ *при* $\alpha p\leqslant 1$, (ii) $q<q^*=\alpha^{-1}$ *при* $\alpha p>1$.

Тогда для всех функций $u\in C^{0,1}(\Omega)$, равных нулю вне G, справедливо неравенство

$$\|u\|_{L_q(\Omega,\,\sigma)}\leqslant C\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}^{1-\varkappa}\|u\|_{L_r(\Omega,\,\sigma)}^{\varkappa},\tag{1}$$

в котором $r\in(0,\,q)$, $\varkappa=r(q^*-q)/(q^*-r)q$, $C\leqslant c\left[\mathfrak{A}_{G,\,\sigma}^{(p,\,\alpha)}\right]^{1-\varkappa}$.

2) *Пусть $q^*>0$, $r\in(0,\,q^*)$ и при некотором $q\in(0,\,q^*]$ для любой функции $u\in C^{0,1}(\Omega)$, равной нулю вне G, выполнено неравенство* (1) *в котором $\varkappa=r(q^*-q)/(q^*-r)q$ и C — постоянная, не зависящая от u. Тогда $C\geqslant c\left[\mathfrak{A}_{G,\,\sigma}^{(p,\,\alpha)}\right]^{1-\varkappa}$.*

Доказательство не отличается от доказательства леммы 4.2.

Приведем теперь достаточное условие ограниченности величины $\mathfrak{A}_{G,\,\sigma}^{(p,\,\gamma)}$.

Предложение. *Имеет место оценка*

$$\mathfrak{A}_{G,\,\sigma}^{(p,\,\gamma)}\leqslant c\left(\mathfrak{A}_G^{(p,\,\beta)}\right)^{1-\gamma/\alpha}\left(\mathfrak{A}_{G,\,\sigma}^{(1,\,\alpha)}\right)^{\gamma/\alpha},\ \textit{где}\ \gamma=\alpha\beta p\,(p-1+p\beta)^{-1}.\tag{2}$$

Доказательство. Пусть $K=G\setminus F$ и u — любая функция из $V_\Omega(K)$. Положим $\psi(t)=\int_0^t\left(\int_{E_\tau}|\nabla u|^{p-1}ds\right)^{1/(1-p)}d\tau$. Из (4.1.3/1) и определения величины $\mathfrak{A}_G^{(p,\,\beta)}$ следуют оценки

$$\psi(t)\leqslant[c_p(G\setminus N_t)]^{1/(1-p)}\leqslant\left(\mathfrak{A}_G^{(p,\,\beta)}[m_n(N_t)]^{-\beta}\right)^{p/(p-1)},\tag{3}$$

где $t\in[0,\,1)$. Отсюда получаем, что если $\mathfrak{A}_G^{(p,\,\beta)}<\infty$, то функция $\psi(t)$ конечна и, следовательно, абсолютно непрерывна на любом отрезке $[0,\,1-\varepsilon]$, $\varepsilon>0$. Пусть $t(\psi)$ — функция, обратная к $\psi(t)$. Так как функция $\psi\to\sigma(N_{t(\psi)})$ не возрастает, то по лемме 1.3.3/3 при $t(\psi)\in[0,\,1-\varepsilon]$

$$\psi^{\alpha/\gamma}[\sigma(N_{t(\psi)})]^{\alpha p/(p-1)}\leqslant c\sup_{\psi}\psi^{(p-1)/p\beta}\int_{\psi}^{\psi(1-\varepsilon)}[\sigma(N_{t(\psi)})]^{\alpha p/(p-1)}\,d\psi.$$

Выражение в правой части равно

$$c \sup_{t\in[0,\,1-\varepsilon]} [\psi(t)]^{(p-1)/p\beta} \int_t^{1-\varepsilon} \frac{[\sigma(N_\tau)]^{\alpha p/(p-1)}\,d\tau}{\|\nabla u\|_{L_{p-1}(E_\tau)}}.$$

(Замена переменной $\psi=\psi(t)$ возможна, так как функция $\psi(t)$ абсолютно непрерывна на отрезке $[0,\ 1-\varepsilon]$.) Отсюда из неравенства (3) и леммы 4.1.3/2 выводим

$$\psi^{\alpha/\gamma}[\sigma(N_{t(\psi)})]^{\alpha p/(p-1)} \leqslant$$
$$\leqslant c\left(\mathfrak{A}_G^{(p,\,\beta)}\right)^{1/\beta} \sup_{t\in[0,\,1-\varepsilon]} \frac{1}{m_n(N_t)} \int_t^{1-\varepsilon} \left[\frac{(\sigma(N_\tau))^\alpha}{s(E_\tau)}\right]^{p/(p-1)} \left(-\frac{d}{d\tau}m_n(N_\tau)\right)d\tau. \tag{4}$$

В силу того что $[\sigma(N_\tau)]^\alpha \leqslant \mathfrak{A}_{G,\,\sigma}^{(1,\,\alpha)} s(E_\tau)$ при п. в. $\tau\in(0,\ 1)$, оценка (4) дает

$$[\psi(t)]^{\alpha/\gamma}[\sigma(N_t)]^{\alpha p/(p-1)} \leqslant c\left(\mathfrak{A}_G^{(p,\,\beta)}\right)^{1/\beta}\left(\mathfrak{A}_{G,\,\sigma}^{(1,\,\alpha)}\right)^{p/(p-1)} \times$$
$$\times \sup_{t\in[0,\,1-\varepsilon]} \frac{1}{m_n(N_t)} \int_t^{1-\varepsilon}\left(-\frac{d}{d\tau}m_n(N_\tau)\right)d\tau \leqslant c\left(\mathfrak{A}_G^{(p,\,\beta)}\right)^{1/\beta}\left(\mathfrak{A}_{G,\,\sigma}^{(1,\,\alpha)}\right)^{p/(p-1)}.$$

После перехода к пределу при $t\to 1-0$ имеем

$$[\sigma(F)]^\gamma \leqslant c\left(\mathfrak{A}_G^{(p,\,\beta)}\right)^{1-\sigma/\alpha}\left(\mathfrak{A}_{G,\,\sigma}^{(1,\,\alpha)}\right)^{\gamma/\alpha}[\psi(1)]^{(1-p)/p}.$$

Минимизируя правую часть на множестве $V_\Omega(K)$, получаем оценку

$$[\sigma(F)]^\gamma \leqslant c\left(\mathfrak{A}_G^{(p,\,\beta)}\right)^{1-\gamma/\alpha}\left(\mathfrak{A}_{G,\,\sigma}^{(1,\,\alpha)}\right)^{\gamma/\alpha}[c_p(G\setminus F)]^{1/p}. \ \blacksquare$$

Приведем пример использования этого предложения в конкретной ситуации.

Пример. Пусть $\Omega=\{x:\ |x'|<x_n^\lambda,\ 0<x_n<\infty\}$, где $\lambda>1$, $x'=(x_1,\ \dots,\ x_{n-1})$ и $G=\{x\in\Omega:\ 0<x_n<1\}$. Роль меры σ здесь будет играть $(n-1)$-мерная мера s на множестве $\Pi=\{x\in\Omega,\ x_1=0\}$. Покажем, что при $\lambda(n-1)+1>p\geqslant 1$ и $\gamma=(\lambda(n-1)+1-p)/(\lambda(n-2)+1)$ величина $\mathfrak{A}_{G,\,s}^{(p,\,\gamma)}$ конечна и что это значение γ неулучшаемо.

Пусть сначала $p=1$. Как было показано в примере 3.3.3/1, отображение $x\to\xi=(x_1,\ \dots,\ x_{n-1},\ x_n^\lambda)$ области Ω на конус $\xi\Omega=\{\xi:\ |\xi'|<\xi_n,\ 0<\xi_n<\infty\}$ субареально. Следовательно, для любого допустимого множества g, $\mathrm{clos}_\Omega g\subset G$,

$$s(\partial_i g)\geqslant cs(\partial_i\xi g). \tag{5}$$

Так как $\xi\Omega$ — конус и $\xi\Pi$ — его сечение гиперплоскостью, то по теореме 1.4.5 для всех $u\in L_p^1(\xi\Omega)$, обращающихся в нуль вне ξG,

$$\|u\|_{L(\xi\Pi)}\leqslant c\|\nabla_\xi u\|_{L(\xi\Omega)}. \tag{6}$$

Следовательно,
$$cs(\partial_i\xi g)\geqslant s(\xi\Pi\cap\xi g). \tag{7}$$

(Эта оценка получается в результате подстановки в (6) последовательности $\{w_m\}$, построенной в лемме 3.2.2.)

Очевидно, что

$$s(\xi\Pi\cap\xi g)=\lambda\int_{\Pi\cap g}x_n^{\lambda-1}\,dx_2\ldots dx_n. \tag{8}$$

Так как $\lambda>1$, то из всех множеств $\Pi\cap g$ с фиксированной мерой $s(\Pi\cap g)$ наименьшее значение интегралу в правой части (8) сообщает множество $\{x\in\Pi\colon 0<x_n<a\}$, где a — число, определенное равенством $v_{n-2}(\lambda(n-2)+1)^{-1}a^{\lambda(n-2)+1}=s(\Pi\cap g)$. Следовательно, $s(\xi\Pi\cap\xi g)\geqslant c[s(\Pi\cap g)]^{\lambda(n-1)/(\lambda(n-2)+1)}$, что вместе с (5) и (7) дает оценку $s(\partial_i g)\geqslant c[s(\Pi\cap g)]^\alpha$, $\alpha=\lambda(n-1)/(\lambda(n-2)+1)$. Итак, $\mathfrak{A}_{G,s}^{(1,\alpha)}<\infty$. Вместе с тем, так как область Ω принадлежит классу $I_{p,\beta}$, где $\beta=(\lambda(n-1)+1-p)\,p/(\lambda(n-1)+1)$ (см. пример 4.3.1/1), то $\mathfrak{A}_G^{(p,\beta)}<\infty$. Теперь из оценки (2) получаем, что $\mathfrak{A}_{G,s}^{(p,\gamma)}<\infty$ при $\gamma=\dfrac{\lambda(n-1)}{\lambda(n-2)+1}\,\dfrac{\lambda(n-1)+1-p}{p(\lambda(n-1)+1)}\,p\left(p-1+\dfrac{\lambda(n-1)+1-p}{\lambda(n-1)+1}\right)^{-1}=$ $=\dfrac{\lambda(n-1)+1-p}{p(\lambda(n-2)+1)}$.

Точность этого значения γ проверяется на последовательности множеств $F_m=\{x\in\Omega\colon 0<x_n<m^{-1}\}$, $m=1, 2, \ldots$ Действительно,

$$c_p(G\setminus F_m)\leqslant c\left(\int_{m^{-1}}^1\tau^{\lambda(1-n)/(p-1)}\,d\tau\right)^{1-p}\leqslant cm^{p-1-\lambda(n-1)}$$

(см. пример 4.3.1/1) и $s(F_m\cap\Pi)=cm^{-1-\lambda(n-2)}$. Поэтому из оценки

$$[s(F_m\cap\Pi)]^\gamma\leqslant\text{const}\,[c_p(G\setminus F_m)]^{1/p}$$

следует, что $\gamma\geqslant(\lambda(n-1)+1-p)/p(\lambda(n-2)+1)$.

В заключение — несколько слов о других обобщениях полученных здесь результатов.

Следуя главе 2, можно, почти не меняя доказательств, обобщить основные результаты этой и предыдущей глав, включив в рассмотрение функции с конечным интегралом $\int_\Omega[\Phi(x,\nabla u)]^p\,dx$ и даже подчиненные более общему условию $\int_\Omega\Psi(x,u,\nabla u)\,dx<\infty$ (ср. с замечанием 2.3.2).

Другое возможное обобщение, не требующее принципиальных изменений в доказательствах, — замена нормы в $L_q(\Omega)$ нормой в пространстве Орлича (см. теорему 2.3.2).

§ 4.7. ВЛОЖЕНИЕ $W_{p,r}^1(\Omega)$ В $L_q(\Omega)$ $(r>q)$ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ БЕСКОНЕЧНОГО ОБЪЕМА

4.7.1. Классы $\overset{\infty}{J}_\alpha$ и $\overset{\infty}{I}_{p,\alpha}$. Введенные ранее классы J_α, $I_{p,\alpha}$ характеризуют границы области «в малом». В этом параграфе нас будет интересовать структура области на бесконечности.

Рассмотрим, например, бесконечную плоскую область $\{(x, y): 0<x<\infty, |y|<x^{1/2}\}$. Так как Ω удовлетворяет «условию конуса», то для функций, заданных в этой области, справедливо неравенство

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C(\|\nabla u\|_{L_1(\Omega)}+\|u\|_{L_r(\Omega)}), \tag{1}$$

где r — произвольное положительное число, не превосходящее двух *.

Условие $r\leqslant 2$ существенно для справедливости неравенства (1). Действительно, для функции $u(x, y)=(x+1)^{-\gamma}$, где $3r/2<\gamma<3/4$, $2<r<3$, правая часть (1) конечна, но $u \overline{\in} L_2(\Omega)$.

Оценка (1) в некотором смысле не удовлетворительна: норма в $L_r(\Omega)$ не слабее нормы в $L_2(\Omega)$ (в отличие от случая $m_n(\Omega)<\infty$). Если говорить о скорости убывания функции на бесконечности, то конечность нормы в $L_r(\Omega)$ $(r<2)$ является даже более ограничительным условием, чем принадлежность функции пространству $L_2(\Omega)$. Поэтому можно поставить следующую задачу. Пусть $m_n(\Omega)=\infty$. Найти пространство $L_q(\Omega)$, в которое вкладывается $W^1_{p,r}(\Omega)$ при больших r.

Введем классы множеств, аналогичные классам J_α, $I_{p,\alpha}$.

Определение 1. Множество Ω принадлежит классу $\overset{\infty}{J}_\alpha$, если существует такая постоянная $M>0$, что

$$\sup_{\{g\}} ([m_n(g)]^\alpha/s(\partial_i g))<\infty, \tag{2}$$

где супремум берется по всем допустимым множествам $g\subset\Omega$, таким, что $m_n(g)\geqslant M$.

Отметим пока без доказательства, что упомянутая в начале параграфа область $\Omega=\{(x, y): 0<x<\infty, |y|<x^{1/2}\}$ принадлежит классу $\overset{\infty}{J}_{1/3}$ и что для любого $r\geqslant 3$ справедливо неравенство

$$\|u\|_{L_3(\Omega)} \leqslant C(\|\nabla u\|_{L_1(\Omega)}+\|u\|_{L_r(\Omega)}). \tag{3}$$

(Показатель 3 в левой части этого неравенства не может быть уменьшен.)

---

* Это можно показать, например, следующим образом. Пусть $Q_{m,n}$ — произвольный квадрат целочисленной координатной решетки. Каждую из областей $\Omega_{m,n}=\Omega\cap Q_{m,n}$ можно отобразить на $Q_{0,0}$ с помощью квазиизометрического отображения так, чтобы константы Липшица отображающих функций были равномерно ограничены, а якобианы равномерно отделены от нуля. Отсюда и из теоремы 1.4.5 получаем последовательность неравенств

$$\int_{\Omega_{m,n}} u^2\,dx \leqslant c\left(\|\nabla u\|^2_{L_1(\Omega_{m,n})}+\|u\|^2_{L_r(\Omega_{m,n})}\right)$$

с константой c, не зависящей от m, n. Суммируя по m, n и используя неравенство $\left(\sum_i a_i^\alpha\right)^{1/\alpha}\leqslant\sum_i a_i$, где $\alpha\geqslant 1$, $a_i>0$, приходим к (1).

Пусть F — ограниченное замкнутое в Ω подмножество Ω и $\Omega_R = \Omega \cap B_R$. Назовем p-емкостью F относительно Ω (обозначение: $p\text{-cap}_\Omega(F)$) предел $c_p(\Omega_R \setminus F)$ при $R \to \infty$.

Определение 2. Область Ω принадлежит классу $\overset{\infty}{I}_{p,\alpha}$, если существует такая постоянная $M > 0$, что

$$\mathfrak{A}_{p,\alpha}(M) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\{F\}} ([m_n(F)]^\alpha / [p\text{-cap}_\Omega(F)]^{1/p}) < \infty. \tag{4}$$

Здесь супремум берется по всем F, удовлетворяющим условиям $m_n(F) \geqslant M$, $p\text{-cap}_\Omega(F) > 0$. ■

Аналогично лемме 4.3.2/1 можно доказать, что классы $\overset{\infty}{I}_{1,\alpha}$ и $\overset{\infty}{J}_\alpha$ совпадают и что

$$\overset{\infty}{\mathfrak{A}}_{1,\alpha}(M) = \sup_{\{g\}} ([m_n(g)]^\alpha / s(\partial_i g)),$$

где $\{g\}$ имеет тот же смысл, что и в (2).

Предложение 1. *В случае $\alpha > 1/p - 1/n$ класс $\overset{\infty}{I}_{p,\alpha}$ пуст.*

Доказательство. Пусть $\Omega \in \overset{\infty}{I}_{p,\alpha}$. Если ρ — столь большое положительное число, что $m_n(\Omega_\rho) \geqslant M$ и $R > \rho$, то из (4) получаем оценку

$$[m_n(\Omega_\rho)]^\alpha \leqslant K [c_p(\Omega_R \setminus \operatorname{clos}_\Omega \Omega_\rho)]^{1/p}, \qquad K = \text{const}.$$

Пусть $u(x) = \eta(|x|)$, где η — кусочно-линейная непрерывная функция, равная нулю при $t > R$ и единице при $t < \rho$. Так как $u \in U_\Omega(\Omega_R \setminus \operatorname{clos}_\Omega \Omega_\rho)$, то

$$c_p(\Omega_R \setminus \operatorname{clos}_\Omega \Omega_\rho) \leqslant (R - \rho)^{-p} m_n(\Omega_R \setminus \Omega_\rho).$$

Следовательно, $\quad R - \rho \leqslant K [m_n(\Omega_R) - m_n(\Omega_\rho)]^{1/p} [m_n(\Omega_\rho)]^{-\alpha}.$

Введем числовую последовательность $\{\rho_j\}_{j \geqslant 1}$ условием $m_n(\Omega_{\rho_j}) = 2^j M$. Тогда $\rho_{j+1} - \rho_j \leqslant K 2^{j(p^{-1} - \alpha)}$. Суммируя, получаем $\rho_j \leqslant \rho_1 + cK 2^{j(p^{-1} - \alpha)}$, что вместе с определением последовательности $\{\rho_j\}$ дает $\rho_j \leqslant \rho_1 + cK [m_n(\Omega_{\rho_j})]^{p^{-1} - \alpha}$. Так как $\rho_j \to \infty$, то отсюда следует, что $\alpha < p^{-1}$. Далее $\rho_j \leqslant \rho_1 + cK (v_n \rho_j^n)^{p^{-1} - \alpha}$ и, следовательно, $\alpha \leqslant p^{-1} - n^{-1}$. ■

Пусть F — ограниченное замкнутое в Ω подмножество Ω и $\Lambda_F(\sigma) = \inf s(\partial_i g)$ на всех допустимых подмножествах g множества Ω, содержащих F и таких, что $m_n(g) \geqslant \sigma$.

Из неравенства (4.1.3/3) непосредственно вытекает следующее утверждение.

Предложение 2. *Имеет место оценка*

$$p\text{-cap}_\Omega(F) \geqslant \left(\int_{m_n(F)}^\infty [\Lambda_F(\sigma)]^{-p/(p-1)} d\sigma \right)^{1-p}. \tag{5}$$

Предложение 3. *Если* $\Omega \in \overset{\infty}{J}_{\alpha+(p-1)/p}$, *то* $\Omega \in \overset{\infty}{I}_{p,\alpha}$ *и справедлива оценка*

$$\overset{\infty}{\mathfrak{A}}_{p,\alpha}(M) \leqslant ((p-1)/p\alpha)^{(p-1)/p} \overset{\infty}{\mathfrak{A}}_{1,\alpha+(p-1)/p}(M). \tag{6}$$

Доказательство. Если $m_n(F) \geqslant M$, то из (5) получаем неравенство

$$p\text{-cap}_\Omega(F) \geqslant [\overset{\infty}{\mathfrak{A}}_{1,\alpha+(p-1)/p}(M)]^{-p} \left(\int_{m_n(F)}^{\infty} \sigma^{-(\alpha+1-1/p)p/(p-1)}\, d\sigma\right)^{1-p},$$

равносильное (6).

4.7.2. **Вложение** $W^1_{p,r}(\Omega)$ **в** $L_q(\Omega)$ $(r>q)$. Доказательство формулируемой далее теоремы близко по методу к доказательству теоремы 4.3.3. Однако, так как оно все же отличается в деталях, мы приведем его для удобства читателя.

Теорема. 1) *Если множество* Ω *принадлежит классу* $\overset{\infty}{I}_{p,\alpha}$ *и* $r>q=\alpha^{-1}$, *то для любой функции* $u \in W^1_{p,r}(\Omega)$ *справедливо неравенство*

$$\| u \|_{L_q(\Omega)} \leqslant C_1 \| \nabla u \|_{L_p(\Omega)} + C_2 \| u \|_{L_r(\Omega)}, \tag{1}$$

где $C_2 = M^{(r-q)/rq}$, $C_1 \leqslant p(p-1)^{(1-p)/p} \overset{\infty}{\mathfrak{A}}_{p,\alpha}(M)$.

2) *Если при* $r>q$ *справедливо неравенство* (1), *то область* Ω *принадлежит классу* $\overset{\infty}{I}_{p,\alpha}$, *где* $\alpha=q^{-1}$. *При этом* $M^{(r-q)/rq}=\varepsilon^{-1}C_2$, $\overset{\infty}{\mathfrak{A}}_{p,\alpha}(M) \leqslant (1-\varepsilon)^{-1} C_1$, *где* ε — *произвольное число из промежутка* $(0, 1)$

Доказательство. 1) В силу леммы 3.1.2/2 достаточно доказать (1) для функций из $C^\infty(\Omega)$ с носителями в Ω_R при некотором $R<\infty$. Выберем такое число T, что $m_n(L_T) \leqslant M \leqslant m_n(N_T)$. Очевидно, что

$$\int_\Omega |u|^q\, dx = \int_{L_t} |u|^q\, dx + \int_0^T m_n(N_t \setminus L_T)\, d(t^p). \tag{2}$$

Первое слагаемое справа оценивается с помощью неравенства Гельдера:

$$\int_{L_T} |u|^q\, dx \leqslant M^{1-q/r} \left(\int_\Omega |u|^r\, dx\right)^{q/r}.$$

В силу неравенства (1.3.3/1) второй интеграл справа в (2) не превосходит $\left\{\int_0^T [m_n(N_t \setminus L_T)]^{p/q}\, d(t^p)\right\}^{q/p}$. Следовательно,

$$\| u \|_{L_q(\Omega)} \leqslant M^{(r-q)/rq} \| u \|_{L_r(\Omega)} + \left\{\int_0^T [m_n(N_t)]^{p/q}\, d(t^p)\right\}^{1/p}.$$

Так как $m_n(N_t) \geqslant M$ при $t \in (0, T)$, то

$$[m_n(N_t)]^{1/q} \leqslant \overset{\infty}{\mathfrak{A}}_{p,\alpha}(M) [p\text{-cap}_\Omega(N_t)]^{1/p} \leqslant \overset{\infty}{\mathfrak{A}}_{p,\alpha}(M)\, [c_p(\Omega_R \setminus N_t)]^{1/p}. \tag{3}$$

Применяя (3) и лемму 4.1.3/2, получаем

$$\|u\|_{L_q(\Omega)} \leqslant M^{1/q-1/r}\|u\|_{L_r(\Omega)} + \overset{\infty}{\mathfrak{A}}_{p,\alpha}(M)\left[\int_0^\infty c_p(\Omega_R \setminus N_t)\, d(t^p)\right]^{1/p} \leqslant$$
$$\leqslant M^{1/q-1/q}\|u\|_{L_r(\Omega)} + \overset{\infty}{\mathfrak{A}}_{p,\alpha}(M)\frac{p}{(p-1)^{(p-1)/p}}\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}.$$

2) Положим $M=(C_2\varepsilon^{-1})^{rq/(r-q)}$ и рассмотрим произвольное ограниченное замкнутое в Ω множество F, $F \subset \Omega$, такое, что $m_n(F) \geqslant M$. Пусть u — любая функция из $C^{0,1}(\Omega)$, равная единице на F и нулю вне некоторого шара. Очевидно, что

$$\int_\Omega |u|^r dx = \int_0^1 m_n(N_t)\, d(t^r).$$

Так как функция $m_n(N_t)$ не возрастает и $q<r$, то в силу неравенства 1.3.3/1

$$\int_\Omega |u|^r dx \leqslant \left(\int_0^1 [m_n(N_t)]^{q/r} d(t^q)\right)^{r/q}.$$

Принимая во внимание, что $m_n(N_t) \geqslant m_n(F) \geqslant M$, получаем

$$\|u\|_{L_r(\Omega)} \leqslant M^{1/r-1/q}\left(\int_0^1 m_n(N_t)\, d(t^q)\right)^{r/q} = \varepsilon C_2^{-1}\|u\|_{L_q(\Omega)}.$$

Из (1) и последнего неравенства следует, что

$$\|u\|_{L_q(\Omega)} \leqslant C_1(1-\varepsilon)^{-1}\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}.$$

Вспоминая, что $u=1$ на F и минимизируя $\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}$, находим окончательно

$$[m_n(F)]^{1/q} \leqslant C_1(1-\varepsilon)^{-1}[p\text{-cap}_\Omega(F)]^{1/q}. \blacksquare$$

Из первой части теоремы и предложения 4.7.1/3 получаем следующее утверждение.

Следствие. *Если* $\Omega \in \overset{\infty}{J}_\alpha$, $\alpha \leqslant 1$, $p \geqslant 1$, $r>q$, $p(1-\alpha)<1$, $q=p/[1-p(1-\alpha)]$, *то для любой функции* $u \in W^1_{p,r}(\Omega)$ *справедливо неравенство* (1).

4.7.3. Пример области из класса $\overset{\infty}{I}_{p,\alpha}$.

Пример. Рассмотрим «параболоид»

$$\Omega = \{x \in R^n:\ x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2 < ax_n^{2\beta},\quad 0<x_n<\infty\}, \tag{1}$$

где $1>\beta>0$ и $a=\text{const}>0$ (рис. 17).

Покажем сначала, что при $\alpha=\beta(n-1)/(\beta(n-1)+1)$

$$0 < \lim_{M\to\infty} \sup([m_n(g)]^\alpha / s(\partial_i g)) < \infty, \tag{2}$$

где супремум берется по совокупности всех допустимых подмножеств g области Ω, таких, что $m_n(g) \geqslant M$. Симметризуя множество g относительно луча Ox_n и повторяя доказательство леммы 3.2.1/1, получаем, что из всех множеств g с фиксированным объемом M наименьшую площадь $\partial_i g$ имеет шар B, ортогональный $\partial\Omega$. Элементарный подсчет показывает, что

$$\lim_{M\to\infty}([m_n(B)]^\alpha/s(\partial_i B))=(1-\alpha)^\alpha/v_{n-1}^{1-\alpha}.$$

Неравенства (2) доказаны. ■

Итак, $\Omega\in\overset{\infty}{J}_{\beta(n-1)/(\beta(n-1)+1)}$ и по следствию 4.7.2 и второй части теоремы 4.7.2 $\Omega\in\overset{\infty}{I}_{p,\alpha}$, где $p<\beta(n-1)+1$ и $\alpha=p^{-1}-(\beta(n-1)+1)^{-1}$.

Покажем, что это значение α — наибольшее. Действительно, пусть $\Omega(X)=\{x\in\Omega:\ x_n\leqslant X\}$. Очевидно, что

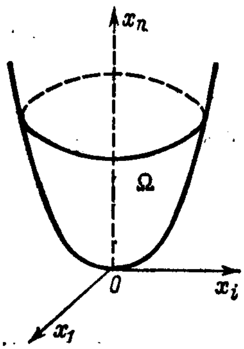

Рис. 17.

$$p\text{-cap}_\Omega(\Omega(X))\leqslant$$
$$\leqslant\int_{\Omega\setminus\Omega(X)}|\nabla[(X/x_n)^{\beta(n-1)}]|^p\,dx=cX^{\beta(n-1)+1-p}$$

и, значит, при $\alpha>p^{-1}-[\beta(n-1)+1]^{-1}=\gamma$

$$[m_n(\Omega(X))]^\alpha/[p\text{-cap}_\Omega(\Omega(X))]^{1/p}\geqslant$$
$$>cX^{[\beta(n-1)+1](\alpha-\gamma)}\underset{X\to\infty}{\to}\infty.$$

Таким образом, для области (1) при $\beta(n-1)>p-1\geqslant0$ справедливо неравенство (4.7.2/1), в котором $r>q=[\beta(n-1)+1]p/[\beta(n-1)+1-p]$. Это значение q не может быть уменьшено. Заметим, что оно при $\beta<1$ больше предельного показателя $np(n-p)$ в теореме Соболева.

4.7.4. Пространство $\overset{(\circ)}{L}{}^1_p(\Omega)$ и его вложение в $L_q(\Omega)$. Пусть $\overset{(\circ)}{L}{}^1_p(\Omega)$ — пополнение множества функций из $(C^\infty\cap L^1_p)(\Omega)$ с ограниченными носителями по норме $\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}$. (Здесь, как и всюду в этом параграфе, $m_n(\Omega)=\infty$.)

Согласно лемме 3.1.2/3 пространство $\overset{(\circ)}{L}{}^1_p(\Omega)$ совпадает с пополнением $W^1_{p,\,r}(\Omega)$ (r — любое положительное число) по норме $\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}$. Если в определениях классов $\overset{\infty}{J}_\alpha$ и $\overset{\infty}{I}_{p,\alpha}$ снять требования $m_n(g)\geqslant M$, $m_n(F)\geqslant M$ (т. е. положить $M=0$), то получим определения классов $\overset{\infty}{J}_\alpha(0)$, $\overset{\infty}{I}_{p,\alpha}(0)$. ■

Из замечания 4.3.1 следует, что если $n\geqslant p$ и $\Omega\in\overset{\infty}{I}_{p,\alpha}$, то $\alpha\geqslant1/p-1/n$. Вместе с тем согласно предложению 4.6 $\alpha\leqslant1/p-1/n$. Следовательно, не пуст лиш класс $\overset{\infty}{I}_{p,\,1/p-1/n}(0)$ (Этому классу принадлежит, например, R^n или область (4.7.3/1) при $\beta=1$.)

Принимая только что сказанное во внимание и повторяя с очевидными изменениями доказательство теоремы 2.3.2, получаем следующее утверждение.

Теорема. *Неравенство*

$$\|u\|_{L_q(\Omega)} \leqslant C \|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}, \qquad p \geqslant 1, \tag{1}$$

имеет место для всех $u \in \overset{\circ}{L}{}_p^1(\Omega)$ *в том и только в том случае, если* $n > p$, $q = pn/(n-p)$ *и* $\Omega \in \overset{\infty}{I}_{p,1/p-1/n}(0)$.

Точная константа в (1) *удовлетворяет неравенствам*

$$\overset{\infty}{\mathfrak{A}}_{p,1/p-1/n}(0) \leqslant C \leqslant p\,(p-1)^{(1-p)/p}\,\overset{\infty}{\mathfrak{A}}_{p,1/p-1/n}(0).$$

Замечание. Покажем, что из условия $\Omega \in \overset{\infty}{I}_{p,1/p-1/n}(0)$, $n > p$, не следует неравенство типа Пуанкаре

$$\inf_{c \in R^1} \|u - c\|_{L_{pn(n-p)}(\Omega)} \leqslant C \|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}, \qquad u \in L_p^1(\Omega). \tag{2}$$

Рассмотрим область, изображенную на рис. 18, которая представляет собой объединение двух конусов: $\{x : |x'| < x_n + 1\}$ и $\{x : |x'| < 1 - x_n\}$, $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. Каждый из этих конусов принадлежит классу $\overset{\infty}{I}_{p,1/p-1/n}(0)$. Поэтому их объединение Ω принадлежит тому же классу (ср. с предложением 4.3.1/1). Однако для нечетной по переменной x_n гладкой функции, равной нулю при $0 < x_n < 1$ и единице при $x_n > 2$, которая, конечно, принадлежит $L_p^1(\Omega)$, левая часть неравенства (2) бесконечна.

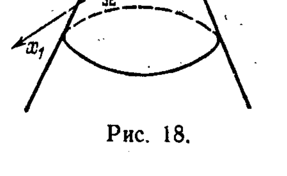

Рис. 18.

Вместе с тем по теореме включение $\Omega \in \overset{\infty}{I}_{p,1/p-1/n}(0)$ равносильно неравенству

$$\|u\|_{L_{pn/(n-p)}(\Omega)} \leqslant C \|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}, \qquad u \in W^1_{p,\,pn/(n-p)}(\Omega). \tag{3}$$

Отсюда следует, в частности, что (2) влечет принадлежность Ω классу $\overset{\infty}{I}_{p,1/p-1/n}(0)$. Теорема показывает также, что в (2) норму в $L_{pn/(n-p)}(\Omega)$ нельзя заменить нормой в $L_q(\Omega)$ при $q \neq pn/(n-p)$.

4.7.5. О неравенстве Пуанкаре для областей бесконечного объема. Следующее утверждение характеризует области, для которых выполнено неравенство (4.7.4/2). Здесь (и только здесь) мы будем считать, что требование ограниченности множеств G и F в определении p-проводимости отсутствует.

Теорема. *Пусть* $m_n(\Omega) = \infty$. *Неравенство* (4.7.4/2) *имеет место для всех* $u \in L_p^1(\Omega)$, $p \geqslant 1$, *в том и только в том случае, если*

Ω — область из класса $\overset{\infty}{I}_{p,1/p-1/n}(0)$, удовлетворяющая следующему условию:

Если проводник $K = G \setminus F$ в Ω имеет конечную p-проводимость, то либо $m_n(F) < \infty$, либо $m_n(\Omega \setminus G) < \infty$. (1)

В случае $p = 1$ условие (1) *равносильно следующему:*

Если G — открытое подмножество Ω, такое, что $\partial_i G$ — гладкое многообразие и $s(\partial_i G) < \infty$, то либо $m_n(G) < \infty$, либо $m_n(\Omega \setminus G) < \infty$. (2)

(*Напомним также, что* $\overset{\infty}{I}_{1,1-1/n}(0) = \overset{\infty}{J}_{1-1/n}(0)$.)

Доказательство. Необходимость условия $\Omega \in I_{p,1/p-1/n}(0)$ была отмечена в конце замечания 4.7.4, а необходимость связности множества Ω очевидна.

Докажем, что из (4.7.4/2) следует (1). Пусть v — любая функция из $U_\Omega(K)$, где K — проводник $G \setminus F$, $c_p(K) < \infty$. Положим в (4.7.4/2) $u = \max\{0, \min\{v, 1\}\}$. Тогда при $q = pn/(n-p)$

$$[|c|^q m_n(\Omega \setminus G) + |1-c|^q m_n(F)]^{1/q} \leqslant C \|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}.$$

Следовательно, либо $m_n(\Omega \setminus G) < \infty$, либо $m_n(F) < \infty$.

Пусть теперь $p = 1$. Докажем необходимость условия (2). Отметим сначала, что в доказательстве леммы 3.2.2 условие ограниченности множества G не использовалось. Пусть G — открытое подмножество Ω, такое, что $\partial_i G$ — гладкое многообразие и $s(\partial_i G) < \infty$. Подставим в (4.7.4/2) в качестве u любую функцию w_m из последовательности, построенной в лемме 3.2.2. Тогда для любого компакта $Q \subset G$, начиная с некоторого номера m,

$$(|c_m|^{n/(n-1)} m_n(\Omega \setminus G) + |1-c_m|^{n/(n-1)} m_n(Q))^{(n-1)/n} \leqslant C \|\nabla w_m\|_{L(\Omega)},$$

где $c_m = \mathrm{const}$. Так как

$$\varlimsup_{m \to \infty} \|\nabla w_m\|_{L(\Omega)} = s(\partial_i G) < \infty,$$

то либо $m_n(\Omega \setminus G) < \infty$, либо $c_m = 0$ и $[m_n(Q)]^{(n-1)/n} \leqslant Cs(\partial_i G)$. Следовательно, условие (2) выполнено.

Доказательство достаточности проведем в несколько этапов.

Лемма 1. 1) *Пусть $\Omega \in \overset{\infty}{I}_{p,q}(0)$, где $q = pn/(n-p)$, $n > p$. Тогда для всех проводников $K = G \setminus F$, где G — открытое подмножество Ω, а F — замкнутое в Ω подмножество конечного объема, справедливо неравенство*

$$[m_n(F)]^{1-p/n} \leqslant \mathrm{const}\, c_p(K). \tag{3}$$

2) *Пусть* $\Omega \in \overset{\infty}{J}_{1-1/n}(0)$. *Тогда для всех открытых множеств* $G \subset \Omega$, *таких, что* $\partial_i G$ — *гладкое многообразие и* $m_n(G) < \infty$, *выполняется неравенство*

$$[m_n(G)]^{1-1/n} \leqslant \mathrm{const}\, s(\partial_i G). \tag{4}$$

Доказательство. 1) Так как $\Omega \in \overset{\infty}{I}_{p,q}(0)$, то для любого замкнутого в Ω ограниченного множества $H \subset F$

$$[m_n(H)]^{1-p/n} \leqslant \mathrm{const}\, c_p(G \setminus H).$$

Теперь (3) следует из неравенства $c_p(G \setminus H) \leqslant c_p(G \setminus F)$ и равенства $m_n(F) = \sup\limits_H m_n(H)$.

2) Пусть $\Omega \in \overset{\infty}{J}_{1-1/n}(0)$, $m_n(G) < \infty$ и $s(\partial_i G) < \infty$. Отметим, что в доказательстве леммы 3.2.2 не используется ограниченность множества G, и подставим построенную в этой лемме последовательность ω_m в неравенство (4.7.4/3). Переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем для любого компакта $Q \subset G$ неравенство

$$[m_n(Q)]^{1-1/n} \leqslant \mathrm{const}\, s(\partial_i G).$$

Лемма 2. 1) *Если* $\Omega \in \overset{\infty}{I}_{p,q}(0)$, *где* $q = pn/(n-p)$, $n > p$, *и выполнено условие* (1), *то для всякой функции* $u \in C^\infty(\Omega) \cap L_p^1(\Omega)$ *существует одно (и только одно) число* c, *такое, что*

$$m_n(\{x : |u(x) - c| \geqslant \varepsilon\}) < \infty \quad \text{для всех} \quad \varepsilon > 0. \tag{5}$$

2) *То же утверждение верно при* $p = 1$, *если* $\Omega \in J_{1-1/n}(0)$ *и выполнено условие* (2).

Доказательство. 1) Введем множества $A_t = \{x: u(x) > t\}$, $B_t = \{x: u(x) \geqslant t\}$, $C_t = \Omega \setminus A_t$, $D_t = \Omega \setminus B_t$ и положим

$$c = \inf\{t: m_n(A_t) < \infty\}. \tag{6}$$

Допустим, что $c = +\infty$. Тогда $m_n(A_t) = \infty$ для всех $t \in R^1$ и в силу неравенства

$$(T-t)^p c_p(A_t \setminus B_T) \leqslant \|\nabla u\|^p_{L_p(\Omega)} \tag{7}$$

и условия (1) $m_n(C_t) < \infty$ для всех t. Согласно оценке (3)

$$[m_n(C_t)]^{1-p/n} \leqslant \mathrm{const}\, c_p(D_T \setminus C_t) \tag{8}$$

при всех $T > t$. Так как $(T-t)^p c_p(D_T \setminus C_t) \leqslant \|\nabla u\|^p_{L_p(\Omega)}$, то правая часть оценки (8) стремится к нулю при $T \to +\infty$. Следовательно, $m_n(C_t) = 0$ при всех t и $c < +\infty$.

Пусть теперь $c=-\infty$. Тогда $m_n(A_t)<\infty$ при всех $t\in R^1$. Применяя (3) к проводнику $A_t\diagdown B_T$, где $T>t$, получаем неравенство

$$[m_n(B_T)]^{1-p/n}\leqslant \mathrm{const}\, c_p(A_t\diagdown B_T),$$

и так как в силу (7) правая часть стремится к нулю при $t\to-\infty$, то $m_n(B_T)=0$ для всех T. Следовательно, $c>-\infty$.

Докажем (5). Из определения (6) следует, что при $\varepsilon>0$

$$m_n(\{x\colon\ u-c\geqslant\varepsilon\})<\infty. \tag{9}$$

С другой стороны, (6) дает $m_n(\{x\colon\ u-c\geqslant-\varepsilon/2\})=\infty$. Отмечая, что p-проводимость проводника $A_{c-\varepsilon/2}\diagdown B_{c-\varepsilon}$ конечна (см. (7)), получаем из (1)

$$m_n(\{x\colon\ u<c-\varepsilon\})<\infty. \tag{10}$$

Неравенства (9) и (10) равносильны (6). Единственность числа c — очевидное следствие условия (1) и конечности проводимости любого проводника $A_t\diagdown B_T$, $t>T$. Первая часть леммы доказана.

2) Пусть теперь $p=1$. Из тождества

$$\int_\Omega|\nabla u|\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}s(\partial A_t)\,dt,\qquad u\in C^\infty(\Omega)\cap L_1^1(\Omega)$$

следует, что

$$s(\partial A_t)<\infty \text{ при п. в. } t \tag{11}$$

и

$$\lim_{t\to-\infty}s(\partial A_t)=\lim_{t\to+\infty}s(\partial A_t)=0. \tag{12}$$

Далее достаточно повторить те же рассуждения, что и в доказательстве первой части теоремы, используя вместо конечности проводимости проводника $A_t\diagdown B_T=D_T\diagdown C_t$ свойство (11) и вместо стремления к нулю $c_p(A_t\diagdown B_T)$ при $t\to+\infty$ или при $T\to-\infty$ — свойство (12). ■

Перейдем к доказательству достаточности в теореме. Пусть $u\in C^\infty(\Omega)\cap L_p^1(\Omega)$. Согласно лемме 4.1.1/1 можно дополнительно предположить, что $u\in L_\infty(\Omega)$.

Положим $$u_\varepsilon(x)=\begin{cases}u(x)-c-\varepsilon, & \text{если } u(x)>c+\varepsilon,\\ 0, & \text{если } |u(x)-c|\leqslant\varepsilon,\\ u(x)-c+\varepsilon, & \text{если } u(x)<c-\varepsilon\end{cases}$$

(здесь c — постоянная, определенная в лемме 2). Из (5) и ограниченности функции u следует, что она принадлежит пространству $L_{pn/(n-p)}(\Omega)$. Поэтому функцию u_ε можно подставить в (4.2.4/3). Переходя к пределу при $\varepsilon\to+0$, получаем (4.7.4/2). ■

§ 4.8. О КОМПАКТНОСТИ ВЛОЖЕНИЯ $L_p^1(\Omega)$ В $L_q(\Omega)$

В этом параграфе найдены необходимые и достаточные условия компактности в $L_q(\Omega)$ множеств, ограниченных в пространстве $L_p^1(\Omega)$. Здесь Ω — область конечного объема.

4.8.1. Классы $\overset{\circ}{I}_{p,\alpha}$ и $\overset{\circ}{H}_{p,\alpha}$. Через $\mathfrak{A}_{p,\alpha}(M)$ и $\mathfrak{B}_{p,\alpha}(M)$ по-прежнему будем обозначать постоянные из определений классов $I_{p,\alpha}$ и $H_{p,\alpha}$.

Определение. Область Ω принадлежит классу $\overset{\circ}{I}_{p,\alpha}$ (классу $\overset{\circ}{H}_{p,\alpha}$), если $\mathfrak{A}_{p,\alpha}(M)\to 0$ при $M\to 0$ ($\mathfrak{B}_{p,\alpha}(M)\to 0$ при $M\to 0$). ■

Из равенства (4.3.2/1) следует, что $\Omega\in\overset{\circ}{I}_{1,\alpha}$ в том и только в том случае, если

$$\lim_{M\to 0}\sup_{\{g:\, m_n(g)\leqslant M\}}([m_n(g)]^\alpha/s(\partial_i g))=0 \qquad (1)$$

(здесь, как и ранее, через g обозначены допустимые подмножества Ω). ■

В определении класса $\overset{\circ}{I}_{p,\alpha}$ величина α больше чем $1/p-1/n$, так как $c_p(B_{2\rho}\setminus\bar{B}_\rho)=\mathrm{const}\,\rho^{n-p}$ и, следовательно,

$$[m_n(B_\rho)]^{1/p-1/n}/[c_p(B_{2\rho}\setminus\bar{B}_\rho)]^{1/p}=\mathrm{const}>0.$$

4.8.2. Критерий компактности.

Теорема. *Оператор вложения $L_p^1(\Omega)$ в $L_{q^*}(\Omega)$, где $\infty>q^*\geqslant 1$, вполне непрерывен в том и только в том случае, если $\Omega\in\overset{\circ}{I}_{p,\alpha}$ при $p\alpha\leqslant 1$ или $\Omega\in\overset{\circ}{H}_{p,\alpha}$ при $p\alpha>1$, где $\alpha^{-1}=q^*$.*

Доказательство. Достаточность. Пусть u — произвольная функция из $C^\infty(\Omega)\cap L_p^1(\Omega)\cap L_\infty(\Omega)$ с ограниченным носителем. (Согласно следствию 3.1.2 множество таких функций плотно в $L_p^1(\Omega)$.) Пусть $T=\inf\{t:\ m_n(N_t)\leqslant M\}$. Очевидно, что

$$\|u\|_{L_{q^*}(\Omega)}\leqslant c\left(\|(|u|-T)_+\|_{L_{q^*}(\Omega)}+T\,[m_n(\Omega)]^{1/q^*}\right).$$

В силу следствия 4.3.3 и следствия 4.4.2/1 справедливо неравенство

$$\|(|u|-T)_+\|_{L_{q^*}(\Omega)}\leqslant\delta(M)\,\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)},$$

где $\delta(M)=c\mathfrak{A}_{p,\alpha}(M)$ при $p\alpha\leqslant 1$ и $\delta(M)=c\mathfrak{B}_{p,\alpha}(M)$ при $p\alpha>1$.

Обозначим через Ω_M ограниченную подобласть Ω с границей класса $C^{0,1}$, такую, что $m_n(\Omega\setminus\Omega_M)<M/2$. Тогда в силу того что $m_n(N_T)\geqslant M$, получаем $m_n(N_T\cap\Omega_M)\geqslant M/2$. Следовательно, $\|u\|_{L_r(\Omega_M)}\geqslant 2^{-1/r}TM^{1/r}$, и мы пришли к неравенству

$$\|u\|_{L_{q^*}(\Omega)}\leqslant c\delta(M)\,\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}+cM^{-1/r}[m_n(\Omega)]^{1/q^*}\,\|u\|_{L_r(\Omega_M)}. \qquad (1)$$

В силу следствия 3.1.2 последнее неравенство выполнено для всех $u \in L_p^1(\Omega)$.

Так как Ω_M — область с гладкой границей и компактным замыканием, то оператор вложения $L_p^1(\Omega_M)$ в $L_r(\Omega_M)$ вполне непрерывен. Пусть последовательность функций $\{u_m\}_{m\geqslant 1}$, расположенных на единичной сфере пространства $L_p^1(\Omega)$, сходится в себе в $L_r(\Omega_M)$. Тогда из (1) следует

$$\|u_m - u_l\|_{L_{q^*}(\Omega)} \leqslant c\delta(M) + cM^{-1/r}[m_n(\Omega)]^{1/q^*}\|u_m - u_l\|_{L_r(\Omega_M)}. \quad (2)$$

По любому $\varepsilon > 0$ найдется такое M, что $c\delta(M) < \varepsilon/2$, и выберем столь большой номер N_ε, что при $m, l > N_\varepsilon$ второе слагаемое справа в (2) не превосходит $\varepsilon/2$. Тогда $\|u_m - u_l\|_{L_{q^*}(\Omega)} < \varepsilon$ при $m, l > N_\varepsilon$ и, значит, последовательность $\{u_m\}$ сходится в $L_{q^*}(\Omega)$.

Необходимость. Пусть оператор вложения $L_p^1(\Omega)$ в $L_{q^*}(\Omega)$ вполне непрерывен. Тогда элементы единичной сферы в $L_p^1(\Omega)$ имеют равностепенно абсолютно непрерывные нормы в $L_{q^*}(\Omega)$. Следовательно, для всех $u \in L_p^1(\Omega)$

$$\|u\|_{L_{q^*}(G)} \leqslant \varepsilon(M)\left(\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)} + \|u\|_{L_1(\omega)}\right),$$

где ω — ограниченная подобласть Ω, $\bar{\omega} \subset \Omega$, G — произвольное открытое подмножество Ω, объем которого не превосходит M, а функция $\varepsilon(M)$ стремится к нулю при $M \to 0$.

Пусть функция $u \in L_p^1(\Omega)$ равна нулю вне G. Тогда

$$\|u\|_{L_{q^*}(\Omega)} \leqslant \varepsilon(M)[1 - \varepsilon(M)M^{1-1/q^*}]^{-1}\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}.$$

Остается воспользоваться второй частью следствия 4.3.3 при $\alpha p \leqslant 1$ и второй частью следствия 4.4.2/1 при $\alpha p > 1$. ■

4.8.3. Достаточные условия компактности вложения $L_p^1(\Omega)$ в $L_{q^*}(\Omega)$. Из неравенств $\mathfrak{A}_{p_1,\alpha_1}(M) \leqslant c\mathfrak{A}_{p,\alpha}(M)$, $\mathfrak{B}_{p_1,\alpha_1}(M) \leqslant c\mathfrak{B}_{p,\alpha}(M)$, где $p_1 > p \geqslant 1$, $\alpha_1 - p_1^{-1} = \alpha - p^{-1}$, следует, что $\mathring{I}_{p,\alpha} \subset \mathring{I}_{p_1,\alpha_1}$, $\mathring{H}_{p,\alpha} \subset \mathring{H}_{p_1,\alpha_1}$. В частности, $\mathring{J}_{\alpha+1-p^{-1}} \overset{\mathrm{def}}{=} \mathring{I}_{1,\alpha+1-p^{-1}} \subset \mathring{I}_{p,\alpha}$. Отсюда получаем следующее утверждение.

Следствие 1. *Если область Ω принадлежит классу $\mathring{J}_\alpha$ и $p(1-\alpha) < 1$, $1 \leqslant p \leqslant q^* = p/[1 + p(\alpha - 1)]$, то оператор вложения $L_p^1(\Omega)$ в $L_{q^*}(\Omega)$ вполне непрерывен.*

Из условия

$$\int_0^M (\tau/\nu_{M,p}(\tau))^{1/(\alpha p-1)}\,d\tau < \infty \quad (1)$$

и тем более из условия

$$\int_0^M (\tau/\lambda_M(\tau))^{p/(\alpha p-1)}\,d\tau < \infty \quad (2)$$

в силу предложений 4.4.4/1 и 4.4.4/2 следует, что $\mathfrak{B}_{p,\alpha}(M) \to 0$ при $M \to 0$. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Следствие 2. *Если интеграл* (2) (*интеграл* (1)) *сходится, то оператор вложения* $L_p^1(\Omega)$ *в* $L_{q^*}(\Omega)$ ($q^*=\alpha^{-1}$, $\alpha p>1$) *вполне непрерывен.*

Из следствий 1 и 2 немедленно получаем следующий более грубый результат.

Следствие 3. *Если* $\Omega\in J_\alpha$ *и* $p(1-\alpha)\leqslant 1$, $p\geqslant 1$, $1\leqslant q<p/[1+p(\alpha-1)]$, *то оператор вложения* $L_p^1(\Omega)$ *в* $L_q(\Omega)$ *вполне непрерывен.*

Очевидно, что в теореме 4.2.2 и следствиях 1—3 пространство $L_p^1(\Omega)$ можно заменить пространством $W_{p,r}^1(\Omega)$ (где $r\leqslant q^*$).

4.8.4. Теорема о компактности для произвольной области конечного объема. Из положительности функции λ_M (см. лемму 3.2.4) и оценки (4.3.4/1) следует, что $\nu_{M,p}(t)>0$ при $t>0$. Поэтому существует неубывающая положительная непрерывная на $(0, m_n(\Omega)]$ функция φ, такая, что $\varphi(t)/\nu_{M,p}(t)$ стремится к нулю при $t\to+0$.

Теорема. *Пусть* Ω — *произвольная область конечного объема. Тогда из любой ограниченной в* $L_p^1(\Omega)$ *последовательности функций можно выделить подпоследовательность* $\{u_m\}_{m\geqslant 1}$, *для которой*

$$\int_0^\infty \varphi[m_n\{x\colon |u_m(x)-u_k(x)|\geqslant t\}]\,d(t^p)\underset{m,\,k\to\infty}{\to}0,$$

и, следовательно, любое ограниченное подмножество $L_p^1(\Omega)$ *компактно по n-мерной мере Лебега.*

Доказательство. Пусть u — функция из $C^\infty(\Omega)\cap L_p^1(\Omega)\cap L_\infty(\Omega)$ с ограниченным носителем. Очевидно, что

$$\int_0^\infty \varphi[m_n(N_t)]d(t^p)\leqslant\int_T^\infty \varphi[m_n(N_t)]\,d(t^p)+T^p\varphi[m_n(\Omega)]. \qquad (1)$$

Здесь $T=\inf\{t: m_n(N_t)\leqslant\mu\}$, μ — достаточно малое положительное число, не зависящее от функции u. Правая часть неравенства (1) не превосходит

$$\sup_{0<\tau\leqslant\mu}(\varphi(\tau)/\nu_{M,p}(\tau))\int_T^\infty c_p(L_T\setminus N_t)\,d(t^p)+c\varphi[m_n(\Omega)]\mu^{-p}\left(\int_{\Omega_\mu}|u|dx\right)^p,$$

где Ω_μ — область, определенная в доказательстве теоремы 4.8.2, где следует заменить M на μ. В силу леммы 4.1.3/3

$$\int_0^\infty \varphi[m_n(N_t)]\,d(t^p)\leqslant\sup_{0<\tau\leqslant\mu}(\varphi(\tau)/\nu_{M,p}(\tau))\,\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}^p+$$
$$+c\varphi[m_n(\Omega)]\,\mu^{-p}\,\|u\|_{L(\Omega_\mu)}^p. \qquad (2)$$

Следствие 3.1.2 позволяет распространить это неравенство на все функции из $L_p^1(\Omega)$. Остается воспользоваться рассуждением, проведенным в конце доказательства достаточности в теореме 4.8.2.

4.8.5. Примеры областей из класса $\overset{\circ}{I}_{p,\alpha}$.

Пример 1. Из оценок (4.3.5/1) следует, что область $\{x: (x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2)^{1/2}<f(x_n),\ 0<x_n<a\}$ из примера 4.3.5/1 принадлежит классу $\overset{\circ}{I}_{p,\alpha}$ в том и только в том случае, если

$$\lim_{x\to+0}\left(\int_0^x [f(t)]^{n-1}\,dt\right)^{\alpha p/(p-1)}\int_x^a [f(t)]^{(1-n)/(p-1)}\,dt=0.$$

В силу (3.3.3/1) и следствия 4.8.3/1 достаточным условием принадлежности классу $\overset{\circ}{I}_{p,\alpha}$ является равенство

$$\lim_{x\to+0}[f(x)]^{1-n}\left(\int_0^x [f(t)]^{n-1}\,dt\right)^{\alpha+1-1/p}=0. \tag{1}$$

Так как функция f не убывает, то (1) выполнено, если $\alpha p=1$ и при $\alpha p<1$, если $\lim\limits_{x\to+0} x^{\sigma}f(x)=0$, $\sigma=(p\alpha+p-1)/(n-1)(\alpha p-1)$.

Пример 2. Область $\Omega=\{x:\ 0<x_n<\infty,\ (x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2)^{1/2}<f(x_n)\}$ из примера 4.3.5/2 принадлежит классу $\overset{\circ}{I}_{p,\alpha}$ в том и только в том случае, если

$$\lim_{x\to+0}\left(\int_x^\infty [f(\tau)]^{n-1}\,d\tau\right)^{\alpha p/(p-1)}\int_0^x [f(\tau)]^{(1-n)/(p-1)}\,d\tau=0 \tag{2}$$

(см. оценки (4.3.5/3). В силу (3.3.3/4) и (4.3.4/1) последнее условие выполнено, если

$$\lim_{x\to+0}[f(x)]^{1-n}\left(\int_x^\infty [f(\tau)]^{n-1}\,d\tau\right)^{\alpha+1-1/p}=0. \tag{3}$$

В частности, $\Omega\in\overset{\circ}{I}_{p,1/p}$, если $f(\tau)=e^{-\beta(\tau)}$, $\beta'(\tau)\to+\infty$ при $\tau\to+\infty$. В случае $f(\tau)=e^{-c\tau}$ рассматриваемая область принадлежит классу $I_{p,1/p}$ и не принадлежит классу $\overset{\circ}{I}_{p,1/p}$.

Аналогично для спирали из примеров 3.3.3/3 и 4.3.5/3 получаем следующее необходимое и достаточное условие принадлежности классу $\overset{\circ}{I}_{p,\alpha}$:

$$\lim_{\theta\to+\infty}\left(\int_\theta^{+\infty}\delta(\varphi)\,d\varphi\right)^{\alpha p/(p-1)}\int_0^\theta[\delta(\varphi)]^{1/(1-p)}\,d\varphi=0,$$

а также более простое достаточное условие:

$$\left(\int_\theta^{+\infty}\delta(\varphi)\,d\varphi\right)^{\alpha+1-1/p}=o(\delta(\theta))\quad\text{при}\quad \theta\to+\infty.$$

В частности, $\Omega\in\overset{\circ}{I}_{p,1/p}$, если $\delta(\varphi)=e^{-\beta(\varphi)}$, $\beta'(\varphi)\to+\infty$ при $\varphi\to+\infty$, и $\Omega\in I_{p,1/p}\setminus\overset{\circ}{I}_{p,1/p}$, если $\delta(\varphi)=e^{-c\varphi}$.

§ 4.9. О ВЛОЖЕНИИ $L_p^l(\Omega)$ В $L_q(\Omega)$

Приведем достаточные условия ограниченности и полной непрерывности оператора вложения пространства $L_p^l(\Omega)$ в $L_{q^*}(\Omega)$, которые являются простыми следствиями теорем 4.3.3 и 4.4.2 о функциях с первыми производными из $L_p(\Omega)$.

Теорема 1. *Если* $\Omega \in I_{p,\alpha}$, $1-1/l < p\alpha \leqslant 1$ *или* $\Omega \in H_{p,\alpha}$, $p\alpha > 1$, *то оператор вложения* $L_p^l(\Omega)$ *в* $L_{q^*}(\Omega)$, *где* $q^* = p/(1-l+pl\alpha)$, *ограничен.*

Доказательство проводится индукцией по числу производных l. При этом используются вложения $I_{p,\alpha} \subset I_{p_1,\alpha_1}$, $H_{p,\alpha} \subset H_{p_1,\alpha_1}$, где $p_1 > p \geqslant 1$, $\alpha_1 - p_1^{-1} = \alpha - p^{-1}$ (см. следствия 4.2 и 4.4.2/2). ■

В частности, для областей класса $I_{p,1/p-1/n}$ теорема 1 гарантирует непрерывность оператора вложения $L_p^l(\Omega)$ $(lp < n)$ в $L_{q^*}(\Omega)$ с тем же показателем $q^* = pn/(n-lp)$, что и в теореме Соболева.

Из теоремы 1 и предложения 4.3.4/2 получаем следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть* $\Omega \in J_\alpha$, *где* $1-1/n \leqslant \alpha \leqslant 1$ и $lp(1-\alpha) \leqslant 1$. *Тогда пространство* $L_p^l(\Omega)$ *вложено в* $L_{q^*}(\Omega)$, *где* $q^* = p/(1-pl(1-\alpha))$ *при* $pl(1-\alpha) < 1$ *и* q^* *— любое положительное число при* $pl(1-\alpha) = 1$. ■

(Показатель $q^* = pn/(n-pl)$ получается при $\alpha = 1-1/n$.)

Пример 1. Так как область $\Omega^{(\lambda)} = \{x\colon x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 < x_n^{2\lambda}, 0 < x_n < 1\}$, $\lambda \geqslant 1$, принадлежит классу J_α при $\alpha = \lambda(n-1)/(\lambda(n-1)+1)$ (см. пример 3.3.3/1), то согласно следствию 1 при $1+\lambda(n-1) > pl$ для этой области $L_p^l(\Omega^{(\lambda)}) \subset L_{q^*}(\Omega^{(\lambda)})$, где

$$q^* = p(\lambda(n-1)+1)/(1+\lambda(n-1)-pl). \tag{1}$$

Пример функции $u(x) = x_n^{-\nu}$, где $\nu = (1+\lambda(n-1))/p - l - \varepsilon$, ($\varepsilon$ — произвольно малое положительное число), показывает, что показатель q^* нельзя увеличить.

Аналогично теореме 1 получается следующая теорема об условиях компактности вложения $L_p^l(\Omega)$ в $L_{q^*}(\Omega)$ для множеств конечной меры m_n.

Теорема 2. *Если* $\Omega \in \mathring{I}_{p,\alpha}$, $1-1/l < p\alpha \leqslant 1$ *или* $\Omega \in \mathring{H}_{p,\alpha}$, $p\alpha > 1$, *то оператор вложения* $L_p^l(\Omega)$ *в* $L_{q^*}(\Omega)$, *где* $q^* = p/(1-pl(1-\alpha))$, *вполне непрерывен.*

Из этой теоремы и следствия 4.8.3/1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. *Если* $m_n(\Omega) < \infty$ *и* $\Omega \in \mathring{J}_\alpha$, *где* $1-1/n < \alpha \leqslant 1$ *и* $lp(1-\alpha) < 1$, *то оператор вложения* $L_p^l(\Omega)$ *в* $L_q(\Omega)$, *где* $q < p/(1-pl(1-\alpha))$, *вполне непрерывен.*

Отсюда непосредственно получаем следующее более грубое достаточное условие в терминах классов J_α.

Следствие 3. *Если* $m_n(\Omega)<\infty$ *и* $\Omega\in J_\alpha$ $(1-1/n\leqslant\alpha\leqslant 1)$ *и* $lp(1-\alpha)\leqslant 1$, *то оператор вложения* $L_p^l(\Omega)$ *в* $L_q(\Omega)$, *где* $q<p/(1-pl(1-\alpha))$, *вполне непрерывен.*

Пример 2. Для области, рассмотренной в примере 1, согласно следствию 3 оператор вложения $L_p^l(\Omega^{(\lambda)})$ в $L_q(\Omega^{(\lambda)})$ вполне непрерывен при

$$q<p(\lambda(n-1)+1)/(1+\lambda(n-1)-pl) \tag{2}$$

(предполагается, что $1+\lambda(n-1)\geqslant pl$). Поставить в (2) знак равенства нельзя. Действительно, пусть $\eta\in C_0^\infty(0, 3)$, $\eta=1$ на $(1, 2)$. Очевидно, что семейство функций $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, где $u_\varepsilon(x)=\varepsilon^{l-(\lambda(n-1)+1)/p}\eta(x/\varepsilon)$, ограничено в $L_p^l(\Omega^{(\lambda)})$ и не компактно в $L_{q^*}(\Omega^{(\lambda)})$, где q^* — показатель, определенный равенством (1).

§ 4.10. ПРИЛОЖЕНИЯ К ЗАДАЧЕ НЕЙМАНА ДЛЯ СИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

Здесь результаты предыдущих параграфов этой главы используются для изучения условий разрешимости и дискретности спектра задачи Неймана в областях с нерегулярными границами.

4.10.1. Операторы второго порядка. Пусть Ω — подобласть R^n конечного объема, и a_{ij} (где $i, j=1, \ldots, n$) — вещественные измеримые функции в Ω, $a_{ij}=a_{ji}$. Допустим, что существует константа $c>1$, такая, что для почти всех $x\in\Omega$ и всех векторов $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ $c^{-1}|\xi|^2\leqslant a_{ij}\xi_i\xi_j\leqslant c|\xi|^2$.

Оператор A_q, $1\leqslant q<\infty$, задачи Неймана для дифференциального оператора $u\to -\partial/\partial x_i(a_{ij}\partial u/\partial x_j)$ определим следующими двумя условиями: 1) $u\in W_{2,q}^1(\Omega)$, $A_q u\in L_{q'}(\Omega)$, $1/q'+1/q=1$; 2) для всех $v\in W_{2,q}^1(\Omega)$ справедливо равенство

$$\int_\Omega vA_q u\,dx=\int_\Omega a_{ij}(\partial u/\partial x_i)(\partial v/\partial x_j)\,dx. \tag{1}$$

Отображение $u\to A_q u$ замкнуто. Очевидно, что множество значений $R(A_q)$ оператора A_q содержится в множестве $L_{q'}(\Omega)\ominus 1$ функций из $L_q(\Omega)$, ортогональных единице в Ω.

Лемма. $R(A_q)=L_{q'}(\Omega)\ominus 1$ *в том и только в том случае, если для всех* $v\in W_{2,q}^1(\Omega)$ *справедливо «обобщенное неравенство Пуанкаре»*

$$\inf_{c\in R^1}\|v-c\|_{L_q(\Omega)}\leqslant k\|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}. \tag{2}$$

Доказательство. Достаточность. Согласно лемме 3.1.2/2 множество $W_{2,q}^1(\Omega)$ плотно в $L_2^1(\Omega)$. Поэтому, если неравенство (2) выполнено для всех $v\in W_{2,q}^1(\Omega)$, то оно верно и для всех $v\in L_2^1(\Omega)$. Следовательно, какова бы ни была функция

$f \in L_{q'}(\Omega)$, функционал $v \to \int_\Omega vf\,dx$ ограничен в $L_2^1(\Omega)$ и может быть представлен в виде

$$\int_\Omega a_{ij}(\partial v/\partial x_j)(\partial u/\partial x_i)\,dx, \tag{3}$$

где $u \in L_2^1(\Omega)$. Так как в силу (2) $L_2^1(\Omega) \subset L_q(\Omega)$, то $u \in W_{2,q}^1(\Omega)$ и следовательно, $A_q u = f$.

Необходимость. Пусть $f \in L_{q'}(\Omega) \ominus 1$, $v \in L_2^1(\Omega) \cap L_q(\Omega)$, $\|\nabla v\|_{L_2(\Omega)} = 1$. Так как $R(A_q) = L_{q'}(\Omega) \ominus 1$, то функционал $f \to v(f) = \int_\Omega fv\,dx$, определенный на $L_{q'}(\Omega) \ominus 1$, можно представить в виде (3), где u — некоторая функция из $L_2^1(\Omega)$. Поэтому $|v(f)| \leqslant C\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}$ и функционалы $v(f)$ ограничены на каждой функции $f \in L_q(\Omega)$. Значит, они ограничены в совокупности, т. е. для всех $v \in W_{2,q}^1(\Omega)$ выполнено неравенство (2). ■

Из теорем 4.3.3 и 4.4.2 и из доказанной леммы непосредственно получаем следующий критерий разрешимости задачи $A_q u = f$ при всех $f \in L_{q'}(\Omega) \ominus 1$.

Теорема 1. $R(A_q) = L_{q'}(\Omega) \ominus 1$ *в том и только в том случае, если* $\Omega \in I_{2,1/q}$ *при* $q \geqslant 2$ *и* $\Omega \in H_{2,1/q}$ *при* $q < 2$.

Пусть a — вещественная существенно ограниченная функция в Ω, такая, что $a(x) \geqslant \mathrm{const} > 0$ при п. в. $x \in \Omega$. Тогда определен оператор $u \to A_q u + au$ с той же областью определения, что и оператор A_q. Рассмотрим задачу Неймана $A_q u + au = f$, где $f \in L_{q'}(\Omega)$. Если $q' \geqslant 2$, то вопрос о ее разрешимости тривиален: функционал $\int_\Omega fv\,dx$ непрерывен в пространстве $W_2^1(\Omega)$ со скалярным произведением $\int_\Omega (a_{ij}(\partial v/\partial x_j)(\partial u/\partial x_i) + avu)\,dx$. Если $q' < 2$, то для разрешимости необходимо и достаточно, чтобы для всех $v \in W_2^1(\Omega)$ выполнялось неравенство $\|v\|_{L_q(\Omega)} \leqslant C\|v\|_{W_2^1(\Omega)}$. Отсюда и из теоремы 4.3.3 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. $R(A_q + aI) = L_{q'}(\Omega)$, *где* $q' < 2$, *в том и только в том случае, если* $\Omega \in I_{2,1/q}$.

В силу леммы Реллиха вопрос об условиях, которым должно удовлетворять множество Ω для того, чтобы спектр оператора $A \stackrel{\mathrm{def}}{=} A_2$ был дискретным, сводится к изучению условий компактности вложения $W_2^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$. Поэтому согласно теореме 4.8.2 имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Спектр оператора A дискретен в том и только в том случае, если* $\Omega \in \mathring{I}_{2,1/2}$.

Достаточные условия принадлежности множества классам $I_{2,1/q}$, $H_{2,1/q}$, $\mathring{I}_{2,1/2}$ и примеры областей из этих классов приведены в предыдущих параграфах этой главы.

4.10.2. Задача Неймана для операторов произвольного порядка. В этом пункте мы ограничимся рассмотрением операторов со значениями в $L_2(\Omega)$.

Пусть Ω — ограниченная подобласть R^n. Через i, j обозначим мультииндексы порядка не выше l, $l \geqslant 1$, и через a_{ij} — ограниченные комплекснозначные измеримые функции в Ω. Допустим, что для всех $u \in L_2^l(\Omega)$ выполнено неравенство

$$\operatorname{Re} \int_\Omega \sum_{|i|=|j|=l} a_{ij} D^i u \overline{D^j u}\, dx \geqslant C \| \nabla_l u \|^2_{L_2(\Omega)}, \qquad (1)$$

где $D^i = \{\partial^{|i|}/\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}\}$.

Оператор A задачи Неймана для дифференциального оператора $u \to (-1)^l \sum_{|i|=|j|=l} D^i (a_{ij} D^j u)$ определим условиями: 1) $u \in W_2^l(\Omega)$, $Au \in L_2(\Omega)$; 2) для всех $v \in W_2^l(\Omega)$

$$\int_\Omega \bar{v} Au\, dx = \int_\Omega \sum_{|i|=|j|=l} a_{ij} D^j u \overline{D^i v}\, dx. \blacksquare$$

Очевидно, что множество значений $R(A)$ оператора A содержится в $L_2(\Omega) \ominus \mathscr{P}_{l-1}$, где $\mathscr{P}_{l-1}$ — пространство полиномов степени не выше $l-1$.

Если для всех $v \in L_2^l(\Omega)$ верно неравенство

$$\inf_{\Pi \in \mathscr{P}_{l-1}} \| v - \Pi \|_{L_2(\Omega)} \leqslant k \| \nabla_l v \|_{L_2(\Omega)}, \qquad (2)$$

то, как известно, $R(A) = L_2(\Omega) \ominus \mathscr{P}_{l-1}$ [58, 9.1, гл. 2].

Простое рассуждение, использующее индукцию по числу производных, показывает, что неравенство (2) следует из неравенства Пуанкаре

$$\inf_{c \in R^1} \| u - c \|_{L_2(\Omega)} \leqslant k \| \nabla v \|_{L_2(\Omega)}.$$

Следовательно, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Если $\Omega \in I_{2,1/2}$, то $R(A) = L_2(\Omega) \ominus \mathscr{P}_{l-1}$, т. е. задача Неймана $Au = f$ разрешима при всех $f \in L_2(\Omega) \ominus \mathscr{P}_{l-1}$.*

Аналогично можно поставить задачу Неймана для более общего оператора $u \to (-1)^l \sum_{|i|,\,|j| \leqslant l} D^i (a_{ij} D^j u)$.

Оператор B этой задачи определим условиями: 1) $u \in V_2^l(\Omega)$, $Bu \in L_2(\Omega)$; 2) для всех $v \in V_2^l(\Omega)$ справедливо равенство

$$\int_\Omega \bar{v} Bu\, dx = \int_\Omega \sum_{|i|,\,|j| \leqslant l} a_{ij} D^j u \overline{D^i v}\, dx. \qquad (3)$$

Теорема 2. *Если $\Omega \in \mathring{I}_{2,1/2}$, то $R(B + \lambda I) = L_2(\Omega)$ при достаточно больших значениях $\operatorname{Re} \lambda$ и оператор $(B + \lambda I)^{-1} : L_2(\Omega) \to V_2^l(\Omega)$ вполне непрерывен.*

Доказательству теоремы предпошлем лемму.

Лемма. *Если* $\Omega \in \mathring{I}_{2,\,1/2}$, *то для всех* $u \in W_2^l(\Omega)$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{k=0}^{l-1} \| \nabla_k u \|_{L_2(\Omega)} \leqslant \varepsilon \| \nabla_l u \|_{L_2(\Omega)} + C(\varepsilon) \| u \|_{L_2(\Omega)} \tag{4}$$

при любом $\varepsilon > 0$

Доказательство. В силу неравенства (4.8.2/1)

$$\| u \|_{L_2(\Omega)} \leqslant c\mathfrak{A}_{2,\,1/2}(M) \| \nabla u \|_{L_2(\Omega)} + c\,(m_n(\Omega)/M)^{1/2} \| u \|_{L_2(\Omega_M)},$$

где Ω_M — подобласть Ω с границей класса C^1, такая, что $2m_n(\Omega \setminus \Omega_M) < M$. Отсюда при всех $k = 0, 1, \ldots, l-1$ получаем

$$\| \nabla_k u \|_{L_2(\Omega)} \leqslant c\mathfrak{A}_{2,\,1/2}(M) \| \nabla_{k+1} u \|_{L_2(\Omega)} + c\,(m_n(\Omega)/M)^{1/2} \| \nabla_k u \|_{L_2(\Omega_M)}.$$

Так как граница области Ω_M гладкая, то при всех $\varepsilon > 0$

$$\| \nabla_k u \|_{L_2(\Omega_M)} \leqslant \varepsilon \| \nabla_{k+1} u \|_{L_2(\Omega_M)} + c_0(\varepsilon) \| u \|_{L_2(\Omega_M)}.$$

Значит, $\| \nabla_k u \|_{L_2(\Omega)} \leqslant c\mathfrak{A}_{2,\,1/2}(M) \| \nabla_{k+1} u \|_{L_2(\Omega)} + c(M) \| u \|_{L_2(\Omega_M)}.$

Применяя это неравенство к $k, k+1, \ldots, l-1$, получаем

$$\| \nabla_k u \|_{L_2(\Omega)} \leqslant c\,[\mathfrak{A}_{2,\,1/2}(M)]^{l-k} \| \nabla_l u \|_{L_2(\Omega)} + c_1(M) \| u \|_{L_2(\Omega_M)}.$$

Остается вспомнить, что $\mathfrak{A}_{2,\,1/2}(M) \to 0$ при $M \to 0$. ■

(Попутно мы доказали, что если $\Omega \in I_{2,\,1/2}$, т. е. $\mathfrak{A}_{2,\,1/2}(M) < \infty$ при некотором $M < m_n(\Omega)$, то неравенство (4) верно при некотором $\varepsilon > 0$.)

Доказательство теоремы 2. В силу (1)

$$\operatorname{Re} \int_\Omega \sum_{|i|,\,|j| \leqslant l} a_{ij} D^i u \overline{D^j u}\, dx \geqslant C \| \nabla_l u \|^2_{L_2(\Omega)} - C_1 \sum_{k=0}^{l-1} \| \nabla_k u \|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Применяя неравенство (4) при $\varepsilon = C/2C_1$, получим

$$\operatorname{Re} \int_\Omega \Big(\sum_{|i|,\,|j| \leqslant l} a_{ij} D^i u \overline{D^j u} + \lambda |u|^2 \Big) dx \geqslant$$
$$\geqslant {}^1/_2 C_1 \| \nabla_l u \|^2_{L_2(\Omega)} + (\operatorname{Re} \lambda - C_2) \| u \|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Значит, при $\operatorname{Re} \lambda > C_2$ справедливо неравенство «коэрцитивности»

$$\sum_{k=0}^{l} \| \nabla_k u \|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \mathrm{const}\, \operatorname{Re} \int_\Omega \Big(\sum_{|i|,\,|j| \leqslant l} a_{ij} D^i u \overline{D^j u} + \lambda |u|^2 \Big) dx.$$

Отсюда (см., например, [58, гл. 2, 9.1]) следует однозначная разрешимость уравнения $Bu + \lambda u = f$ для всех $f \in L_2(\Omega)$. Полная непрерывность оператора $(B + \lambda I)^{-1}$ — следствие теоремы 4.9/2. ■

4.10.3. Задача Неймана для специальной области. В монографии Р. Куранта и Д. Гильберта [46] приведен следующий пример области, для которой неверно неравенство Пуанкаре.

Пусть область Ω представляет собой сумму квадрата Q: $\{(x, y): 0<x<2, -1<y<1\}$ и последовательности пар симметрично расположенных квадратов Q_m, Q_{-m}, $m=1, 2, \ldots$, соединенных с Q перешейками S_m, S_{-m} (рис. 19). Пусть длины сторон квадратов Q_m и Q_{-m}, а также высоты перешейков S_m и S_{-m} равны $\varepsilon_m=2^{-m}$. Ширина перешейков пусть равняется ε_m^{α}.

Введем последовательность функций $\{u_m\}_{m\geqslant 1}$, определенных равенствами: $u_m=\pm\varepsilon_m^{-1}$ на $Q_{\pm m}$, $u_m(x, y)=\varepsilon_m^{-2}(y\mp 1)$ на $S_{\pm m}$, $u=0$ вне $S_m\cup S_{-m}\cup Q_m\cup Q_{-m}$. Для этой последовательности

$$\iint_\Omega u_m\,dx\,dy=0,$$

$$\iint_\Omega (\nabla u_m)^2\,dx\,dy=2\varepsilon_m^{\alpha-3},$$

$$\iint_\Omega u_m^2\,dx\,dy>2.$$

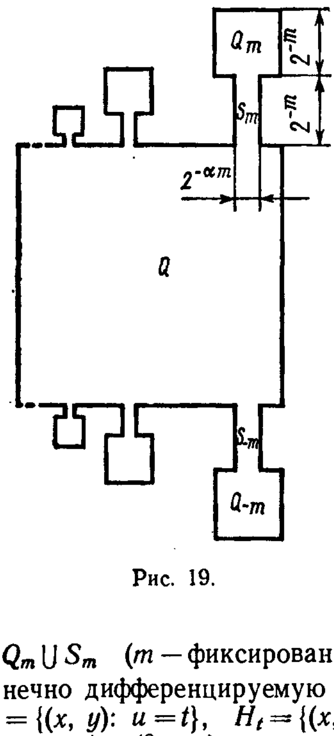

Рис. 19.

Таким образом, при $\alpha>3$ для области Ω неверно неравенство Пуанкаре, а при $\alpha\geqslant 3$ оператор вложения $W_2^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ не является вполне непрерывным.

В этом параграфе мы покажем, что при $\alpha\leqslant 3$ справедливо неравенство Пуанкаре, и, следовательно, задача Неймана, рассмотренная в п. 4.10.1, разрешима в $L_2^1(\Omega)$ при любой правой части из $L_2^1(\Omega)\ominus 1$ и что спектр этой задачи дискретен при $\alpha<3$.

Рассмотрим любую неотрицательную функцию u, равную нулю вне $Q_m\cup S_m$ (m — фиксированный положительный номер) и бесконечно дифференцируемую в $\overline{Q_m\cup S_m}$. Введем обозначения: $E_t=\{(x, y): u=t\}$, $H_t=\{(x, y): u<t\}$, $N_t=\{(x, y): u\geqslant t\}$. Если число $t\in(0, \infty)$ таково, что

$$s(E_t)\geqslant 2^{-(\alpha+1)m/2}, \tag{1}$$

то

$$m_2(N_t)\leqslant c2^{-(3-\alpha)m/2}s(E_t). \tag{2}$$

Множество уровней t, для которых выполнено (1), обозначим через $\mathfrak{P}$. Повторяя с непринципиальными изменениями рассуждения, проведенные в § 4.5, можно показать, что для $t\in C\mathfrak{P}$ имеет место один из следующих трех случаев:

$$\begin{cases} s(E_t) \geqslant 2^{-\alpha m}, & (3)\\ m_2(N_t) < c2^{-(1+\alpha)m}; & (4)\end{cases}$$

$$\begin{cases} s(E_t) \geqslant 2^{-\alpha m}, & (5)\\ m_2(H_t) < 2^{-(1+\alpha)m}; & (6)\end{cases}$$

$$\begin{cases} s(E_t) < 2^{-\alpha m}, & (7)\\ m_2(N_t) \leqslant c2^{-(3-\alpha)m/2} s(E_t). & (8)\end{cases}$$

Отсюда следует, что множество всех уровней t (с точностью до множества нулевой меры) можно представить в виде суммы $\mathfrak{R}' \cup \mathfrak{R}'' \cup \mathfrak{R}'''$, где $\mathfrak{R}'$ — множество t, для которых верно неравенство (8), $\mathfrak{R}''$ и $\mathfrak{R}'''$ — соответственно множества всех уровней, для которых выполнены неравенства (3), (4) и (5), (6).

Для функции $\psi(t) = \int_0^t \left(\int_{E_\tau} |\nabla u|\, ds\right)^{-1} d\tau$ имеем оценку $\psi(t) \leqslant$ $\leqslant -\int_0 (d/d\tau)\, m_2(N_\tau)\, (d\tau/[s(E_\tau)]^2)$ (см. лемму 4.1.3/2). Интеграл справа представим в виде суммы $\int_{\mathfrak{R}'} + \int_{\mathfrak{R}''} + \int_{\mathfrak{R}'''}$. Из неравенства (8) следует

$$\int_{\mathfrak{R}'} \leqslant -c2^{-(3-\alpha)m} \int_0^t [m_2(N_\tau)]^{-2} (d/d\tau)\, m_2(N_\tau)\, d\tau \leqslant c2^{-(3-\alpha)m}/m_2(N_t).$$

Используя (3) и (4), получаем $\int_{\mathfrak{R}''} \leqslant 2^{\alpha m} \sup\limits_{\tau \in \mathfrak{R}''} m_2(N_\tau) \leqslant 2^{(\alpha-1)m}$.

Аналогично в силу (5) и (6) $\int_{\mathfrak{R}'''} \leqslant 2^{2\alpha m} \sup\limits_{\in \mathfrak{R}'''} m_2(H_\tau) \leqslant 2^{(\alpha-1)m}$.

Следовательно,
$$\psi(t) \leqslant c\,(2^{(\alpha-1)m} + 2^{-(3-\alpha)m}/m_2(N_t)). \tag{9}$$

Так как $m_2(N_t) \leqslant 2^{-2m}$, то из (9) получаем

$$m_2(N_t)\,\psi(t) \leqslant c2^{-(3-\alpha)m}. \tag{10}$$

Поэтому

$$\iint_{Q_m \cup S_m} u^2\, dx\, dy = 2\int_0^\infty t t'_\psi m_2(N_{t(\psi)})\, d\psi \leqslant c2^{-(3-\alpha)m} \int_0^\infty t t'_\psi\, (d\psi/\psi).$$

Интеграл в правой части не превосходит

$$\left(\int_0^\infty t^2 \left(\frac{d\psi}{\psi^2}\right)\right)^{1/2} \left(\int_0^\infty (t'_\psi)^2\, d\psi\right)^{1/2} \leqslant 2\int_0^\infty (t'_\psi)^2\, d\psi =$$
$$= 2\iint_{Q_m \cup S_m} (\nabla u)^2\, dx\, dy.$$

Поэтому
$$\iint_{Q_m \cup S_m} u^2\, dx\, dy \leqslant c2^{-(3-\alpha)m} \iint_{Q_m \cup S_m} (\nabla u)^2\, dx\, dy. \tag{11}$$

Ясно, что это неравенство верно для любой функции $u \in L_2^1(\Omega)$, равной нулю вне $Q_m \cup S_m$, и что аналогичная оценка верна в случае отрицательных номеров m.

Пусть теперь v — произвольная функция из $L_2^1(\Omega)$ и пусть η — срезающая функция, равная нулю в Q, единице в Q_m и Q_{-m} и линейная в S_m и S_{-m} $(m=1, 2, \ldots)$. Тогда

$$\iint_\Omega v^2\,dx\,dy \leqslant \sum_{|m|\geqslant N}\left(\iint_{Q_m\cup S_m}(v\eta)^2\,dx\,dy+\iint_{m} v^2\,dx\,dy\right)+ \\ +\iint_{\Omega_N} v^2\,dx\,dy, \tag{12}$$

где $\Omega_N=\Omega\setminus\bigcup_{|m|\geqslant N}(Q_m\cup S_m)$ и N — произвольное положительное целое число. Из (11) получаем, что при $m>0$

$$\iint_{Q_m\cup S_m}(v\eta)^2\,dx\,dy\leqslant \\ \leqslant c2^{-(3-\alpha)m}\left[\iint_{Q_m\cup S_m}(\nabla v)^2\,dx\,dy+2^{2m}\iint_{S_m}v^2\,dx\,dy\right]. \tag{13}$$

Оценим второй интеграл в правой части. Легко проверить, что

$$\iint_{S_m}|v|\,dx\,dy\leqslant 2^{-m}\iint_{S_m}|\nabla v|\,dx\,dy+2^{-m}\int_{\partial S_m\cap\partial Q}|v|\,dx.$$

Отсюда

$$\iint_{S_m}v^2\,dx\,dy\leqslant {}^1/_2\iint_{S_m}v^2\,dx\,dy+ \\ +2^{-2m-1}\iint_{S_m}(\nabla v)^2\,dx\,dy+2^{-m}\int_{\partial S_m\cup\partial Q}v^2\,dx.$$

Так как $s(\partial S_m\cap\partial Q)=2^{-\alpha m}$, то в силу неравенства Гельдера

$$\iint_{S_m}v^2\,dx\,dy\leqslant c2^{-2m}\iint_{S_m}(\nabla v)^2\,dx\,dy+c2^{-2m}\|v\|^2_{L_{2\alpha/(\alpha-1)}(\partial S_m\cap\partial Q)}. \tag{14}$$

Поэтому из (13) получим

$$\iint_{Q_m\cup S_m}(v\eta)^2\,dx\,dy\leqslant \\ \leqslant c2^{-(3-\alpha)m}\left[\iint_{Q_m\cup S_m}(\nabla v)^2\,dx\,dy+\|v\|^2_{L_{2\alpha/(\alpha-1)}(\partial S_m\cap\partial Q)}\right]. \tag{15}$$

Используя (14), (15), из (12) выводим

$$\iint_\Omega v^2\,dx\,dy\leqslant c2^{-(3-\alpha)N}\sum_{|m|\geqslant N}\left[\iint_{Q_m\cup S_m}(\nabla v)^2\,dx\,dy+\right. \\ \left.+\|v\|^2_{L_{2\alpha/(\alpha-1)}(\partial S_m\cap\partial Q)}\right]+\iint_{\Omega_N}v^2\,dx\,dy.$$

В силу неравенства Гельдера

$$\sum_{|m|\geqslant N}\|v\|^2_{L_{2\alpha/(\alpha-1)}(\partial S_m\cap\partial Q)}\leqslant \\ \leqslant\sum_{|m|\geqslant N}2^{-(\alpha-1)|m|/2}\|v\|^2_{L_{4\alpha/(\alpha-1)}(\partial S_m\cap\partial Q)}\leqslant \\ \leqslant\left(\sum_{|m|\geqslant N}2^{-(\alpha-1)\alpha/(\alpha+1)|m|}\right)^{(\alpha+1)/2\alpha}\times \\ \times\left(\sum_{|m|\geqslant N}\int_{\partial S_m\cap\partial Q}|v|^{4\alpha/(\alpha-1)}\,dx\right)^{(\alpha-1)/2\alpha}\leqslant c\|v\|^2_{L_{4\alpha/(\alpha-1)}(\partial Q)}.$$

Итак,

$$\iint_\Omega v^2\,dx\,dy \leqslant c2^{-(3-\alpha)N} \iint_\Omega (\nabla v)^2\,dx\,dy + \\ + c\|v\|^2_{L_{4\alpha/(\alpha-1)}(\partial Q)} + c\|v\|^2_{L_2(\Omega_N)}. \tag{16}$$

Так как при любом $r \in (1, \infty)$

$$\|v\|_{L_r(\partial Q)} \leqslant c\left(\|\nabla v\|_{L_2(\Omega)} + \|v\|_{L_2(Q)}\right),$$

то из (16) получаем оценку

$$\|v\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c2^{-(3-\alpha)N/2}\|\nabla v\|_{L_2(\Omega)} + c\|v\|_{L_2(\Omega_N)}. \tag{17}$$

Граница области Ω_N принадлежит классу $C^{0,1}$, поэтому оператор вложения $W_2^1(\Omega_N)$ в $L_2(\Omega_N)$ вполне непрерывен. Отсюда и из (17) следует полная непрерывность оператора вложения $W_2^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ при $\alpha < 3$. Наконец, при $\alpha \leqslant 3$ из (17) получаем неравенство Пуанкаре:

$$\inf_{\gamma \in R^1}\|v-\gamma\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \\ \leqslant c\left(\|\nabla v\|_{L_2(\Omega)} + \inf_{\gamma \in R^1}\|v-\gamma\|_{L_2(\Omega_1)}\right) \leqslant c\|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}.$$

4.10.4. Контрпример к неравенству (4.10.2/4). Покажем, что из справедливости неравенства (4.10.2/4) при некотором $\varepsilon > 0$ не следует его справедливость при всех $\varepsilon > 0$.

Пусть Ω — область, рассмотренная в п. 4.10.3. Предположим, что ширина перешейков S_m и S_{-m} равна 2^{-3m}. Как было показано в п. 4.10.3, в этом случае $\Omega \in I_{2,1/2}$. Поэтому при некотором $\varepsilon > 0$ оценка (4.10.2/4) верна.

Рассмотрим последовательность функций $\{u_m\}_{m \geqslant 1}$, определенных равенствами $u_m = 0$ вне $Q_m \cup S_m$, $u_m(x, y) = 4^m(y-1)^2$ на S_m и $u_m(x, y) = 2^{m+1}(y-1) - 1$ в Q_m. Очевидно, что

$$\iint_\Omega |\nabla u_m|^2\,dx\,dy \leqslant 4(1+4^{-m}),$$

$$\iint_\Omega |\nabla_2 u_m|^2\,dx\,dy = 4, \quad \iint_\Omega u_m^2\,dx\,dy \geqslant 4^{-m}.$$

В силу неравенства (4.10.2/4), где $l=2$, имеем $2(1+4^{-m})^{1/2} \leqslant$ $\leqslant 2\varepsilon + k(\varepsilon)2^{-m}$, $m = 1, 2, \ldots$, что неверно при малых $\varepsilon > 0$.

§ 4.11. НЕРАВЕНСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ ИНТЕГРАЛЫ ПО ГРАНИЦЕ

4.11.1. Вложение $W^1_{p,r}(\Omega, \partial\Omega)$ в $L_q(\Omega)$. Содержание этого пункта примыкает к результатам § 3.6, где рассмотрен случай $p = 1$. Пространство $W^1_{p,r}(\Omega, \partial\Omega)$ и класс $K_{\alpha,\beta}$ определены в п. 3.6.1.

Из теоремы 3.6.3 можно получить следующее достаточное условие непрерывности вложения $W^1_{p,r}(\Omega, \partial\Omega)$ в $L_q(\Omega)$ при $p > 1$.

Теорема 1. *Если $\Omega \in K_{\alpha,\beta}$, где $\alpha \leqslant 1$, $p(1-\alpha) < 1$ и $\beta \geqslant \alpha$, то для всех $u \in W^1_{p,r}(\Omega, \partial\Omega)$ справедливо неравенство*

$$\|u\|_{L_q(\Omega)} \leqslant C\|u\|_{W^1_{p,r}(\Omega,\partial\Omega)}, \tag{1}$$

где $q = p/(1-p(1-\alpha))$, $r = p\alpha/\beta(1-p(1-\alpha))$.

Доказательство. По теореме 3.6.3 для всех $v \in C^\infty(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ с ограниченными носителями

$$\left(\int_\Omega |v|^{1/\alpha}dx\right)^\alpha \leqslant C\left(\|\nabla v\|_{L(\Omega)} + \left(\int_{\partial\Omega}|v|^{1/\beta}ds\right)^\beta\right).$$

Положим здесь $v = |u|^{q\alpha}$ и отметим, что в силу неравенства Гельдера

$$\int_\Omega |u|^{(p-1)/(1-p(1-\alpha))}|\nabla u|\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}\left(\int_\Omega |u|^{p/(1-p(1-\alpha))}dx\right)^{1-1/p}.$$

Тогда

$$\|u\|_{L_q(\Omega)} \leqslant C_1\left(\|\nabla u\|^{1/p\alpha-1/\alpha+1}_{L_p(\Omega)}\|u\|^{(p-1)/p\alpha}_{L_q(\Omega)} + \|u\|_{L_r(\partial\Omega)}\right),$$

что и доказывает (1).

Так как любое множество Ω принадлежит классу $K_{1-1/n,1}$, то справедливо следующее утверждение.

Следствие 1. *Каково бы ни было открытое множество Ω, для $u \in W^1_{p,p(n-1)/(n-p)}(\Omega, \partial\Omega)$ при $p < n$ имеет место неравенство*

$$\|u\|_{L_{pn/(n-p)}(\Omega)} \leqslant c\left(\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)} + \|u\|_{L_{p(n-1)/(n-p)}(\partial\Omega)}\right). \blacksquare \tag{2}$$

Заменяя в неравенстве (4.7.5/6) функцию u функцией $|u|^r$ и применяя неравенство Гельдера, получаем следующее утверждение.

Следствие 2. *Каково бы ни было открытое множество Ω конечного объема, справедливо следующее усиление неравенства Фридрихса:*

$$\|u\|_{L_q(\Omega)} \leqslant C\left(\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)} + \|u\|_{L_r(\partial\Omega)}\right), \tag{3}$$

где $(n-p)r \leqslant p(n-1)$, $r \geqslant 1$ и $q = rn/(n-1)$.

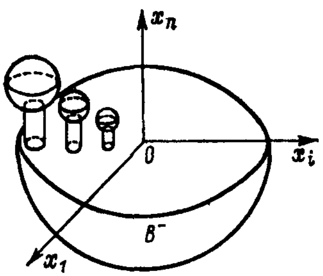

Рис. 20.

Покажем, что показатель $q = rn/(n-1)$ слева в (3) не может быть увеличен, если на множество Ω не наложены дополнительные требования.

Пример. Рассмотрим область Ω, представляющую собой объединение полушара $B^- = \{x: x_n < 0, |x| < 1\}$, последовательности шаров $\mathscr{B}_m$ ($m = 1, 2, \ldots$) и тонких трубок $\mathscr{C}_m$, соединяющих $\mathscr{B}_m$ и B^- (рис. 20). Пусть ρ_m — радиус шара $\mathscr{B}_m$, а h_m — высота $\mathscr{C}_m$. Обозначим через u_m кусочно-линейную функцию, равную единице в $\mathcal{B}_m$ и нулю вне $\mathcal{B}_m \cup \mathcal{C}_m$. Допустим, что существует такая константа Q, что для всех функций u_m справедливо неравенство

$$\| u_m \|_{L_q(\Omega)} \leqslant Q \left(\| \nabla u_m \|_{L_p(\Omega)} + \| u_m \|_{L_r(\partial\Omega)} \right).$$

Отсюда следует оценка

$$[m_n(\mathcal{B}_m)]^{1/q} \leqslant Q \left(h_m^{-1} [m_n(\mathcal{C}_m)]^{1/p} + [s(\partial\mathcal{B}_m \cup \partial\mathcal{C}_m)]^{1/r} \right).$$

Так как первое слагаемое в правой части можно делать сколь угодно малым, уменьшая толщину трубки $\mathcal{C}_m$, то $\rho_m^{n/q} = O\left(\rho_m^{(n-1)r}\right)$. Следовательно, $q \leqslant rn/(n-1)$.

Для того чтобы сформулировать необходимое и достаточное условие справедливости неравенства (1), нам потребуется некоторая разновидность p-проводимости.

Пусть K — проводник в Ω. Положим

$$\tilde{c}_p(K) = \inf \left\{ \int_\Omega | \nabla f |^p dx \colon f \in C^\infty(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}), \right.$$
$$\left. f \geqslant 1 \text{ на } F,\ f \leqslant 0 \text{ на } \Omega \setminus G \right\}. \tag{4}$$

Так же, как лемма 4.1.1/2, доказывается, что проводимость $\tilde{c}_p(K)$ может быть определена равенством

$$\tilde{c}_p(K) = \inf \left\{ \int_\Omega | \nabla f |^p dx \colon f \in C^\infty(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}),\ f = 1 \text{ на } F, \right.$$
$$\left. f = 0 \text{ на } \Omega \setminus G \right\}. \blacksquare \tag{5}$$

Теорема 2. *Необходимое и достаточное условие справедливости неравенства* (1) *при* $p > 1$, $q \geqslant p \geqslant r$ *имеет вид* $[m_n(F)]^{1/q} \leqslant \text{const}\,([\tilde{c}_p(K)]^{1/p} + [s(\partial_e G)]^{1/r})$, *где* K — *любой проводник* $G \setminus F$ *в* Ω.

Это утверждение доказывается аналогично теореме 2.3.7.

Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 4.8.2, получаем следующий критерий компактности.

Теорема 3. *Необходимым и достаточным условием полной непрерывности оператора вложения* $W^1_{p,r}(\Omega, \partial\Omega)$ *в* $L_q(\Omega)$, *где* $m_n(\Omega) < \infty$ *и* $q \geqslant p \geqslant r$, *является равенство*

$$\lim_{M \to 0} \sup \left\{ \frac{[m_n(F)]^{1/q}}{[\tilde{c}_p(K)]^{1/p} + [s(\partial_e G)]^{1/r}} \colon m_n(G) \leqslant M \right\} = 0. \tag{6}$$

Отсюда и из следствия 2 получаем следующее утверждение.

Следствие 3. *Пусть* $(n-p)r \leqslant p(n-1)$, $r \geqslant 1$. *Каково бы ни было открытое множество конечного объема, оператор вложения* $W^1_{p,r}(\Omega, \partial\Omega)$ *в* $L_q(\Omega)$ *вполне непрерывен, если* $q < rn/(n-1)$.

Пример этого раздела показывает, что существуют области конечного объема, для которых вложение $W^1_{p,r}(\Omega, \partial\Omega)$ в $L_{rn/(n-1)}(\Omega)$ некомпактно.

4.11.2. Классы $I_{p,\alpha}^{(n-1)}$ и $J_{\alpha}^{(n-1)}$.

Определение 1. Пусть $\tilde{W}_p^1(\Omega)$ — пополнение множества функций из $C^\infty(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})\cap W_p^1(\Omega)$ с ограниченными носителями по норме пространства $W_p^1(\Omega)$.

Определение 2. Будем говорить, что множество Ω принадлежит классу $I_{p,\alpha}^{(n-1)}$, $p\geqslant 1$, $\alpha\geqslant(n-p)/p(n-1)$, если существует такая постоянная $R>0$, что

$$\mathfrak{M}_{p,\alpha}(R)\overset{\text{def}}{=}\sup\left([s(\partial_i F)]^\alpha/[\tilde{c}_p(K)]^{1/p}\right)<\infty.$$

Здесь $\partial_e F=\partial F\cap\partial\Omega$ и супремум берется по множеству всех проводников $K=G\setminus F$ в Ω, таких, что $G=\Omega\cap B_R(x)$, $x\in\partial\Omega$.

Ограничение $\alpha\geqslant(n-p)/p(n-1)$ в этом определении объясняется тем, что при $\alpha<(n-p)/p(n-1)$ класс $I_{p,\alpha}^{(n-1)}$ содержит лишь множества Ω, границы которых имеют нулевую меру Хаусдорфа. Именно справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. *Если $\alpha<(n-p)/p(n-1)$, то либо $\mathfrak{M}_{p,\alpha}(R)\equiv\infty$, либо $s(\partial\Omega)=0$.*

Доказательство. Пусть $\Omega\in I_{p,\alpha}^{(n-1)}$, $s(\partial\Omega)>0$ и ε — достаточно малое число. Построим такое ε-покрытие $\partial\Omega$ открытыми шарами $B_{r_j}(x_j)$, что $\sum_j r_j^{n-1}\leqslant cs(\partial\Omega)$. Тогда $\sum_j r_j^{n-1}\leqslant$ $\leqslant c\sum_i s\left(B_{r_j}(x_j)\cap\partial\Omega\right)$ и, следовательно, хотя бы для одного шара

$$r_j^{n-1}\leqslant cs\left(B_{r_j}(x_j)\cap\partial\Omega\right). \tag{1}$$

Рассмотрим проводник $K_j=G_j\setminus F_j$, где $G_j=\Omega\cap B_{2r_j}(x_j)$ и $F_j=\Omega\cap\overline{B_{r_j}(x_j)}$. Так как $c_p(K_j)\leqslant p\text{-cap}\left(\overline{B_{r_j}(x_j)},\ B_{2r_j}(x_j)\right)=cr_j^{n-p}$ (см. п. 2.2.4), то из определения класса $I_{p,\alpha}^{(n-1)}$ и оценки (1) следует, что $r_j^{(n-1)p\alpha}\leqslant\text{const}\,r_j^{n-p}$. Замечая, что $r_j<\varepsilon$ и что ε можно взять сколь угодно малым, получаем неравенство $(n-1)p\alpha\geqslant$ $\geqslant n-p$. ∎

Определение 3. Множество Ω принадлежит классу $J_{\alpha}^{(n-1)}$, если существует такая константа $M\in(0,\ m_n(\Omega))$, что

$$\mathfrak{K}_\alpha(M)\overset{\text{def}}{=}\sup\left\{[s(\partial_e g)]^\alpha/s(\partial_i g):\ g\text{ — допустимое подмножество } \Omega,\ m_n(g)\leqslant M\right\}<\infty. \ ∎$$

Введем еще функцию

$$\mathfrak{P}_{p,\alpha}(M)=\sup\left([s(\partial_e F)]^\alpha/[\tilde{c}_p(K)]^{1/p}\right),$$

где супремум берется по множеству всех проводников $K=G\setminus F$ в Ω, таких, что $m_n(G)\leqslant M$.

Точно так же, как и предложение 4.6, доказывается следующее предложение.

Предложение 2. *Имеет место оценка*

$$\mathfrak{P}_{p,\gamma}(M) \leqslant c\,[\mathfrak{A}_{p,\beta}(M)]^{1-\gamma/\alpha}\,[\mathfrak{K}_\alpha(M)]^{\gamma/\alpha},$$

где $\gamma=\alpha\beta p/(p-1+p\beta)$ *и* $\mathfrak{A}_{p,\beta}$ — *функция из определения класса* $I_{p,\beta}$ (*см. п.* 4.3.1).

Отсюда следует, что

$$J_\alpha^{(n-1)} \cap I_{p,\beta} \subset I_{p,\gamma}^{(n-1)}. \tag{2}$$

4.11.3. Примеры областей из классов $I_{p,\alpha}^{(n-1)}$ и $J_\alpha^{(n-1)}$.

Пример 1. Пусть $x'=(x_1,\dots,x_{n-1})$ и $\Omega=\{x\colon -\infty<x_n<|x'|^{-\lambda},\ x'\in R^{n-1}\}$, где $0<\lambda<n-2$. Обозначим через g произвольное допустимое подмножество Ω, такое, что $s(\partial_i g)<1$. Имеем

$$s(\partial_e g)=\int_{\mathrm{Pr}\,(\partial_e g)} (1+\lambda^2|x'|^{-2(\lambda+1)})^{1/2}\,dx',$$

где Pr — проекция на плоскость $x_n=0$. Очевидно, что из всех подмножеств $\mathscr{E}$ плоскости $x_n=0$ с фиксированной $(n-1)$-мерной мерой наибольшее значение интегралу $\int_{\mathscr{E}}(1+\lambda^2|x'|^{-2(\lambda+1)})^{1/2}\,dx'$ сообщает $(n-1)$-мерный шар с центром в начале координат. Поэтому $s(\partial_e g)\leqslant c\int_0^\rho r^{n-2}(1+\lambda^2 r^{-2(\lambda+1)})^{1/2}\,dr$, где $\rho=[v_{n-1}^{-1}\times \times s(\mathrm{Pr}\,(\partial_e g))]^{1/(n-1)}$. Отсюда получаем $s(\partial_e g)\leqslant cs(\mathrm{Pr}\,(\partial_e g))^{(n-2-\lambda)/(n-1)}$. Но так как $s(\mathrm{Pr}\,(\partial_e g))\leqslant s(\partial_i g)$, то $[s(\partial_e g)]^{(n-1)/(n-2-\lambda)}\leqslant cs(\partial_i g)$.

Как показано в примере 4.3.5/2, область Ω принадлежит классу $I_{p,\beta}$, где $\beta=(n-1+(p-1)\lambda)/(n-1-\lambda)p$. Поэтому, используя (4.11.2/2), получаем, что $\Omega\in I_{p,\gamma}^{(n-1)}$, где $\gamma=(n-1+ +(p-1)\lambda)/p(n-2-\lambda)$.

Точность этого значения γ проверяется на последовательности проводников $K_m=G_m\setminus F_m$, где $G_m=\{x\in\Omega\colon 0<x_n<2m^{-1}\}$, $F_m= =\{x\in\Omega,\ 0<x_n\leqslant m^{-1}\}$ (ср. с примером 4.6).

Пример 2. Такое же рассуждение показывает, что множество $\Omega=\{x\colon |x'|<x_n^\lambda,\ 0<x_n<\infty\}$, где $\lambda\geqslant 1$, принадлежит классу $J_{\lambda(n-1)/(\lambda(n-2)+1)}^{(n-1)}$, и так как согласно примеру 4.3.5/1 $\Omega\in I_{p,\beta}$, где $\beta=(\lambda(n-1)+1-p)/p(\lambda(n-1)+1)$, то из (4.11.2/2) следует, что $\Omega\in I_{p,\gamma}^{(n-1)}$, где $\gamma=(\lambda(n-1)+1-p)/p(\lambda(n-2)+1)$.

4.11.4. Оценки нормы в $L_q(\partial\Omega)$.

Теорема 1. *Пусть* $s(\partial\Omega)<\infty$. *Тогда*:

1) *если* $\Omega\in I_{p,\alpha}^{(n-1)}$, $\alpha p\leqslant 1$, *то для всех функций* $u\in C^\infty(\Omega)\cap \cap C(\bar\Omega)$ *с ограниченными носителями справедливо неравенство*

$$\|u\|_{L_q(\partial\Omega)}\leqslant C\,\|u\|_{W_p^1(\Omega)}, \tag{1}$$

где $q=\alpha^{-1}$ *и* C — *постоянная, не зависящая от* u;

2) *если для всех функций* u *из того же множества выполнено неравенство* (1), *где* $1/q\geqslant(n-p)/p(n-1)$, *то* $\Omega\in I_{p,1/q}^{(n-1)}$.

Доказательство. 1) Построим покрытие $\partial\Omega$ одинаковыми открытыми шарами $B_R(x_i)$ с центрами $x_i \in \partial\Omega$, имеющее конечную кратность, зависящую только от n. Пусть $\{\eta_i\}$ — подчиненное этому покрытию разбиение единицы, такое, что $|\nabla\eta_i| \leqslant cR^{-1}$.

Повторяя с очевидными изменениями доказательство теоремы 2.3.2, получаем

$$\|u\eta_i\|^q_{L_q(\partial\Omega)} \leqslant c \sup_{F\subset\Omega\cap B_R(x_i)} \frac{s(\partial_e F)}{[\tilde{c}_p(G\setminus F)]^{q/p}} \|\nabla(u\eta_i)\|^q_{L_p(\Omega)},$$

где $G=\Omega\cap B_R(x_i)$. Суммируя, приходим к оценке

$$\|u\|_{L_q(\partial\Omega)} \leqslant c\mathfrak{M}_{p,1/q}(R)\left(\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)} + R^{-1}\|u\|_{L_p(\Omega)}\right). \tag{2}$$

2) Покажем, что при некотором достаточно малом $M>0$ величина $\mathfrak{P}_{p,1/q}(M)$ ограничена.

Рассмотрим произвольный проводник $K=G\setminus F$ в Ω, удовлетворяющий условию $m_n(G)\leqslant M$, где M — константа, которая будет выбрана в конце доказательства.

Подставим в (1) любую функцию f из класса, указанного в формуле (4.11.1/5). Тогда

$$\|f\|_{L_q(\partial\Omega)} \leqslant C\left(\|\nabla f\|_{L_p(\Omega)} + \|f\|_{L_p(\Omega)}\right) \leqslant$$
$$\leqslant C\left(\|\nabla f\|_{L_p(\Omega)} + M^{1/p-(n-1)/nq}\|f\|_{L_{qn/(n-1)}(\Omega)}\right). \tag{3}$$

Согласно следствию 4.11.1/1

$$\|f\|_{L_{qn/(n-1)}(\Omega)} \leqslant C\left(\|\nabla f\|_{L_p(\Omega)} + \|f\|_{L_q(\partial\Omega)}\right). \tag{4}$$

Из неравенств (3) и (4) следует

$$\|f\|_{L_q(\partial\Omega)} \leqslant C\left(\|\nabla f\|_{L_p(\Omega)} + M^{1/p-(n-1)/nq}\|f\|_{L_q(\partial\Omega)}\right).$$

Если постоянная M с самого начала выбрана столь малой, что $2CM^{1/p-(n-1)/nq}<1$, то $\|f\|_{L_q(\partial\Omega)} \leqslant 2C\|\nabla f\|_{L_p(\Omega)}$. Минимизируя правую часть, получаем $[s(\partial_e F)]^{1/q} \leqslant 2C[\tilde{c}_p(K)]^{1/p}$. ■

Из доказательства теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Следствие. Если $s(\partial\Omega)<\infty$ и $p\alpha\leqslant 1$, то класс $I^{(n-1)}_{p,\alpha}$ может быть определен условием: величина $\mathfrak{P}_{p,\alpha}(M)$ конечна при некотором $M>0$.

Теорема 2. *Пусть $s(\partial\Omega)<\infty$ и $m_n(\Omega)<\infty$. Тогда:*

1) если $\Omega\in I^{(n-1)}_{p,\alpha}$, $p\alpha<1$, то для всех функций $u\in C^\infty(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$ с ограниченными носителями справедливо неравенство

$$\|u\|_{L_q(\partial\Omega)} \leqslant C\|u\|_{W^1_{p,p}(\Omega,\partial\Omega)}, \tag{5}$$

где $q=\alpha^{-1}$ и C — постоянная, не зависящая от u;

2) *если для всех функций и из того же класса выполнено неравенство* (5), *где* $q>p$, *то* $\Omega\in I_{p,\alpha}^{(n-1)}$, $\alpha=q^{-1}$.

Первая часть теоремы следует из (4.11.1/3) и теоремы 1, а вторая часть доказывается аналогично второй части теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть* Ω — *область*, $s(\partial\Omega)<\infty$, $m_n(\Omega)<\infty$ *и* $q\geqslant p$. *Тогда для справедливости неравенства*

$$\inf_{c\in R^1}\|u-c\|_{L_q(\partial\Omega)}\leqslant C\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}, \tag{6}$$

где $q\geqslant p$ *и* u — *любая функция из* $C^\infty(\Omega)\cap C(\bar\Omega)$ *с ограниченным носителем, необходимо и достаточно, чтобы область* Ω *принадлежала классу* $I_{p,1/q}^{(n-1)}$.

Доказательство. Достаточность. Пусть $K=G\setminus F$, $m_n(G)\leqslant M$. В силу теоремы 4.11.1/2 и следствия 4.11.1/3 $m_n(F)\leqslant$ $\leqslant\operatorname{const}(\tilde c_p(K)+s(\partial_e G))$. Отсюда и из следствия этого пункта получаем оценку $m_n(F)\leqslant\operatorname{const}\tilde c_p(K)$. Иначе говоря, область Ω принадлежит классу $I_{p,1/p}$. По теореме 4.4.3/2 и лемме 3.2.3/1 для всех $u\in L_p^1(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\inf_{c\in R^1}\|u-c\|_{L_p(\Omega)}\leqslant C\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}.$$

Остается сослаться на теорему 1.

Необходимость. Подставляя в (6) любую функцию f из класса, указанного в формуле (4.11.1/5), получаем

$$\min_{c\in R^1}(|1-c|^q s(\partial_e F)+|c|^q s(\partial\Omega\setminus\partial_e G))\leqslant C^q[\tilde c_p(K)]^{q/p}.$$

Отсюда следует оценка

$$\frac{s(\partial_e F)\,s(\partial\Omega\setminus\partial_e G)}{\{[s(\partial_e F)]^{1/(q-1)}+[s(\partial\Omega\setminus\partial_e G)]^{1/(q-1)}\}^{q-1}}\leqslant C^q[\tilde c_p(K)]^{q/p}.$$

Поэтому если $2s(\partial_e G)\leqslant s(\partial\Omega)$, то $s(\partial_e F)\leqslant 2^{q-1}C^q[\tilde c_p(K)]^{q/p}$. Остается взять в качестве множества G любой шар с достаточно малым радиусом и центром на $\partial\Omega$. ■

4.11.5. Класс $\overset{\circ}{I}{}_{p,\alpha}^{(n-1)}$ и теоремы о компактности.

Определение. Множество Ω принадлежит классу $\overset{\circ}{I}{}_{p,\alpha}^{(n-1)}$, если

$$\lim_{R\to 0}\mathfrak{M}_{p,\alpha}(R)=0. \ ■$$

В доказательстве предложения 4.11.2/1 показано, что если $s(\partial\Omega)>0$ и класс $\overset{\circ}{I}{}_{p,\alpha}^{(n-1)}$ не пуст, то $\alpha>(n-p)/p(n-1)$.

Пример. Рассмотрим области: $\Omega_1=\{x\colon 1<x_n<|x_1|^{-\lambda},\ |x'|<1\}$, где $0<\lambda<n-2$, и $\Omega_2=\{x\colon |x'|<x_n^\lambda,\ 0<x_n<1\}$, где $\lambda\geqslant 1$.

В примерах 4.11.3/1 и 4.11.3/2 было показано, по существу, что $\Omega_1\in I_{p,\gamma_1}^{(n-1)}$ и $\Omega_2\in I_{p,\gamma_2}^{(n-1)}$, где $\gamma_1=(n-1+(p-1)\lambda)/(n-2-\lambda)p$ и $\gamma_2=(\lambda(n-1)+1-p)/(\lambda(n-2)+1)p$, а также, что $\Omega \overline{\in} \mathring{I}_{p,\gamma_i}$. Следовательно, $\Omega_i\in\mathring{I}_{p,\alpha_i}$ $(i=1, 2)$ в том и только в том случае, если $\alpha_i>\gamma_i$.

Теорема 1. *Пусть $s(\partial\Omega)<\infty$ и $m_n(\Omega)<\infty$. Множество функций из $C^\infty(\Omega)\cap C(\Omega)$ с ограниченными носителями, расположенное в единичном шаре пространства $W_p^1(\Omega)$, относительно компактно в $L_q(\partial\Omega)$, $q\geqslant p$, в том и только в том случае, если $\Omega\in\mathring{I}_{p,1/q}^{(n-1)}$.*

Доказательство. Достаточность. Пусть $\Omega\in\mathring{I}_{p,1/q}^{(n-1)}$, $q\geqslant p$. Если $\|u\|_{W_p^1(\Omega)}\leqslant 1$, то по теореме 4.11.4/1

$$\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}+\|u\|_{L_p(\partial\Omega)}\leqslant \text{const}.$$

Согласно следствию 4.11.1/3 оператор вложения $W_{p,p}^1(\Omega,\partial\Omega)$ в $L_p(\Omega)$ вполне непрерывен, и единичный шар в $W_p^1(\Omega)$ — компактное подмножество пространства $L_p(\Omega)$.

Каково бы ни было положительное число ε, можно найти такое R, что $\mathfrak{M}_{p,1/q}(R)<\varepsilon$, и поэтому в силу (4.11.4/2) для всех $u\in C^\infty(\Omega)\cap C(\bar\Omega)$ с ограниченными носителями

$$\|u\|_{L_q(\partial\Omega)}\leqslant\varepsilon\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}+C(\varepsilon)\|u\|_{L_p(\Omega)}.$$

Теперь стандартное рассуждение приводит к цели.

Необходимость. Пусть Θ — множество функций, определенное в условии теоремы. Так как следы функций из Θ на $\partial\Omega$ образуют компактное подмножество $L_q(\partial\Omega)$, то по любому $\varepsilon>0$ найдется такое R, что для всех $u\in\Theta$ и всех шаров $B_R(x)$ справедливо неравенство $\left(\int_{B_R(x)\cap\partial\Omega}|u|^q ds\right)^{1/q}\leqslant\varepsilon$. Пусть u — любая функция из $C^\infty(\Omega)\cap C(\bar\Omega)$ с носителем в $B_R(x)$. Тогда

$$\|u\|_{L_q(B_R(x)\cap\partial\Omega)}\leqslant\varepsilon\left(\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}+\|u\|_{L_p(\Omega)}\right),$$

и так как по следствию 4.11.1/2

$$\|u\|_{L_p(\Omega)}\leqslant C\left(\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}+\|u\|_{L_p(\partial\Omega)}\right),$$

то

$$\left(\int_{B_R(x)\cap\partial\Omega}|u|^q ds\right)^{1/q}\leqslant\varepsilon C\left(\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}+\left(\int_{B_R(x)\cap\partial\Omega}|u|^p ds\right)^{1/p}\right).$$

Значит, если число ε достаточно мало, то

$$\left(\int_{B_R(x)\cap\partial\Omega}|u|^q ds\right)^{1/q}\leqslant 2\varepsilon C\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}.$$

Пусть K — проводник $(B_R(x)\cap\Omega)\setminus F$. Подставляя в последнее неравенство любую функцию f из класса, указанного в формуле (4.11.1/5), получаем оценку $[s(\partial_e F)]^{1/q}\leqslant 2\varepsilon C[\tilde{c}_p(K)]^{1/p}$. ■

Доказывая теорему 1, мы установили также следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $s(\partial\Omega)<\infty$ *и* $m_n(\Omega)<\infty$. *Множество функций из* $C^\infty(\Omega)\cap C(\Omega)$ *с ограниченными носителями, расположенное в единичном шаре пространства* $W^1_{p,\,p}(\Omega,\ \partial\Omega)$, *относительно компактно в* $L_q(\partial\Omega)$, $q\geqslant p$, *в том и только в том случае, если* $\Omega\in I^{(n-1)}_{p,\,1/q}$.

4.11.6. Приложения к краевым задачам для эллиптического уравнения второго порядка. В п. 4.10.1 найдены необходимые и достаточные условия разрешимости в энергетическом пространстве и дискретности спектра задачи Неймана с однородным краевым условием для равномерно эллиптического уравнения второго порядка. Теоремы настоящего параграфа позволяют получить аналогичные результаты и для задачи

$$\begin{aligned} &Lu\equiv-(\partial/\partial x_i)(a_{ij}\,\partial u/\partial x_j)+au=f \ \text{ в } \Omega,\\ &Mu\equiv a_{ij}(\partial u/\partial x_i)\cos(\nu,\ x_j)+bu=\varphi \ \text{ на } \partial\Omega,\end{aligned}\tag{1}$$

где ν — внешняя нормаль к $\partial\Omega$. Здесь a и b — вещественные функции, $a\in L_\infty(\Omega)$, $b\in L_\infty(\partial\Omega)$, $a_{ij}=a_{ji}$.

Будем всюду предполагать, что $s(\partial\Omega)<\infty$ и $m_n(\Omega)<\infty$. Относительно функций a и b допустим, что каждая из них либо отделена от нуля и положительна, либо тождественно равна нулю. Сначала предположим, что $f\in L(\Omega)$ и $\varphi\in L(\partial\Omega)$.

Точная постановка задачи такова. Требуется найти функцию из класса $W^1_2(\Omega,\ \partial\Omega)$, такую, что

$$\int_\Omega\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}+auv\right)dx+\int_{\partial\Omega}buv\,ds=\int_\Omega fv\,dx+\int_{\partial\Omega}\varphi v\,ds,\tag{2}$$

где v — любая функция из $C(\Omega)\cap W^1_2(\Omega,\ \partial\Omega)$ с ограниченным носителем.

Эта постановка корректна, так как из определения пространства $W^1_2(\Omega,\ \partial\Omega)$ и неравенства (4.11.1/3) следует, что интеграл — в левой части тождества (4.11.1/5) сходится.

Случай $b=0$, $\varphi=0$ был исследован в 4.10.1. Те же рассуждения, что и в 4.10.1, вместе с теоремами 4.11.1/1 — 4.11.1/3, 4.11.4/1 — 4.11.4/3, 4.11.5/1, 4.11.5/2 приводят к следующим утверждениям.

Теорема. 1) *Если* $a=0$, $b=0$, $f=0$, *то задача* (1) *разрешима при всех* $\varphi\in L_{q'}(\partial\Omega)$, $q'=q/(q-1)\leqslant 2$, *ортогональных единице на* $\partial\Omega$, *в том и только в том случае, если* Ω — *область из класса* $I^{(n-1)}_{2,\,1/q}$.

2) *Если* $\inf a > 0$, $b = 0$, $f = 0$, *то задача* (1) *разрешима при всех* $\varphi \in L_{q'}(\partial\Omega)$, $q' \leqslant 2$, *в том и только в том случае, если* $\Omega \in I^{(n-1)}_{2, 1/q}$.

3) *Если* $a = 0$, $\inf b > 0$, $f = 0$, *то задача* (1) *разрешима при всех* $\varphi \in L_2(\partial\Omega)$, *каково бы ни было множество* Ω. *При тех же предположениях о функциях* a, b, f *необходимым и достаточным условием разрешимости задачи* (1) *при всех* $\varphi \in L_{q'}(\partial\Omega)$, $q' < 2$, *является включение* $\Omega \in I^{(n-1)}_{2, 1/q}$.

В указанных трех случаях решение задачи (1) *принадлежит пространству* $W^1_{2,q}(\Omega\,\partial\Omega)$.

4) *Пусть* $\varphi = 0$, $\inf b > 0$. *Тогда задача* (1) *разрешима при всех* $f \in L_{q'}(\Omega)$, $q' \geqslant 2n/(n+1)$, *каково бы ни было множество* Ω. *Необходимым и достаточным для разрешимости этой задачи при всех* $f \in L_{q'}(\Omega)$, $q' < 2n/(n+1)$ *является условие теоремы* 4.11.1/2, *где* $p = r = 2$.

Теорема 2. 1) *В предположениях* 1)—3) *предыдущей теоремы для полной непрерывности обратного оператора задачи* (1): $L_q(\partial\Omega) \to W^1_{2,2}(\Omega, \partial\Omega)$, $q \leqslant 2$, *необходимо и достаточно, чтобы множество* Ω *принадлежало классу* $\mathring{I}^{(n-1)}_{2, q^{-1}}$.

2) *При условии* 4) *теоремы* 1 *обратный оператор задачи* (1): $L_q(\Omega) \to W^1_{2,2}(\Omega, \partial\Omega)$ *вполне непрерывен для любого множества* Ω, *если* $q' > 2n/(n+1)$. *Необходимым и достаточным условием полной непрерывности этого оператора при* $q' < 2n/(n+1)$ *является условие теоремы* 4.11.1/3, *в котором* $p = r = 2$.

В случае $q = 2$ теорема 2 дает необходимые и достаточные условия дискретности спектра задач:

$$Lu = 0 \ \text{ в } \Omega, \quad Mu = \lambda u \ \text{ на } \partial\Omega,$$
$$Lu = \lambda u \ \text{ в } \Omega, \quad Mu = 0 \ \text{ на } \partial\Omega.$$

Простым упражнением является распространение результатов этого пункта на случай смешанной краевой задачи:

$$Lu = f \ \text{на } \Omega \setminus E, \quad Mu = \varphi \ \text{на } \partial\Omega \setminus E, \quad u = 0 \ \text{на } E,$$

где E — подмножество Ω.

§ 4.12. КОММЕНТАРИИ К ГЛАВЕ 4

§ 4.1. Проводимость (т. е. 2-проводимость) изучалась Полиа и Сеге [108]. К теоремам вложения понятие проводимости было применено автором [61]. Изложение следует в работе автора [76]. Относительно содержания раздела 4.1.3 см. комментарии к § 2.2. Следствие 4.1.3/2 на эвристическом уровне при $p = 2$ получено Полиа и Сеге [108]. Лемма 4.1.3/3 доказана автором [76].

§ 4.2 — 4.4. Содержание этих параграфов, за исключением разделов 4.4.5 и 4.4.7, взято из работы автора [78].

§ 4.5. Результат этого параграфа при $p=2$ получен автором [68].

§ 4.6 опубликован в книге автора [213, ч. 2].

§ 4.7. Часть этого параграфа (4.7.1 — 4.7.4, кроме предложения 4.7.1/1) опубликована в статье автора [78]. Предложение 4.7.1/1 и содержание раздела 4.7.5 взято из книги [213, ч. 2]. В связи с предложением 4.7.1/1 отметим работу Р. Андерссона [145], где, в частности, для областей бесконечного объема доказана невозможность вложения $L_p^1(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$ при $1/p \neq 1/q + 1/n$.

§ 4.8, 4.9 являются частью статьи автора [78].

§ 4.10 частично содержится в работе автора [68], разделы 4.10.2, 4.10.4 и 4.10.5 опубликованы в книге [213, ч. 2]. Эквивалентность неравенства Пуанкаре и разрешимости задачи Неймана хорошо известна. То же относится к связи условий дискретности спектра и теорем о компактности (см. Ж. Дени и Ж.-Л. Лионс [167], Ж.-Л. Лионс и Э. Мадженес [58], Й. Нечас [228] и др.).

§ 4.11 взят из книги [213, ч. 2].

Имеется ряд работ, в которых для специальных классов областей (не удовлетворяющих условию конуса или неограниченных) доказаны теоремы о непрерывности или полной непрерывности оператора вложения $W_p^l(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$, или изучаются условия, необходимые для этих свойств (Ж.-Л. Лионс [210], К. Бьеруп [154], Г. Стампаккья [246], И. В. Глобенко [21], С. Кампанато [158], Р. Андерссон [145, 146], А. Херд [201], Р. А. Адамс [143]). Аналогичные вопросы для «анизотропного» пространства $W_p^l(\Omega)$ рассмотрены в книге О. В. Бесова, В. П. Ильина, С. М. Никольского [6, § 12, гл. 3].

Отметим еще посвященные исследованию различных классов областей, связанных с теоремами вложения, статьи Л. Френкеля [179], К. Эймика [144], Д. Эдмундса [169]. В упомянутой работе Эймика изучается, в частности, разложение пространства $[L_2(\Omega)]^N$ на два ортогональных подпространства, состоящих из соленоидальных векторных полей и градиентов функций из $W_2^1(\Omega)$, которое играет важную роль в математической теории вязкой жидкости (О. А. Ладыженская [47]). Если Ω — ограниченная область, то согласно теореме К. Эймика [144] это разложение возможно в том и только в том случае, если пространства $W_2^1(\Omega)$ и $L_2^1(\Omega)$ совпадают. По теореме 4.4.3/2 настоящей книги последнее равносильно включению $\Omega \in I_{2,1/2}$.

Глава 5

О НЕПРЕРЫВНОСТИ И ОГРАНИЧЕННОСТИ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВ С. Л. СОБОЛЕВА

Если n-мерная область удовлетворяет «условию конуса», то по теореме Соболева любая функция u из пространства $W_p^l(\Omega)$ при $pl>n$ совпадает почти всюду с непрерывной в Ω функцией и удовлетворяет неравенству $\|u\|_{L_\infty(\Omega)}\leqslant C\|u\|_{W_p^l(\Omega)}$, где C — постоянная, не зависящая от u.

Простой пример плоской области $\Omega=\{x\colon 0<x_1<1,\ 0<x_2<x_1^\nu\}$, $\nu>1$, и функции $u(x)=x_1^\mu$, $\mu>0$, заданной в Ω, показывает, что условие конуса существенно для справедливости этой теоремы. Естественно ожидать, что для функций, заданных на множестве с «плохой» границей, иногда должно выполняться вложение $W_p^l(\Omega)$ в $L_\infty(\Omega)\cap C(\Omega)$ при более жестких, чем в теореме Соболева, предположениях о p и l.

В этой главе изучаются классы областей Ω, для которых оператор вложения пространства $W_p^l(\Omega)$ в пространство $L_\infty(\Omega)\cap C(\Omega)$ ограничен или вполне непрерывен. Некоторые из доказываемых здесь теорем имеют характер необходимых и достаточных условий и формулируются в терминах p-проводимости. Другие результаты представляют собой более легко проверяемые достаточные условия справедливости теорем вложения $W_p^l(\Omega)$ в $L_\infty(\Omega)\cap C(\Omega)$. Приводятся примеры, иллюстрирующие свойства «плохих» областей.

Большая часть результатов этой главы была анонсирована автором в [61] и подробно изложена в [76].

§ 5.1. О ВЛОЖЕНИИ $W_p^1(\Omega)$ В $C(\Omega)\cap L_\infty(\Omega)$

5.1.1. Критерии непрерывности операторов вложения $W_p^1(\Omega)$ и $L_p^1(\Omega)$ в $C(\Omega)\cap L_\infty(\Omega)$. Пусть y — любая точка области Ω и $\rho>0$. В этом и двух следующих разделах будем рассматривать только проводники вида $\Omega_\rho(y)\setminus y$. Введем на $(0, +\infty)$ функцию

$$\gamma_p(\rho)=\inf_{y\in\Omega} c_p(\Omega_\rho(y)\setminus y),\qquad p>n. \blacksquare \tag{1}$$

Очевидно, что γ_p не возрастает и равна нулю при $\rho>\operatorname{diam}(\Omega)$.

Условие $p>n$ в определении γ_p вызвано тем, что в силу (2.2.4/1), (2.2.4/2) инфимум в правой части (1) равен нулю при $p\leqslant n$.

Замечая, что функция $u(x)=(1-\rho^{-1}|x-y|)_+$ принадлежит классу $U_\Omega(\Omega_\rho(y)\setminus y)$, получаем оценку $\gamma_\rho(\rho)\leqslant c\rho^{n-p}$.

Теорема 1. *Оператор вложения* $W_p^1(\Omega)$ *в* $C(\Omega)\cap L_\infty(\Omega)$ *ограничен в том и только в том случае, если* $\gamma_p(\rho)\not\equiv 0$.

Доказательство. Достаточность. Пусть u — любая функция из $C^\infty(\Omega)\cap W_p^1(\Omega)$ и y — такая точка Ω, что $u(y)\neq 0$. Обозначим через R такое число, что $\gamma_p(R)>0$, и через ρ — произвольное число из промежутка $(0, R]$. Пусть еще $v(x)=\eta((x-y)/\rho)\,u(x)/u(y)$, где $\eta\in C_0^\infty(B_1)$. Так как $v(y)=1$ и $v(x)=0$ вне $\Omega_\rho(y)$, то $c_p(\Omega_\rho(y)\setminus y)\leqslant\int_\Omega|\nabla v|^p\,dx$ и, следовательно,

$$|u(y)|^p c_p(\Omega_\rho(y)\setminus y)\leqslant c\left(\int_{\Omega_\rho(y)}|\nabla u|^p\,dx+\rho^{-p}\int_{\Omega_\rho(y)}|u|^p\,dx\right), \qquad (2)$$

что доказывает достаточность условия $\gamma_p\not\equiv 0$.

Необходимость. Пусть для всех $u\in W_p^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)}\leqslant C\|u\|_{W_p^1(\Omega)}. \qquad (3)$$

Если в (3) подставить любую функцию $u\in T_\Omega(\Omega_\rho(y)\setminus y)$, то получим оценку $1\leqslant C(\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}+v_n^{1/p}\rho^{n/p})$. Если ρ — достаточно малое число, то отсюда следует $(2C)^{-p}\leqslant\int_\Omega|\nabla u|^p\,dx$. Минимизируя последний интеграл по множеству $T_\Omega(\Omega_\rho(y)\setminus y)$, получаем $c_p(\Omega_\rho(y)\setminus y)\geqslant(2C)^{-p}$. ■

Утверждение, аналогичное теореме 1, имеет место и для пространства $L_p^1(\Omega)$.

Теорема 2. *Пусть* $m_n(\Omega)<\infty$. *Оператор вложения пространства* $L_p^1(\Omega)$ *в* $C(\Omega)\cap L_\infty(\Omega)$ *ограничен в том и только в том случае, если* $\gamma_p\not\equiv 0$.

В доказательстве нуждается только достаточность условия $\gamma_p\not\equiv 0$. В силу леммы 3.1.2/2 достаточно доказать неравенство

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)}\leqslant C\|u\|_{L_p^1(\Omega)} \qquad (4)$$

только для ограниченных функций из $L_p^1(\Omega)$. Обозначим через ω открытое множество, $\bar\omega\subset\Omega$. Из оценки (3) следует

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)}\leqslant C\left(\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}+\|u\|_{L_\infty(\Omega)}(m_n(\Omega\setminus\omega))^{1/p}\right).$$

Выбирая ω так, чтобы выполнялось неравенство $2C(m_n(\Omega\setminus\omega))^{1/p}<1$, получаем (4). ■

Замечание. 1. Обозначим через $\tilde L_p^l(\Omega)$ и $\tilde W_p^l(\Omega)$ пополнения пространств $C^\infty(\Omega)\cap C(\bar\Omega)\cap L_p^1(\Omega)$ и $C^\infty(\Omega)\cap C(\bar\Omega)\cap W_p^l(\Omega)$ по нормам $L_p^l(\Omega)$ и $W_p^l(\Omega)$.

Если в теоремах 1 и 2 заменить $\gamma_p(\rho)$ на функцию $\tilde\gamma_p(\rho)=\inf_{y\in\Omega}\tilde c_p(\Omega_\rho(y)\setminus y)$, где $\tilde c_p$ — p-проводимость, определенная равенством (4.11.1/5), то получим аналогичные утверждения для пространств $\tilde{W}_p^1(\Omega)$ и $\tilde{L}_p^1(\Omega)$.

В следующей теореме даны двусторонние оценки констант в неравенстве (5).

Обозначим через $\sigma_p(\mu)$ точную нижнюю границу $c_p(K)$ на множестве проводников $K=G\setminus F$ в Ω, подчиненных условию $m_n(G)\leqslant M$. ■

Так как $c_p(K)$ — неубывающая функция множества F, то в этом определении можно считать, что F — точка.

Теорема 3. 1) *Если $\sigma_p(\mu)\neq 0$ при некотором $\mu<m_n(\Omega)$, то для всех функций $u\in L_p^1(\Omega)\cap L_q(\Omega)$ справедливо неравенство*

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)}\leqslant k_1\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}+k_2\|u\|_{L_q(\Omega)},\tag{5}$$

где $k_1\leqslant[\sigma_p(\mu)]^{-1/p}$, $k_2\leqslant\mu^{-1/q}$.

2) *Обратно, если для любой функции $u\in L_p^1(\Omega)\cap L_q(\Omega)$ справедливо неравенство* (5), *то $\sigma_p(\mu)\geqslant(2k_1)^{-p}$ при $\mu=(2k_2)^{-q}$.*

Доказательство. 1) Достаточно доказать неравенство (5) для функций из $C^\infty(\Omega)\cap L_p^1(\Omega)\cap L_q(\Omega)$. Выберем такое положительное число t, что $m_n(\{x\colon |u(x)|>t\})\leqslant\mu$ и $m_n(\{x\colon |u(x)|\geqslant t\})\geqslant\mu$. Пусть $T>t$ и $\{x\colon |u(x)|\geqslant T\}\neq\varnothing$. В силу определения p-проводимости для проводника $K_{t,T}=\{x\colon |u(x)|>t\}\setminus\{x\colon |u(x)|\geqslant T\}$ имеем

$$(T-t)^p c_p(K_{t,T})\leqslant\int_\Omega|\nabla|u||^p dx=\int_\Omega|\nabla u|^p dx.$$

Следовательно, $(T-t)^p\sigma_p(\mu)\leqslant\int_\Omega|\nabla u|^p dx$. Отсюда

$$T\leqslant[\sigma_p(\mu)]^{-1/p}\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}+\mu^{-1/q}\|u\|_{L_q(\{x\colon |u(x)|\geqslant t\})},$$

что и доказывает (5).

2) Пусть выполнено неравенство (5). Положим $\mu=(2k_2)^{-q}$ и рассмотрим произвольный проводник $K=G\setminus F$, удовлетворяющий условию $m_n(G)\leqslant\mu$. Пусть $\{u_m\}$ — последовательность функций из класса $T_\Omega(K)$, такая, что $\|\nabla u_m\|^p_{L_p(\Omega)}\to c_p(K)$. Очевидно, что

$$k_2\|u_m\|_{L_q(\Omega)}\leqslant k_2[m_n(G)]^{1/q}\leqslant k_2\mu^{1/q}=1/2$$

и что в силу неравенства (5)

$$1\leqslant 2k_1\|\nabla u_m\|_{L_p(K)}\to 2k_1[c_p(K)]^{1/p}.$$

Следовательно, $\sigma_p(\mu)\geqslant(2k_1)^{-p}$. ■

Замечание 2. Из теорем 1 и 3 следует, что условия $\gamma_p\equiv 0$ и $\sigma_p\equiv 0$ эквивалентны.

5.1.2. Условие, достаточное для вложения $W_p^1(\Omega)$ в $C(\Omega)\cap L_\infty(\Omega)$ в терминах функции λ_M. Из следствия 4.1.3/2 и определения функций σ_p и λ_M немедленно следует оценка

$$\sigma_p(\mu)\geqslant\left(\int_0^\mu d\tau/[\lambda_M(\tau)]^{p/(p-1)}\right)^{1-p}, \tag{1}$$

где $\mu\leqslant M$, которая вместе с теоремой 3 дает следующее достаточное условие вложения $W_p^1(\Omega)$ в $C(\Omega)\cap L_\infty(\Omega)$.

Теорема 1. *Если для некоторого* $M<m_n(\Omega)$

$$\int_0^M d\mu/[\lambda_M(\mu)]^{p/(p-1)}<\infty, \tag{2}$$

то оператор вложения $W_p^1(\Omega)$ *в* $C(\Omega)\cap L_\infty(\Omega)$ *ограничен.*

Отсюда вытекает следующее очевидное утверждение.

Следствие. *Если* $\Omega\in J_\alpha$ *и* $p(1-\alpha)>1$, *то оператор вложения* $W_p^1(\Omega)$ *в* $C(\Omega)\cap L_\infty(\Omega)$ *ограничен.*

Пример. Рассмотрим область

$$\Omega=\{x:\ (x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2)^{1/2}<f(x_n),\ 0<x_n<a\} \tag{3}$$

из примера 3.3.3/1. Из (3.3.3/1) следует, что сходимость интеграла (2) эквивалентна условию

$$\int_0^a d\tau/[f(\tau)]^{(n-1)/(p-1)}<\infty. \tag{4}$$

Покажем, что если последнее не выполнено, то $\sigma_p(\mu)\equiv 0$ и тем самым пространство $W_p^1(\Omega)$ не вложено в $C(\Omega)\cap L_\infty(\Omega)$.

Пусть $F=\Omega\cap\{0<x_n\leqslant\varepsilon\}$, $G=\Omega\cap\{x:\ 0<x_n<\delta\}$, где $\delta>\varepsilon$ и K — проводник $G\setminus F$. Введем функцию $u\in U_\Omega(K)$, равную единице на F, нулю вне G и функции

$$\int_{x_n}^\delta (d\xi/[f(\xi)]^{(n-1)/(p-1)})\left(\int_\varepsilon^\delta (d\xi/[f(\xi)]^{(n-1)/(p-1)})\right)^{-1}$$

на $G\setminus F$. Очевидно, что

$$c_p(K)\leqslant\int_\Omega|\nabla u|^p\,dx=c\left(\int_\varepsilon^\delta (d\xi/[f(\xi)]^{(n-1)/(p-1)})\right)^{1-p}. \tag{5}$$

Поэтому если интеграл (3) расходится, то $c_p(K)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$ и, следовательно, $\sigma_p\equiv 0$. ■

В случае $f(\tau)=c\tau^\beta$, $\beta\geqslant 1$, область Ω принадлежит классу J_α, где $\alpha=\beta(n-1)/(\beta(n-1)+1)$ (см. пример 3.3.3/1) и, следовательно, $W_p^1(\Omega)\subset C(\Omega)\cap L_\infty(\Omega)$ при $p>1+\beta(n-1)$. ■

Из условия (4) следует также, что оператор вложения $W_p^1(\Omega)$ в $C(\Omega)\cap L_\infty(\Omega)$ ограничен при всех $p>n$, если при малых τ функция f определена равенством $f(\tau)=\tau(\log\tau^{-1})^{-1}(\log^2\tau^{-1})^{-1}\ldots$ $\ldots(\log^k\tau^{-1})^{-1}$, где $\log^m$ — m раз итерированный логарифм. (Эта область, конечно, не удовлетворяет условию конуса.) ■

Если для каждой точки P области Ω можно построить «квазиконическое тело», расположенное внутри этой области и заданное при соответствующем выборе системы координат с началом в точке P неравенствами (3), где функция f удовлетворяет условию (4), то очевидно, что $\gamma_p(\rho)\not\equiv 0$ и оператор вложения $W_p^1(\Omega)$ в $C(\Omega)\cap L_\infty(\Omega)$ ограничен.

§ 5.2. О МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ ОЦЕНКЕ МОДУЛЯ ФУНКЦИИ ИЗ $W_p^1(\Omega)$

5.2.1. Условия справедливости мультипликативного неравенства. Известно, что если область Ω удовлетворяет условию конуса, то имеет место неравенство

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant C \|u\|_{W_p^1(\Omega)}^{n/p} \|u\|_{L_p(\Omega)}^{1-n/p}, \tag{1}$$

где $p > n$. Это — частный случай общих мультипликативных неравенств Э. Гальярдо — Л. Ниренберга (см. 1.4.7, 1.4.8). В следующей теореме в терминах функции σ_p дано необходимое и достаточное условие справедливости оценки:

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant C \|u\|_{W_p^1(\Omega)}^{1/(r+1)} \|u\|_{L_p(\Omega)}^{r/(r+1)}, \tag{2}$$

где r — некоторое положительное число.

Теорема 1. *Если при некотором* $r > 0$

$$\lim_{\mu \to +0} \mu^r \sigma_p(\mu) > 0, \tag{3}$$

то для всех $u \in W_p^1(\Omega)$ *имеет место неравенство* (2).

Обратно, если для всех функций $u \in W_p^1(\Omega)$ *выполнено неравенство* (2), *то область* Ω *удовлетворяет условию* (3).

Доказательство. Достаточность. По условию теоремы существует такая постоянная M, что $\mu^r \sigma_p(\mu) \geqslant \varkappa = \text{const} > 0$ при $\mu \in (0, M]$. Поэтому согласно теореме 5.1.1/3

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant \mu^{r/p} \varkappa^{-1/p} \|\nabla u\|_{L_p(\Omega)} + \mu^{-1/p} \|u\|_{L_p(\Omega)}. \tag{4}$$

Минимум правой части по μ достигается при $\mu^* = (\varkappa^{1/p} r^{-1} \|u\|_{L_p(\Omega)} / \|\nabla u\|_{L_p(\Omega)})^{p/(r+1)}$ и равен $c\varkappa^{-1/p(r+1)} \|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}^{1/(r+1)} \times \|u\|_{L_p(\Omega)}^{r/(r+1)}$.

Если $\mu^* \leqslant M$, то неравенство (2) доказано. Если $\mu^* > M$, то $\varkappa^{1/p} r^{-1} \|u\|_{L_p(\Omega)} \geqslant M^{1+1/r} \|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}$ и из (4) получаем

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant c_1 \varkappa^{-1/p(r+1)} \|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}^{1/(r+1)} \|u\|_{L_p(\Omega)}^{r/(r+1)} + cM^{-1/p} \|u\|_{L_p(\Omega)}.$$

Неравенство (2) доказано.

Необходимость. Положим $M = (2C^{r+1})^{-p/(r+1)}$. Можно считать константу C в (2) столь большой, что $M < m_n(\Omega)$.

Рассмотрим произвольный проводник $K = G \setminus F$, удовлетворяющий условию $m_n(G) \leqslant \mu \leqslant M$. Из неравенства (2) для любой функции $u \in T_\Omega(K)$ следует $1 \leqslant C\mu^{1/p(r+1)} (\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)} + M^{1/p})^{1/(r+1)}$. Поэтому $2C^{r+1} \mu^{r/p} \|\nabla u\|_{L_p(\Omega)} \geqslant 1$. Минимизируя левую часть по множеству $T_\Omega(K)$, находим $(2C^{r+1})^p \mu^r \sigma_p(\mu) \geqslant 1$. ■

Из теорем 1 и 5.1.2/1 получаем следующее достаточное условие справедливости неравенства (2).

Следствие. *Если $\Omega \in J_\alpha$, где $1 > \alpha \geqslant 1 - 1/n$ и $p(1-\alpha) > 1$, то для любой функции $u \in \mathring{W}_p^1(\Omega)$ справедливо неравенство* (2), *где $r = p(1-\alpha) - 1$.*

Доказательство. Так как $\Omega \in J_\alpha$, то $\lambda_M(\mu) \geqslant C_M \mu^\alpha$ при $\mu < M$, где C_M — положительная константа. Отсюда и из оценки (5.1.2/1) получаем $\sigma_p(\mu) \geqslant C_M^p (1 - p\alpha/(p-1))^{p-1} \mu^{1-p(1-\alpha)}$. ■

Пример. В случае $f(x_n) = cx_n^\beta$, $\beta \geqslant 1$, область (5.1.2/3) принадлежит классу $J_{\beta(n-1)/(\beta(n-1)+1)}$, и поэтому в силу следствия при $p > 1 + \beta(n-1)$ справедливо неравенство (2), где $r = (p - 1 - \beta(n-1))/(1 + \beta(n-1))$. Этот показатель является точным, так как из (5.1.2/5) следует оценка

$$\sigma_p(\delta^{\beta(n-1)+1}) \leqslant c_1 \left(\int_0^{c\delta} \xi^{-\beta(n-1)/(p-1)} d\xi\right)^{1-p} = c_2 \delta^{1+\beta(n-1)-p},$$

где δ — любое достаточно малое положительное число.

5.2.2. О мультипликативном неравенстве в предельном случае $r = (p-n)/n$. Если $r = (p-n)/n$, неравенство (5.2.1/2) превращается в (5.2.1/1). В этом частном случае необходимое и достаточное условие удается выразить в терминах функции γ_p.

Теорема. *Неравенство* (5.2.1/1) *выполняется для всех $u \in \mathring{W}_p^1(\Omega)$ в том и только в том случае, если*

$$\varliminf_{\rho \to +0} \rho^{p-n} \gamma_p(\rho) > 0. \tag{1}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть r — столь малое число, что $\rho^{p-n}\gamma_p(\rho) > \delta > 0$ при $\rho < r$. В силу оценки (5.1.1/2) при $\rho \leqslant r$ справедливо неравенство

$$c\delta^{1/p} \| u \|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant \rho^{1-n/p} \| \nabla u \|_{L_p(\Omega)} + \rho^{-n/p} \| u \|_{L_p(\Omega)}, \tag{2}$$

где $c > 0$. Минимум правой части (2) по $\rho > 0$ достигается при $\rho^* = n(p-n)^{-1} \| u \|_{L_p(\Omega)} / \| \nabla u \|_{L_p(\Omega)}$ и равен $c \| \nabla u \|_{L_p(\Omega)}^{n/p} \| u \|_{L_p(\Omega)}^{1-n/p}$. Если $\rho^* \leqslant r$, то неравенство (5.2.1/1) доказано. Если $\rho^* > r$, то $\| u \|_{L_p(\Omega)} \geqslant (p-n) r n^{-1} \| \nabla u \|_{L_p(\Omega)}$ и из (2) получаем

$$c\delta^{1/p} \| u \|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant \| \nabla u \|_{L_p(\Omega)}^{n/p} \| u \|_{L_p(\Omega)}^{1-n/p} + r^{-n/p} \| u \|_{L_p(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant c\left(\| \nabla u \|_{L_p(\Omega)} + r^{-1} \| u \|_{L_p(\Omega)}\right)^{n/p} \| u \|_{L_p(\Omega)}^{1-n/p}.$$

Итак, достаточность условия (1) доказана.

Необходимость. Подставим в (5.2.1/1) любую функцию $u \in T_\Omega(\Omega_\rho(y) \setminus y)$. Поскольку

$$\| u \|_{L_p(\Omega)}^p \leqslant c\rho^n, \quad \| u \|_{W_p^1(\Omega)}^p \leqslant c\,(c_p(\Omega_\rho(y) \setminus y) + \rho^n),$$

то в силу (5.2.1/1)

$$C^{-p} \leqslant c\,(c_p(\Omega_\rho(y) \setminus y) + \rho^n)^{n/p}\,\rho^{n(p-n)/p}.$$

Следовательно, $C^{-p^2/n} \leqslant c\,(\rho^{p-n}\gamma_p(\rho) + \rho^p)$. Остается перейти к нижнему пределу при $\rho \to +0$. ∎

В следующем предложении дано условие, достаточное для (2), которое обобщает условие конуса. Обозначим через ω открытое подмножество единичной $(n-1)$-мерной сферы и через S_ρ — «сектор» $(0, \rho) \times \omega$.

Предложение. *Пусть существуют такие положительные постоянные* ρ *и* δ, *что в любую точку множества* Ω *можно поместить вершину «сектора»* S_ρ, *расположенного в* Ω *и удовлетворяющего условию* $s(\omega) > \delta$. *Тогда имеет место условие* (1).

Доказательство. Обозначим через $C_\rho(y)$ пересечение упомянутого «сектора» (с вершиной в точке $y \in \Omega$) с шаром $B_\rho(y)$ и через (r, θ) — сферические координаты с центром y. Очевидно, что $c_p(\Omega_\rho(y) \setminus y) \geqslant \inf \int_{C_\rho(y)} |\nabla u|^p\,dx$, где инфимум берется по всем функциям $u \in C^{0,1}(\overline{C_\rho(y)})$, таким, что $u(y) = 1$, $u(\rho, \theta) = 0$ при $\theta \in \omega$. Остается отметить, что

$$\int_{C_\rho(y)} |\nabla u|^p\,dx \geqslant \int_\omega d\theta \int_0^\rho |\partial u/\partial r|^p\, r^{n-1}\,dr \geqslant$$
$$\geqslant \int_\omega d\theta \left| \int_0^\rho (\partial u/\partial r)\,dr \right|^p \left(\int_0^\rho r^{(1-n)/(p-1)}\,dr \right)^{1-p} >$$
$$> ((p-n)/(p-1))^{p-1}\,\delta\rho^{n-p}. \;\blacksquare$$

Рассмотрим область, не удовлетворяющую условию предложения, для которой неравенство (1) тем не менее выполнено

Пример. Пусть Ω — область, изображенная на рис. 21. Пусть $\delta_m = 2^{-m}$, $Q_m = \{x\colon\ \delta_{m+1} < |x| < \delta_m\} \cap \Omega$ и $y \in Q_m$. Обозначим через u такую функцию из $T_\Omega(\Omega_\rho(y) \setminus y)$, что $\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx \leqslant$ $\leqslant c_p(\Omega_\rho(y) \setminus y) + \varepsilon$. Отметим, что для любых точек $\xi, \eta \in Q_j$, $j = 1, 2, \ldots$

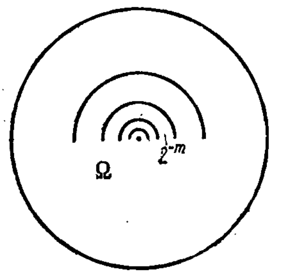

Рис. 21.

$$|u(\xi) - u(\eta)| \leqslant c\,|\xi - \eta|^{p-2} \int_{Q_j} |\nabla u|^p\,dx. \tag{3}$$

(Эта оценка инвариантна относительно преобразования подобия, и поэтому ее достаточно получить для Q_1. Но для Q_1 неравенство (3) содержится в теореме 1.4.5, п. (f).) Рассмотрим сначала случай $\rho < \delta_m$, когда $Q_m \cap \partial B_\rho(y) \neq \varnothing$. Пусть в (3) $j = m$, $\xi = y$ и $\eta \in Q_m \cap \partial B_\rho(y)$. Тогда $1 \leqslant c\rho^{p-2}(C_p(\Omega_\rho(y) \setminus y) + \varepsilon)$. Допустим теперь, что $\rho \geqslant \delta_m$. Для всех $\xi \in Q_j \cap \{x = (x_1, x_2)\colon\ x_2 < 0\}$ имеем $|u(\xi) - u(O)|^p \leqslant c\,|\xi|^{p-2} \int_\Omega |\nabla u|^p\,dx$.

Принимая во внимание (3), находим, что последнее неравенство верно для всех $\xi \in Q_j$. Следовательно, $\left(\operatorname{osc}_{\Omega_{2\rho}(O)} u\right)^p \leqslant \leqslant c\rho^{p-2}\int_\Omega |\nabla u|^p dx$. Замечая, что $\Omega_{2\rho}(O) \supset \Omega_\rho(y)$, получаем окончательно

$$1 = \left(\operatorname{osc}_{\Omega_\rho(y)} u\right)^p \leqslant c\rho^{p-2}(c_p(\Omega_\rho(y) \setminus y) + \varepsilon).$$

§ 5.3. О МОДУЛЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИЙ ИЗ $L_p^1(\Omega)$

Следующее утверждение — очевидное следствие определения p-проводимости.

Теорема 1. *Пусть* $m_n(\Omega) < \infty$ * *и* u — *любая функция из* $L_p^1(\Omega)$. *Для того чтобы при* п. в. $x, y \in \Omega$ *имело место неравенство*

$$|u(x) - u(y)| \leqslant \Lambda(|x-y|)\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}, \tag{1}$$

где Λ — *неубывающая непрерывная функция на* $(0, \infty)$, *необходимо и достаточно, чтобы для любого проводника* $K = G \setminus F$ *выполнялось неравенство*

$$c_p(K) \geqslant [\Lambda(\operatorname{dist}(\partial_i F, \partial_i G))]^{-p}. \tag{2}$$

Так как проводимость — невозрастающая функция G и неубывающая функция F, то последнее условие эквивалентно следующему:

$$c_p[(\Omega \setminus x) \setminus y] \geqslant [\Lambda(|x-y|)]^{-p}, \qquad x, y \in \Omega. \ \blacksquare \tag{3}$$

Будем говорить, что функция u принадлежит пространству $C_\Lambda(\Omega)$, если

$$\sup_{x,\, y \in \Omega} (|u(x) - u(y)|/\Lambda(|x-y|)) < \infty. \ \blacksquare$$

Согласно только что сказанному оператор вложения $L_p^1(\Omega)$ в $C_\Lambda(\Omega)$ непрерывен в том и только в том случае, если выполнено неравенство (3).

Оставшуюся часть параграфа посвятим рассмотрению области Ω, уже неоднократно встречавшейся ранее в примерах 3.3.3/1, 3.5.2, 4.3.5/1, 5.1.2. Здесь будет показано, что для этой области оператор вложения $L_p^1(\Omega)$ в $C_\Lambda(\Omega)$ непрерывен в том и только в том случае, если

$$\Lambda(t) \geqslant c\left(\int_0^t (d\xi/[f(\xi)]^{(n-1)/(p-1)})\right)^{1-1/p}, \qquad c = \text{const} > 0. \tag{4}$$

---

* Условие конечности объема Ω позволяет, сославшись на следствие 3.1.2, доказать (1) только для функций из $C^\infty(\Omega) \cap L_p^1(\Omega)$ с ограниченными носителями.

Доказательство. Необходимость. Подставим в (1) функцию u, равную единице при $x_n < \varepsilon$, нулю при $x_n > t+\varepsilon$ и совпадающую с функцией

$$\int_{x_n}^{t+\varepsilon} (d\xi/[f(\xi)]^{(n-1)/(p-1)}) \left(\int_{\varepsilon}^{t+\varepsilon} (d\xi/[f(\xi)]^{(n-1)/(p-1)})\right)^{-1}$$

при $\varepsilon \leqslant x_n \leqslant t+\varepsilon$. (Здесь $\varepsilon > 0$ и $t \in (0, a-\varepsilon)$.) Тогда

$$1 \leqslant k[\Lambda(t)]^p \left(\int_{\varepsilon}^{t+\varepsilon} d\xi/[f(\xi)]^{(n-1)/(p-1)}\right)^{p-1},$$

что при $\varepsilon \to +0$ переходит в (4).

Достаточность условия (4) — простое следствие неравенства*

$$|u(x)-u(0)| \leqslant k\left(\int_0^{x_n} d\xi/[f(\xi)]^{(n-1)/(p-1)}\right)^{1-1/p} \|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}, \tag{5}$$

в доказательстве которого потребуется следующее утверждение.

Лемма. *Пусть* $\Omega_b = \{x=(x', x_n): |x'| < f(x_n),\ 0 < x_n < b\}$ *и* u — *функция из* $C^\infty(\bar{\Omega}_b)$, *такая, что* $u(0)=0$ *и* $u(x) \geqslant 1$ *при* $x_n = b$. *Тогда*

$$\int_{\Omega_b} |\nabla u|^p dx \geqslant k\left(\int_0^b d\xi/[f(\xi)]^{(n-1)/(p-1)}\right)^{1-p}. \tag{6}$$

Доказательство. Достаточно доказать (6) в предположении, что $u=0$ при $x_n < \varepsilon$ и $u=1$ при $x_n > b-\varepsilon$, где ε — малое положительное число. Тогда $\int_{\Omega_b} |\nabla u|^p dx \geqslant c_p(K_\varepsilon)$, где $K_\varepsilon = G_\varepsilon \setminus F_\varepsilon$, $F_\varepsilon = \operatorname{clos}_\Omega \Omega_\varepsilon$, $G_\varepsilon = \Omega_{b-\varepsilon}$. Для оценки $c_p(K_\varepsilon)$ снизу воспользуемся неравенствами (5.1.2/1) и (3.3.1/1)**. Имеем

$$c_p(K_\varepsilon) \geqslant k\left(\int_{\varepsilon}^{b-\varepsilon} d\xi/[f(\xi)]^{(n-1)/(p-1)}\right)^{1-p}, \tag{7}$$

что вместе с (6) доказывает лемму.

Докажем неравенство (5). Заметим сначала, что для гладких функций в замыкании области $g_x = \{y \in \Omega:\ x_n - [2f'(a)]^{-1} f(x_n) < y_n < x_n,\ x_n < a\}$ справедливо неравенство

$$|u(z)-u(y)| \leqslant C|z-y|^{1-n/p} \|\nabla u\|_{L_p(g_x)}, \tag{8}$$

где z, y — любые точки g_x, а C — постоянная, не зависящая от x. (Это — следствие теоремы Соболева о вложении L_p^1 в $C^{1-n/p}$ для областей с липшицевой границей.)

* Из теоремы 1.1.6/1 следует, что для рассматриваемой области пространство $C^\infty(\bar{\Omega})$ плотно в $L_p^1(\Omega)$.

** Эти неравенства применимы, несмотря на то, что множество G_ε имеет большую меру. Действительно, продолжая функцию f на отрезок $[b, 2b]$, получаем увеличенную область Ω_{2b}, такую, что $2m_n(G_\varepsilon) \leqslant m_n(\Omega_{2b})$, не меняя проводимости K_ε.

Пусть $u \in C^\infty(\Omega_a)$, $u(0)=0$, $u(x)=1$ в некоторой точке $x \in \Omega_a$. В силу (8)

$$C[f(x_n)]^{n-p} \max_{y\in \bar{g}_x} |1-u(y)|^p \leqslant \int_{\Omega_a} |\nabla u|^p dx.$$

Поэтому если $2\min u < 1$ в g_x, то $\int_{\Omega_a} |\nabla u|^p dx \geqslant C x_n^{n-p}$.

Отсюда и из очевидного неравенства

$$\left(\int_0^{x_n} d\xi/[f(\xi)]^{(n-1)/(p-1)}\right)^{p-1} \geqslant k\left(\int_0^{x_n} \xi^{(1-n)/(p-1)}\, d\xi\right)^{p-1} = k_1 x_n^{p-n}$$

получаем оценку (5).

Допустим теперь, что $2u(y) \geqslant 1$ при всех $y \in g_x$. Тогда функция $2u$ удовлетворяет условиям леммы, где $b = x_n - [2f'(a)]^{-1} f(x_n)$ и, следовательно,

$$\int_{\Omega_a} |\nabla u|^p dx \geqslant k\left(\int_0^b d\xi/[f(\xi)]^{(n-1)/(p-1)}\right)^{1-p} \geqslant k\left(\int_0^{x_n} d\xi/[f(\xi)]^{(n-1)/(p-1)}\right)^{1-p}.$$

Неравенство (5) доказано.

§ 5.4. ОГРАНИЧЕННОСТЬ ФУНКЦИЙ С ПРОИЗВОДНЫМИ ИЗ КЛАССА ОРЛИЧА

Значительная часть результатов предыдущих параграфов этой главы допускает обобщение на пространство функций с конечным интегралом

$$\int_\Omega \Phi(|\nabla u|)\, dx, \tag{1}$$

где Φ — выпуклая функция. Для этого следует, конечно, ввести проводимость, порожденную интегралом (1).

Здесь мы остановимся только на одном достаточном условии ограниченности функций со сходящимся интегралом (1), формулируемом в терминах функции λ, и его следствиях.

Лемма. *Если* $u \in C^\infty(\Omega)$, *то при* п. в. t

$$\int_{E_t} (ds/|\nabla u|) = -(d/dt)\, m_n(L_t), \tag{2}$$

где $E_t = \{x\colon\ u(x)=t\}$, $L_t = \{x\colon\ u(x) > t\}$.

Равенство (2) следует из тождества $\int_{\tau \geqslant u > t} dx = \int_t^\tau d\xi \times \int_{E_\xi} (ds/|\nabla u|)$, которое в свою очередь следует из теоремы 1.2.4.

Теорема. *Пусть Φ — выпуклая неотрицательная функция, $\Phi(0)=0$ и Ψ — дополнительная к Φ (см.* п. 2.3.2). *Если область Ω конечного объема такова, что*

$$\int_0 \Psi(1/\lambda(\mu))\, d\mu < \infty, \tag{3}$$

то любая функция $u \in C^\infty(\Omega)$ *с конечным интегралом* (1) *ограничена.*

Доказательство. Обозначим через τ такое число, что $2m_n(N_\tau) \geqslant m_n(\Omega)$ и $2m_n(L_\tau) \leqslant m_n(\Omega)$, где $N_\tau = \{x\colon u(x) \geqslant \tau\}$, $L_\tau = \{x\colon u(x) > \tau\}$. Введем обозначения: $m(t) = m_n(L_t)$, $h(t) = s(E_t)$. В силу неравенства $\alpha\beta \leqslant \Phi(\alpha) + \Psi(\beta)$, $\alpha, \beta > 0$ имеем

$$u(x) - \tau = \int_\tau^{u(x)} \frac{h(t)}{m'(t)} \frac{m'(t)}{h(t)}\, dt \leqslant$$
$$\leqslant -\int_\tau^{u(x)} \Phi\left(\frac{h(t)}{-m'(t)}\right) m'(t)\, dt - \int_\tau^{u(x)} \Psi\left(\frac{1}{h(t)}\right) m'(t)\, dt.$$

Используя (2) и интегральное неравенство Иенсена, получаем

$$-\Phi\left(\frac{h(t)}{-m'(t)}\right) m'(t) = \Phi\left[\frac{1}{\int_{E_t}(ds/|\nabla u|)} \int_{E_t} |\nabla u| \frac{ds}{|\nabla u|}\right] \int_{E_t} \frac{ds}{|\nabla u|} \leqslant$$
$$\leqslant \int_{E_t} \Phi(|\nabla u|) \frac{ds}{|\nabla u|}.$$

Следовательно,

$$(u(x) - \tau)_+ \leqslant \int_{N_\tau} \Phi(|\nabla u|)\, dx + \int_0^{1/2 m_n(\Omega)} \Psi(1/\lambda(\mu))\, d\mu.$$

Аналогичная оценка получается для $(\tau - u(x))_+$. Поэтому функция u ограничена и

$$\operatorname{osc} u \leqslant \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)\, dx + 2\int_0^{1/2 m_n(\Omega)} \Psi(1/\lambda(\mu))\, d\mu.$$

Из доказанной теоремы получаем следующее утверждение.

Следствие. Если $\Omega \in J_\alpha$, $\alpha < 1$, и $\int_1^\infty \Psi(t)\, t^{-1-1/\alpha}\, dt < \infty$, то любая функция $u \in C^\infty(\Omega)$ с конечным интегралом (1) ограничена.

В частности, $u \in L_\infty$, если

$$\int_\Omega |\nabla u|^{1/(1-\alpha)} \left(\prod_{k=1}^m \log_+^k |\nabla u|\right)^{\alpha/(1-\alpha)} (\log_+^{m+1} |\nabla u|)^r\, dx < \infty, \tag{4}$$

где $m \geqslant 0$, $r > \alpha/(1-\alpha)$ и $\log_+^k$ — k раз итерированный $\log_+$. (При $m = 0$ выражение в первых скобках в (4) отсутствует.)

При доказательстве второго утверждения следует воспользоваться тем, что выпуклая функция $\Psi(t) = \alpha t^{1/\alpha} \left(\prod_{k=1}^m \log^k t\right)^{-1} \times$ $\times (\log^{m+1} t)^{-r(1-\alpha)/\alpha}$ эквивалентна при больших t дополнительной к выпуклой функции

$$(1-\alpha)\, t^{1/(1-\alpha)} \left(\prod_{k=1}^m \log^k t\right)^{\alpha/(1-\alpha)} (\log^{m+1} t)^r$$

(см. [43]).

Вывод теоремы Соболева о вложении $W_p^1(\Omega)$ в $C(\Omega)\cap L_\infty(\Omega)$ при $p>n$ для областей, удовлетворяющих условию конуса, может быть усилен на основании следствия. Именно, если $\Omega \in J_{1-1/n}$, то непрерывность и ограниченность функции в Ω следуют из сходимости интеграла

$$\int_\Omega |\nabla u|^n \left(\prod_{k=1}^{m} \log_+^k |\nabla u|\right)^{n-1} (\log_+^{m+1}|\nabla u|)^{n-1+\varepsilon}\,dx, \qquad \varepsilon>0.$$

Покажем, что в (4) нельзя положить $r=\alpha/(1-\alpha)$.

Пример. Рассмотрим область Ω из примеров 3.3.3/1, 3.5.2 и др. В силу (3.3.3/1) условие (3) эквивалентно условию

$$\int_0^1 \Psi([f(\tau)]^{1-n})\,[f(\tau)]^{n-1}\,d\tau<\infty.$$

Пусть $f(\tau)=c\tau^\beta$, $\beta\geqslant 1$. Тогда, как уже неоднократно отмечалось, $\Omega\in J_\alpha$ при $\alpha=\beta(n-1)/(\beta(n-1)+1)$. Функция $u(x)=$ $=\log_+^{m+3}x_n^{-1}$, $m\geqslant 0$, не ограничена в Ω. Вместе с тем при малых $x_n>0$

$$|\nabla u|^{\beta(n-1)+1}\left(\prod_{k=1}^{m+1}\log_+^k|\nabla u|\right)^{\beta(n-1)} \leqslant$$

$$\leqslant c x_n^{-\beta(n-1)-1}\prod_{k=1}^{m+1}(\log^k x_n^{-1})^{-1}(\log^{m+2}x_n^{-1})^{-\beta(n-1)-1},$$

и поэтому $\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^{1/(1-\alpha)}\left(\prod_{k=1}^{m+1}\log_+^k|\nabla u|\right)^{\alpha/(1-\alpha)} dx<\infty.$

§ 5.5. О КОМПАКТНОСТИ ВЛОЖЕНИЯ $W_p^1(\Omega)$ В $C(\Omega)\cap L_\infty(\Omega)$

5.5.1. Критерий компактности. Пусть γ_p — функция, определенная равенством (5.1.1/1) и Ω — область конечного объема.

Теорема. *Для полной непрерывности оператора вложения $W_p^1(\Omega)$ в $C(\Omega)\cap L_\infty(\Omega)$ необходимо и достаточно, чтобы функция γ_p удовлетворяла условию*

$$\lim_{\rho\to+0}\gamma_p(\rho)=\infty. \tag{1}$$

Доказательство. Достаточность. Из оценки (5.1.1/2) следует, что для всех достаточно малых $\rho>0$

$$\|u\|^p_{L_\infty(\Omega)}\leqslant c[\gamma_p(\rho)]^{-1}\|\nabla u\|^p_{L_p(\Omega)}+C(\rho)\|u\|^p_{L_p(\Omega)},$$

где $C(\rho)<\infty$ при каждом $\rho>0$. Зафиксируем достаточно малое число $\rho>0$ и обозначим через ω_ρ такое открытое множество, что $\bar\omega_\rho\subset\Omega$ и $2c(\rho)m_n(\Omega\setminus\omega_\rho)<1$. Тогда

$$\|u\|^p_{L_\infty(\Omega)}\leqslant 2c[\gamma_p(\rho)]^{-1}\|\nabla u\|^p_{L_p(\Omega)}+2c(\rho)\|u\|^p_{L_p(\omega_\rho)}.$$

Рассмотрим единичный шар в $W_p^1(\Omega)$ и выделим из него последовательность $\{u_m\}$, сходящуюся в $L_p(\omega_\rho)$. Тогда

$$\overline{\lim_{k,\ l\to\infty}}\|u_k-u_l\|^p_{L_\infty(\Omega)}\leqslant 2c[\gamma_p(\rho)]^{-1}. \tag{2}$$

Учитывая, что $\gamma_p(\rho)\to\infty$ при $\rho\to 0$ и переходя к подпоследовательности $\{u_{m_j}\}$, получаем последовательность, сходящуюся в $L_\infty(\Omega)\cap C(\Omega)$.

Необходимость. Пусть оператор вложения $W_p^1(\Omega)$ в $C(\Omega)\cap L_\infty(\Omega)$ компактен и

$$\gamma_p(\rho)=\inf_{y\in\Omega}c_p(\Omega_\rho(y)\setminus y)<A. \tag{3}$$

Построим числовую последовательность ρ_k, стремящуюся к нулю, и последовательность точек $y_k\in\Omega$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$c_p(\Omega_{\rho_k}(y_k)\setminus y_k)<A,\qquad k=1,\ 2,\ \ldots \tag{4}$$

Так как $\lim\limits_{\rho\to 0}c_p(B_\rho(y)\setminus y)=\infty$ при $p>n$, то предельные точки последовательности $\{y_k\}$ находятся на $\partial\Omega$. Из (4) следует, что существует последовательность функций $u_k\in T_\Omega(\ _{\rho_k}(y_k)\setminus y_k)$, удовлетворяющих неравенству $\int_\Omega|\nabla u_k|^p dx>A$.

Поскольку $0\leqslant u_k\leqslant 1$, эта последовательность ограничена в $W_p^1(\Omega)$ и, следовательно, компактна в $C(\Omega)\cap L_\infty(\Omega)$. Значит, по любому $\varepsilon>0$ найдется такой номер N, что $\|u_m-u_k\|_{L_\infty(\Omega)}<\varepsilon$ при всех $m,\ k\geqslant N$. В частности, $|u_N(y_N)-u_k(y_N)|<\varepsilon$ при всех $k>N$. Вместе с тем, так как y_N не является предельной точкой последовательности $\{y_k\}$ и $u_k(x)=0$ вне $\Omega_{\rho_k}(y_k)$, $u_N(y_N)=1$, то $|u_N(y_N)-u_k(y_N)|=1$ при достаточно больших k. Таким образом, предположение (3) неверно. ■

Замечание. Если в теореме заменить $\gamma_p(\rho)$ на функцию $\hat\gamma_p(\rho)$, определенную в замечании 5.1.1/1, то получим необходимое и достаточное условие компактности вложения $\tilde W_p^1(\Omega)$ в $C(\Omega)$. В теореме по существу доказано также, что условие (1) необходимо и достаточно для компактности вложения $L_p^1(\Omega)$ в $C(\Omega)\cap$ $\cap L_\infty(\Omega)$.

5.5.2. Достаточное условие компактности в терминах функции λ_M.

Теорема. *Если при некотором M интеграл* (5.1.2/2) *сходится, то оператор вложения $W_p^1(\Omega)$ в $C(\Omega)\cap L_\infty(\Omega)$ вполне непрерывен.*

Доказательство. Из определения функции σ_p следует, что $c_p(\Omega_\rho(y)\setminus y) \geqslant \sigma_p(m_n(\Omega_\rho(y)))$ для всех $y \in \Omega$. Поэтому и из (5.1.2/1) получаем неравенство

$$c_p(\Omega_\rho(y)\setminus y) \geqslant \left(\int_0^{m_n(\Omega_\rho(y))} d\tau/[\lambda_M(\tau)]^{p/(p-1)}\right)^{1-p}.$$

Так как $m_n(\Omega_\rho(y)) \leqslant v_n\rho^n$, то отсюда и из определения функции γ_p находим $\gamma_p(\rho) \geqslant \left(\int_0^{v_n\rho^n} d\tau/[\lambda_M(\tau)]^{p/(p-1)}\right)^{1-p}$.

Теперь требуемое утверждение следует из теоремы 5.5.1.

Пример. Как отмечалось в примере 5.1.2, для области $\Omega = \{x\colon |x'| < f(x_n),\ 0 < x_n < a\}$ условие (5.1.2/2) эквивалентно сходимости интеграла (5.1.2/4). Поэтому для этой области оператор вложения $W_p^1(\Omega)$ в $C(\Omega)\cap L_\infty(\Omega)$ вполне непрерывен в том и только в том случае, если выполнено условие (5.1.2/4).

5.5.3. Область, для которой оператор вложения $W_p^1(\Omega)$ в $C(\Omega)\cap L_\infty(\Omega)$ ограничен, но не вполне непрерывен.

Для области, рассмотренной в примере 5.5.2, оператор вложения $W_p^1(\Omega)$ в $C(\Omega)\cap L_\infty(\Omega)$ ограничен и вполне непрерывен одновременно.

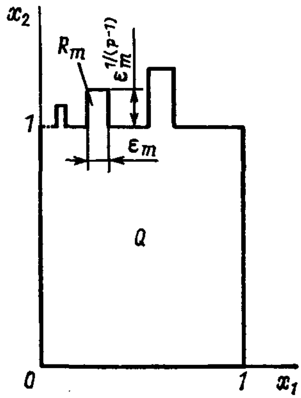

Рис. 22.

Согласно теореме 1.4.6/2 этот оператор обладает тем же свойством, если область удовлетворяет условию конуса.

Для областей с «плохой» границей положение может быть иным. В качестве примера рассмотрим область, для которой функция γ_p не равна тождественно нулю и ограничена. Из теорем 5.1.2/1 и 5.5.1 следует, что для этой области оператор вложения $W_p^1(\Omega)$ в $C(\Omega)\cap L_\infty(\Omega)$ ограничен, но не вполне непрерывен.

Пример. Покажем сначала, что для изображенной на рис. 22 области $\gamma_p(\rho) \not\equiv 0$ при $\rho > 2$. Рассмотрим проводник $\Omega_\rho(y)\setminus y$, где ρ — достаточно малое число и $y \in \Omega$. Если $y \in Q$, то $c_p(Q_\rho(y)\setminus y) \geqslant c\rho^{2-p}$, где $Q_\rho(y) = B_\rho(y)\cap Q$ (см. предложение 5.2.2) и, значит,

$$c_p(\Omega_\rho(y)\setminus y) \geqslant c\rho^{2-p}. \tag{1}$$

Пусть точка y содержится в прямоугольнике R_m и $G = B_\rho(y)\cap(Q\cup R_m)$. Из определения p-проводимости следует

$$c_p(\Omega_\rho(y)\setminus y) \geqslant c_p(G\setminus y). \tag{2}$$

Рассмотрим произвольную функцию $u \in T_\Omega(G\setminus y)$ Пусть $N_t = \{x \in \Omega\colon u(x) \geqslant t\}$ и $E_t = \{x \in \Omega\colon u(x) = t\}$. Мы можем рассматривать только те уровни t, для которых E_t — гладкая кривая. Если $m_2(N_t)\geqslant 2\varepsilon_m^{p'}$, где $p'=p/(p-1)$, то $m_2(N_t\cap Q)\geqslant\varepsilon_m^{p'}\geqslant$ $\geqslant m_2(N_t\cap R_m)$. Поскольку $Q\in J_{1/2}$, то в случае $m_2(N_t)\geqslant 2\varepsilon_m^{p'}$ имеем

$$[s(E_t)]^2\geqslant cm_2(N_t\cap Q)\geqslant {}^1/_2cm_2(N_t). \tag{3}$$

Пусть $m_2(N_t)<2\varepsilon_m^{p'}$. Если множество E_t содержит компоненту, соединяющую точки ломаных abc и def (рис. 23), то, как легко видеть, имеет место неравенство $2s(E_t)\geqslant s(\partial\Omega\cap\bar N_t)$ и в силу изопериметрического неравенства

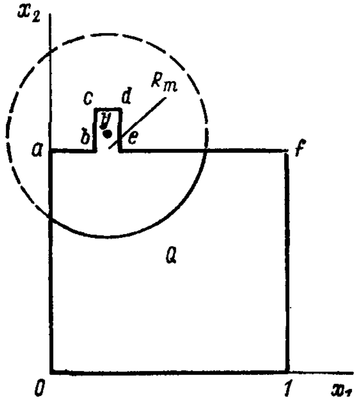

Рис. 23.

$$2\pi^{1/2}[m_2(N_t)]^{1/2}\leqslant s(\partial\Omega\cap\bar N_t)+$$
$$+s(E_t)\leqslant 3s(E_t). \tag{4}$$

Таким образом, в случае $m_2(N_t)<2\varepsilon_m^{p'}$ либо $s(E_t)\geqslant\varepsilon_m$, либо $[m_2(N_t)]^{1/2}\leqslant c_0s(E_t)$.

Перейдем к оценке $c_p(G\setminus y)$. Из следствия 4.1.3 получаем

$$c_p(G\setminus y)\geqslant\inf\Big[-$$
$$-\int_0^1(d/dt)\,m_2(N_t)\,(dt/[s(E_t)]^{p'})\Big]^{1-p}. \tag{5}$$

Представим интеграл правой части (5) в виде суммы интегралов по множествам A_1, A_2, A_3, где $A_1=\{t:\ m_2(N_t)\geqslant 2\varepsilon_m^{p'}\}$,

$$A_2=\{t:\ s(E_t)\geqslant\varepsilon_m\}\setminus A_1,\quad A_3=\{t:\ [m_2(N_t)]^{1/2}\leqslant c_0s(E_t)\}\setminus A_1.$$

Из (3) следует

$$\int_{A_1}\leqslant\left(\frac{c}{2}\right)^{p/2}\left[-\int_0^1\frac{d}{dt}m_2(N_t)\frac{dt}{[m_2(N_t)]^{p'/2}}\right]\leqslant c_2[m_2(G)]^{(p-2)/2(p-1)}.$$

Интеграл по A_2 допускает очевидную оценку

$$\int_{A_2}\leqslant\varepsilon_m^{p/(1-p)}\Big[-\int_{A_2}(d/dt)\,m_2(N_t)\,dt\Big]\leqslant 2,$$

а интеграл по A_3 оценивается с помощью (4):

$$\int_{A_3}\leqslant\left(\frac{3}{2\sqrt{\pi}}\right)^{p'}\left[-\int_0^1\frac{d}{dt}m_2(N_t)\frac{dt}{[m_2(N_t)]^{p'/2}}\right]\leqslant c_2[m_2(G)]^{(p-2)/2(p-1)}.$$

Из последних трех неравенств и (5) получаем оценку $c_p(G\setminus y)\geqslant$ $\geqslant\mathrm{const}$, которая вместе с (2) и (1) дает требуемый результат.

Покажем, что оператор вложения $W_p^1(\Omega)$ в $C(\Omega)\cap L_\infty(\Omega)$ не вполне непрерывен. Определим последовательность функций

$\{u_m\}_{m\geqslant 1}$ равенствами: $u_m(x_1, x_2)=\varepsilon_m^{1/(1-p)}(x_2-1)$, если $(x_1, x_2)\in R_m$, $u_m(x_1, x_2)=0$, если $(x_1, x_2)\in Q$. Эти функции равномерно ограничены в $W_p^1(\Omega)$, так как

$$\|\nabla u_m\|_{L_p(\Omega)}=1, \quad \|u_m\|_{L_p(\Omega)}=c\varepsilon_m^{1/(p-1)}.$$

Однако $\|u_m-u_k\|_{L_\infty(\Omega)}=2$ при $m\neq k$ и последовательность $\{u_m\}$ не компактна в $C(\Omega)\cap L_\infty(\Omega)$.

§ 5.6. ОБОБЩЕНИЯ НА ПРОСТРАНСТВА С. Л. СОБОЛЕВА ПРОИЗВОЛЬНОГО ЦЕЛОГО ПОРЯДКА

5.6.1. О (p, l)-проводимости. Пусть G — открытое подмножество множества Ω и F — замкнутое в Ω подмножество G.

Определим (p, l)-проводимость проводника $G\setminus F$ равенством

$$c_{p,l}(G\setminus F)=\inf\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)}^p, \tag{1}$$

где инфимум берется по всем функциям $u\in C^\infty(\Omega)$, равным нулю на $\Omega\setminus G$ и единице на F.

Предложение 1. *Если $pl>n$, $p>1$ или $l\geqslant n$, $p=1$, то при $R>2\rho$*

$$c_{p,l}(B_R\setminus \bar{B}_\rho)\sim R^{n-pl}. \tag{2}$$

Доказательство. Если $R=1$, то (2) следует из неравенства Соболева:

$$\|u\|_{L_\infty(B_1)}\leqslant c\|\nabla_l u\|_{L_p(B_1)} \quad \text{для всех} \quad u\in C_0^\infty(B_1).$$

Общий случай сводится к $R=1$ с помощью преобразования подобия.

Предложение 2. *Если $n=pl$ и $p>1$, то при $R>2\rho$*

$$c_{p,l}(B_R\setminus \bar{B}_\rho)\sim (\log(R/\rho))^{1-p}. \tag{3}$$

Вывод соотношения (3) содержится в доказательстве установленного в дальнейшем предложения 9.1.2/2.

Предложение 3. *Если $pl\leqslant n$, $p>1$ или $l<n$, $p=1$, то при $R>2\rho$*

$$c_{p,l}(B_R\setminus \bar{B}_\rho)\sim \rho^{n-pl}. \tag{4}$$

Доказательство. Очевидно, что $c_{p,l}(R^n\setminus \bar{B}_\rho)\leqslant$ $\leqslant c_{p,l}(B_R\setminus \bar{B}_\rho)\leqslant c_{p,l}(B_{2\rho}\setminus B_\rho)$. Достаточно показать, что и правая и левая из этих функций эквивалентны ρ^{n-pl}. Преобразованием подобия доказательство сводится к случаю $\rho=1$, когда требуемое утверждение следует из неравенства Соболева: $\|u\|_{L_{pn/(n-pl)}}\leqslant$ $\leqslant c\|\nabla_l u\|_{L_p}$, $u\in C_0^\infty$. ■

В этом параграфе мы будем рассматривать только проводники вида $G \setminus y$, где $y \in G$. Из предложений 2 и 3 определения (p, l)-проводимости следует, что при $pl \leqslant n$, $p>1$ или при $l<n$, $p=1$ функция $c_{p,l}(G \setminus y)$ тождественно равна нулю. Согласно предложению 1 при $pl>n$, $p>1$ или при $l \geqslant n$, $p=1$ имеет место соотношение $c_{p,l}(B_\rho(y) \setminus y)=c\rho^{n-pl}$, $c=\mathrm{const}>0$.

5.6.2. Вложение $L_p^l(\Omega)$ в $C(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$.

Теорема. *Пусть Ω — область. Тогда оператор вложения $L_p^l(\Omega)$ в $C(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ непрерывен в том и только в том случае, если для некоторого открытого множества ω с компактным замыканием $\bar\omega \subset \Omega$*

$$\inf_{y \in G} c_{p,l}(G \setminus y)>0, \quad \text{где} \quad G=\Omega \setminus \bar\omega. \tag{1}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть ω' — ограниченное открытое множество с гладкой границей, такое, что $\bar\omega \subset \omega'$, $\bar\omega' \subset \Omega$. Обозначим через η функцию из $C^\infty(\Omega)$, равную единице вне ω' и нулю на ω, и через u — любую функцию из класса $C^\infty(\Omega) \cap L_p^l(\Omega)$.

Зафиксируем произвольную точку $y \in \Omega \setminus \omega'$, для которой $u(y) \neq 0$, и положим $v(x)=\eta(x)u(x)/u(y)$, $x \in \Omega$. Так как $v(y)=1$ и $v(x)=0$ вне множества $G=\Omega \setminus \bar\omega$, то $c_{p,l}(G \setminus y) \leqslant \|\nabla_l v\|^p_{L_p(\Omega)}$. Следовательно,

$$u(y)|^p_{c_{p,l}(G \setminus y)} \leqslant c \sum_{k=0}^{l} \|\nabla_l(u\eta)\|^p_{L_p(\Omega)} \leqslant c\|\nabla_l u\|^p_{L_p(\Omega)}+C\|u\|^p_{W_p^{l-1}(\omega')}.$$

Поэтому

$$\sup_{\Omega \setminus \omega'} |u|^p \leqslant c\left(\inf_{y \in G} c_{p,l}(G \setminus y)\right)^{-1}\left(\|\nabla_l u\|^p_{L_p(\Omega)}+C\|u\|^p_{W_p^{l-1}(\omega')}\right). \tag{2}$$

Оценка $|u|$ в ω' следует из теоремы Соболева о вложении W_p^l в C для области с гладкой границей.

Необходимость. Пусть для всех $u \in C^\infty(\Omega) \cap L_p^l(\Omega)$ выполнено неравенство

$$\sup_{\Omega} |u| \leqslant C\left(\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)}+\|u\|_{L_p(\omega)}\right), \tag{3}$$

где ω — некоторая область с компактным замыканием $\bar\omega$, $\bar\omega \subset \Omega$. Рассмотрим любой проводник $G \setminus y$, где $G=\Omega \setminus \bar\omega$ и $y \in G$. Подстановка в (3) любой функции $u \in C^\infty(\Omega) \cap L_p^1(\Omega)$, равной единице в точке y и нулю вне G, дает $1 \leqslant \sup_\Omega |u| \leqslant C\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}$. Минимизируя последнюю норму, получаем $c_{p,l}(G \setminus y) \geqslant C^{-p}$.

5.6.3. Вложение пространства $V_p^l(\Omega)$ в $C(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$. Приведем теперь прямое обобщение теоремы 5.1.2/1 на случай пространства $V_p^l(\Omega)$.

Пусть $y\in\Omega$ и ρ — положительное число. Рассмотрим проводник $\Omega_\rho(y)\setminus y$. Пусть $pl>n$ или $l=n$, $p=1$ и

$$c^*_{p,\,l}(\Omega_\rho(y)\setminus y)=\inf\sum\nolimits_{k=1}^{l}\|\nabla_k u\|^p_{L_p(\Omega)}, \tag{1}$$

где инфимум берется по всем бесконечно дифференцируемым в Ω функциям из класса $V_p^l(\Omega)$, равным нулю в $\Omega\setminus B_\rho(y)$ и единице в точке y.

Теорема. *Оператор вложения пространства $V_p^l(\Omega)$ в $C(\Omega)\cap\cap L_\infty(\Omega)$ непрерывен в том и только в том случае, если*

$$\inf_{y\in\Omega} c^*_{p,\,l}(\Omega_\rho(y)\setminus y)\not\equiv 0. \tag{2}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть u — любая функция из $C^\infty(\Omega)\cap V_p^l(\Omega)$, y — такая точка Ω, что $u(y)\neq 0$. Пусть еще $\inf\limits_{y\in\Omega} c^*_{p,\,l}(\Omega_\rho(y)\setminus y)>0$ при некотором ρ и $\eta\in C_0^\infty(B_1)$. Рассмотрим функцию $v(x)=\eta((x-y)/\rho)\,u(x)/u(y)$. Так как $v(y)=1$ и $v(x)=0$ вне $\Omega_\rho(y)$, то

$$c^*_{p,\,l}(\Omega_\rho(y)\setminus y)\leqslant\sum\nolimits_{k=1}^{l}\rho^{p(k-l)}\|\nabla_k v\|^p_{L_p(\Omega)}.$$

Следовательно,

$$|u(y)|^p\inf_{y\in\Omega} c^*_{p,\,l}(\Omega_\rho(y)\setminus y)\leqslant c\sum\nolimits_{k=0}^{l}\rho^{p(k-l)}\|\nabla_k u\|^p_{L_p(\Omega)}.$$

Необходимость. Пусть для всех бесконечно дифференцируемых в Ω функций из $V_p^l(\Omega)$ выполнено неравенство

$$\sup_{\Omega}|u|\leqslant C\sum\nolimits_{k=0}^{l}\|\nabla_k u\|_{L_p(\Omega)}. \tag{3}$$

Рассмотрим любой проводник $\Omega_\rho(y)\setminus y$, где $y\in\Omega$. Подставим в (3) любую функцию из определения $c^*_{p,\,l}(\Omega_\rho(y)\setminus y)$. Очевидно, что $\|u\|_{L_p(\Omega)}\leqslant(v_n\rho^n)^{1/p}\sup\limits_{\Omega_\rho(y)}|u|$. Поэтому, если $\rho<v_n^{-1/n}(2C)^{-p/n}$, то $\sup\limits_{\Omega_\rho(y)}|u|\leqslant C_1\sum\nolimits_{k=1}^{l}\|\nabla_k u\|_{L_p(\Omega_\rho(y))}$ и, следовательно, $1\leqslant\leqslant C_2\sum\nolimits_{k=1}^{l}\|\nabla_k u\|_{L_p(\Omega_\rho(y))}$. Минимизируя правую часть на множестве $V(\Omega_\rho(y)\setminus y)$, получаем $c^*_{p,\,l}(\Omega_\rho(y)\setminus y)\geqslant cC_2^{-p}$. ■

5.6.4. Компактность вложения $L_p^l(\Omega)$ в $C(\Omega)\cap L_\infty(\Omega)$. Приведем теперь критерий компактности вложения $L_p^l(\Omega)$ в $C(\Omega)\cap L_\infty(\Omega)$.

Теорема. *Пусть $m_n(\Omega)<\infty$. Оператор вложения $L_p^l(\Omega)$ в $C(\Omega)\cap\cap L_\infty(\Omega)$ вполне непрерывен в том и только в том случае, если для некоторой монотонной последовательности ограниченных откры-*

тых множеств $\{\omega_\nu\}_{\nu \geqslant 1}$, *такой, что* $\overline{\omega_\nu} \subset \Omega$ *и* $\omega_\nu \to \Omega$,

$$\lim_{\nu \to \infty} \inf_{y \in G_\nu} c_{p,l}(G_\nu \setminus y) = \infty. \qquad (1)$$

Доказательство. Достаточность. Пусть ω'_ν — открытое множество, такое, что $\overline{\omega_\nu} \subset \omega'_\nu$, $\overline{\omega'_\nu} \subset \Omega$. В силу (5.6.2/2)

$$\sup_\Omega |u|^p \leqslant c \left(\inf_{y \in G_\nu} c_{p,l}(G_\nu \setminus y) \right)^{-1} \left(\| \nabla_l u \|^p_{L_p(\Omega)} + \right.$$
$$\left. + C \| u \|^p_{W_p^{l-1}(\omega_\nu)} \right) + \sup_{\omega'_\nu} |u|^p.$$

Остается воспользоваться компактностью вложений $L_p^l(\Omega)$ в $W_p^{l-1}(\omega'_\nu)$ и $C(\overline{\omega'_\nu})$, а также условием (1) (ср. с доказательством достаточности в теореме 5.5.1).

Необходимость. Допустим, что для возрастающей последовательности открытых множеств $\{\omega_\nu\}_{\nu \geqslant 1}$

$$\lim_{\nu \to \infty} \inf_{y \in G_\nu} c_{p,l}(G_\nu \setminus y) < A = \text{const}. \qquad (2)$$

Введем в $L_p^l(\Omega)$ норму $\| u \|_{L_p^l(\Omega)} = \| \nabla_l u \|_{L_p(\Omega)} + \| u \|_{L_p(\omega_1)}$. В силу (2) существуют последовательности $\{y_\nu\}$ и $\{u_\nu\}$, $u_\nu \in V_\Omega(G_\nu \setminus y_\nu)$, такие, что $\| \nabla_l u_\nu \|_{L_p(\Omega)} < A^{1/p}$. По условию последовательность $\{u_\nu\}_{\nu \geqslant 1}$ компактна в $C(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$. Значит, по любому $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что $\sup_\Omega |u_\mu - u_\nu| < \varepsilon$ при всех μ, $\nu > N$. Так как $u_\nu(y_\nu) = 1$, то

$$|u_\mu(y_\nu) - 1| < \varepsilon \quad \text{при} \quad \mu, \ \nu > N. \qquad (3)$$

Далее, поскольку $\omega_\mu \uparrow \Omega$, то при фиксированном $\nu > N$ и для всех достаточно больших номеров μ точка y_ν находится в ω_μ. Поэтому $u_\mu(y_\nu) = 0$, что противоречит неравенству (3). ∎

Отметим, что при доказательстве необходимости мы получили (1) для любой монотонной последовательности ограниченных открытых множеств ω_ν, $\overline{\omega_\nu} \subset \Omega$, исчерпывающей Ω.

5.6.5. Достаточные условия непрерывности и полной непрерывности вложения $L_p^l(\Omega)$ в $C(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$. Приведем достаточное условие ограниченности и компактности оператора вложения $L_p^l(\Omega)$ в $C(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$, обобщающее условие (5.1.2/2).

Теорема 1. *Пусть* $m_n(\Omega) < \infty$, $p \geqslant 1$, l — *целое положительное число и область* Ω *удовлетворяет условию*

$$\int_0 [\lambda(\mu)]^{pl/(1-pl)} d\mu < \infty. \qquad (1)$$

Тогда справедливо неравенство

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)}\leqslant C\|u\|_{L_p^l(\Omega)} \tag{2}$$

и оператор вложения $L_p^l(\Omega)$ в $C(\Omega)\cap L_\infty(\Omega)$ вполне непрерывен.

Доказательство. В силу теоремы 5.1.2/1

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)}\leqslant C\left(\|\nabla u\|_{L_{pl}(\Omega)}+\|u\|_{L_p(\omega)}\right), \tag{3}$$

где ω — открытое множество, $\bar\omega\subset\Omega$, а C — постоянная, не зависящая от u. Из (1) получаем, что $\Omega\in J_\alpha$, где $1-\alpha=1/pl$. Поскольку $p(l-1)(1-\alpha)<1$ и $pl=p/[1-p(l-1)(1-\alpha)]$, то согласно следствию 4.9/1

$$\sum_{i=1}^n\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L_{pl}(\Omega)}\leqslant C\sum_{i=1}^n\left(\left\|\nabla_{l-1}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L_p(\Omega)}+\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L_p(\omega)}\right)\leqslant$$
$$\leqslant C_1\left(\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)}+\|u\|_{L_p(\omega)}\right). \tag{4}$$

Объединяя (3) и (4), приходим к неравенству (2).

Компактность вложения $L_p^l(\Omega)$ в $C(\Omega)\cap L_\infty(\Omega)$ получается из (4) и теоремы 5.5.2, в которой число p заменено на pl, а условие (5.1.2/1) — на (1).

Теорема 2. *Если Ω — область конечного объема из класса J_α, где $1>\alpha>(n-1)/n$ и $pl(1-\alpha)>1$, то для всех $u\in W_p^l(\Omega)$ справедливо неравенство*

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)}\leqslant C\|u\|_{W_p^l(\Omega)}^{1/(r+1)}\|u\|_{L_p(\Omega)}^{r/(r+1)},\qquad r=pl(1-\alpha)-1.$$

Для доказательства достаточно воспользоваться следствием 5.2.1, где p заменено на pl, а затем применить (4).

Пример. Пусть Ω — область из примеров 3.3.3/1, 5.1.2 и др. В силу оценок (3.3.3/1) для нее условие (1) эквивалентно требованию

$$\int_0[f(\tau)]^{(n-1)/(1-pl)}\,d\tau<\infty.$$

В частности, если $f(\tau)=c\tau^\beta$, $\beta\geqslant 1$, то оператор вложения $L_p^l(\Omega)$ в $C(\Omega)\cap L_\infty(\Omega)$ вполне непрерывен, если $pl>\beta(n-1)+1$. Если здесь знак больше заменить равенством, то этот оператор уже не будет непрерывным. Действительно, функция $u(x)=\log|\log x_n|$ не ограничена в Ω и при $pl=\beta(n-1)+1$ принадлежит классу $L_p^l(\Omega)$.

5.6.6. Об операторах вложения пространства $W_p^l(\Omega)\cap\mathring{W}_p^k(\Omega)$ в случае $l>2k$. В § 1.6 показано, что при $l\leqslant 2k$ для пространства $W_p^l(\Omega)\cap\mathring{W}_p^k(\Omega)$ теоремы вложения типа Соболева остаются справедливыми для любых ограниченных областей. Здесь мы рассмотрим случай $l>2k$, когда согласно 1.6.4 возникает необходимость в дополнительных ограничениях на Ω.

В силу следствия 4.9/1 и теоремы 5.6.5/2 из принадлежности области Ω классу J_α, $(n-1)/n \leqslant \alpha < 1$ следует непрерывность оператора вложения $W_p^l(\Omega)$ в $W_q^m(\Omega)$, где $q^{-1}=p^{-1}-(l-m)(1-\alpha)$, если $1>p(l-m)(1-\alpha)$, q — любое положительное число, если $1=p(l-m)(1-\alpha)$, и $q=\infty$, если $1<p(l-m)(1-\alpha)$.

Далее показано, что при $m \geqslant 2k$ этот результат точен и для пространства $W_p^l(\Omega)\cap \mathring{W}_p^k(\Omega)$. Приведем пример области Ω из класса J_α, для которой из непрерывности оператора вложения $W_p^l(\Omega)\cap \mathring{W}_p^k(\Omega)$ в $W_q^m(\Omega)$ следует неравенство $q^{-1}\geqslant p^{-1}-$ $-(l-m)(1-\alpha)$.

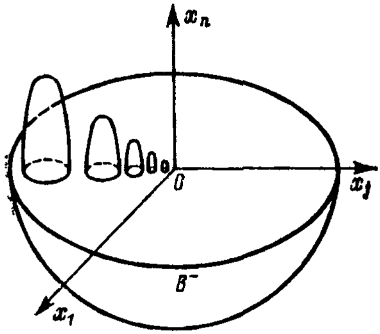
Рис. 24.

Пусть область Ω есть объединение полушара $B^-=\{x=(y, z)\colon z<0,\ |x|<2\}$ и последовательности половин непересекающихся эллипсоидов:

$$e_i^+=\{x=(y, z)\colon\ z>0,$$
$$\delta_i^{-2\gamma}z^2+\delta_i^{-2}|y-O_i|^2<1\},$$

где $0<\gamma<1$, $\delta_i=2^{-i-1}$, $|O-O_i|=$ $=3\cdot 2^{-i}$ (рис. 24).

В e_i^+ определим функцию $w_i(x)=(1-\delta_i^{-2\gamma}z^2-\delta_i^{-2}|y-O_i|^2)^k\times$ $\times\eta(z/\delta^\gamma)$, где η — гладкая функция на $(0, +\infty)$, $\eta(z)=0$ вблизи точки $z=0$ и $\eta=1$ на полуоси $(1/2, +\infty)$. Каждую из функций w_i, $i=1, 2, \ldots$, будем считать продолженной нулем на $\Omega\setminus e_i^+$.

Нетрудно проверить, что

$$\|\nabla_s w_i\|_{L_q(\Omega)} \sim \begin{cases} \delta_i^{-s+(n-1+\gamma)/q}, & \text{если}\quad s<2k,\\ \delta_i^{2k(\gamma-1)-s\gamma+(n-1+\gamma)/q}, & \text{если}\quad s\geqslant 2k. \end{cases}$$

Пусть пространство $W_p^l(\Omega)\cap \mathring{W}_p^k(\Omega)$ непрерывно вложено в $W_q^m(\Omega)$, $m\geqslant 2k$. Тогда

$$\|\nabla_s w_i\|_{L_q(\Omega)} \leqslant C\|w_i\|_{W_p^l(\Omega)},$$

или, что равносильно, $\delta_i^{\gamma(m-l)+(1/p-1/q)(n-1+\gamma)}\geqslant cC^{-1}$. Следовательно, $1/q\geqslant 1/p-(l-m)(1-\alpha)$ при $\alpha=(n-1)/(n-1+\gamma)$.

Покажем теперь, что $\Omega\in J_\alpha$. Введем множества $e^+=$ $=\{\xi=(\eta, \zeta)\in R^n\colon \zeta>0,\ \zeta^2+\eta^2<1\}$ и $\gamma^+=e^+\cap\{\xi\colon \zeta<\delta_i^{1-\gamma}\}$. Так как оператор вложения $W_1^1(e^+)$ в $L_s(e^+)$, $s=1/\alpha$, непрерывен, то для всех $v\in W_1^1(e^+)$

$$\|v\|_{L_s(e^+)}\leqslant c(\|\nabla v\|_{L(e^+)}+\delta_i^{\gamma-1}\|v\|_{L(\gamma^+)}).$$

Пусть $u \in W_1^1(\Omega)$. Применяя последнее неравенство к функции $v(\zeta) = u(\delta_i\eta + O_i, \delta_i^\gamma\zeta)$, получаем

$$\|u\|_{L(e_i^+)} \leqslant c\left(\|\nabla u\|_{L(e_i^+)} + \delta_i^{-1}\|u\|_{L(\gamma_i^+)}\right),$$

где $\gamma_i^+ = \{x \in e_i^+ : z < \delta_i\}$. Следовательно,

$$\|u\|_{L_s(\Omega)} \leqslant c\left(\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i^{-1}\|u\|_{L(\gamma_i^+)} + \|\nabla u\|_{L(\Omega)} + \|u\|_{L(B^-)}\right). \qquad (1)$$

Обозначим через γ_i^- зеркальное отображение γ_i^+ относительно плоскости $z=0$. Очевидно, что

$$\delta_i^{-1}\int_{\gamma_i^+} |u|\,dx \leqslant \int_{\gamma_i^+ \cup \gamma_i^-} |\nabla u|\,dx + \delta_i^{-1}\int_{\gamma_i^-} |u|\,dx.$$

Отсюда и из (1) выводим неравенство

$$\|u\|_{L_s(\Omega)} \leqslant c\left(\|\nabla u\|_{L(\Omega)} + \int_{B^-} |u|\,(dx/|x|)\right).$$

Так как второе слагаемое справа не превосходит $c\|u\|_{W_1^1(B^-)}$, то

$$\inf_{c \in R^1} \|u - c\|_{L_s(\Omega)} \leqslant c\|\nabla u\|_{L(\Omega)}.$$

Теперь принадлежность области Ω классу J_α следует из теоремы 3.2.3.

Глава 6

О ФУНКЦИЯХ ИЗ ПРОСТРАНСТВА $BV(\Omega)$ *

В этой главе рассматривается пространство $BV(\Omega)$ функций, обобщенные производные которых суть меры в открытом множестве $\Omega \subset R^n$. Изучаются связи между свойствами функций из $BV(\Omega)$ и геометрическими характеристиками границы Ω. В терминах «изопериметрических неравенств» даны условия на Ω, необходимые и достаточные для того, чтобы любая функция из $BV(\Omega)$ допускала продолжение на R^n из $BV(R^n)$ и оператор продолжения был ограничен.

Определено понятие «следа» на границе для функции из $BV(\Omega)$ и даны условия суммируемости следа. Приведены некоторые результаты, касающиеся связи между «изопериметрическими нера-

* Эта глава написана совместно с Ю. Д. Бураго.

венствами» и интегральными неравенствами (типа теорем вложения) для $BV(\Omega)$.

Рассмотрен также вопрос о справедливости формулы Гаусса — Остроградского для функций из $BV(\Omega)$.

§ 6.1. СВОЙСТВА ПЕРИМЕТРА МНОЖЕСТВА И ФУНКЦИЙ ИЗ $BV(\Omega)$

6.1.1. Определения пространств $BV(\Omega)$ и относительного периметра. *Пространством* $BV(\Omega)$ называется пространство локально суммируемых в Ω функций u, градиенты $\nabla_\Omega u$ которых (в смысле теории обобщенных функций) являются зарядами в Ω. Вариацию заряда на всей области Ω обозначим через $\|u\|_{BV(\Omega)}$. *Периметр множества* $\mathscr{E}$ *относительно* Ω определим равенством

$$P_\Omega(\mathscr{E}) = \|\chi_{\mathscr{E}\cap\Omega}\|_{BV(\Omega)}, \tag{1}$$

где χ_A обозначает характеристическую функцию множества A. (Если $\chi_{\mathscr{E}\cap\Omega} \overline{\in} BV(\Omega)$, полагаем $P_\Omega(\mathscr{E}) = \infty$.)

Введем еще периметр $\mathscr{E}$ относительно замкнутого множества $C\Omega$; именно $P_{C\Omega}(\mathscr{E}) = \inf\limits_{G\supset C\Omega} P(\mathscr{E})$, где G — открытое множество.

Если $P_{R^n}(\mathscr{E}) < \infty$, то, очевидно, что

$$P_\Omega(\mathscr{E}) = \operatorname{var} \nabla_{R^n}\chi_{\mathscr{E}}(\Omega), \quad P_{C\Omega}(\mathscr{E}) = \operatorname{var} \nabla_{R^n}\chi_{\mathscr{E}}(C\Omega),$$
$$P_\Omega(\mathscr{E}) + P_{C\Omega}(\mathscr{E}) = P_{R^n}(\mathscr{E}). \tag{2}$$

Отметим еще, что если $\mathscr{E}_1\cap\Omega = \mathscr{E}_2\cap\Omega$, то

$$P_\Omega(\mathscr{E}_1) = P_\Omega(\mathscr{E}_2). \tag{3}$$

В дальнейшем везде, где это не вызовет недоразумений, мы будем писать ∇u вместо $\nabla_\Omega u$, $\nabla_{R^n} u$ и $P(\mathscr{E})$ вместо $P_{R^n}(\mathscr{E})$.

6.1.2. Аппроксимация функций из $BV(\Omega)$. Из определения оператора усреднения $\mathscr{M}_h$ (см. п. 1.1.5) непосредственно вытекают следующие утверждения.

Лемма 1. *Если $u \in BV(\Omega)$ и G — открытое подмножество Ω, такое, что $[G]_h \subset \Omega$, где $[G]_h$ — h-окрестность G, то*

$$\|\nabla \mathscr{M}_h u\|_{L(\Omega)} \leq \operatorname{var} \nabla u([G]_h). \tag{1}$$

Лемма 2. *Если $u_i \in BV(\Omega)$ и $u_i \to u$ в $L(\Omega, \text{loc})$, то*

$$\|u\|_{BV(\Omega)} \leq \varliminf_{i\to\infty} \|u_i\|_{BV(\Omega)}. \tag{2}$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $\varliminf\limits_{i\to\infty} \|u_i\|_{BV(\Omega)} < \infty$. Для любой вектор-функции φ с компонентами из $\mathscr{D}(\Omega)$ имеем

$$\int_\Omega \varphi \nabla u_i \, dx = -\int_\Omega u_i \operatorname{div}\varphi \, dx \to -\int_\Omega u \operatorname{div}\varphi\, dx. \tag{3}$$

Поэтому

$$\left|\int_\Omega u \operatorname{div} \varphi \, dx\right| \leqslant \sup |\varphi| \varliminf_{i \to \infty} \|u_i\|_{BV(\Omega)},$$

т. е. $\nabla_\Omega u$ есть заряд и справедливо неравенство (2).

По определению последовательность $\{\mu_k\}_{k \geqslant 1}$ конечных зарядов сходится к заряду μ локально слабо в Ω, если для любой функции $\varphi \in C(\Omega)$ с компактным носителем

$$\lim_{k \to \infty} \int_\Omega \varphi \mu_k (dx) = \int_\Omega \varphi \mu (dx).$$

Лемма 3. *Если $u_i \in BV(\Omega)$, $u_i \to u$ в $L(\Omega, \mathrm{loc})$ и $\sup_i \|u_i\|_{BV(\Omega)} < \infty$, то $\nabla_\Omega u_i \xrightarrow{\text{лок. сл.}} \nabla_\Omega u$.*

Доказательство. По лемме 2 $u \in BV(\Omega)$. Остается сослаться на (3) и воспользоваться плотностью $\mathscr{D}(\Omega)$ в пространстве непрерывных функций с компактными носителями в Ω.

Теорема. *Пусть $u \in BV(\Omega)$. Тогда существует последовательность $\{u_m\}_{m \geqslant 1}$ функций из $C^\infty(\Omega)$, такая, что $u_m \to u$ в $L(\Omega, \mathrm{loc})$ и*

$$\lim_{m \to \infty} \int_\Omega |\nabla u_m| \, dx = \|u\|_{BV(\Omega)}.$$

Если дополнительно $u \in L(\Omega)$, то $u_m \to u$ в $L(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $\{\Omega_i\}_{i \geqslant 0}$ — последовательность открытых множеств с компактными замыканиями $\Omega_i \subset \Omega_{i+1}$, такая, что $\bigcup_i \Omega_i = \Omega$, $\Omega_0 = \varnothing$. Множество Ω_i выберем так, чтобы имело место равенство $\operatorname{var} \nabla u \left(\bigcup_i \partial\Omega_i\right) = 0$. Это можно сделать, например, следующим образом. Пусть $\{\Omega_i'\}$ — произвольная последовательность открытых множеств с компактными замыканиями, такая, что $\bigcup \Omega_i' = \Omega$, $\Omega_i' \subset \Omega$, $\partial\Omega_i' \cap \partial\Omega_j' = \varnothing$ при $i \neq j$, $\partial\Omega_i' \in C^\infty$. Обозначим t-окрестность Ω_i' через Ω_i^t. При малых t поверхность $\partial\Omega_i^t$ гладкая. Множество тех t, для которых $\operatorname{var} \nabla u (\partial\Omega_i^t) \neq 0$, конечно или счетно как множество скачков монотонной функции. Поэтому для любого i можно найти произвольно малое число t_i, такое, что $\operatorname{var} \nabla u \left(\partial\Omega_i^{t_i}\right) = 0$. Остается положить $\Omega_i = \Omega_i^{t_i}$.

Зафиксируем целое положительное число m и выберем такие ограниченные открытые множества $\mathscr{D}_i$, G_i, что $G_i \supset \overline{\mathscr{D}}_i \supset (\Omega_{i+1} \setminus \Omega_i)$ и

$$\sum_i \operatorname{var} \nabla u \left(G_i \setminus (\Omega_{i+1} \setminus \Omega_i)\right) < m^{-1}.$$

Пусть $\{\alpha_i\}$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{\mathscr{D}_i\}$ множества Ω. Найдутся столь малые числа $h_i > 0$, что $G_i \subset$

$\subset [\mathscr{D}_i]_{h_i}$ и

$$\|u - \mathscr{M}_{h_i} u\|_{L(\mathscr{D}_i)} \max |\nabla\alpha_i| \leqslant m^{-1}2^{-i}. \tag{4}$$

Положим $u_m = \sum \alpha_i \mathscr{M}_{h_i} u$. Тогда $u_m \to u$ в $L(\Omega, \text{loc})$. Кроме того,

$$\|\nabla u_m\|_{L(\Omega)} \leqslant \sum_i \left\|\alpha_i \nabla \mathscr{M}_{h_i} u\right\|_{L(\Omega)} + \left\|\sum_i \mathscr{M}_{h_i} u \nabla\alpha_i\right\|_{L(\Omega)}. \tag{5}$$

Так как $\operatorname{supp}\alpha_i \subset \mathscr{D}_i$, то по лемме 1 первое слагаемое не превосходит

$$\sum_i \left\|\nabla \mathscr{M}_{h_i} u\right\|_{L(\mathscr{D}_i)} \leqslant \sum_i \operatorname{var} \nabla u(G_i) \leqslant \sum_i \operatorname{var} \nabla u(\Omega) + m^{-1}.$$

Для второго слагаемого справа в (5) ввиду равенства $\sum_i \nabla\alpha_i = 0$ и оценки (4) имеем

$$\left\|\sum_i \mathscr{M}_{h_i} u \nabla\alpha_i\right\|_{L(\Omega)} = \left\|\sum_i \left(\mathscr{M}_{h_i} u - u\right) \nabla\alpha_i\right\|_{L(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_i \left\|\mathscr{M}_{h_i} u - u\right\|_{L(\mathscr{D}_i)} \max_{\mathscr{D}_i} |\nabla\alpha_i| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m^{-1}2^{-i} = m^{-1}.$$

Следовательно, $\|\nabla u_m\|_{L(\Omega)} \leqslant \operatorname{var} \nabla u(\Omega) + 2m^{-1}$ и $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} \|\nabla u_m\|_{L(\Omega)} \leqslant$ $\leqslant \operatorname{var} \nabla u(\Omega)$.

Это неравенство вместе с леммой 2 доказывает теорему.

Следствие. Если $u \in BV(\Omega)$, то функции u^+, u^-, $|u|$ также принадлежат $BV(\Omega)$ и

$$\|u^+\|_{BV(\Omega)} + \|u^-\|_{BV(\Omega)} = \||u|\|_{BV(\Omega)} = \|u\|_{BV(\Omega)}. \tag{6}$$

Действительно, пусть $\{u_m\}$ — последовательность функций из $C^\infty(\Omega)$, построенная в теореме Тогда $u_m \to u$, $u_m \to u^-$ в $L(\Omega, \text{loc})$ и

$$\|u_m^+\|_{BV(\Omega)} + \|u_m^-\|_{BV(\Omega)} = \||u_m|\|_{BV(\Omega)} = \|u_m\|_{BV(\Omega)}. \tag{7}$$

Отсюда и из леммы 6.1.2/1 получаем неравенство

$$\|u^+\|_{BV(\Omega)} + \|u^-\|_{BV(\Omega)} \leqslant \|u\|_{BV(\Omega)}. \tag{8}$$

Следовательно, u^+, $u^- \in BV(\Omega)$. Неравенство, обратное к (8), очевидно. Переходя в (7) к пределу, получаем (6).

6.1.3. Аппроксимация множеств с конечным периметром. По определению последовательность $\{\mathscr{E}_i\}$ множеств $\mathscr{E}_i \subset \Omega$ сходится к $\mathscr{E} \subset \Omega$, если $\chi_{\mathscr{E}_i} \to \chi_{\mathscr{E}}$ в $L(\Omega, \text{loc})$.

Из лемм 6.1.2/2, 6.1.2/3 вытекают следующие утверждения.

Лемма 1. *Если* $\mathscr{E}_k \to \mathscr{E}$, *то* $P_\Omega(\mathscr{E}) \leqslant \underline{\lim\limits_{k\to\infty}} P_\Omega(\mathscr{E}_k)$, *и если* $\sup\limits_k P_\Omega(\mathscr{E}_k) < \infty$, *то* $\nabla_\Omega \chi_{\mathscr{E}_k} \xrightarrow{\text{лок. сл.}} \nabla_\Omega \chi_{\mathscr{E}}$.

Лемма 2. *Пусть* $u \in L(\Omega)$ *и* $\chi_{\mathscr{E}}$ — *характеристическая функция множества* $\mathscr{E} \subset \Omega$. *Пусть еще* $\|\chi_{\mathscr{E}} - u\|_{L(\Omega)} \leqslant \varepsilon$. *Тогда для любого*

$t \in [\gamma, 1-\gamma]$, $\gamma > 0$, *справедлива оценка* $\|\chi_{\mathscr{E}} - \chi_{N_t}\|_{L(\Omega)} \leqslant \varepsilon\gamma^{-1}$, *где* $N_t = \{x\colon u(x) \geqslant t\}$.

Доказательство. Очевидно, что

$$\begin{aligned}\varepsilon \geqslant \|\chi_{\mathscr{E}} - u\|_{L(\mathscr{E} \setminus N_t)} + \|u - \chi_{\mathscr{E}}\|_{L(N_t \setminus \mathscr{E})} \geqslant \\ \geqslant \int_{\mathscr{E} \setminus N_t} (1 - u(x))\,dx + \int_{N_t \setminus \mathscr{E}} u(x)\,dx.\end{aligned}$$

Так как $u(x) < t$ при $x \in \mathscr{E} \setminus N_t$ и $u(x) \geqslant t$ при $x \in N_t \setminus \mathscr{E}$, то

$$\varepsilon \geqslant (1-t)\,m_n(\mathscr{E} \setminus N_t) + t m_n(N_t \setminus \mathscr{E}) \geqslant \gamma \|\chi_{\mathscr{E}} - \chi_{N_t}\|_{L(\Omega)}.$$

Теорема. *Для любого измеримого множества $\mathscr{E} \subset \Omega$ конечной меры m_n существует последовательность множеств $\mathscr{E}_i \subset \Omega$, для которых $\partial\mathscr{E}_i \setminus \partial\Omega$ есть C^∞-гладкое подмногообразие R^n (вообще говоря, не компактное), и при этом $\chi_{\mathscr{E}_i} \to \chi_{\mathscr{E}}$ в $L(\Omega)$ и $P_\Omega(\mathscr{E}_i) \to P_\Omega(\mathscr{E})$.*

Доказательство. Если $P(\mathscr{E}) = \infty$, то утверждение очевидно. Пусть $P(\mathscr{E}) < \infty$. Обозначим через u_m последовательность, построенную в теореме 6.1.2 по функции $u = \chi_{\mathscr{E}}$. Так как $0 \leqslant \chi_{\mathscr{E}} \leqslant 1$, то, как видно из определения функции u_m, для нее имеют место неравенства $0 \leqslant u_m \leqslant 1$. Поэтому согласно теореме 1.2.4

$$\|\nabla u_m\|_{L(\Omega)} = \int_0^1 s(E_t^{(m)})\,dt, \tag{1}$$

где $E_t^{(m)} = \{x : u_m(x) = t\}$. Для п. в. $t \in (0, 1)$ множества $E_t^{(m)}$ являются C^∞-многообразиями (см. следствие 1.2.2). Далее мы будем иметь дело только с таким t.

Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем столь большое $m = m(\varepsilon)$, что $\|\chi_{\mathscr{E}} - u_m\|_{L(\Omega)} < \varepsilon$. Тогда по лемме 1

$$\left\|\chi_{\mathscr{E}} - \chi_{N_t^{(m)}}\right\|_{L(\Omega)} \leqslant \varepsilon^{1/2}, \tag{2}$$

где $N_t^{(m)} = \{x\colon u_m(t) \geqslant t\}$ и $t \in [\varepsilon^{1/2}, 1 - \varepsilon^{1/2}]$. Кроме того, при каждом m существует $t = t_m \in (\varepsilon^{1/2}, 1 - \varepsilon^{1/2})$, такое, что

$$(1 - 2\varepsilon^{1/2})\, s\left(E_{t_m}^{(m)}\right) \leqslant \int_0^1 s(E_t^{(m)})\,dt. \tag{3}$$

Из (2) и (3), а также из равенства $P_\Omega(\mathscr{E}) = \lim\limits_{m \to \infty} \int_0^1 s(E_t^{(m)})\,dt$, вытекающего из (1) и теоремы 6.1.2, получаем, что $\chi_{N_{t_m}^{(m)}} \to \chi_{\mathscr{E}}$ в $L(\Omega)$ и $\varlimsup\limits_{\varepsilon \to 0} s\left(E_{t_m}^{(m)}\right) \leqslant P_\Omega(\mathscr{E})$.

Замечание. Если $\mathscr{E}$ — множество с компактным замыканием $\bar{\mathscr{E}} \subset \Omega$, то построенные в теореме гладкие многообразия оказываются компактными.

6.1.4. Компактность семейства множеств с равномерно ограниченными относительными периметрами.

Теорема. *Совокупность множеств $\mathscr{E}_\alpha \subset \Omega$ с равномерно ограниченными относительными периметрами $P_\Omega(\mathscr{E}_\alpha)$ компактна.*

Доказательство. Для каждого $\mathscr{E}_\alpha$ по теореме 6.1.2 существует последовательность u_{α_m}, сходящаяся к $\chi_{\mathscr{E}_\alpha}$ в $L(\Omega, \mathrm{loc})$ и такая, что

$$\lim_{m\to\infty} \|\nabla u_{\alpha_m}\|_{L(\Omega)} = P_\Omega(\mathscr{E}_\alpha).$$

Из леммы 1.4.6 следует, что каково бы ни было открытое множество ω с компактным замыканием $\bar{\omega} \subset \Omega$ и гладкой границей, семейство $\{u_{\alpha_m}\}$ компактно в $L(\omega)$. Следовательно, семейство $\{\chi_{\mathscr{E}_\alpha}\}$ компактно в $L(\omega)$.

6.1.5. Изопериметрическое неравенство. Теорема. *Если $\mathscr{E}$ — измеримое подмножество R^n и $m_n(\mathscr{E}) < \infty$, то справедливо неравенство*

$$m_n(\mathscr{E})^{(n-1)/n} \leqslant n^{-1} v_n^{-1/n} P(\mathscr{E}). \tag{1}$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $P(\mathscr{E}) < \infty$. По теореме 6.1.3 существует такая последовательность открытых множеств $\mathscr{E}_i$ с C^∞ — гладкими границами $\partial\mathscr{E}_i$, что $m_n(\mathscr{E}_i) \to m_n(\mathscr{E})$ и $s(\partial\mathscr{E}_i) \to P(\mathscr{E})$, где s — $(n-1)$-мерная площадь. Для множеств $\mathscr{E}_i$ неравенство вида (1) справедливо (см. [59] и др.). Переходя к пределу, получаем (1).

6.1.6. Интегральная формула для нормы в $BV(\Omega)$.

Лемма. *Если u_1, u_2 — неотрицательные функции из $L(\Omega)$, то*

$$\int_\Omega |u_1 - u_2|\, dx = \int_0^\infty m_n((L_t^1 \setminus L_t^2) \cup (L_t^2 \setminus L_t^1))\, dt,$$

где $L_t^i = \{x\colon\ x \in \Omega,\ u_i(x) > t\}$.

Доказательство. Очевидно, что

$$\int_\Omega |u_1 - u_2|\, dx = \int_A (u_1 - u_2)\, dx + \int_{\Omega\setminus A} (u_2 - u_1)\, dx = I_1 + I_2,$$

где $A = \{x \in \Omega\colon\ u_1 > u_2\}$. По теореме 1.2.3

$$I_1 = \int_0^\infty m_n(L_t^1 \cap A)\, dt - \int_0^\infty m_n(L_t^2 \cap A)\, dt.$$

Отметим, что если $x \in L_t^1 \setminus L_t^2$, то $u_1(x) > u_2(x)$. Следовательно, $(L_t^1 \setminus L_t^2) \cap A = L_t^1 \setminus L_t^2$, где $A = \{x \in \Omega\colon\ u_1 > u_2\}$, и аналогично $(L_t^2 \setminus L_t^1) \cap (\Omega \setminus A) = L_t^2 \setminus L_t^1$. Поэтому $I_1 = \int_0^\infty m_n(L_t^1 \setminus L_t^2)\, dt$. Аналогично $I_2 = \int_0^\infty m_n(L_t^2 \setminus L_t^1)\, dt$, что и доказывает лемму.

Теорема. *Для любой локально-интегрируемой в Ω функции u справедливо равенство*

$$\|u\|_{BV(\Omega)} = \int_{-\infty}^{+\infty} P_\Omega(L_t)\,dt, \tag{1}$$

где $L_t = \{x\colon u(x) > t\}$.

Доказательство. В силу следствия 6.1.2 можно считать, что $u \geqslant 0$. Для любой гладкой вектор-функции φ с компактным носителем в Ω в силу теоремы 1.2.3

$$\int_\Omega u \operatorname{div} \varphi\, dx = \int_0^\infty dt \left(\int_\Omega \chi_{L_t} \operatorname{div} \varphi\, dx\right).$$

Следовательно,

$$\left|\int_\Omega u \operatorname{div} \varphi\, dx\right| \leqslant \max|\varphi| \, {}_*\!\!\int_0^\infty P_\Omega(L_t)\,dt,$$

где ${}_*\!\int$ — нижний интеграл Лебега.

Поэтому

$$\|u\|_{BV(\Omega)} \leqslant {}_*\!\!\int_0^\infty P_\Omega(L_t)\,dt. \tag{2}$$

Если $\|u\|_{BV(\Omega)} = \infty$, то равенство (1) доказано. Пусть теперь $u \in BV(\Omega)$. Рассмотрим последовательность $\{u_m\}$, построенную при доказательстве теоремы 6.1.2. Заметим, что $u_m \geqslant 0$. Пусть $\{\omega_i\}$ — последовательность открытых множеств ω_i с компактными замыканиями $\bar\omega_i \subset \Omega$, причем $\bigcup \omega_i = \Omega$. Так как $u_m \to u$ в $L(\Omega, \mathrm{loc})$, то по лемме

$$\int_{\omega_i} |u_m - u|\,dx = \int_0^\infty m_n\left(\left(\left(L_t^m \setminus L_t\right) \cup \left(L_t \setminus L_t^m\right)\right) \cap \omega_i\right) dt \to 0,$$

где $L_t^m = \{x \in \Omega\colon u_m(x) > t\}$. Поэтому при п. в. t для всех i

$$m_n\left(\left(\left(L_t^m \setminus L_t\right) \cup \left(L_t \setminus L_t^m\right)\right) \cap \omega_i\right) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

Это означает, что $L_t^m \to L_t$ при п. в. t. Отсюда по лемме 6.1.3/1

$${}^*\!\!\int_0^\infty P_\Omega(L_t)\,dt \leqslant {}^*\!\!\int_0^\infty \varliminf_{m\to\infty} P_\Omega(L_t^m)\,dt \leqslant \varliminf_{m\to\infty} {}^*\!\!\int_0^\infty P_\Omega(L_t^m)\,dt.$$

Здесь ${}^*\!\int$ — верхний интеграл Лебега.

По формуле (1.2.4/1) последний интеграл равен $\|\nabla u_m\|_{L(\Omega)}$, и потому

$${}^*\!\!\int_0^\infty P_\Omega(L_t)\,dt \leqslant \varliminf_{m\to\infty} \|\nabla u_m\|_{L(\Omega)} = \|u\|_{BV(\Omega)},$$

что вместе с (2) доказывает теорему.

6.1.7. О вложении $BV(\Omega)$ **в** $L_q(\Omega)$. Содержание этого пункта тесно связано с главой 3. Прежде всего отметим, что в силу теоремы 6.1.2 из неравенства

$$\inf_{c\in R^1}\|u-c\|_{L_q(\Omega)}\leqslant C\|\nabla u\|_{L_1(\Omega)},\qquad u\in L_1(\Omega),$$

следует неравенство

$$\inf_{c\in R^1}\|u-c\|_{L_q(\Omega)}\leqslant C\|u\|_{BV(\Omega)},\qquad u\in BV(\Omega).$$

Поэтому если Ω — область конечного объема, то по теореме 3.2.3 последнее неравенство (в случае $q\geqslant 1$) имеет место для всех $u\in BV(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $\Omega\in J_\alpha$, $\alpha=q^{-1}$.

Точно так же получаются для пространства $BV(\Omega)$ аналоги относящихся к $L_1^1(\Omega)$ утверждений теорем 3.5.2/1 и 4.3.3/1.

В силу теоремы 6.1.3 определения классов J_α и $\mathring{J}_\alpha$ можно дать в терминах отношения $[m_n(\mathscr{E})]^\alpha/P_\Omega(\mathscr{E})$, где $\mathscr{E}$ — измеримое подмножество Ω. Введенная в п. 3.2.4 функция λ_M может быть определена как точная нижняя граница чисел $P_\Omega(\mathscr{E})$ на совокупности измеримых множеств $\mathscr{E}\subset\Omega$, удовлетворяющих условию $\mu\leqslant m_n(\mathscr{E})\leqslant M$.

Отметим еще, что согласно лемме 3.2.1/1, если Ω — единичный шар, то для любого множества $\mathscr{E}\subset\Omega$ имеет место неравенство

$$\min[m_n(\mathscr{E}),\ m_n(\Omega\setminus\mathscr{E})]\leqslant {}^1\!/_2 v_n v_{n-1}^{n/(1-n)}[P_\Omega(\mathscr{E})]^{n(n-1)},\qquad (1)$$

причем константа точная.

§ 6.2. ФОРМУЛА ГАУССА — ОСТРОГРАДСКОГО ДЛЯ ЛИПШИЦЕВЫХ ФУНКЦИЙ

6.2.1. Нормаль по Федереру и приведенная граница. Для фиксированных x, $\nu\in R^n$, $\nu\neq 0$ положим

$$A^+=\{y\colon (y-x)\nu>0\},\quad A^-=\{y\colon (y-x)\nu<0\},\quad A^0=\{y\colon (y-x)\nu=0\}.$$

Определение 1. Единичный вектор ν называется (внешней) нормалью по Федереру к множеству $\mathscr{E}$ в точке x, если

$$\begin{aligned}&\lim_{\rho\to 0}\rho^{-n}m_n(\mathscr{E}\cap B_\rho(x)\cap A^+)=0,\\ &\lim_{\rho\to 0}\rho^{-n}m_n(C\mathscr{E}\cap B_\rho(x)\cap A^-)=0.\end{aligned}\qquad (1)$$

Определение 2. Приведенной границей $\partial^*\mathscr{E}$ множества $\mathscr{E}$ называется множество тех точек $x\in\partial\mathscr{E}$, в которых существует нормаль к $\mathscr{E}$.

6.2.2. Формула Гаусса — Остроградского. Этот параграф посвящен доказательству следующего утверждения.

Теорема 1. *Если $P(\mathscr{E})<\infty$, то множество $\partial^*\mathscr{E}$ измеримо относительно s и* $\operatorname{var}\nabla\chi_{\mathscr{E}}$, *причем* $\operatorname{var}\nabla\chi_{\mathscr{E}}(\partial\mathscr{E}\setminus\partial^*\mathscr{E})=0$ *и для любого*

$\mathfrak{B} \subset \partial^*\mathscr{E}$

$$\nabla\chi_{\mathscr{E}}(\mathfrak{B}) = -\int_{\mathfrak{B}} \nu(x)\, s(dx), \quad \operatorname{var}\nabla\chi_{\mathscr{E}}(\mathfrak{B}) = s(\mathfrak{B}). \tag{1}$$

Отсюда немедленно вытекает следующее утверждение.

Теорема 2 (формула Гаусса—Остроградского). *Если $P(\mathscr{E}) < \infty$, и u — функция в R^n с компактным носителем, удовлетворяющая условию Липшица, то*

$$\int_{\mathscr{E}} \nabla u(x)\, dx = \int_{\partial^*\mathscr{E}} u(x)\, \nu(x)\, s(dx) \tag{2}$$

Достаточно доказать (2) для гладких функций. По определению $\nabla\chi_{\mathscr{E}}$ имеем $\int_{R^n} \chi_{\mathscr{E}} \nabla u\, dx = -\int_{R^n} u \nabla\chi_{\mathscr{E}}(dx)$, что вместе с (1) доказывает теорему.

Замечание. Из теоремы 1 следует между прочим, что $P(\mathscr{E}) \leqslant s(\partial\mathscr{E})$. При этом не исключено, что $P(\mathscr{E}) < s(\partial\mathscr{E})$. Более того, периметр может быть конечным, в то время как $s(\partial\mathscr{E}) = \infty$. В качестве примера достаточно рассмотреть круг B_1 на плоскости, из которого удалена последовательность отрезков бесконечной суммарной длины. В этом случае $\partial^*\mathscr{E} = \partial B_1$.

6.2.3. Несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть векторный заряд μ, сосредоточенный на $\mathscr{E} \subset R^n$, удовлетворяет условию $|\mu(\mathscr{E})| = \operatorname{var}\mu(\mathscr{E})$. Тогда $\mu = a\varphi$, где a — постоянный вектор, а φ — скалярная неотрицательная мера.*

Доказательство. Так как заряд μ абсолютно непрерывен относительно $\nu = \operatorname{var}\mu$, то ν-почти всюду существует производная $d\mu/d\nu = f = (f_1, \ldots, f_n)$. Из равенства $|\mu(\mathscr{E})| = \operatorname{var}\mu(\mathscr{E})$ следует, что неравенство $|f| < 1$ невозможно на множестве положительной меры ν. В самом деле тогда бы мы имели $|\mu(E)| < \operatorname{var}\mu(E)$ для некоторого множества E, $\nu(E) > 0$. Так как $|\mu(\mathscr{E} \setminus E)| \leqslant \operatorname{var}\mu(\mathscr{E} \setminus E)$, то $|\mu(\mathscr{E})| \leqslant |\mu(E)| + |\mu(\mathscr{E} \setminus E)| < \operatorname{var}\mu(E) + \operatorname{var}\mu(\mathscr{E} \setminus E) = \operatorname{var}\mu(\mathscr{E})$ и мы пришли к противоречию. Поскольку очевидно, что $|f| \leqslant 1$ ν-почти всюду, то $|f| = 1$ ν-почти всюду, и так как $|d\mu_i/d\nu| \leqslant 1$, то $\mu_i(\mathscr{E}) = \int (d\mu_i/d\nu)\, d\nu$ в силу абсолютной непрерывности μ_i относительно ν. Поэтому

$$|\mu(\mathscr{E})| = \left|\sum_i \mu_i(\mathscr{E})^2\right|^{1/2} = \left[\sum_i \left(\int_{\mathscr{E}} (d\mu_i/d\nu)\, d\nu\right)^2\right]^{1/2} = \left[\sum_i \left(\int f_i\, d\nu\right)^2\right]^{1/2}.$$

Условие $\nu(\mathscr{E}) = |\mu(\mathscr{E})|$ означает, что в неравенстве Минковского

$$\left[\sum_i \left(\int f_i\, d\nu\right)^2\right]^{1/2} \leqslant \int \left(\sum_i f_i^2\right)^{1/2} d\nu$$

имеет место случай равенства. Но тогда ν-почти всюду функции $x \to f_i(x)$ не меняют знака и пропорциональны коэффициентам, не зависящим от x.

Лемма 2. *Если $P(\mathscr{E})<\infty$ и в шаре B_ρ справедливо равенство $\nabla\chi_{\mathscr{E}}=a\varphi$, где a — постоянный вектор, а φ — скалярная мера, то с точностью до множества нулевой меры m_n*

$$B_\rho\cap\mathscr{E}=\{x\in B_\rho\colon\ (x-y)\,a>0\},$$

где y — некоторая точка из B_ρ.

Доказательство. Можно считать, что $a=(1, 0, \ldots, 0)$. Усредняя $\chi_{\mathscr{E}}$ с радиусом ε, получаем, что в шаре $B_{\rho-\varepsilon}$

$$(\partial/\partial x_1)\,\mathscr{M}_\varepsilon\chi_{\mathscr{E}}\geqslant 0,\qquad (\partial/\partial x_i)\,\mathscr{M}_\varepsilon\chi_{\mathscr{E}}=0\qquad (i=2,\ \ldots,\ m).$$

Следовательно, в $B_{\rho-\varepsilon}$ функция $\mathscr{M}_\varepsilon\chi_{\mathscr{E}}$ не зависит от $x_2, \ldots, x_n$ и не убывает по x_1. Поэтому то же самое можно сказать и о предельной функции $\chi_{\mathscr{E}}$.

Лемма 3. *Если $P(\mathscr{E})<\infty$, то при* п. в. $\rho>0$

$$\nabla_{B_\rho}\chi_{\mathscr{E}}(B_\rho)=-(1/\rho)\int_{\mathscr{E}\cap\partial B_\rho}x\,ds(x).$$

Доказательство. При всех $\rho>0$, за исключением не более, чем счетного множества, $\operatorname{var}\nabla\chi_{\mathscr{E}}(\partial B_\rho)=0$. Пусть ρ не принадлежит этому исключительному множеству. Обозначим через $\eta_\varepsilon(t)$ кусочно-линейную непрерывную функцию на $(0, \infty)$, равную единице при $t\leqslant\rho$ и нулю при $t>\rho+\varepsilon$, $\varepsilon>0$.

Так как

$$\int_{R^n}\chi_{\mathscr{E}}(x)\,[\eta_\varepsilon(|x|)]\,dx=-\int_{R^n}\eta_\varepsilon(|x|)\,\nabla\chi_{\mathscr{E}}(dx),$$

то

$$\begin{aligned}(1/\varepsilon)&\int_{B_{\rho+\varepsilon}\setminus B_\rho}\chi_{\mathscr{E}}(x)\,(x/|x|)\,dx=\\&=-\nabla\chi_{\mathscr{E}}(B_\rho)-\int_{B_{\rho+\varepsilon}\setminus B_\rho}\eta_\varepsilon(|x|)\,\nabla\chi_{\mathscr{E}}(dx).\end{aligned}\tag{1}$$

Ввиду равенства $\operatorname{var}\nabla\chi_{\mathscr{E}}(\partial B_\rho)=0$ последний интеграл стремится к нулю при $\varepsilon\to+0$. При п. в. ρ левая часть (1) имеет предел, равный $\rho^{-1}\int_{\partial B_\rho}xs(dx)$. ■

Лемма 4. *Если $P(\mathscr{E})<\infty$, то $P(\mathscr{E}\cap B_r(x))<\infty$ для любой точки $x\in R^n$ при* п. в. $r>0$ *и справедливо равенство*

$$P(\mathscr{E}\cap B_r(x))=P_{B_r(x)}(\mathscr{E})+s(\mathscr{E}\cap\partial B_r(x)).$$

Доказательство. Будем считать, что точка x совпадает с началом координат. По теореме 6.1.3 существует такая последовательность полиэдров Π_i, что $\Pi_i\to\mathscr{E}$ и $P(\Pi_i)\to P(\mathscr{E})$. Используя теорему Фубини, получаем, что $s(\Pi_i\cap\partial B_r)\to s(\mathscr{E}\cap\partial B_r)$ при п. в. $r>0$. Тогда

$$\varlimsup_{i\to\infty}P(\Pi_i\cap B_r)\leqslant\lim_{i\to\infty}P(\Pi_i)+\lim_{i\to\infty}s(\Pi_i\cap\partial B_r)=P(\mathscr{E})+s(\mathscr{E}\cap\partial B_r)$$

и тем самым $P(\mathscr{E}\cap B_r)<\infty$. Согласно лемме 6.1.3/1 существует последовательность полиэдров Π_i, для которой

$$\nabla\chi_{\Pi_i\cap B_r}\to\nabla\chi_{\mathscr{E}\cap B_r},\quad \nabla\chi_{\Pi_i}\to\nabla\chi_{\mathscr{E}}. \tag{2}$$

Пусть число r таково, что $\overline{\lim\limits_{i\to\infty}}\operatorname{var}\nabla\chi_{\Pi_i}(\partial B_r)=0$. (Это равенство может нарушаться лишь для счетного множества значений r.) Тогда из (2) следует, что

$$\nabla_{B_r}\chi_{\Pi_i}\to\nabla_{B_r}\chi_{\mathscr{E}}. \tag{3}$$

Из сходимости $s(\Pi_i\cap\partial B_r)$ к $s(\mathscr{E}\cap\partial B_r)$ получаем, что функции множества μ_i, определенные равенством $\mu_i(\mathfrak{B})=\int_{\partial B_r}\chi_{\mathfrak{B}\cap\Pi_i}\nu\,ds$, где ν — внешняя нормаль к B_r, слабо сходится к μ, где $\mu(\mathfrak{B})=$ $=\int_{\partial B_r}\chi_{\mathfrak{B}\cap\mathscr{E}}\nu\,ds$. Очевидно, что $\nabla\chi_{\Pi_i\cap B_r}=\nabla_{B_r}\chi_{\Pi_i}+\mu_i$. Переходя в этом равенстве к пределу и учитывая (2) и (3), а также слабую сходимость μ_i к μ, получаем $\nabla\chi_{\mathscr{E}\cap\overline{B}_r}=\nabla_{B_r}\chi_{\mathscr{E}}+\mu$. Так как функция множества $\nabla_{B_r}\chi_{\mathscr{E}}$ сосредоточена на B_r, а μ — на ∂B_r, то из последнего тождества следует утверждение леммы.

6.2.4. Исследование множества N. Обозначим через N множество точек $x\in\partial\mathscr{E}$, удовлетворяющих следующим условиям: а) $\operatorname{var}\nabla\chi_{\mathscr{E}}(B_\rho(x))>0$ при всех $\rho>0$, б) существует предел $\xi=$ $=\lim\limits_{\rho\to 0}(\nabla\chi_{\mathscr{E}}(B_\rho(x))/\operatorname{var}\nabla\chi_{\mathscr{E}}(B_\rho(x))$, причём $|\xi|=1$.

Отметим сразу же, что вектор $\xi(x)$ существует и $|\xi(x)|=1$ почти всюду по мере $\operatorname{var}\nabla\chi_{\mathscr{E}}$, при этом

$$\nabla\chi_{\mathscr{E}}(\mathfrak{B})=\int_{\mathfrak{B}\cap N}\xi(x)\operatorname{var}\nabla\chi_{\mathscr{E}}(dx). \tag{1}$$

Лемма. *Если $P(\mathscr{E})<\infty$ и $x\in N$, то*

$$\underline{\lim_{\rho\to 0}}\,\rho^{-n}m_n(\mathscr{E}\cap B_\rho(x))>0, \tag{2}$$

$$\underline{\lim_{\rho\to 0}}\,\rho^{-n}m_n(C\mathscr{E}\cap B_\rho(x))>0, \tag{3}$$

$$\overline{\lim_{\rho\to 0}}\,\rho^{1-n}P_{B_\rho(x)}(\mathscr{E})<\infty. \tag{4}$$

Доказательство. По определению вектора ξ при достаточно малых ρ

$$P_{B_\rho(x)}(\mathscr{E})=\operatorname{var}\nabla\chi_{\mathscr{E}}(B_\rho(x))\leqslant 2\,|\nabla\chi_{\mathscr{E}}(B_\rho(x))|.$$

Правая часть этого неравенства в силу леммы 6.2.3/3 не превосходит $2s(\mathscr{E}\cap\partial B_\rho(x))$. По лемме 6.2.3/1 $P(\mathscr{E}\cap B_\rho(x))=$

$= P_{B_\rho(x)}(\mathscr{E}) + s(\mathscr{E} \cap \partial B_\rho(x))$. Отсюда

$$P(\mathscr{E} \cap B_\rho(x)) \leqslant 3s(\mathscr{E} \cap \partial B_\rho(x)). \tag{5}$$

Эта оценка вместе с изопериметрическим неравенством (6.1.5/1) показывает, что при почти всех достаточно малых ρ

$$m_n(\mathscr{E} \cap B_\rho(x))^{(n-1)/n} \leqslant c\,(d/d\rho)\, m_n(\mathscr{E} \cap B_\rho(x)). \tag{6}$$

В силу свойства а) множества N и леммы 6.2.3/4 $P(\mathscr{E} \cap B_\rho(x)) > 0$, следовательно, $m_n(\mathscr{E} \cap B_\rho(x)) > 0$.

Поскольку функция $\rho \to m_n(\mathscr{E} \cap B_\rho(x))$ абсолютно непрерывна, то из (6) следует, что $c_1\rho^n \leqslant m_n(\mathscr{E} \cap B_\rho(x))$ при почти всех ρ.

Очевидно, что тогда последнее неравенство верно и при всех ρ. Этим неравенство (2) доказано. Заменяя в приведенном рассуждении $\mathscr{E}$ на $C\mathscr{E}$, получаем (3).

Из (5) следует, что при п. в. ρ $P(\mathscr{E} \cap B_\rho(x)) \leqslant c\rho^{n-1}$, что вместе с леммой 6.2.3/1 дает при всех ρ оценку $P_{B_\rho(x)}(\mathscr{E}) \leqslant c\rho^{n-1}$. ∎

Теорема. *Если $P(\mathscr{E}) < \infty$ и $x \in N$, то в точке x существует нормаль ν по Федереру, причем $\nu = \xi$. Кроме того, при любом $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{\rho \to 0} \rho^{1-n} \operatorname{var} \nabla\chi_{\mathscr{E}}(B_\rho(x) \cap [A^0]_{\rho\varepsilon}) = v_{n-1}, \tag{7}$$

где $A^0 = \{y\colon (y-x)\nu = 0\}$, а $[\ \ ]_\varepsilon$ — ε-окрестность.

Доказательство. Достаточно проверить, что из любой последовательности $\rho > 0$ можно выделить подпоследовательность, для которой выполнены равенства (6.2.1/1), (7). Обозначим через $\delta\mathscr{E}$ множество, полученное из $\mathscr{E}$ преобразованием подобия с центром x и коэффициентом δ. Можно считать, что точка x совпадает с началом координат. Очевидно, что $P_{B_\rho}(\mathscr{E}) = \rho^{n-1} P_{B_1}(\rho^{-1}\mathscr{E})$.

По лемме относительные периметры $P_{B_1}(\rho^{-1}\mathscr{E})$ равномерно ограничены. Следовательно, по теореме 6.1.4 существует такая последовательность $\rho_i \to 0$, что последовательность множеств $B_1 \cap \rho_i^{-1}\mathscr{E}$ сходится к некоторому множеству $\mathscr{D}$.

При этом по лемме 6.1.3/1 $\nabla_{B_1}\chi_{\rho_i^{-1}\mathscr{E}} \to \nabla_{B_1}\chi_{\mathscr{D}}$. Тогда при всех $r \in (0, 1)$, за исключением не более чем счетного числа,

$$\nabla_{B_1}\chi_{\rho_i^{-1}\mathscr{E}}(B_r) = \nabla\chi_{\rho_i^{-1}\mathscr{E}}(B_r) \xrightarrow[i \to \infty]{} \nabla\chi_{\mathscr{D}}(B_r). \tag{8}$$

Из определения множества N следует, что

$$\lim_{i \to \infty} \left(\left| \nabla\chi_{\rho_i^{-1}\mathscr{E}}(B_r) \right| \big/ \operatorname{var} \nabla\chi_{\rho_i^{-1}\mathscr{E}}(B_r) \right) = \\ = \lim_{i \to \infty} \left(\left| \nabla\chi_{\mathscr{E}}(B_{\rho_i r}) \right| / \operatorname{var} \nabla\chi_{\mathscr{E}}(B_{\rho_i r}) \right) = 1.$$

Сравнивая последние равенства с (8) и учитывая полунепрерывность вариации при слабой сходимости, получаем

$$|\nabla\chi_{\mathscr{D}}(B_r)| = \lim_{i \to \infty} \left| \nabla\chi_{\rho_i^{-1}\mathscr{E}}(B_r) \right| = \lim_{i \to \infty} \operatorname{var} \nabla\chi_{\rho_i^{-1}\mathscr{E}}(B_r) \geqslant \operatorname{var} \nabla\chi_{\mathscr{D}}(B_r). \tag{9}$$

Отсюда в силу лемм 6.2.3/1, 6.2.3/2 следует, что множество $\mathscr{D}\cap B_r$ с точностью до множества нулевой меры m_n совпадает с множеством $\{y\in B_r\colon y\nu<b\}$.

Покажем, что $b=0$. Действительно, если $b<0$, то

$$0=m_n(\mathscr{D}\cap B_{|b|})=\lim_{i\to\infty} m_n(\rho_i^{-1}\mathscr{E}\cap B_{|b|})=\lim_{i\to\infty}\rho_i^{-1}m_n(\mathscr{E}\cap B_{|b|}),$$

что противоречит (2). Аналогично $b>0$ противоречит (3). Из сходимости $B_r\cap\rho_i^{-1}\mathscr{E}\to B_r\cap\mathscr{D}=B_r\cap A^-$ следует, что равенства вида (6.2.1/1) выполняются для последовательности $\{\rho_i r\}$, где $\{\rho_i\}$ — подпоследовательность любой наперед заданной последовательности $\rho\to 0$, а r — сколь угодно близко к единице. Отсюда следует (6.2.1/1).

Остается доказать равенство (7). Выберем подпоследовательность ρ_i, для которой $\operatorname{var}\nabla\chi_{\rho_i^{-1}\mathscr{E}}\to\mu$, где мера μ удовлетворяет условию $\mu(\mathfrak{B})\geqslant\operatorname{var}\nabla\chi_{\mathscr{D}}(\mathfrak{B})$ для любого $\mathfrak{B}\subset B_1$. Вместе с тем из (9) следует, что существуют сколь угодно близкие к единице числа $r<1$, для которых $\mu(B_r)=|\nabla\chi_{\mathscr{D}}(B_r)|\leqslant\operatorname{var}\nabla\chi_{\mathscr{D}}(B_r)$. Отсюда получаем, что $\mu=\operatorname{var}\nabla\chi_{\mathscr{D}}$. Теперь для п. в. $\varepsilon>0$, $r\in(0,1)$ имеем

$$\lim_{i\to\infty}(\rho_i r)^{1-n}\operatorname{var}\nabla\chi_{\mathscr{E}}(B_{\rho_i r}\cap[A^0]_{\rho_i\varepsilon})=$$
$$=\lim_{i\to\infty}\operatorname{var}\nabla\chi_{\rho_i^{-1}\mathscr{E}}(B_r\cap[A^0]_\varepsilon)=\operatorname{var}\nabla\chi_{\mathscr{D}}(B_r\cap[A^0]_\varepsilon)=r^{n-1}v_{n-1},$$

откуда следует равенство (7).

6.2.5. Соотношения между $\operatorname{var}\nabla\chi_{\mathscr{E}}$ и s на $\partial\mathscr{E}$. Из теоремы 6.2.4 следует, что $\partial^*\mathscr{E}\supset N$. Так как, кроме того, $\operatorname{var}\nabla\chi_{\mathscr{E}}(R^n\setminus N)=0$, то и $\operatorname{var}\nabla\chi_{\mathscr{E}}(R^n\setminus\partial^*\mathscr{E})=0$, так что множества N, $\partial^*\mathscr{E}$ измеримы относительно $\operatorname{var}\nabla\chi_{\mathscr{E}}$.

Нам понадобится следующее известное утверждение общего характера.

Лемма 1. *Пусть μ — мера в R^n и пусть для всех точек x μ-измеримого множества $\mathfrak{B}$ справедливо неравенство*

$$\overline{\lim_{\rho\to 0}}\,\rho^{1-n}\mu(B_\rho(x))\geqslant\beta>0,$$

где β не зависит от x. Тогда $\beta s(\mathfrak{B})\leqslant c(n)\mu(\mathfrak{B})$.

Доказательство. Для любого $\varepsilon>0$ найдется открытое множество G, такое, что $\mu(G\setminus\mathfrak{B})+\mu(\mathfrak{B}\setminus G)<\varepsilon$.

По определению меры Хаусдорфа по числу $\varepsilon>0$ можно определить такое $\delta>0$, что для любого покрытия G шарами B_{ρ_i}, $\rho_i<\delta$, выполняется

$$s(G)\leqslant c_1(n)\sum\rho_i^{n-1}+\varepsilon. \tag{1}$$

Для каждой точки $x \in \mathfrak{B} \cap G$ рассмотрим семейство шаров $B_\rho(x) \subset G$, $3\rho < \delta$, таких, что

$$\rho^{1-n}\mu(B_\rho(x)) \geqslant \beta/2. \tag{2}$$

По теореме 1.2.1/1 найдется последовательность попарно непересекающихся шаров $B_{\rho_i}(x_i)$, удовлетворяющих условию $\bigcup_i B_{3\rho_i}(x_i) \supset \mathfrak{B} \cap G$. Тогда $\sum \mu(B_{\rho_i}(x_i)) \leqslant \mu(G) \leqslant \mu(\mathfrak{B}) + \varepsilon$.

В силу неравенств (1), (2)

$$s(G) \leqslant c_1(n) \sum (3\rho_i)^{n-1} + \varepsilon \leqslant c_2(n) \sum \rho_i^{n-1} + \varepsilon \leqslant$$
$$\leqslant c_2(n)\beta^{-1} \sum \mu(B_{\rho_i}(x_i)) + \varepsilon \leqslant c_3(n)\beta^{-1}(\mu(\mathfrak{B}) + \varepsilon) + \varepsilon. \blacksquare$$

Из определения 6.2.1/1 и теоремы Фубини вытекает следующее утверждение.

Лемма 2. *Если $P(\mathscr{E}) < \infty$ и $x \in \partial^*\mathscr{E}$, то*

$$\varliminf_{\rho \to 0} \rho^{1-n} s(\mathscr{E} \cap \partial B_\rho(x) \cap A^+) = 0,$$

где нижний предел берется по любому подмножеству полной меры интервала $0 < \rho < 1$.

Лемма 3. *Если $P(\mathscr{E}) < \infty$ и $x \in \partial^*\mathscr{E}$, то*

$$\varlimsup_{\rho \to 0} \rho^{1-n} \operatorname{var} \nabla\chi_{\mathscr{E}}(B_\rho(x)) \geqslant v_{n-1}.$$

Доказательство. Пусть Q — подмножество интервала $0 < \rho < 1$, на котором выполнено тождество из леммы 6.2.3/3. В силу лемм 6.2.3/3 и 2

$$\varlimsup_{\rho \to 0} \rho^{1-n} \operatorname{var} \nabla\chi_{\mathscr{E}}(B_\rho(x)) \geqslant \varlimsup_{\rho \to 0} \rho^{1-n} |\nabla\chi_{\mathscr{E}}(B_\rho(x))| \geqslant$$
$$\geqslant \varlimsup_{Q \ni \rho \to 0} \rho^{-n} \left| \int_{\mathscr{E} \cap \partial B_\rho(x)} x\, ds \right| = \lim_{\rho \to 0} \rho^{-n} \left| \int_{A^- \cap \partial B_\rho(x)} x\, ds \right| = v_{n-1}. \blacksquare$$

Из лемм 1 и 3, учитывая равенство $\operatorname{var} \nabla\chi_{\mathscr{E}}(\partial^*\mathscr{E} \setminus N) = 0$, получаем следующее утверждение.

Лемма 4. *Если $P(\mathscr{E}) < \infty$, то $s(\partial^*\mathscr{E} \setminus N) = 0$.*

Для доказательства теоремы 6.2.2/1 теперь достаточно проверить, что на N векторные меры $\nu\, ds$ и $\operatorname{var} \nabla\chi_{\mathscr{E}}(dx)$ совпадают.

Лемма 5. *Пусть $P(\mathscr{E}) < \infty$ и пусть множество $\mathfrak{B} \cap N$ измеримо относительно $\operatorname{var} \nabla\chi_{\mathscr{E}}$. Тогда $s(\mathfrak{B}) \geqslant \operatorname{var} \nabla\chi_{\mathscr{E}}(\mathfrak{B})$.*

Доказательство. Функция $x \to f_\rho(x) = v_{n-1}^{-1}\rho^{1-n} \times \operatorname{var} \nabla\chi_{\mathscr{E}}(B_\rho(x))$ полунепрерывна снизу. Это следует из того, что $B_\rho(x) \setminus B_\rho(x_1) \to \varnothing$ при $x_1 \to x$. Поэтому $f_\rho(x)$ измерима. Пусть $\rho_i \to 0$. По теореме 6.2.4 последовательность функций f_{ρ_i} сходится на N к функции $f(x) \equiv 1$. По теореме Егорова для любого $\varepsilon > 0$

найдется такое множество $N_\varepsilon \subset N$, что $\operatorname{var}\nabla\chi_{\mathscr{E}}(N_\varepsilon)<\varepsilon$ и на $N\setminus N_\varepsilon$ последовательность f_{ρ_i} сходится равномерно. Значит, найдется такое $\delta>0$, что

$$\operatorname{var}\nabla\chi_{\mathscr{E}}(B_r(x))\leqslant(1+\varepsilon)\,v_{n-1}r^{n-1} \tag{3}$$

для всех $x\in N\setminus N_\varepsilon$ и $r\in(0,\ \delta)$.

По определению меры s найдется такое конечное покрытие множества $N\setminus N_\varepsilon$ шарами $B_{r_i}(x_i)$, $r_i<\delta$, что $(1+\varepsilon)\,s(\mathfrak{B}\cap(N\setminus N_\varepsilon))\geqslant \geqslant v_{n-1}\sum r_i^{n-1}$. Отсюда и из (3) следует

$$\operatorname{var}\nabla\chi_{\mathscr{E}}(\mathfrak{B})\leqslant\varepsilon+\operatorname{var}\nabla\chi_{\mathscr{E}}(\mathfrak{B}\cap(N\setminus N_\varepsilon))\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon+\sum\nolimits_i\operatorname{var}\nabla\chi_{\mathscr{E}}(B_{r_i}(x_i))\leqslant\varepsilon+(1+\varepsilon)\,v_{n-1}\sum\nolimits_i r_i^{n-1}\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon+(1+\varepsilon)^2 s(\mathfrak{B}\cap(N\setminus N_\varepsilon))\leqslant\varepsilon+(1+\varepsilon)^2 s(\mathfrak{B}).$$

Ввиду произвольности ε лемма доказана.

Следующее утверждение представляет собой вариант классической теоремы о покрытии Витали — Каратеодори.

Лемма 6. *Пусть μ — конечная мера в R^n, сосредоточенная на множестве $\mathscr{E}$. Пусть еще $\mathfrak{M}$ — такое семейство замкнутых шаров, что для каждой точки $x\in\mathscr{E}$ найдется такое $\delta(x)>0$, что $B_r(x)\in\mathfrak{M}$ при всех $r<\delta(x)$ и для некоторого $k>0$*

$$\alpha r^k\leqslant\mu(B_r(x))\leqslant\beta r^k, \tag{4}$$

где $B_r(x)$ — любой шар из $\mathfrak{M}$, а α, β — положительные постоянные, не зависящие от r и x. Тогда существует такой не более чем счетный набор попарно непересекающихся шаров $\mathscr{D}^{(i)}\in\mathfrak{M}$, что $\mu\left(\mathscr{E}\setminus\bigcup_i\mathscr{D}^{(i)}\right)=0$.

Доказательство. Зафиксируем число $a>1$ и построим последовательность шаров $\mathscr{D}^{(i)}\in\mathfrak{M}$ следующим образом.

Пусть $\mathscr{D}^{(1)},\ \ldots,\ \mathscr{D}^{(j-1)}$ уже определены. Тогда $\mathscr{D}^{(j)}$ выбирается так, чтобы выполнялись условия

$$\mathscr{D}^{(j)}\cap\mathscr{D}^{(i)}=\varnothing\quad\text{при}\quad i<j,$$
$$a\mu(\mathscr{D}^{(j)})\geqslant\sup\{\mu(B_r(x)):\ B_r(x)\cap\mathscr{D}^{(i)}=\varnothing,\ 1\leqslant i<j\}.$$

Если при некотором j этот процесс оборвется, то $\mathscr{E}\subset \subset\bigcup_{i=1}^{j}\mathscr{D}^{(i)}$. ■

Пусть последовательность $\{\mathscr{D}^{(i)}\}$ бесконечна. Обозначим через $C^{(i)}$ замкнутый шар, концентрический $\mathscr{D}^{(i)}$, с радиусом $R_i=Qr_i$, где r_i — радиус $\mathscr{D}^{(i)}$, а постоянная $Q\in(1,\ \infty)$ будет указана далее. Отметим, что с самого начала можно было строить последовательность $\{\mathscr{D}^{(i)}\}$ так, чтобы вместе с $\mathscr{D}^{(i)}$ семейству $\mathfrak{M}$ принадлежал шар $C^{(i)}$.

Докажем, что при некотором значении Q для всех j

$$\mathscr{E} \subset \mathscr{E} \cap \left(\bigcup_{i=1}^{j-1} \mathscr{D}^{(i)} \cup \left(\bigcup_{i=j}^{\infty} C^{(i)} \right) \right). \tag{5}$$

Пусть $x \in \mathscr{E} \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} \mathscr{D}^{(i)}$. Тогда найдется такой шар $\mathscr{D} \subset \mathfrak{M}$ с центром x, что $\mathscr{D} \cap \mathscr{D}^{(i)} = \varnothing$ при $i < j$. Отметим, что при некотором $p \geqslant j$ обязательно $\mathscr{D} \cap \mathscr{D}^{(p)} \neq \varnothing$. Действительно, если $\mathscr{D} \cap \mathscr{D}^{(p)} = \varnothing$ для всех p, то по построению последовательности $\{\mathscr{D}^{(i)}\}$ имеем $\mu(\mathscr{D}) \leqslant a\mu(\mathscr{D}^{(p)})$. Так как шары $\mathscr{D}^{(p)}$ попарно не пересекаются, последнее неравенство противоречит конечности меры μ.

Пусть номер p выбран так, что $\mathscr{D} \cap \mathscr{D}^{(i)} = \varnothing$ при $i < p$ и $\mathscr{D} \cap \mathscr{D}^{(p)} \neq \varnothing$. Из неравенства $\mu(\mathscr{D}) \leqslant a\mu(\mathscr{D}^{(p)})$ и из (4) следуют оценки $\alpha r^k \leqslant \mu(\mathscr{D}) \leqslant a\mu(\mathscr{D}^{(p)}) \leqslant a\beta r_p^k$, где r — радиус шара $\mathscr{D}$. Поскольку шары $\mathscr{D}$ и $\mathscr{D}^{(p)}$ пересекаются, то для расстояния d между их центрами имеем $d \leqslant r + r_p \leqslant r_p(1 + (a\beta/\alpha)^{1/k})$. Пусть постоянная Q равна $1 + (a\beta/\alpha)^{1/k}$. Тогда $d \leqslant R_p$ и тем самым $x \in C^{(p)}$. Включение (5) доказано.

Остается отметить, что

$$\mu\left(\mathscr{E} \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} \mathscr{D}^{(i)}\right) \leqslant \sum\nolimits_{i=j}^{\infty} \mu(C^{(i)}) \leqslant \beta \sum\nolimits_{i=j}^{\infty} R_i^k \leqslant$$
$$\leqslant \beta Q^k \sum\nolimits_{i=j}^{\infty} r_i^k \leqslant (\beta Q^k/\alpha) \sum\nolimits_{i=j}^{\infty} \mu(\mathscr{D}^{(i)}).$$

Так как ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(\mathscr{D}^{(i)})$ сходится, то $\mu\left(\mathscr{E} \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} \mathscr{D}^{(i)}\right) \to 0$ при $j \to \infty$.

Лемма 7. *Если $P(\mathscr{E}) < \infty$ и $\mathfrak{B}$ — измеримое относительно* $\operatorname{var} \nabla \chi_{\mathscr{E}}$ *подмножество N, то $\mathfrak{B}$ является s-измеримым и*

$$s(\mathfrak{B}) \leqslant \operatorname{var} \nabla \chi_{\mathscr{E}}(\mathfrak{B}). \tag{6}$$

Доказательство. Из теоремы 6.2.4 следует, что для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ мера $\mu = \operatorname{var} \nabla \chi_{\mathscr{E}}$ удовлетворяет условиям леммы 6 при $\alpha = v_{n-1}(1-\varepsilon)$, $\beta = v_{n-1}(1+\varepsilon)$, $k = n-1$.

По определению меры Хаусдорфа по ε найдется такое $\delta > 0$, что для любого конечного покрытия $\mathfrak{B}$ шарами $B_{r_i}(x_i)$, $r_i < \delta$, имеем $s(\mathfrak{B}) \leqslant v_{n-1} \sum r_i^{n-1} + \varepsilon$.

Пусть $\{\mathscr{D}^{(i)}\}$ — последовательность замкнутых шаров, о которых шла речь в лемме 6, причем можно считать, что их радиусы меньше δ. Выберем из $\{\mathscr{D}^{(i)}\}$ конечную подпоследовательность $\{\mathscr{D}^{(i)}\}_{i=1}^{q}$ так, чтобы выполнялось неравенство $\mu\left(\mathfrak{B} \setminus \bigcup_{i=1}^{q} \mathscr{D}^{(i)}\right) < \varepsilon$.

Как показано в ходе доказательства леммы 1, найдется такой конечный набор попарно непересекающихся открытых шаров $C^{(j)}$ с радиусами $\rho_j < \delta$, что $\mu\left(\bigcup_j C^{(j)}\right) < \varepsilon$ и концентрические шары $3C^{(j)}$ утроенного радиуса образуют покрытие множества $\mathfrak{B} \setminus \bigcup_{i \leqslant q} \mathscr{D}^{(i)}$. Тем самым $\bigcup_j 3C^{(j)} \cup \left(\bigcup_{i \leqslant q} \mathscr{D}^{(i)}\right) \supset \mathfrak{B}$. Теперь имеем

$$s(\mathfrak{B}) \leqslant v_{n-1}\left(3 \sum_j \rho_j^{n-1} + \sum_{i \leqslant q} r_i^{n-1}\right) + \varepsilon,$$

где r_i — радиус шара $\mathscr{D}^{(i)}$. Отсюда

$$s(\mathfrak{B}) \leqslant (1+\varepsilon)\left[c \sum_j \mu(\mathscr{D}^{(j)}) + \sum_{i \leqslant q} \mu(C^{(i)})\right] + \varepsilon \leqslant$$
$$\leqslant (1+\varepsilon)(c\varepsilon + \mu(\mathfrak{B})) + \varepsilon,$$

что ввиду произвольности ε приводит к (6.2.5/6).

Так как неравенство (6.2.5/6) справедливо для всех μ-измеримых множеств, то из него следует s-измеримость $\mathfrak{B}$.

Объединяя леммы 4, 5 и 7, получаем утверждение теоремы 6.2.2/1.

§ 6.3. О ПРОДОЛЖЕНИИ ФУНКЦИЙ ИЗ $BV(\Omega)$ НА ВСЕ ПРОСТРАНСТВО

Для множества $\mathscr{E} \subset \Omega$ введем следующую характеристику: $\tau_\Omega(\mathscr{E}) = \inf_{\mathfrak{B} \cap \Omega = \mathscr{E}} P_{C\Omega}(\mathfrak{B})$. Очевидно, что $\tau_\Omega(\mathscr{E}) = \tau_\Omega(\Omega \setminus \mathscr{E})$.

Теорема. 1) *Если для любой функции $u \in BV(\Omega)$ существует продолжение $\hat{u} \in BV(R^n)$, такое, что*

$$\|\hat{u}\|_{BV(R^n)} \leqslant C \|u\|_{BV(\Omega)}, \tag{1}$$

где C — постоянная, не зависящая от u, то для любого множества $\mathscr{E} \subset \Omega$

$$\tau_\Omega(\mathscr{E}) \leqslant (C-1) P_\Omega(\mathscr{E}). \tag{2}$$

2) *Обратно, если для любого множества $\mathscr{E} \subset \Omega$ выполнено неравенство* (2) *с постоянной C, не зависящей от $\mathscr{E}$, то для любой функции $u \in BV(\Omega)$ существует продолжение $\hat{u} \in BV(R^n)$, для которого справедлива оценка* (1).

6.3.1. Доказательство необходимости условия (6.3/2). Неравенство (6.3/2) очевидно, если $P_\Omega(\mathscr{E}) = \infty$. Пусть $P_\Omega(\mathscr{E}) < \infty$. По условию существует продолжение $\hat{\chi}_{\mathscr{E}}$ характеристической функции $\chi_{\mathscr{E}}$, такое, что $\|\hat{\chi}_{\mathscr{E}}\|_{BV(R^n)} \leqslant C P_\Omega(\mathscr{E})$. Отсюда и из формулы (6.1.6/1) следует

$$C P_\Omega(\mathscr{E}) \geqslant \int_{-\infty}^{+\infty} P_{R^n}(\{x: \hat{\chi}_{\mathscr{E}} > t\})\, dt \geqslant \int_0^1 P_{R^n}(\{x: \hat{\chi}_{\mathscr{E}} > t\})\, dt.$$

Так как $\{x: \hat{\chi}_{\mathscr{E}}(x) > t\} \cap \Omega = \mathscr{E}$ при $t \in (0, 1)$, то, учитывая (6.1.1/2), (6.1.1/3), получаем

$$CP_\Omega(\mathscr{E}) \geqslant \inf_{\mathfrak{B} \cap \Omega = \mathscr{E}} P_{R^n}(\mathfrak{B}) \geqslant \inf_{\mathfrak{B} \cap \Omega = \mathscr{E}} P_\Omega(\mathfrak{B}) + \inf_{\mathfrak{B} \cap \Omega = \mathscr{E}} P_{C\Omega}(\mathfrak{B}) \geqslant$$
$$\geqslant P_\Omega(\mathscr{E}) + \tau_\Omega(\mathscr{E}),$$

откуда следует (6.3/2).

6.3.2. Три леммы о $P_{C\Omega}(\mathscr{E})$. Доказательству достаточности условия (6.3/2) предпошлем три вспомогательных утверждения.

Лемма 1. *Если $\mathfrak{B} \subset \Omega$, $\tau_\Omega(\mathfrak{B}) < \infty$, $P_\Omega(\mathfrak{B}) < \infty$, то существует множество $\mathscr{E} \subset R^n$, такое, что $\mathscr{E} \cap \Omega = \mathfrak{B}$ и*

$$P_{C\Omega}(\mathscr{E}) = \tau_\Omega(\mathfrak{B}). \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $\{\mathscr{E}_i\}$ — последовательность подмножеств R^n, такая, что $\mathscr{E}_i \cap \Omega = \mathfrak{B}$ и

$$\lim_{i \to \infty} P_{C\Omega}(\mathscr{E}_i) = \tau_\Omega(\mathfrak{B}). \tag{2}$$

В силу (2) $\sup_i P_{C\Omega}(\mathscr{E}_i) < \infty$, и так как $P_\Omega(\mathscr{E}_i) = P_\Omega(\mathfrak{B}) < \infty$, то $\sup_i P_{R^n}(\mathscr{E}_i) < \infty$. Отсюда и из теоремы 6.1.4 следует, что существует подпоследовательность (за которой мы сохраним обозначение $\{\mathscr{E}_i\}$), сходящаяся к некоторому множеству $\mathscr{E}$. Вследствие леммы 6.1.3/1 $P(\mathscr{E}) \leqslant \varliminf_{i \to \infty} P(\mathscr{E}_i)$. Отсюда, учитывая, что $\mathscr{E} \cap \Omega = \mathfrak{B}$ и равенства (6.1.1/2), (6.1.1/3), получаем

$$P_{C\Omega}(\mathscr{E}) \leqslant \lim_{i \to \infty} P_{C\Omega}(\mathscr{E}_i) = \tau_\Omega(\mathfrak{B}). \tag{3}$$

Сравнивая (6.3.2/3) с определением $\tau_\Omega(\mathfrak{B})$, получаем (6.3.2/1).

Лемма 2. *Пусть $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$ — измеримые подмножества R^n. Тогда*

$$P_{C\Omega}(\mathscr{E}_1 \cap \mathscr{E}_2) + P_{C\Omega}(\mathscr{E}_1 \cup \mathscr{E}_2) \leqslant P_{C\Omega}(\mathscr{E}_1) + P_{C\Omega}(\mathscr{E}_2). \tag{4}$$

Доказательство. Пусть G — открытое множество $G \supset C\Omega$. Тогда по формуле (6.1.6/1)

$$P_G(\mathscr{E}_1) + P_G(\mathscr{E}_2) \geqslant \|(\chi_{\mathscr{E}_1} + \chi_{\mathscr{E}_2})\|_{BV(G)} = \int_{-\infty}^{+\infty} P_G(\{x: \chi_{\mathscr{E}_1} + \chi_{\mathscr{E}_2} > t\})\, dt =$$
$$= \int_0^1 P_G(\{\chi_{\mathscr{E}_1} + \chi_{\mathscr{E}_2} > t\})\, dt + \int_1^2 P_G(\{\chi_{\mathscr{E}_1} + \chi_{\mathscr{E}_2} > t\})\, dt =$$
$$= P_G(\mathscr{E}_1 \cup \mathscr{E}_2) + P_G(\mathscr{E}_1 \cap \mathscr{E}_2). \tag{5}$$

Рассмотрим последовательность открытых множеств G_i, таких, что $G_{i+1} \subset G_i$ и $\bigcap_i G_i = C\Omega$. Так как $P_{C\Omega}(\mathscr{E}_k) = \lim_{i \to \infty} P_{G_i}(\mathscr{E}_k)$, $k = 1, 2$, то, применяя (5), получаем (4).

Лемма 3. *Пусть* $P_{C\Omega}(\mathscr{E}_k) < \infty$, $k=1, 2$. *Положим* $\mathfrak{B}_k = \mathscr{E}_k \cap \Omega$. *Тогда если* $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2$ *и*

$$P_{C\Omega}(\mathscr{E}_k) = \tau_\Omega(\mathfrak{B}_k), \qquad k=1, 2, \tag{6}$$

то $P_{C\Omega}(\mathscr{E}_1 \cap \mathscr{E}_2) = P_{C\Omega}(\mathscr{E}_1)$, $P_{C\Omega}(\mathscr{E}_1 \cup \mathscr{E}_2) = P_{C\Omega}(\mathscr{E}_2)$.

Доказательство. Так как $\mathscr{E}_1 \cap \mathscr{E}_2 \cap \Omega = \mathfrak{B}_1$ и $(\mathscr{E}_1 \cup \mathscr{E}_2) \cap \Omega = \mathfrak{B}_2$, то по определению τ_Ω

$$\tau_\Omega(\mathfrak{B}_1) \leqslant P_{C\Omega}(\mathscr{E}_1 \cap \mathscr{E}_2), \quad \tau_\Omega(\mathfrak{B}_2) \leqslant P_{C\Omega}(\mathscr{E}_1 \cup \mathscr{E}_2). \tag{7}$$

В силу (6) неравенство (4) можно переписать в виде

$$P_{C\Omega}(\mathscr{E}_1 \cap \mathscr{E}_2) + P_{C\Omega}(\mathscr{E}_1 \cup \mathscr{E}_2) \leqslant \tau_\Omega(\mathfrak{B}_1) + \tau_\Omega(\mathfrak{B}_2),$$

что вместе с (7) доказывает лемму.

6.3.3. Доказательство достаточности условия (6.3/2).

1°. План доказательства. Исходя из множеств $N_t = \{x: u(x) \geqslant t\}$ строим семейство множеств $\mathfrak{B}_t$, удовлетворяющих условиям: $\mathfrak{B}_t \cap \Omega = N_t$, $P_{C\Omega}(\mathfrak{B}_t) = \tau_\Omega(N_t)$; $\mathfrak{B}_t \subset \mathfrak{B}_\tau$ при $t > \tau$.

Множества $\mathfrak{B}_t$ мы строим сначала для счетного, всюду плотного на $(-\infty, +\infty)$ множества $\{t_i\}$ (п. 2°), а затем — для всех прочих t (п. 3°). Наконец, в п. 4° вводится функция $\hat{u}(x) = \sup\{t: x \in \mathfrak{B}_t\}$ и доказывается, что $\hat{u}(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 6.3.

2°. Так как $u \in BV(\Omega)$, то ввиду формулы (6.1.6/1) $P_\Omega(N_t) < \infty$ при п. в. t. Поэтому можно выбрать счетное всюду плотное на $(-\infty, +\infty)$ множество $\{t_i\}$, $t_i \neq t_j$ при $i \neq j$ так, чтобы $P_\Omega(N_{t_i}) < \infty$. Из (6.3/2) следует, что $\tau_\Omega(N_{t_i}) < \infty$.

Построим последовательность множеств $\mathfrak{B}_{t_i}$, $i = 1, 2, \ldots$, таких, что 1) $\mathfrak{B}_{t_i} \cap \Omega = N_{t_i}$, 2) $P_{C\Omega}(\mathfrak{B}_{t_i}) = \tau_\Omega(N_{t_i})$, 3) $\mathfrak{B}_{t_i} \subset \mathfrak{B}_{t_j}$ при $t_i > t_j$.

Согласно лемме 6.3.2/1 существует множество $\mathfrak{B}_{t_1}$, удовлетворяющее условиям 1), 2). Пусть множества $\mathfrak{B}_{t_1}, \ldots, \mathfrak{B}_{t_n}$ уже построены так, что условия 1) — 3) выполнены при $i, j = 1, \ldots, n-1$.

В силу леммы 6.3.2/1 существует множество $\mathfrak{B}_{t_i}$, удовлетворяющее условиям 1), 2). Пусть t_* — наибольшее из тех чисел t_i, $i = 1, \ldots, n-1$, для которых $t_i < t_n$, а t^* — наименьшее из чисел t_i, $i = 1, \ldots, n-1$, для которых $t_n < t_i$. Положим $\mathfrak{B}_{t_n} = (\mathfrak{B}^{(n)} \cap B_{t_*}) \cup \mathfrak{B}_{t^*}$. Очевидно, что $\mathfrak{B}_{t_*} \supset \mathfrak{B}_{t_n} \supset \mathfrak{B}_{t^*}$. Следовательно, $\mathfrak{B}_{t_n} \subset \mathfrak{B}_{t_i}$ при $t_n > t_i$ и $\mathfrak{B}_{t_n} \supset \mathfrak{B}_{t_i}$ при $t_n < t_i$, $i = 1, \ldots, n-1$. Так как $\mathfrak{B}^{(n)} \cap \Omega = N_{t_n}$, $\mathfrak{B}_{t_*} \cap \Omega = N_{t_*} \supset N_{t_n}$ и $\mathfrak{B}_{t^*} \cap \Omega = N_{t^*} \subset N_{t_n}$, то $\mathfrak{B}_{t_n} \cap \Omega = N_{t_n}$. Применяя лемму 6.3.2/3 к множествам $\mathfrak{B}^{(n)}$, $\mathfrak{B}_{t_*}$, а затем к множествам $\mathfrak{B}^{(n)} \cap \mathfrak{B}_{t_*}$, $\mathfrak{B}_{t^*}$, получаем $P_{C\Omega}(\mathfrak{B}_{t_n}) = \tau_\Omega(N_{t_n})$.

Итак, для набора множеств $\mathfrak{B}_{t_1}, \ldots, \mathfrak{B}_{t_n}$ выполняются условия 1) — 3) при $i; j = 1, \ldots, n$.

3°. Пусть $t \overline{\in} \{t_i\}$. Выберем из множества $\{t_i\}$ две монотонные последовательности $\{\alpha_i\}$, $\{\beta_i\}$, такие, что $\alpha_i < t < \beta_i$ и $\lim\limits_{i\to\infty} \alpha_i = \lim\limits_{i\to\infty} \beta_i = t$.

Согласно лемме 6.3.2/1 существует множество $\mathfrak{B}_t^{(0)}$, такое, что $\mathfrak{B}_t^{(0)} \cap \Omega = N_t$ и $P_{C\Omega}(\mathfrak{B}_t^{(0)}) = \tau_\Omega(N_t)$. Рассмотрим последовательность множеств $\mathfrak{B}_t^{(k)} = \mathfrak{B}_t^{(0)} \cap \mathfrak{B}_{\alpha_k}$, $k = 1, 2, \ldots$ Очевидно, что $\mathfrak{B}_t^{(k)} \cap \Omega = N_t$, $\mathfrak{B}_t^{(k+1)} \subset \mathfrak{B}_t^{(k)}$. В силу леммы 6.3.2/3 $P_{C\Omega}(\mathfrak{B}_t^{(k)}) = \tau_\Omega(N_t)$. Введем обозначение $\tilde{\mathfrak{B}}_t = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \mathfrak{B}_t^{(k)}$. Так как $\mathfrak{B}_t^{(k)} \to \tilde{\mathfrak{B}}_t$ при $k \to \infty$, то $P_{C\Omega}(\tilde{\mathfrak{B}}_t) \leqslant \varliminf\limits_{k\to\infty} P_{C\Omega}(\mathfrak{B}_t^{(k)}) = \tau_\Omega(N_t)$. Вместе с тем $\tilde{\mathfrak{B}}_t \cap \Omega = N_t$. Следовательно, $\tau_\Omega(N_t) \leqslant P_{C\Omega}(\tilde{\mathfrak{B}}_t)$. Итак, $P_{C\Omega}(\tilde{\mathfrak{B}}_t) = \tau_\Omega(N_t)$.

Рассмотрим теперь последовательность множеств $\mathfrak{C}_t^{(k)} = \tilde{\mathfrak{B}}_t \cup \mathfrak{B}_{\beta_k}$, $k = 1, 2, \ldots$ Точно так же, как и при рассмотрении множеств $\mathfrak{B}_t^{(k)}$, получаем, что множество $\mathfrak{B}_t = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \mathfrak{C}_t^{(k)}$ измеримо и удовлетворяет следующим условиям: 1) $\mathfrak{B}_t \cap \Omega = N_t$, 2) $P_{C\Omega}(\mathfrak{B}_t) = \tau_\Omega(N_t)$, 3) $\mathfrak{B}_{\beta_i} \subset \mathfrak{B}_t \subset \mathfrak{B}_{\alpha_i}$, $i = 1, 2, \ldots$

Пусть теперь t, τ — произвольные числа, причем $t < \tau$. Тогда из (3) следует, что $\mathfrak{B}_t \supset \mathfrak{B}_\tau$.

4°. Рассмотрим функцию $\hat{u}(x)$, определенную равенством $\hat{u}(x) = \sup\{t \colon x \in \mathfrak{B}_t\}$. Положим $\mathfrak{A}_t = \{x \colon \hat{u}(x) \geqslant t\}$, $\mathfrak{C}_t = \{x \colon \hat{u}(x) > t\}$. Очевидно, что $\mathfrak{A}_t \supset \mathfrak{B}_t \supset \mathfrak{C}_t$. Множества $\mathfrak{A}_t \setminus \mathfrak{C}_t$ при различных t попарно не пересекаются, следовательно, $m_n(\mathfrak{A}_t \setminus \mathfrak{C}_t) = 0$ при п. в. t.

Значит, при п. в. t множества $\mathfrak{A}_t$, $\mathfrak{C}_t$ измеримы и, кроме того, $P_{R^n}(\mathfrak{A}_t) = P_{R^n}(\mathfrak{B}_t) = P_{R^n}(\mathfrak{C}_t)$.

Докажем, что функция $\hat{u}$ локально суммируема. Как известно, для подмножества $\mathscr{E}$ шара B_R, такого, что $m_n\mathscr{E} < m_n B_R - \varepsilon$, справедливо неравенство

$$(m_n\mathscr{E})^{(n-1)/n} \leqslant C(R, \varepsilon)\, P_{B_R}(\mathscr{E}). \tag{1}$$

(Это, в частности, следует из леммы 3.2.1/1.)

Пусть замкнутый шар B_δ содержится в Ω и B_R — шар, содержащий B_δ. Тогда из (1) следует, что для любого множества $\mathscr{E} \subset B_R$

$$m_n\mathscr{E} \leqslant C(R, \delta)\left[P_{B_R}(\mathscr{E}) + m_n(\mathscr{E} \cap B_\delta)\right] \leqslant$$
$$\leqslant C(R, \delta)\left[P_{R^n}(\mathscr{E}) + m_n(\mathscr{E} \cap B_\delta)\right].$$

Полагая в этом неравенстве $\mathscr{E} = \mathfrak{B}_t \cap B_R$ при $t \geqslant 0$ и $\mathscr{E} = B_R \setminus \mathfrak{B}_t$ при $t < 0$ и используя равенство $P_{C\Omega}(\mathfrak{B}_t) = \tau_\Omega(N_t)$ и оценку

(6.3/2), получаем

$$m_n(\mathfrak{B}_t\cap B_R)\leqslant C(R,\ \delta)[CP_\Omega(N_t)+m_n(N_t\cap B_\delta)]\quad\text{при}\quad t\geqslant 0,$$
$$m_n(B_R\setminus\mathfrak{B}_t)\leqslant C(R,\ \delta)[CP_\Omega(N_t)+m_n((\Omega\setminus N_t)\cap B_\delta)]\quad\text{при}\quad t<0.$$

Принимая во внимание, что при п. в. t $m_n(\mathfrak{B}_t)=m_n(\mathfrak{A}_t)$, из двух последних неравенств выводим

$$\int_0^\infty m_n(\mathfrak{A}_t\cap B_R)\,dt+\int_{-\infty}^0 m_n(B_R\setminus\mathfrak{A}_t)\,dt\leqslant$$
$$\leqslant C(R,\ \delta)\left[C\int_{-\infty}^{+\infty}P_\Omega(N_t)\,d_t+\int_0^\infty m_n(N_t\cap B_\delta)\,dt+\int_0^\infty m_n(B_\delta\setminus N_t)\,dt\right],$$

что равносильно неравенству

$$\int_{B_R}|\hat{u}|\,dx\leqslant C(R,\ \delta)\left[C\,\|u\|_{BV(\Omega)}+\int_{B_\delta}|u|\,dx\right],$$

откуда и следует локальная суммируемость функции $\hat{u}$.

Применяя (6.1.6/1), (6.3/2) и вспоминая, что при п. в. t $P_{R^n}(\mathfrak{C}_t)=P_{R^n}(\mathfrak{B}_t)$, получаем

$$\|\hat{u}\|_{BV(R^n)}=\int_{-\infty}^{+\infty}P_{R^n}(\mathfrak{C}_t)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}[P_\Omega(\mathfrak{B}_t)+P_{C\Omega}(\mathfrak{B}_t)]\,dt=$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}[P_\Omega(N_t)+\tau_\Omega(N_t)]\,dt\leqslant C\int_{-\infty}^{+\infty}P_\Omega(N_t)\,dt=C\,\|u\|_{BV(\Omega)},$$

т. е. $\hat{u}\in BV(R^n)$ и выполняется оценка (6.3/1).

6.3.4. Эквивалентная формулировка теоремы 6.3. Теорема 6.3 может быть перефразирована в терминах оператора продолжения, т. е. оператора A_Ω: $u\to\hat{u}$, сопоставляющего каждой функции $u\in BV(\Omega)$ ее продолжение $\hat{u}\in BV(R^n)$.

Предварительно положим

$$\|A_\Omega\|=\sup\left\{\|\hat{u}\|_{BV(R^n)}/\|u\|_{BV(\Omega)}:\ u\in BV(\Omega)\right\}$$

и введем обозначение $|\Omega|$ для точной нижней границы тех чисел k, для которых $\tau_\Omega(\mathscr{E})\leqslant kP_\Omega(\mathscr{E})$ при всех $\mathscr{E}\subset\Omega$.

Теорема. *Оператор A_Ω существует и ограничен в том и только в том случае, если $|\Omega|<\infty$.*

При этом $\|A_\Omega\|\geqslant 1+|\Omega|$ для любого оператора продолжения A_Ω и существует оператор A_Ω, такой, что $\|A_\Omega\|=1+|\Omega|$.

6.3.5. Еще одна теорема о продолжении. Условие (6.3/2) теоремы 6.3 носит глобальный характер. Ему не удовлетворяют, например, никакие несвязные множества Ω.

Это явление можно устранить, если ослабить требования относительно оператора продолжения. Именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть Ω — ограниченное открытое множество. Тогда для того, чтобы любая функция $u\in BV(\Omega)$ имела продолжение*

$\hat{u} \in BV(R^n)$, удовлетворяющее неравенству

$$\|\hat{u}\|_{BV(R^n)} \leqslant K(\|u\|_{BV(\Omega)} + \|u\|_{L(\Omega)}), \tag{1}$$

где K не зависит от u, необходимо и достаточно, чтобы нашлось такое $\delta > 0$, что для всякого множества $\mathscr{E} \subset \Omega$, диаметр которого меньше δ, выполнялось условие $\tau_\Omega(\mathscr{E}) \leqslant CP_\Omega(\mathscr{E})$, причем постоянная C не зависит от $\mathscr{E}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathscr{E} \subset \Omega$ и $\chi_{\mathscr{E}}$ — характеристическая функция $\mathscr{E}$, а $\hat{\chi}_{\mathscr{E}}$ — продолжение $\chi_{\mathscr{E}}$, удовлетворяющее (1). Тогда

$$K(P_\Omega(\mathscr{E}) + m_n\mathscr{E}) \geqslant \|\hat{\chi}_{\mathscr{E}}\|_{BV(R^n)} \geqslant \int_0^1 P(\{x: \hat{\chi}_{\mathscr{E}} > t\})\, dt.$$

Так как $\{x: \hat{\chi}_{\mathscr{E}} > t\} \cap \Omega = \mathscr{E}$ при $t \in (0, 1)$, то отсюда получим

$$K(P_\Omega(\mathscr{E}) + m_n\mathscr{E}) \geqslant \inf_{\mathscr{B} \cap \Omega = \mathscr{E}} P(\mathscr{B}).$$

В силу того, что $\mathscr{B} \supset \mathscr{E}$, из этой оценки и из изопериметрического неравенства (6.1.5/1) находим

$$K(P_\Omega(\mathscr{E}) + m_n\mathscr{E}) \geqslant n v_n^{1/n} (m_n\mathscr{E})^{(n-1)/n}. \tag{2}$$

Положим $\delta = n/2K$. Тогда из (2) при условии $\operatorname{diam}\mathscr{E} < \delta$ следует неравенство $m_n\mathscr{E} \leqslant P_\Omega(\mathscr{E})$. Поэтому

$$2KP_\Omega(\mathscr{E}) \geqslant \inf_{\mathscr{B} \cap \Omega = \mathscr{E}} P(\mathscr{B}) \geqslant \tau_\Omega(\mathscr{E}).$$

Достаточность. Рассмотрим разбиение единицы $\alpha_i(x)$, $i = 1, \ldots, \nu$, такое, что $\bigcup_{i=1}^{\nu} \operatorname{supp}\alpha_i \supset \bar{\Omega}$, $\operatorname{diam}\operatorname{supp}\alpha_i < \delta$ и $|\operatorname{grad}\alpha_i| \leqslant d = \mathrm{const}$. Пусть $u \in BV(\Omega)$. Положим $\varphi_i = u\alpha_i$ и $N_t = \{x: |\varphi_i| \geqslant t\}$. Так как при всех $t \neq 0$ $\operatorname{diam} N_t < \delta$, то $\tau_\Omega(N_t) \leqslant CP_\Omega(N_t)$. Поэтому, дословно повторяя доказательство достаточности в теореме 6.3, получаем функцию $\hat{\varphi}_i \in BV(R^n)$, такую, что $\hat{\varphi}_i = \varphi_i$ в Ω и

$$\|\hat{\varphi}_i\|_{BV(R^n)} \leqslant (C+1)\|\varphi_i\|_{BV(\Omega)} \leqslant (C+1)(\|u\|_{BV(\Omega)} + d\|u\|_{L(\Omega)}).$$

Положим $\hat{u} = \sum \hat{\varphi}_i$. Очевидно, что $\hat{u} = u$ в Ω и

$$\|\hat{u}\|_{BV(R^n)} \leqslant \nu(C+1)(\|u\|_{BV(\Omega)} + d\|u\|_{L(\Omega)}).$$

§ 6.4. НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ КОНСТАНТЫ ДЛЯ ВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЕЙ

Согласно теореме 6.3 норма оператора продолжения $BV(\Omega) \to BV(R^n)$ выражается через точную константу в изопериметрическом неравенстве (6.3/2). В некоторых частных случаях последнюю можно найти. Так, для плоских выпуклых областей эта константа имеет простой геометрический смысл (см. следствие 6.4.4/2). Если Ω — n-мерный шар, то константа легко вычисляется (см. следствие 6.4.4/3).

6.4.1. Леммы об аппроксимации множества полиэдрами.

Лемма 1. *Пусть Ω — конечная выпуклая область в R^n и пусть $\mathscr{E} \subset \Omega$, $P_{R^n}(\mathscr{E}) < \infty$. Тогда существует последовательность полиэдров Π_k, таких, что $\Pi_k \to \mathscr{E}$ и*

$$\lim_{k\to\infty} P_\Omega(\Pi_k) = P_\Omega(\mathscr{E}), \quad \lim_{k\to\infty} P_{C\Omega}(\Pi_k) = P_{C\Omega}(\mathscr{E}). \tag{1}$$

Доказательство. Пусть Ω_ε — область, полученная из Ω подобным расширением с коэффициентом $1+\varepsilon$ и с центром в фиксированной точке области Ω. Обозначим через $\mathscr{E}_\varepsilon$ образ $\mathscr{E}$ при том же подобном преобразовании. Очевидно, что

$$P_{\Omega_\varepsilon}(\mathscr{E}_\varepsilon) = (1+\varepsilon)^{n-1} P_\Omega(\mathscr{E}), \quad P_{C\Omega_\varepsilon}(\mathscr{E}_\varepsilon) = (1+\varepsilon)^{n-1} P_{C\Omega}(\mathscr{E}).$$

Отсюда нетрудно получить, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} P_\Omega(\mathscr{E}_\varepsilon) = P_\Omega(\mathscr{E}), \quad \lim_{\varepsilon\to 0} P_{C\Omega}(\mathscr{E}_\varepsilon) = P_{C\Omega}(\mathscr{E}). \tag{2}$$

Действительно, $(1+\varepsilon)^{n-1} P_\Omega(\mathscr{E}) \geqslant P_\Omega(\mathscr{E}_\varepsilon)$ и, следовательно, $P_\Omega(\mathscr{E}) \geqslant \varlimsup_{\varepsilon\to 0} P_\Omega(\mathscr{E}_\varepsilon) \geqslant P_\Omega(\mathscr{E})$. Последнее неравенство следует из леммы 6.1.3/1.

Так как $P_\Omega(\mathscr{E}) + P_{C\Omega}(\mathscr{E}) = P(\mathscr{E})$ и $P_\Omega(\mathscr{E}_\varepsilon) + P_{C\Omega}(\mathscr{E}_\varepsilon) = P(\mathscr{E}_\varepsilon)$, то из первого равенства (2) получаем второе. При п. в. ε

$$\operatorname{var} \nabla\chi_{\mathscr{E}_\varepsilon}(\partial\Omega) = 0. \tag{3}$$

Пусть число ε удовлетворяет этому условию. Согласно теореме 6.1.3 существует последовательность полиэдров $\Pi_{k,\varepsilon}$, таких, что $\Pi_{k,\varepsilon} \to \mathscr{E}_\varepsilon$ и $P(\Pi_{k,\varepsilon}) \to P(\mathscr{E}_\varepsilon)$ при $k\to\infty$. Отсюда и из леммы 6.1.2/3 следует, что $\operatorname{var} \chi_{\Pi_{k,\varepsilon}} \xrightarrow{\text{слабо}} \operatorname{var} \nabla\chi_{\mathscr{E}_\varepsilon}$. Ввиду условия (3) имеем

$$\varlimsup_{k\to\infty} \operatorname{var} \nabla\chi_{\Pi_{k,\varepsilon}}(\partial\Omega) \leqslant \operatorname{var} \nabla\chi_{\mathscr{E}_\varepsilon}(\partial\Omega) = 0,$$

и поэтому

$$\lim_{k\to\infty} P_\Omega(\Pi_{k,\varepsilon}) = P_\Omega(\mathscr{E}_\varepsilon), \quad \lim_{k\to\infty} P_{C\Omega}(\Pi_{k,\varepsilon}) = P_{C\Omega}(\mathscr{E}_\varepsilon). \tag{4}$$

Выберем последовательность чисел ε_i, удовлетворяющих условию (3), так, что $\varepsilon_i \to 0$ при $i\to\infty$. Тогда из (2) и (4) следует

$$\lim_{i\to\infty}\lim_{k\to\infty} P_\Omega(\Pi_{k,\varepsilon_i}) = P_\Omega(\mathscr{E}), \quad \lim_{i\to\infty}\lim_{k\to\infty} P_{C\Omega}(\Pi_{k,\varepsilon_i}) = P_{C\Omega}(\mathscr{E}). \ \blacksquare$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие элементарные утверждения.

Лемма 2. *Пусть* Ω — *конечная выпуклая область в* R^n *и* Π — *конечный полиэдр. Тогда* $s(\partial\Pi \cap C\Omega) \geqslant s(\partial\Omega \cap \Pi)$.

Лемма 3. *Пусть* Ω — *конечная выпуклая область в* R^n *и пусть* $\mathscr{E} \subset \Omega$, $P_\Omega(\mathscr{E}) < \infty$. *Тогда существует такая последовательность полиэдров* Π_k, *что* $\Pi_k \to \mathscr{E}$ *и*

$$\lim_{k\to\infty} P_\Omega(\Pi_k \cap \Omega) = P_\Omega(\mathscr{E}), \quad \lim_{k\to\infty} P_{C\Omega}(\Pi_k \cap \Omega) = P_{C\Omega}(\mathscr{E}).$$

Доказательство. В силу леммы 1 существует последовательность полиэдров Π_k, $\Pi_k \to \mathscr{E}$, удовлетворяющая равенствам (1). Очевидно, что $P_\Omega(\Pi_k \cap \Omega) = P_\Omega(\Pi_k)$. Согласно лемме 6.3.2/3 $P_{C\Omega}(\Pi_k \cap \Omega) \leqslant P_{C\Omega}(\Pi_k)$. Следовательно,

$$\varlimsup_{k\to\infty} P_{C\Omega}(\Pi_k \cap \Omega) \leqslant \lim_{k\to\infty} P_{C\Omega}(\Pi_k) = P_{C\Omega}(\mathscr{E}), \tag{5}$$

$$\lim_{k\to\infty} P_\Omega(\Pi_k \cap \Omega) = \lim_{k\to\infty} P_\Omega(\Pi_k) = P_\Omega(\mathscr{E}). \tag{6}$$

Так как $\Pi_k \cap \Omega \to \mathscr{E}$, то

$$P_{R^n}(\mathscr{E}) \leqslant \varliminf_{k\to\infty} P_{R^n}(\Pi_k \cap \Omega). \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует $P_{C\Omega}(\mathscr{E}) \leqslant \varliminf_{k\to\infty} P_{C\Omega}(\Pi_k \cap \Omega)$, что вместе с (5) доказывает лемму.

6.4.2. Об одном свойстве $P_{C\Omega}$.

Лемма. *Пусть* $P(\Omega) < \infty$ *и* s-*почти всюду на* $\partial\Omega$ *существует нормаль к* Ω. *Тогда для любого множества* $\mathscr{E} \subset \Omega$

$$P_{C\Omega}(\mathscr{E}) + P_{C\Omega}(\Omega \setminus \mathscr{E}) = s(\partial\Omega).$$

Доказательство. Так как $\chi_\Omega = \chi_{\mathscr{E}} + \chi_{\Omega\setminus\mathscr{E}}$, то

$$\operatorname{var} \nabla\chi_\Omega(C\Omega) \leqslant \operatorname{var} \nabla\chi_{\mathscr{E}}(C\Omega) + \operatorname{var} \nabla\chi_{\Omega\setminus\mathscr{E}}(C\Omega) = \\ = P_{C\Omega}(\mathscr{E}) + P_{C\Omega}(\Omega \setminus \mathscr{E}).$$

Так как на $\partial\Omega$ s-почти всюду существует нормаль к Ω, то, в силу теоремы 6.2.2/1 $\operatorname{var} \nabla\chi_\Omega(C\Omega) = P_{R^n}(\Omega) = s(\partial\Omega)$. Следовательно, $s(\partial\Omega) \leqslant P_{C\Omega}(\mathscr{E}) + P_{C\Omega}(\Omega \setminus \mathscr{E})$.

Докажем обратное неравенство. Обозначим через $\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{B}^*$ приведенные границы множеств $\mathscr{E}$, $\Omega \setminus \mathscr{E}$. Множества $\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{B}^*$ s-измеримы (теорема 6.2.2/1). Отметим, что множества $\mathfrak{A}^* \cap \partial^*\Omega$, $\mathfrak{B}^* \cap \partial^*\Omega$ не пересекаются. Действительно, пусть существует точка $x \in \partial^*\Omega$, общая для $\mathfrak{A}^*$ и $\mathfrak{B}^*$. Тогда объемная плотность каждого из множеств $\mathscr{E}$, $\Omega \setminus \mathscr{E}$ в точке x равна $^1/_2$. Последнее невозможно, так как $x \in \partial^*\Omega$. Следовательно,

$$s(\mathfrak{A}^* \cap \partial^*\Omega) + s(\mathfrak{B}^* \cap \partial^*\Omega) \leqslant s(\partial\Omega).$$

Остается воспользоваться равенствами

$$s(\mathfrak{A}^* \cap \partial^*\Omega) = s(\mathfrak{A}^* \cap \partial\Omega) = P_{C\Omega}(\mathscr{E}),$$
$$s(\mathfrak{B}^* \cap \partial^*\Omega) = s(\mathfrak{B}^* \cap \partial\Omega) = P_{C\Omega}(\Omega \setminus \mathscr{E})$$

(см. теорему (6.2.2/1). ■

6.4.3. Представление функции множества $\tau_\Omega(\mathscr{E})$ для выпуклой области Ω.

Теорема. *Если Ω — конечная выпуклая область в R^n, то для любого множества $\mathscr{E} \subset \Omega$, $P(\mathscr{E}) < \infty$, выполняется равенство*

$$\tau_\Omega(\mathscr{E}) = \min[P_{C\Omega}(\mathscr{E}), P_{C\Omega}(\Omega \setminus \mathscr{E})]. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть для определенности $P_{C\Omega}(\mathscr{E}) \leqslant P_{C\Omega}(\Omega \setminus \mathscr{E})$ и пусть множество $\mathfrak{B}$ таково, что $\mathfrak{B} \cap \Omega = \mathscr{E}$, $P_{C\Omega}(\mathfrak{B}) = \tau_\Omega(\mathscr{E})$. Допустим сначала, что $m_n(\mathfrak{B}) < \infty$.

Согласно лемме 6.4.1/1 найдется последовательность полиэдров Π_k, $\Pi_k \to \mathfrak{B}$, такая, что

$$\lim_{k\to\infty} P_\Omega(\Pi_k) = P_\Omega(\mathfrak{B}), \quad \lim_{k\to\infty} P_{C\Omega}(\Pi_k) = P_{C\Omega}(\mathfrak{B}). \tag{2}$$

Так как $m_n(\mathfrak{B}) < \infty$, то полиэдры Π_k конечны. В силу леммы 6.4.1/2 $P_{C\Omega}(\Pi_k \cap \Omega) \leqslant P_{C\Omega}(\Pi_k)$. Отсюда и из (2) получаем

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, P_{C\Omega}(\Pi_k \cap \Omega) \leqslant P_{C\Omega}(\mathfrak{B}). \tag{3}$$

Ввиду того что $\Pi_k \cap \Omega \to \mathfrak{B} \cap \Omega$, имеем $P(\mathfrak{B} \cap \Omega) \leqslant \underline{\lim}_{k\to\infty} P(\Pi_k \cap \Omega)$, что вместе с первым равенством (2) дает

$$P_{C\Omega}(\mathscr{E}) = P_{C\Omega}(\mathfrak{B} \cap \Omega) \leqslant \underline{\lim}_{k\to\infty} P_{C\Omega}(\Pi_k \cap \Omega).$$

Отсюда и из (6.4.3/3) следует $P_{C\Omega}(\mathscr{E}) \leqslant P_{C\Omega}(\mathfrak{B}) = \tau_\Omega(\mathscr{E})$. Итак, $P_{C\Omega}(\mathscr{E}) = \tau_\Omega(\mathscr{E})$.

Пусть теперь $m_n(\mathfrak{B}) = \infty$. Так как $P_{C\Omega}(\mathfrak{B}) < \infty$, то в этом случае $m_n(C\mathfrak{B}) < \infty$ (см. (6.1.7/1)). Заметим далее, что $P_{C\Omega}(C\mathfrak{B}) = P_{C\Omega}(\mathfrak{B}) = \tau_\Omega(\mathscr{E}) = \tau_\Omega(\Omega \setminus \mathscr{E})$. Отсюда согласно доказанному $\tau_\Omega(\Omega \setminus \mathscr{E}) = P_{C\Omega}(\Omega \setminus \mathscr{E})$ и, значит, ввиду (1) $\tau_\Omega(\mathscr{E}) = P_{C\Omega}(\Omega \setminus \mathscr{E}) \geqslant P_{C\Omega}(\mathscr{E})$.

Так как очевидно, что $\tau_\Omega(\mathscr{E}) \leqslant P_{C\Omega}(\mathscr{E})$, то получаем $\tau_\Omega(\mathscr{E}) = P_{C\Omega}(\mathscr{E})$.

6.4.4. Функция $|\Omega|$ для выпуклой области.

Следствие 1. Пусть Ω — ограниченная выпуклая область. Тогда

$$|\Omega| = \inf\{k\colon P_{C\Omega}(\mathscr{E}) \leqslant kP_\Omega(\mathscr{E})\},$$

где $\mathscr{E}$ — любое подмножество Ω, удовлетворяющее условию $P_{C\Omega}(\mathscr{E}) \leqslant \leqslant {}^1/_2 s(\partial\Omega)$.

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы 6.4.3 и леммы 6.4.2.

Следствие 2. Пусть Ω — конечная выпуклая область в R^2. Тогда $|\Omega| = (1/2h)\, s(\partial\Omega)$, где h — минимум длин отрезков, концы которых разбивают $\partial\Omega$ на дуги равной длины.

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть $\mathscr{E}$ — измеримое подмножество Ω, такое, что $P_\Omega(\mathscr{E}) > 0$, $P_{C\Omega}(\mathscr{E}) < < {}^1/_2 s(\partial\Omega)$ и $|\Omega| - P_{C\Omega}(\mathscr{E})/P_\Omega(\mathscr{E}) < \varepsilon$ (см. следствие 1). Согласно лемме 6.4.1/3 найдется многоугольник Π, такой, что $|\Omega| - - P_{C\Omega}(\Pi \cap \Omega)/P_\Omega(\Pi) < 2\varepsilon$.

Пусть A, B — точки пересечения $\partial\Omega$ с какой-либо компонентой границы Π. Точки A, B можно выбрать так, что участок рассматриваемой компоненты $\partial\Pi$, ограниченный точками A и B, весь принадлежит Ω. Прямолинейный отрезок AB разбивает Ω на два множества: Q и Q'. Пусть $P_{C\Omega}(Q) \leqslant P_{C\Omega}(Q')$. Очевидно, что $P_{C\Omega}(Q)/AB \geqslant P_{C\Omega}(\Pi \cap \Omega)/P_\Omega(\Pi)$ и, следовательно,

$$|\Omega| - P_{C\Omega}(Q)/AB < 2\varepsilon. \tag{1}$$

Если $P_{C\Omega}(Q) = P_{C\Omega}(Q')$, то вследствие неравенства $AB \geqslant h$ и произвольности ε из неравенства (1) получаем требуемое утверждение.

Пусть $P_{C\Omega}(Q) < P_{C\Omega}(Q')$. Сдвинем отрезок AB параллельно в новое положение $A'B'$ ($A' \in \partial\Omega$, $B' \in \partial\Omega$) так, чтобы $P_{C\Omega}(Q_1) = P_{C\Omega}(Q_1')$, где Q_1, Q_1' — области, на которые отрезок $A'B'$ разбивает Ω.

Элементарный подсчет показывает, что $P_{C\Omega}(Q_1)/A'B' \geqslant \geqslant P_{C\Omega}(Q)/AB$. Это вместе с (1) доказывает следствие.

Лемма. *Пусть Ω — единичный шар в R^n. Тогда величина* $\inf\{P_{C\Omega}(\mathscr{E})\colon \mathscr{E} \subset \Omega,\ P_\Omega(\mathscr{E}) = p = \mathrm{const} \leqslant \omega_n\}$ *равна площади сферической части границы шарового сегмента, основание которого имеет площадь p.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{E} \subset \Omega$, $P_\Omega(\mathscr{E}) = p$. В силу леммы 6.4.1/3 существует последовательность полиэдров Π_k, $\Pi_k \to \mathscr{E}$, такая, что $P_\Omega(\Pi_k) \to p$, $P_{C\Omega}(\Pi_k \cap \Omega) \to P_{C\Omega}(\mathscr{E})$.

Произведем сферическую симметризацию множества $\Pi_k \cap \Omega$ относительно некоторого луча l с началом в центре Ω. Получим симметричное относительно l множество Π_k' с кусочно-гладкой границей и такое, что

$$P_\Omega(\Pi_k') \leqslant P_\Omega(\Pi_k), \quad P_{C\Omega}(\Pi_k') = P_{C\Omega}(\Pi_k \cap \Omega).$$

Обозначим через Q_k шаровой сегмент, сферической частью границы которого является $\partial\Pi_k' \cap \partial\Omega$. Очевидно, что $P_\Omega(Q_k) \leqslant P_\Omega(\Pi_k')$, $P_{C\Omega}(Q_k) = P_{C\Omega}(\Pi_k')$, откуда и следует утверждение леммы.

Следующие утверждения выводятся из леммы простым подсчетом.

Следствие 3. 1) Если Ω — единичный шар в R^n, то $|\Omega| = \omega_n/2v_{n-1}$.

2) Если Ω — единичный шар в R^3, то для любого $\mathscr{E} \subset \Omega$ справедливо неравенство $4\pi P_\Omega(\mathscr{E}) \geqslant P_{C\Omega}(\mathscr{E})(4\pi - P_{C\Omega}(\mathscr{E}))$.

3) Если Ω — единичный круг, то для любого $\mathscr{E} \subset \Omega$ справедливо неравенство $P_\Omega(\mathscr{E}) \geqslant 2\sin(^1/_2 P_{C\Omega}(\mathscr{E}))$.

§ 6.5. ГРУБЫЙ СЛЕД ФУНКЦИИ ИЗ $BV(\Omega)$ И НЕКОТОРЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

6.5.1. Определение грубого следа и его свойства. Определим на приведенной границе Ω «грубый след» u^* функции $u \in BV(\Omega)$. Положим *

$$u^*(x) = \sup\{t\colon\ P(N_t) < \infty, \quad x \in \partial^* N_t\}, \quad \text{где } x \in \partial^*\Omega.$$

Очевидно, что если функция u имеет предельное значение в точке $x \in \partial^*\Omega$, то $u^*(x) = \lim\limits_{y \to x} u(y)$.

Лемма 1. *Пусть* $s(\partial\Omega) < \infty$. *Тогда для любого множества* $\mathscr{E} \subset \Omega$ *из* $P_\Omega(\mathscr{E}) < \infty$ *следует* $P(\mathscr{E}) < \infty$.

Доказательство. Из конечности $s(\partial\Omega)$ следует, что можно построить последовательность полиэдров Π_k, $\Pi_k \subset \Omega$, $\Pi_k \to \Omega$, таких, что $s(\partial\Pi_k) \leqslant K < \infty$. Так как $P_\Omega(\mathscr{E}) < \infty$, то $P_\Omega(\mathscr{E} \cap \Pi_k) \leqslant K_1 < \infty$. Кроме того, $\mathscr{E} \cap \Pi_k \to \mathscr{E}$. Этим вследствие леммы 6.1.3/1 утверждение доказано.

Следствие. *Если* $s(\partial\Omega) < \infty$ *и* $u \in BV(\Omega)$, *то* $P(N_t) < \infty$ *при* п. в. t.

Лемма 2. *Пусть* $s(\partial\Omega) < \infty$ *и* $u \in BV(\Omega)$. *Тогда грубый след* $u^*(x)$ *является* s-*измеримой функцией на* $\partial^*\Omega$, *причем при* п. в. t

$$s(\{x\colon\ x \in \partial^*\Omega,\ u^*(x) \geqslant t\}) = s(\partial^*\Omega \cap \partial^* N_t). \tag{1}$$

Доказательство. Пусть число t таково, что $P(N_t) < \infty$. Рассмотрим множество $\mathscr{B}_t = \{x\colon\ x \in \partial^*\Omega,\ u^*(x) \geqslant t\}$. Из определения u^* следует, что $\mathscr{B}_t \supset \partial^* N_t \cap \partial^*\Omega$. Как известно (теорема 6.2.2/1), множество $\partial^* N_t \cap \partial^*\Omega$ измеримо относительно s. Множества $\mathscr{B}_t \setminus [\partial^* N_t \cap \partial^*\Omega]$ при различных t не пересекаются, следовательно, при п. в. t $s(\mathscr{B}_t \setminus [\partial^* N_t \cap \partial^*\Omega]) = 0$. Поэтому при п. в. t измеримо множество $\mathscr{B}_t$ и, следовательно, функция $u^*(x)$ измерима.

6.5.2. О суммируемости грубого следа.

Теорема. *Пусть* $P(\Omega) < \infty$ *и пусть* s-*почти всюду на* $\partial\Omega$ *существует нормаль к* Ω. *Тогда для того чтобы для любой функции*

---

* Точную верхнюю грань пустого множества считаем равной $-\infty$.

$u \in BV(\Omega)$ имела место оценка

$$\inf_c \int_{\partial\Omega} |u^* - c|\, s(dx) \leq k \| u \|_{BV(\Omega)}, \tag{1}$$

где k не зависит от u, необходимо и достаточно, чтобы для любого множества $\mathscr{E} \subset \Omega$ было верно неравенство

$$\min\{P_{C\Omega}(\mathscr{E}),\ P_{C\Omega}(\Omega \setminus \mathscr{E})\} \leq kP_\Omega(\mathscr{E}). \tag{2}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathscr{E} \subset \Omega$, $P_\Omega(\mathscr{E}) < \infty$. Тогда по лемме 6.5.1/1 $P(\mathscr{E}) < \infty$. Пусть $\chi_\mathscr{E}$ — характеристическая функция множества $\mathscr{E}$. Тогда

$$\inf_c \int_{\partial\Omega} |\chi_\mathscr{E}^*(x) - c| s(dx) = \min_c \{|1 - c| s(\partial^*\mathscr{E} \cap \partial^*\Omega) + |c| s(\partial^*\Omega \setminus \partial^*\mathscr{E})\} =$$
$$= \min\{s(\partial^*\mathscr{E} \cap \partial^*\Omega),\ s(\partial^*\Omega \setminus \partial^*\mathscr{E})\} = \min\{P_{C\Omega}(\mathscr{E}),\ P_{C\Omega}(\Omega \setminus \mathscr{E})\}.$$

(Последнее равенство справедливо, так как по условию $s(\partial\Omega \setminus \partial^*\Omega) = 0$.)

Вместе с тем $\|\chi_\mathscr{E}\|_{BV(\Omega)} = P_\Omega(\mathscr{E})$. Применяя (1), получаем (2).

Достаточность. Пусть $u \in BV(\Omega)$. Очевидно, что $s(\partial\Omega \cap \partial^* N_t)$ как функция t не возрастает. Действительно, пусть $x \in \partial^*\Omega \cap \partial^* N_t$ и пусть $\tau < t$. Тогда

$$1 = \lim_{\rho \to 0} 2v_n \rho^{-n} m_n(\Omega \cap B_\rho) \geq \lim_{\rho \to 0} 2v_n \rho^{-n} m_n(N_\tau \cap B_\rho) \geq$$
$$\geq \lim_{\rho \to 0} 2v_n \rho^{-n} m_n(N_t \cap B_\rho) = 1,$$

т. е. $x \in \partial^*\Omega \cap \partial^* N_\tau$.

Аналогично $s(\partial\Omega \setminus \partial^* N_t)$ — неубывающая функция t. В силу формулы (6.1.6/1) имеем

$$k\| u \|_{BV(\Omega)} = k \int_{-\infty}^{+\infty} P_\Omega(N_t)\, dt \geq \int_{-\infty}^{+\infty} \min[s(\partial\Omega \cap \partial^* N_t),$$
$$s(\partial\Omega \setminus \partial^* N_t)]\, dt.$$

Положим $t_0 = \sup\{t:\ P(N_t) < \infty,\ s(\partial\Omega \cap \partial^* N_t) \geq s(\partial\Omega \setminus \partial^* N_t)\}$. Тогда

$$k\| u \|_{BV(\Omega)} \geq \int_{t_0}^{\infty} s(\partial\Omega \cap \partial^* N_t)\, dt + \int_{-\infty}^{t_0} s(\partial\Omega \setminus \partial^* N_t)\, dt =$$
$$= \int_{t_0}^{\infty} s(\{x:\ u^*(x) \geq t\})\, dt + \int_{-\infty}^{t_0} s(\{x:\ u^*(x) \leq t\})\, dt =$$
$$= \int_{\partial\Omega} [u^*(x) - t_0]^+ s(dx) + \int_{\partial\Omega} [u^*(x) - t_0]^- s(dx) =$$
$$= \int_{\partial\Omega} |u^*(x) - t_0|\, s(dx).$$

Следовательно, $k\| u \|_{BV(\Omega)} \geq \inf_c \int_{\partial\Omega} |u^* - c|\, s(dx)$, что и доказывает теорему. Из следствия 6.4.4/1 получаем, что для выпуклой области Ω точная константа в (1) равна $|\Omega|$. В частности, для плоской выпуклой области эта константа совпадает с отношением $^1/_2 s(\partial\Omega)$ к длине наименьшей хорды, делящей $\partial\Omega$ на дуги равной длины (следствие 6.4.4/2).

Согласно следствию 6.4.4/3 для единичного шара точная константа в (1) равна $\omega_n/2v_{n-1}$.

6.5.3. Точные константы в некоторых интегральных оценках грубого следа.

Определение 1. Пусть $\mathscr{A}\subset\Omega$. Обозначим через $\zeta^{(\alpha)}_{\mathscr{A}}$ точную нижнюю границу тех k, для которых $[P_{C\Omega}(\mathscr{E})]^{\alpha}\leqslant kP_{\Omega}(\mathscr{E})$ для всех множеств $\mathscr{E}\subset\Omega$, удовлетворяющих условию

$$m_n(\mathscr{E}\cap\mathscr{A})+s(\mathscr{A}\cap\partial^*\mathscr{E})=0. \tag{1}$$

Теорема. *Пусть $P(\Omega)<\infty$ и пусть s-почти всюду на Ω существует нормаль к Ω. Тогда для любой функции $u\in BV(\Omega)$, такой, что $u(\mathscr{A}\cap\Omega)=0$, $u^*(\mathscr{A}\cap\partial^*\Omega)=0$, выполняется неравенство*

$$\int_{\partial\Omega}|u^*|\,s(dx)\leqslant\zeta^{(1)}_{\mathscr{A}}\|u\|_{BV(\Omega)}, \tag{2}$$

причем константа $\zeta^{(1)}_{\mathscr{A}}$ точная.

Доказательство. Имеем

$$\int_{\partial\Omega}|u^*|\,s(dx)=\int_0^\infty s(\{x:\ u^*\geqslant t\})\,dt+\int_0^\infty s(\{x:\ -u^*\geqslant t\})\,dt.$$

В силу формулы (6.1.6/1) первый интеграл в правой части равен

$$\int_0^\infty s(\partial^*N_t\cap\partial^*\Omega)\,dt=\int_0^\infty P_{C\Omega}(N_t)\,dt.$$

Отметим, что $m_n(\mathscr{A}\cap N_t)+s(\mathscr{A}\cap\partial^*N_t)=0$ при п. в. $t\geqslant 0$. Следовательно, по определению $\zeta^{(1)}_{\mathscr{A}}$

$$\int_0^\infty s(\{x:\ u^*\geqslant t\})\,dt\leqslant\int_0^\infty P_{C\Omega}(N_t)\,dt\leqslant\zeta^{(1)}_{\mathscr{A}}\int_0^\infty P_{\Omega}(N_t)\,dt.$$

Аналогично получаем

$$\int_0^\infty s(\{x:\ -u^*\geqslant t\})\,dt\leqslant\int_{-\infty}^0 P_{C\Omega}(\Omega\setminus N_t)\,dt\leqslant\zeta^{(1)}_{\mathscr{A}}\int_{-\infty}^0 P_{\Omega}(N_t)\,dt.$$

Окончательно
$$\int_{\partial\Omega}|u^*|\,s(dx)\leqslant\zeta^{(1)}_{\mathscr{A}}\|u\|_{BV(\Omega)}.$$

Для того чтобы показать точность константы $\zeta^{(1)}_{\mathscr{A}}$, достаточно положить в неравенстве (2) $u=\chi_{\mathscr{E}}$, где $\mathscr{E}$ — множество, удовлетворяющее условию (1).

Определение 2. Введем функцию

$$\zeta_\alpha(S)=\sup\{([P_{C\Omega}(\mathscr{E})]^\alpha/P_\Omega(\mathscr{E})):\ \mathscr{E}\subset\Omega,\ P_\Omega(\mathscr{E})>0,\ P_{C\Omega}(\mathscr{E})\leqslant S\}.$$

Из последней теоремы получаем такое очевидное утверждение.

Следствие. Пусть $P(\Omega)<\infty$ и пусть s-почти всюду на $\partial\Omega$ существует нормаль к Ω. Тогда для любой функции $u\in BV(\Omega)$, такой, что $s(\{x: u^*(x)\neq 0\})\leq S$, справедливо неравенство

$$\int_{\partial\Omega}|u^*|\,s(dx)\leq \zeta_1(S)\,\|u\|_{BV(\Omega)},$$

причем константа $\zeta_1(S)$ точная.

Из леммы 6.4.4 следует, что для шара функция $\zeta_1(S)$ совпадает с отношением S к площади основания шарового сегмента, сферическая часть границы которого имеет площадь S. В частности, $\zeta_1(S)=S/(2\sin(S/2))$ при $n=2$ и $\zeta_1(S)=4\pi/(4\pi-S)$ при $n=3$.

Лемма. *Пусть Ω — область, $P(\Omega)<\infty$ и s-почти всюду на $\partial\Omega$ существует нормаль к Ω. Тогда*

$$\eta(S)\overset{\mathrm{def}}{=}\inf\{P_\Omega(\mathscr{E}): \mathscr{E}\subset\Omega,\ P_{C\Omega}(\mathscr{E})\geq S,\ P_{C\Omega}(\Omega\setminus\mathscr{E})\geq S\}>0.$$

Доказательство. Пусть $\{\mathscr{E}_i\}$ — минимизирующая последовательность для $\eta(S)$. Если $\varliminf_{i\to\infty}\min\{m_n\mathscr{E}_i,\ m_n(\Omega\setminus\mathscr{E}_i)\}>0$, то утверждение леммы следует из теоремы 6.1.3 и леммы 3.2.4. Пусть этот нижний предел равен нулю и пусть для определенности $m_n\mathscr{E}_i\to 0$. Тогда $m_n(\Omega\setminus\mathscr{E}_i)\to m_n\Omega$. По лемме 6.1.3/1 $\varliminf_{i\to\infty}P(\Omega\setminus\mathscr{E}_i)\geq P(\Omega)=s(\partial\Omega)$. По лемме 6.4.2 $s(\partial\Omega)=P_{C\Omega}(\mathscr{E}_i)+$ $+P_{C\Omega}(\Omega\setminus\mathscr{E}_i)$. Кроме того, всегда $P(\Omega\setminus\mathscr{E}_i)=P_\Omega(\Omega\setminus\mathscr{E}_i)+$ $+P_{C\Omega}(\Omega\setminus\mathscr{E}_i)$. Итак, для любого $\varepsilon>0$ при достаточно больших i

$$P_\Omega(\Omega\setminus\mathscr{E}_i)\geq P_{C\Omega}(\mathscr{E}_i)-\varepsilon\geq S-\varepsilon,$$

т. е. $\inf P_\Omega(\Omega\setminus\mathscr{E})\geq S$. ■

Очевидно, что введенная в лемме этого пункта функция η связана с ζ_α равенством $\zeta_\alpha(S)=S^\alpha/\eta(S)$.

Из той же леммы немедленно следует, что если Ω — область, $P(\Omega)=s(\partial\Omega)<\infty$ и $\zeta_\alpha(S)<\infty$ при некотором $S<s(\partial\Omega)$, то величина $\zeta_\alpha(S)$ конечна при всех $S\in(0,\ s(\partial\Omega))$.

Отсюда и из теоремы 6.5.2 получаем, что неравенство (6.5.2/1) имеет место в том и только в том случае, если $\zeta_1(S)<\infty$ при некотором $S\in(0,\ s(\partial\Omega))$.

6.5.4. Еще о суммируемости грубого следа.

Теорема. *Пусть $P(\Omega)<\infty$ и пусть s-почти везде на $\partial\Omega$ существует нормаль к Ω. Тогда для того, чтобы любая функция $u\in BV(\Omega)$ удовлетворяла неравенству*

$$\|u^*\|_{L(\partial\Omega)}\leq k(\|u\|_{BV(\Omega)}+\|u\|_{L(\Omega)}),\tag{1}$$

где постоянная k не зависит от u, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие. Существует такое $\delta>0$, что для каждого измеримого множества $\mathscr{E}\subset\Omega$, диаметр которого меньше δ, справедлива оценка

$$P_{C\Omega}(\mathscr{E})\leq k_1P_\Omega(\mathscr{E}),\tag{2}$$

где постоянная k_1 не зависит от $\mathscr{E}$.

Необходимость условия (2) легко получить, полагая в (1) $u=\chi_{\mathscr{E}}$ и применяя изопериметрическое неравенство. Достаточность может быть получена из теоремы 6.5.3, если воспользоваться разбиением единицы (ср. с доказательством теоремы 6.2.2/2).

Замечание. Если каждое из множеств Ω_1, Ω_2 удовлетворяет условиям теоремы, то их объединение также удовлетворяет этим условиям.

Доказательство следует из формулы (6.3.2/4).

6.5.5. Продолжение функции из $BV(\Omega)$ **на** $C\Omega$ **постоянной.** В данном пункте мы всюду предполагаем, что $P(\Omega)<\infty$ и $s(\partial\Omega\setminus\partial^*\Omega)=0$.

Введем обозначение $u_c(x)=u(x)$ при $x\in\Omega$, $u_c(x)=c$ при $x\in C\Omega$, где $c\in R^1$.

Лемма. *Имеет место равенство*

$$\|u_c\|_{BV(R^n)}=\|u\|_{BV(\Omega)}+\|u^*-c\|_{L(\partial\Omega)}. \tag{1}$$

Доказательство. Имеем

$$\|u_c\|_{BV(R^n)}=\int_0^\infty P(\{x:\ |u_c-c|>t\})\,dt=$$
$$=\int_0^\infty P_\Omega(\{x:\ |u-c|>t\})\,dt+\int_0^\infty P_{C\Omega}(\{x:\ |u-c|>t\})\,dt. \tag{2}$$

Очевидно, что

$$\int_0^\infty P_\Omega(\{x:\ |u-c|>t\})\,dt=\|u\|_{BV(\Omega)}. \tag{3}$$

Далее, так как $s(\partial\Omega\setminus\partial^*\Omega)=0$, то

$$\int_0^\infty P_{C\Omega}(\{x:\ |u-c|>t\})\,dt=\int_0^\infty s(\{x:\ (u-c)^*>t\})\,dt+$$
$$+\int_{-\infty}^0 s(\{x:\ (u-c)^*<t\})\,dt=\int_{\partial\Omega}|(u-c)^*|\,s(dx)=\int_{\partial\Omega}|u^*-c|\,s(dx),$$

что вместе с (2) и (3) доказывает равенство (1).

Обозначим через $\overset{\circ}{BV}(\Omega)$ подмножество $BV(\Omega)$, состоящее из функций, для которых $\|u_0\|_{BV(R^n)}=\|u\|_{BV(\Omega)}$. Тогда из (1) следует, что для рассматриваемого класса областей $u\in\overset{\circ}{BV}(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $u^*=0$. Значит, элементами фактор-пространства $BV(\Omega)/\overset{\circ}{BV}(\Omega)$ являются классы функций, имеющих равные грубые следы u^*.

Из формулы (1) и теоремы 6.5.2 получаем следующее утверждение.

Следствие 1. *Если для любого множества* $\mathscr{E}\subset\Omega$

$$\min[P_{C\Omega}(\mathscr{E}),\quad P_{C\Omega}(\Omega\setminus\mathscr{E})]\leqslant kP_\Omega(\mathscr{E}), \tag{4}$$

где постоянная k не зависит от $\mathscr{E}$, то найдется такое c, что

$$\|u_c\|_{BV(R^n)}\leqslant(k+1)\|u\|_{BV(\Omega)}. \tag{5}$$

Обратно, если для каждой функции $u \in BV(\Omega)$ найдется такое c, что выполняется неравенство (5), *где k не зависит от u, то для любого множества $\mathscr{E} \subset \Omega$ справедливо неравенство* (4).

Следствие 2. *Для того чтобы для любой функции $u \in BV(\Omega)$ выполнялось неравенство*

$$\|u_0\|_{BV(R^n)} \leqslant k(\|u\|_{BV(\Omega)} + \|u\|_{L(\Omega)}) \tag{6}$$

с постоянной k, не зависящей от u, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число $\delta > 0$, что для любого измеримого множества $\mathscr{E} \subset \Omega$, $\operatorname{diam} \mathscr{E} < \delta$, справедливо неравенство $P_{C\Omega}(\mathscr{E}) \leqslant k_1 P_\Omega(\mathscr{E})$, где k_1 не зависит от $\mathscr{E}$.

Необходимость немедленно следует из равенства (1) и изопериметрического неравенства. Достаточность следует из (1) и теоремы 6.5.4.

Из неравенства (6.3.2/4) получаем следующее утверждение.

Следствие 3. *Если каждое из открытых множеств Ω_1, Ω_2 удовлетворяет условиям следствия 2, то их объединение также удовлетворяет этим условиям.*

Отсюда, в частности, вытекает, что для множеств Ω, представимых в виде конечного объединения областей с липшицевыми границами, любую функцию из $BV(\Omega)$ можно продолжить нулем на все пространство, так что будет выполняться неравенство (6).

6.5.6. Мультипликативные оценки грубого следа. Будем предполагать, что $P(\Omega) < \infty$ и s-почти всюду на $\partial\Omega$ существует нормаль к Ω. Через $\mathscr{A}$ обозначим подмножество $\bar{\Omega}$ и через $\zeta_{\mathscr{A}}^{(\alpha)}$ и $\zeta_\alpha(S)$ — функции, введенные в определениях 6.5.3/1 и 6.5.3/2. Следующее утверждение дополняет теорему 6.5.3.

Теорема. 1) *Если $\zeta_{\mathscr{A}}^{(1/q^*)} < \infty$, где $q^* \leqslant 1$, то для любой функции $u \in BV(\Omega)$, такой, что*

$$u(x) = 0 \text{ при } x \in \mathscr{A} \cap \Omega, \quad u^*(x) = 0 \text{ при } x \in \mathscr{A} \cap \partial^*\Omega, \tag{1}$$

выполняется неравенство

$$\|u^*\|_{L_q(\partial\Omega)} \leqslant C(\|u\|_{BV(\Omega)}^{1-\varkappa} \|u^*\|_{L_t(\partial\Omega)}^{\varkappa}), \tag{2}$$

где $0 < t < q < q^*$,

$$\varkappa = t(q^* - q)/q(q^* - t) \tag{3}$$

и $C^{q(q^*-t)/q^*(q-t)} \leqslant c\zeta_{\mathscr{A}}^{(1/q^*)}$.

2) *Если для всех $u \in BV(\Omega)$, удовлетворяющих условию* (1), *выполняется неравенство* (2), *где число $\varkappa$ определено формулой* (3) *и $q^* > q$, $q^* > t$, то $\zeta_{\mathscr{A}}^{(1/q^*)} \leqslant C^{q(q^*-t)/q^*(q-t)}$.*

Доказательство. 1) Рассуждая точно так же, как и в доказательстве теоремы 6.5.3, получаем неравенство

$$\int_0^\infty [s(\Gamma_\tau)]^{1/q^*} d\tau \leqslant \zeta_{\mathscr{A}}^{(1/q^*)} \|u\|_{BV(\Omega)}, \tag{4}$$

где $\Gamma_\tau = \{x \in \partial\Omega : |u^*(x)| \geqslant \tau\}$.

Положим в лемме 1.3.3/2 $\xi=t^q$, $f(\xi)=s(\Gamma_\tau)$, $b=1/q^*$, $a\in$ $\in(1, \infty)$, $\lambda=a(q-t)/q$, $\mu=(q^*-q)/q^*q$. Тогда

$$\int_0^\infty s(\Gamma_\tau)\tau^{q-1}d\tau\leqslant c\left(\int_0^\infty[s(\Gamma_\tau)]^a\tau^{at-1}d\tau\right)^{(q^*-q)/q(q^*-t)}\times$$
$$\times\left(\int_0^\infty[s(\Gamma_\tau)]^{1/q^*}d\tau\right)^{q^*(q-t)/(q^*-t)}. \tag{5}$$

Так как $a>1$ и функция $s(\Gamma_\tau)$ не возрастает, то к первому множителю можно применить лемму 1.3.3/1. Тогда

$$\int_0^\infty[s(\Gamma_\tau)]^a\tau^{at-1}d\tau\leqslant c\left(\int_0^\infty s(\Gamma_\tau)\tau^{t-1}d\tau\right)^a=c\left(\int_{\partial\Omega}|u^*(x)|^t s(dx)\right)^a. \tag{6}$$

Объединяя (4) — (6), получаем утверждение первой части теоремы.

2) Нижняя оценка константы C получается в результате подстановки в (2) функции $\chi_{\mathscr{E}}$, где $\mathscr{E}$ — множество, удовлетворяющее условию (6.5.3/1).

Рассмотрим две области, для которых можно получить точные условия конечности функции $\zeta^{(\alpha)}_{\mathscr{A}}$.

Пример 1. Пусть $x=(x', x_n)$, $x'\in R^{n-1}$ и $\Omega=\{x\colon 1<x_n<|x'|^{-\beta}, |x'|<1\}$, где $0<\beta<n-2$, и пусть $\mathscr{A}=\{x\colon x_n=1, |x'|<1\}$. Покажем, что $\zeta^{(\alpha)}_{\mathscr{A}}<\infty$ при $\alpha=(n-1)/(n-2-\beta)$. (Неулучшаемость этого значения α проверяется на последовательности множеств $\mathscr{E}_m=\{x\in\Omega\colon x_n>m\}$, $m=1, 2, \ldots$)

Хотя область Ω не выпуклая, к ней применимо доказательство леммы 6.3.2/3. Поэтому достаточно проверить оценку

$$[P_\Omega(\mathscr{E})]^{(n-1)/(n-2-\beta)}\leqslant cP_\Omega(\mathscr{E}) \tag{7}$$

для любого множества $\mathscr{E}$, являющегося пересечением полиэдра с Ω и не пересекающего $\mathscr{A}$. Но эта оценка уже была получена в примере 4.11.2/1.

Пример 2. Рассуждая точно так же и ссылаясь на пример 4.12/2, можно показать, что для области $\Omega=\{x\colon |x'|<x_n^\beta, 0<x_n<1\}$, $\beta\geqslant 1$, и множества $\mathscr{A}=\{x\colon |x'|<1, x_n=1\}$ величина $\zeta^{(\alpha)}_{\mathscr{A}}$ конечна при $\alpha=\beta(n-1)/(\beta(n-2)+1)$ и что это значение α точное.

Из теоремы этого пункта получается, что ограниченность величины $\zeta_{1/q^*}(S)$ — необходимое и достаточное условие справедливости неравенства (2) для любой функции $u\in BV(\Omega)$, такой, что $s(\{x\colon u^*(x)\neq 0\})\leqslant S$ (ср. со следствием 6.5.3). Отсюда очевидно, что ограниченность $\zeta_{1/q^*}(S)$ при некотором $S<P(\Omega)$ необходима и достаточна для справедливости неравенства

$$\|u^*\|_{L_q(\partial\Omega)}\leqslant\left(C_1\|u\|_{BV(\Omega)}+C_2\|u^*\|_{L_r(\partial\Omega)}\right)^{1-\varkappa}\|u^*\|^{\varkappa}_{L_t(\partial\Omega)}, \tag{8}$$

где u — любая функция из $BV(\Omega)$, $r<q^*$, а числа q^*, q, t и $\varkappa$ — те же, что и в теореме этого пункта (ср. с теоремой 4.3.3).

6.5.7. Оценка нормы в $L_{n/(n-1)}(\Omega)$ функции из $BV(\Omega)$ с суммируемым грубым следом. В заключение параграфа докажем утверждение, аналогичное следствию 3.6.3.

Теорема. *Пусть $P(\Omega)<\infty$ и s-почти всюду на $\partial\Omega$ существует нормаль к Ω. Тогда для любой функции $u\in BV(\Omega)$ имеет место неравенство*

$$\|u\|_{L_{n/(n-1)}(\Omega)}\leqslant nv_n^{-1/n}(\|u\|_{BV(\Omega)}+\|u^*\|_{L(\partial\Omega)}), \tag{1}$$

причем константа $nv_n^{-1/n}$ точная.

Доказательство. Имеем в силу (3.6.3/1)

$$\|u\|_{L_{n/(n-1)}(\Omega)}\leqslant\int_0^{+\infty}[m_nN_t]^{(n-1)/n}dt=$$
$$=\int_0^{+\infty}[m_nM_t]^{(n-1)/n}dt+\int_{-\infty}^0[m_n(\Omega\setminus M_t)]^{(n-1)/n}dt,$$

где $M_t=\{x\colon u(x)\geqslant t\}$. Согласно изопериметрическому неравенству (6.1.5/1)

$$[m_nM_t]^{(n-1)/n}\leqslant nv_n^{-1/n}P(M_t)=nv_n^{-1/n}[P_\Omega(M_t)+s(\partial^*M_t\cap\partial^*\Omega)].$$

Так как при п. в. t $s(\partial^*M_t\cap\partial^*\Omega)=s(\{x\colon u^*\geqslant t\})$ (лемма 6.5.1/2), то

$$\int_0^\infty[m_nM_t]^{(n-1)/n}dt\leqslant nv_n^{-1/n}\left[\int_0^\infty P_\Omega(M_t)\,dt+\int_0^\infty s(\{x\colon u^*\geqslant t\})\,dt\right].$$

Принимая во внимание, что по лемме 6.4.2 $P_{C\Omega}(M_t)+P_{C\Omega}(\Omega\setminus M_t)=P(\Omega)$, получаем аналогично

$$\int_{-\infty}^0[m_n(\Omega\setminus M_t)]^{(n-1)/n}dt\leqslant$$
$$\leqslant nv_n^{-1/n}\left[\int_{-\infty}^0 P_\Omega(M_t)\,dt+\int_{-\infty}^0 s(\{x\colon u^*\leqslant t\})\,dt\right].$$

Следовательно,

$$\left[\int_\Omega|u|^{n/(n-1)}dx\right]^{(n-1)/n}\leqslant nv_n^{-1/n}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}P_\Omega(M_t)\,dt+\right.$$
$$\left.+\int_0^{+\infty}s(\{x\colon|u^*|\geqslant t\})\,dt\right\}=nv_n^{-1/n}\left(\|u\|_{BV(\Omega)}+\int_{\partial\Omega}|u^*|\,s(dx)\right).$$

Точность константы в (1) следует из того, что (1) превращается в равенство при $u=\chi_{B_\rho}$, где B_ρ — шар в Ω.

По образцу этой теоремы обобщается на функции из $BV(\Omega)$ теорема 3.6.3.

§ 6.6. СЛЕД ФУНКЦИИ ИЗ $BV(\Omega)$ НА ГРАНИЦЕ И ФОРМУЛА ГАУССА — ОСТРОГРАДСКОГО

6.6.1. Определение следа. Пусть Ω — открытое множество в R^n и пусть функция u суммируема в окрестности точки $x\in\partial\Omega$. *Верхним и нижним следом функции u в точке x* назовем соответственно числа

$$\bar{u}(x) = \varlimsup_{\rho \to 0} (1/m_n(B_\rho(x) \cap \Omega)) \int_{B_\rho(x) \cap \Omega} u(y)\, dy,$$
$$\underline{u}(x) = \varliminf_{\rho \to 0} (1/m_n(B_\rho(x) \cap \Omega)) \int_{B_\rho(x) \cap \Omega} u(y)\, dy.$$

Если $\bar{u}(x) = \underline{u}(x)$, то их общее значение назовем следом $\tilde{u}(x)$ функции u в точке $x \in \partial\Omega$.

6.6.2. Совпадение следа и грубого следа.

Лемма. *Пусть $u \in BV(\Omega)$, $u \geqslant 0$ и $\int_{\partial^*\Omega} u^*(x)\, s(dx) < \infty$. Тогда для любой точки $x \in \partial^*\Omega$ имеет место неравенство*

$$\underline{u}(x) \geqslant u^*(x). \tag{1}$$

Доказательство. В силу теоремы 6.5.7 функция u суммируема в Ω и, следовательно, определена функция $\underline{u}(x)$.

Неравенство (1) очевидно, если $u^*(x) = 0$. Предположим, что $0 < u^*(x) < \infty$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и такое t, что $0 < u^*(x) - t < \varepsilon$ и $P_\Omega(M_t) < \infty$. Тогда $x \in \partial^* M_t$, где $M_t = \{y\colon u(y) \geqslant t\}$. Очевидно, что в точке x нормаль к M_t совпадает с нормалью к Ω. Следовательно, найдется такое $r_0(x) > 0$, что при $0 < r < r_0(x)$

$$1 - \varepsilon < m_n(M_t \cap B_r(x))/m_n(\Omega \cap B_r(x)) \leqslant 1. \tag{2}$$

Так как $\int_{B_r(x) \cap \Omega} u(y)\, dy = \int_0^\infty m_n(M_\tau \cap B_r(x))\, d\tau,$

то из (2) получаем

$$(1/m_n(B_r \cap \Omega)) \int_{B_r \cap \Omega} u(y)\, dy \geqslant (1/m_n(B_r \cap \Omega)) \int_0^t m_n(M_\tau \cap B_r)\, d\tau \geqslant$$
$$\geqslant t\,(m_n(M_t \cap B_r)/m_n(\Omega \cap B_r)) \geqslant (1 - \varepsilon)\, t,$$

что и доказывает неравенство (1) при $u^*(x) < \infty$.

В случае $u^*(x) = \infty$ рассуждение проводится подобным образом.

Теорема. *Пусть $P(\Omega) < \infty$ и пусть s-почти везде на $\partial\Omega$ существует нормаль к Ω. Если $u \in BV(\Omega)$ и $\int_{\partial\Omega} |u^*|\, s(dx) < \infty$, то s-почти везде на $\partial\Omega$ след $\tilde{u}$ функции u существует и совпадает с грубым следом u^*.*

Доказательство. Согласно теореме 6.5.7 функция u суммируема в Ω, следовательно определены верхний и нижний следы $\bar{u}$, $\underline{u}$.

Рассмотрим сначала случай неотрицательной функции u. Тогда по лемме $\underline{u}(x) \geqslant u^*(x)$ при всех $x \in \partial^*\Omega$.

Докажем теперь, что если $u \geqslant 0$, то для s-почти всех $x \in \partial\Omega$ имеет место неравенство $\bar{u}(x) \leqslant u^*(x)$. Допустим, что $s(\{x \in \partial^*\Omega\colon \bar{u}(x) > u^*(x)\}) > 0$. Тогда найдется такое $c > 0$, что $s(Q) > 0$, где

$Q=\{x\colon\ x\in\partial^*\Omega,\ \bar u(x)>u^*(x)+c\}$. Вспоминая определение $\bar u(x)$, имеем при $x\in Q$

$$c+u^*(x)\leqslant\overline{\lim_{\rho\to 0}}(1/m_n(B_\rho(x)\cap\Omega))\int_0^\infty m_n(M_t\cap B_\rho(x))\,dt.$$

Так как $x\in\partial^*\Omega$, то

$$\lim_{\rho\to 0}(2/v_n\rho^n)\,m_n(\Omega\cap B_\rho(x))=1. \tag{3}$$

Поэтому

$$c+u^*(x)\leqslant(2/v_n)\lim_{\rho\to 0}\rho^{-n}\int_0^\infty m_n(M_t\cap B_\rho(x))\,dt\leqslant$$
$$\leqslant(2/v_n)^{(n-1)/n}\lim_{\rho\to 0}\rho^{1-n}\int_0^\infty[m_n(M_t\cap B_\rho(x))]^{(n-1)/n}\,dt. \tag{4}$$

Вследствие равенства (3)

$$m_n(M_t\cap B_\rho(x))\leqslant\alpha_\rho\min\{m_n(M_t\cap B_\rho(x)),\qquad m_n(B_\rho(x)\setminus M_t)\},$$

где α_ρ не зависит от t и $\alpha_\rho\to 1$ при $\rho\to 0$.

Применяя относительное изопериметрическое неравенство (6.1.7/1), получаем

$$[m_n(M_t\cap B_\rho(x))]^{(n-1)/n}\leqslant\alpha_\rho^{(n-1)/n}(v_n/2)^{(n-1)/n}v_{n-1}^{-1}\operatorname{var}\nabla\chi_{M_t}(B_\rho(x)). \tag{5}$$

Замечая, что

$$\operatorname{var}\nabla\chi_{M_t}(B_\rho)=\operatorname{var}\nabla\chi_{M_t}(B_\rho\cap\Omega)+s(\partial^*\Omega\cap\partial^*M_t),$$

и интегрируя неравенство (5) по t, находим

$$\int_0^\infty[m_n(M_t\cap B_\rho(x))]^{(n-1)/n}\,dt\leqslant$$
$$\leqslant\alpha_n^{(n-1)/n}(v_n/2)^{(n-1)/n}v_{n-1}^{-1}\left\{\int_0^\infty\operatorname{var}\nabla\chi_{M_t}(B_\rho(x)\cap\Omega)\,dt+\right.$$
$$\left.+\int_0^\infty s(\partial^*\Omega\cap\partial^*M_t)\,dt\right\}=\alpha_\rho^{(n-1)/n}(v_n/2)^{(n-1)/n}\times$$
$$\times v_{n-1}^{-1}\left\{\operatorname{var}\nabla u(B_\rho(x))+\int_{\partial^*\Omega\cap B_\rho(x)}u^*(y)\,s(dy)\right\}. \tag{6}$$

Сравнивая (4) и (6) и учитывая, что $\alpha_\rho\to 1$ при $\rho\to 0$, получаем

$$c+u^*(x)\leqslant v_{n-1}^{-1}\left\{\overline{\lim_{\rho\to 0}}\rho^{1-n}\operatorname{var}\nabla u(B_\rho(x))+\right.$$
$$\left.+\overline{\lim_{\rho\to 0}}\rho^{1-n}\int_{\partial^*\Omega\cap B_\rho(x)}u^*(y)\,s(dy)\right\}. \tag{7}$$

Согласно формуле (6.2.4/7) при s-почти всех $x\in\partial^*\Omega$

$$\lim_{\rho\to 0}\rho^{1-n}\operatorname{var}\nabla\chi_\Omega(B_\rho(x))=v_{n-1}.$$

Но $\operatorname{var} \nabla\chi_\Omega (B_\rho) = s(\partial^*\Omega \cap B_\rho)$. Поэтому при s-почти всех $x \in Q$ неравенство (7) можно переписать в виде

$$c + u^*(x) \leqslant v_{n-1}^{-1} \overline{\lim_{\rho\to 0}}\, \rho^{1-n} \operatorname{var} \nabla u (B_\rho(x)) + \\ + \overline{\lim_{\rho\to 0}}\, (1/s(\partial^*\Omega \cap B_\rho\ x))) \int_{\partial^*\Omega\cap B_\rho(x)} u^*(y)\, s(dy). \tag{8}$$

Интеграл $I(\mathscr{E}) = \int_{\mathscr{E}} u^*(y)\, s(dy)$ абсолютно непрерывен относительно меры $s(\mathscr{E})$. Следовательно, при s-почти всех $x \in \partial^*\Omega$ существует производная

$$(dI/ds)(x) = \lim_{\rho\to 0} (1/s(\partial^*\Omega \cap B_\rho(x))) \int_{\partial^*\Omega\cap B_\rho(x)} u^*(y)\, s(dy) = u^*(x)$$

(см., например, [189, с. 290]).

Поэтому при s-почти всех $x \in Q$ неравенство (8) можно переписать в виде

$$cv_{n-1} \leqslant \overline{\lim_{\rho\to 0}}\, \rho^{1-n} \operatorname{var} \nabla u (B_\rho(x)). \tag{9}$$

Так как $\operatorname{var} \nabla u (R^n) < \infty$, $\operatorname{var} \nabla u (Q) = 0$, то на основании леммы 6.2.5/1 из неравенства (9) следует, что $s(Q) = 0$. ■

Пусть теперь u — произвольная функция из $BV(\Omega)$. Тогда функции $u^+ = {}^1/_2(u + |u|)$, $u^- = {}^1/_2(|u| - u)$ также принадлежат $BV(\Omega)$. В силу доказанного выше s-почти везде на $\partial^*\Omega$ справедливы равенства

$$\tilde{u}^+(x) = (u^+(x))^*, \qquad \tilde{u}^-(x) = (u^-(x))^*. \tag{10}$$

Следовательно, s-почти везде на $\partial^*\Omega$ существует след $\tilde{u}$ функции u, причем

$$\tilde{u}(x) = \tilde{u}^+(x) - \tilde{u}^-(x). \tag{11}$$

Вместе с тем очевидно, что

$$(u^+(x))^* = \begin{cases} u^*(x) & \text{при} \quad u^*(x) < 0, \\ 0 & \text{при} \quad u^*(x) \geqslant 0, \end{cases}$$

$$(u^-(x))^* = \begin{cases} -u^*(x) & \text{при} \quad u^*(x) < 0, \\ 0 & \text{при} \quad u^*(x) \geqslant 0, \end{cases}$$

так что всегда

$$u^*(x) = (u^+(x))^* - (u^-(x))^*. \tag{12}$$

Сравнивая равенства (10) — (12), видим, что $\tilde{u}(x) = u^*(x)$.

6.6.3. След характеристической функции. Для характеристической функции условия теоремы 6.6.2 могут быть несколько ослаблены. Именно имеет место следующее утверждение.

Лемма. *Пусть $P(\Omega)<\infty$, $\mathscr{E}\subset\Omega$ и $P_\Omega(\mathscr{E})<\infty$. Тогда при s-почти всех $x\in\partial^*\Omega$ след $\tilde{\chi}_\mathscr{E}$ функции $\chi_\mathscr{E}$ существует и совпадает с $\chi^*_\mathscr{E}$.*

Доказательство. Положим $C_k=\{x\colon x\in\partial^*\Omega,\ \chi_\mathscr{E}(x)<1,\ \tilde{\chi}_\mathscr{E}>1/k\}$, $k=2, 3, \ldots$ Так как $\chi^*_\mathscr{E}(x)=1$ при $x\in\partial^*\Omega\cap\partial^*\mathscr{E}$ и $\chi^*_\mathscr{E}(x)=0$ при $x\in\partial^*\Omega/\partial^*\mathscr{E}$, то на множестве $\partial^*\Omega\setminus\bigcup\limits_{k=2}^{\infty}C_k$ функции $\tilde{\chi}_\mathscr{E}$ и $\chi^*_\mathscr{E}$ совпадают.

Остается доказать, что $s(C_k)=0$, $k=2, 3, \ldots$ Так как $C_k\subset\partial^*\Omega$, то при $x\in C_k$

$$\chi_\mathscr{E}(x)=\overline{\lim_{\rho\to 0}}\,(m_n(\mathscr{E}\cap B_\rho(x))/m_n(\Omega\cap B_\rho(x)))=$$
$$=(2/v_n)\overline{\lim_{\rho\to 0}}\,m_n(\mathscr{E}\cap B_\rho(x))\geqslant k^{-1}. \qquad (1)$$

В силу леммы 6.5.1/2 $P(\mathscr{E})<\infty$. Поэтому из (6.1.7/1) следует, что

$$m_n(\mathscr{E}\cap B_\rho(x))\leqslant C\,[\operatorname{var}\nabla_{R^n}\chi_\mathscr{E}(B_\rho(x))]^{n/(n-1)}.$$

Сравнивая с (1), имеем

$$\overline{\lim_{\rho\to 0}}\,\rho^{1-n}\operatorname{var}\nabla\chi_\mathscr{E}(B_\rho(x))\geqslant(v_n/2kC)^{(n-1)/n}. \qquad (2)$$

Так как $C_k\cap\partial^*\mathscr{E}=\varnothing$, то $\operatorname{var}\nabla\chi_\mathscr{E}(C_k)=0$. Поэтому из (2), применяя лемму 6.2.5/1, получаем $s(C_k)=0$, что и доказывает лемму.

6.6.4. Суммируемость следа функции из $BV(\Omega)$.

Теорема. *Пусть $P(\Omega)<\infty$ и пусть s-почти всюду на $\partial\Omega$ существует нормаль к Ω. Тогда:*

1) если для любого измеримого множества $\mathscr{E}$ выполнено неравенство

$$\min\{P_{C\Omega}(\mathscr{E}),\ P_{C\Omega}(\Omega\setminus\mathscr{E})\}\leqslant kP_\Omega(\mathscr{E}), \qquad (1)$$

где k не зависит от $\mathscr{E}$, то для любой функции $u\in BV(\Omega)$ существует след $\tilde{u}$, причем

$$\inf_c\int_{\partial\Omega}|\tilde{u}-c|\,s(dx)\leqslant k\,\|u\|_{BV(\Omega)}; \qquad (2)$$

2) если для любой функции $u\in BV(\Omega)$, имеющей на $\partial\Omega$ след $\tilde{u}$, справедливо неравенство (2) с постоянной k, не зависящей от u, то для любого измеримого множества $\mathscr{E}\subset\Omega$ верна оценка (1).

Доказательство. 1) В силу теоремы 6.5.2 грубый след функции u суммируем на $\partial\Omega$. Следовательно, по теореме 6.6.2 s-почти всюду на $\partial\Omega$ существует след $\tilde{u}$, который совпадает с u^*. Поэтому из неравенства (6.5.2/1) следует неравенство (2).

2) Пусть $\mathscr{E}$ — измеримое подмножество Ω, такое, что $P_\Omega(\mathscr{E})<\infty$. В силу леммы 6.6.3 след $\tilde{\chi}_\mathscr{E}$ функции $\chi_\mathscr{E}$ s-почти всюду существует и равен $\chi^*_\mathscr{E}$. Поэтому, полагая в (2) $u=\chi_\mathscr{E}$, получаем

$$\inf \int_{\partial\Omega} |\chi^*_\mathscr{E}-c|\, s(dx)\leqslant kP_\Omega(\mathscr{E}),$$

что равносильно (ср. с доказательством необходимости в теореме 6.5.2) неравенству (1). ■

6.6.5. Формула Гаусса — Остроградского для функций из $BV(\Omega)$.

Лемма. *Для любой функции $u\in BV(\Omega)$ и любого измеримого множества $\mathscr{B}\subset\Omega$ имеет место равенство*

$$\nabla u(\mathscr{B})=\int_{-\infty}^{+\infty}\nabla\chi_{M_t}(\mathscr{B})\,dt, \text{ где } M_t=\{x\colon u(x)\geqslant t\}. \tag{1}$$

Доказательство. Достаточно доказать (1) в предположении $u\geqslant 0$. Пусть φ — бесконечно дифференцируемая функция с компактным носителем в Ω. Тогда

$$-\int_\Omega \varphi\nabla u(dx)=\int_\Omega u\nabla\varphi(dx)=\int_\Omega\int_0^\infty \chi_{M_t}(x)\,dt\nabla\varphi(dx).$$

По теореме Фубини последний интеграл равен $\int_0^\infty dt\int_\Omega \chi_{M_t}(x)\nabla\varphi(dx)$. Далее отметим, что при п. в. t

$$\int_\Omega\varphi\nabla u(dx)=\int_0^\infty dt\int_\Omega\varphi\nabla\chi_{M_t}(dx)=\int_\Omega\varphi\,dx\int_0^\infty\nabla\chi_{M_t}dt. \tag{2}$$

Здесь перестановка порядка интегрирования допустима, ибо из равенства (6.1.6/1) следует конечность интеграла $\int_0^\infty dt\times\times\int_\Omega|\varphi|\operatorname{var}\nabla\chi_{M_t}(dx)$. Равенство (1) непосредственно следует из (2).

Теорема (формула Гаусса — Остроградского). *Пусть $P(\Omega)<\infty$ и пусть s-почти везде на $\partial\Omega$ существует нормаль к Ω. Тогда для любой функции $u\in BV(\Omega)$, грубый след которой суммируем по границе Ω, выполняется равенство*

$$\nabla v(\Omega)=\int_{\partial\Omega}u^*(x)\,\vec{\nu}(x)\,s(dx),$$

где $\vec{\nu}(x)$ — нормаль к Ω в точке x.

Доказательство. Так как для любого множества $\mathscr{E}$, такого, что $P(\mathscr{E})<\infty$, $\nabla\chi_\mathscr{E}(R^n)=0$, то в силу леммы

$$\nabla u(\Omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\nabla\chi_{M_t}(\Omega)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\nabla\chi_{M_t}(\partial\Omega\cap\partial^*M_t)\,dt.$$

Так как $s(\partial\Omega\setminus\partial^*\Omega)=0$ и так как в точках $\partial^*\Omega\cap\partial^*M_t$ нормаль к M_t совпадает с нормалью к Ω, то

$$\nabla\chi_{M_t}(\partial\Omega\cap\partial^*M_t)=\int_{\partial^*\Omega\cap\partial^*M_t}\vec{\nu}(x)\,s(dx)=\nabla\chi_\Omega(\partial^*M_t).$$

Итак, $$\nabla u(\Omega)=\int_0^{+\infty}\nabla\chi_\Omega(\partial^* M_t)\,dt+\int_{-\infty}^0\nabla\chi_\Omega(\partial^* M_t)\,dt=$$
$$=\int_0^{\infty}\nabla\chi_\Omega(\partial^* M_t)\,dt-\int_{-\infty}^0\nabla\chi_\Omega(\partial^*\Omega\setminus\partial^* M_t)\,dt=$$
$$=\int_0^{+\infty}\nabla\chi_\Omega(\{x\colon\ u^*\geqslant t\})\,dt-\int_{-\infty}^0\nabla\chi_\Omega(\{x\colon\ u^*\leqslant t\})\,dt=$$
$$=\int_{\partial\Omega}u^*\nabla\chi_\Omega(dx)=\int_{\partial\Omega}u^*(x)\,\bar{\nu}(x)\,s(dx).\ \blacksquare$$

На примере круга с разрезом $\{z=\rho e^{i\theta}\colon\ 0<\rho<1,\ 0<\theta<2\pi\}$ и функции $u(z)=\theta$ видно, что при нашем определении следа условие $s(\partial\Omega\setminus\partial^*\Omega)=0$ не может быть снято.

Из теорем 6.6.2 и 6.6.5 непосредственно получаем следующее утверждение.

Следствие. Пусть $P(\Omega)<\infty$ и $s(\partial\Omega\setminus\partial^*\Omega)=0$. Если для любого множества $\mathscr{E}\subset\Omega$ имеет место неравенство

$$\min\{P_{C\Omega}(\mathscr{E}),\ P_{C\Omega}(\Omega\setminus\mathscr{E})\}\leqslant kP_\Omega(\mathscr{E}),$$

где k не зависит от $\mathscr{E}$, то для любой функции $u\in BV(\Omega)$ существует след $\tilde{u}(x)$ и имеет место формула Гаусса — Остроградского

$$\nabla u(\Omega)=\int_{\partial\Omega}\tilde{u}(x)\,\bar{\nu}(x)\,s(dx).$$

§ 6.7. КОММЕНТАРИИ К ГЛАВЕ 6

Первые два параграфа содержат изложение известных фактов теории множеств с конечным пермиетром и функций класса BV. Основы этой теории заложены Р. Каччополи [156, 157] и Э. Де Джорджи [164, 165] и получили дальнейшее развитие в работах К. Крикеберга [205], У. Флеминга [177], У. Флеминга и Р. Ришеля [178] и др. С точностью до изложения результаты пунктов 6.1.6, 6.1.3—6.1.5 принадлежат Э. Де Джорджи [164, 165]. Теорема 1.1 из 6.1.2 представляет собой модификацию результата К. Крикеберга [205]. Формула (6.1.6/1) принадлежит У. Флемингу и Р. Ришелю [178].

Результаты § 6.2 получены Э. Де Джорджи [165] и дополнены Г. Федерером [171].

Теорию множеств с конечным периметром в настоящее время можно рассматривать как раздел теории целочисленных потоков (см. Г. Федерер [172, раздел 4.5]).

§ 6.3 — 6.6 представляют собой несколько расширенное изложение статьи Ю. Д. Бураго и автора [11].

Боковски и Шпернер [155] получили оценки функций $\eta(S)$ и λ_M для выпуклых областей через радиусы вписанного и описанного шаров.

Сведения о различных изопериметрических неравенствах можно найти в книге Ю. Д. Бураго и В. А. Залгаллера [10] и в обзорной статье Р. Оссермана [232].

В статье Й. Соучека [245] изучаются свойства функций, производные которых порядка l являются зарядами.

В связи с материалом этой главы упомянем еще статью А. И. Вольперта [18].

Глава 7

НЕКОТОРЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА, ЕМКОСТИ И ПОТЕНЦИАЛЫ

Эта глава является вспомогательной. Здесь собраны (в основном без доказательств) результаты теории функций, которые либо используются в дальнейшем, либо примыкают к используемым. В первую очередь приводятся теоремы о пространствах дифференцируемых функций произвольного положительного порядка (§ 7.1). Теория этих пространств в значительной мере отражена в монографиях (И. Стейн [121], Я. Петре [234], С. М. Никольский [104], О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский [6], Г. Трибель [123]), хотя в ряде случаев читатель, интересующийся доказательством, будет вынужден обратиться к оригинальной статье. В § 7.2 речь идет о свойствах емкостей и нелинейных потенциалов. Этот материал, к сожалению, еще рассеян по журналам, но попытка его систематического изложения привела бы к недопустимому увеличению объема книги. Во всяком случае для понимания дальнейшего достаточно приведенных здесь формулировок.

§ 7.1. ПРОСТРАНСТВА ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ ЛЮБОГО ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ПОРЯДКА

7.1.1. Пространства w_p^l, W_p^l, b_p^l, B_p^l при всех $l>0$. При $p\geqslant 1$ и целом $l>0$ через w_p^l обозначим пополнение пространства $\mathcal{D}$ по норме $\|\nabla_l u\|_{L_p}$. При $p\geqslant 1$ и дробном l определим пространство w_p^l как пополнение $\mathcal{D}$ по норме

$$\left(\int \|\Delta_y u\|^p_{w_p^{[l]}} |y|^{-n-p\{l\}}\, dy\right)^{1/p}. \tag{1}$$

Здесь $\Delta_y u(x)=u(x+y)-u(x)$, $[l]$ — целая, а $\{l\}$ — дробная часть числа l.

Если в этом определении заменить норму (1) нормой

$$\|u\|_{b_p^l}=\left(\int\|\Delta_y^2 u\|_{L_p}^p\,|y|^{-n-pl}\,dy\right)^{1/p},\qquad 0<l\leqslant 1,\tag{2}$$

то получим пространство b_p^l (здесь $\Delta_y^2 u(x)=u(x+y)-2u(x)+$ $+u(x-y)$). При $l>1$ положим $\|u\|_{b_p^l}=\|\nabla u\|_{b_p^{l-1}}$.

Пусть еще W_p^l и B_p^l — пополнения $\mathscr{D}$ по нормам $\|u\|_{w_p^l}+\|u\|_{L_p}$ и $\|u\|_{b_p^l}+\|u\|_{L_p}$ соответственно.

При дробных l нормы в пространствах w_p^l и b_p^l, W_p^l и B_p^l эквивалентны. Действительно, из тождества $2(u(x+h)-u(x))=$ $=-[u(x+2h)-2u(x+h)+u(x)]+[u(x+2h)-u(x)]$ следуют оценки $(2-2^l)D_l u\leqslant C_l u\leqslant(2+2^l)D_l u$, $0<l<1$, где

$$(D_l u)(x)=\left(\int|(\Delta_y u)(x)|^p\,|y|^{-n-pl}\,dy\right)^{1/p},$$

$$(C_l u)(x)=\left(\int|(\Delta_y^2 u)(x)|^p\,|y|^{-n-pl}\,dy\right)^{1/p}.$$

Полезность определенных пространств в значительной степени обусловлена следующими утверждениями.

Теорема. *При* $p\in[1,\infty)$, $l>0$ *и* $m=1, 2, \ldots$

$$\|u\|_{b_p^l(R^n)}\sim\inf_{\{U\}}\||y|^{m-\{l\}-p^{-1}}\nabla_{m+[l]}U\|_{L_p(R^{n+1})},\tag{3}$$

где $U\in\mathscr{D}(R^{n+1})$ — *любое продолжение функции* $u\in\mathscr{D}(R^n)$ *на пространство* $R^{n+1}=\{(x, y)\colon x\in R^n,\ y\in R^1\}$. Прибавляя к норме справа норму U в $L_p(R^{n+1})$, получаем эквивалентную норму в $B_p^l(R^n)$. В тех же обозначениях

$$\|u\|_{L_1(R^n)}\sim\inf_{\{U\}}\|\nabla U\|_{L_1(R^{n+1})}\sim\inf_{\{U\}}\|U\|_{W_1^1(R^{n+1})}.\tag{4}$$

Соотношение (3) имеет длинную историю (см. [153, 147, 3, 180, 113, 182, 53] и др.) и в приведенной форме установлено С. В. Успенским в [126]; соотношения (4) доказаны в [182]. Сведения о состоянии теории пространств с «весовыми» нормами можно почерпнуть из книг X. Трибеля [123], А. Куфнера [206] и обзорной статьи [5].

7.1.2. Пространства потенциалов М. Рисса и Бесселя. Шкалы «дробных» пространств, отличные от введенных в п. 7.1.1, определяются при помощи операторов:

$$(-\Delta)^{l/2}=F^{-1}|\xi|^l F,\qquad(-\Delta+1)^{l/2}=F^{-1}(1+|\xi|^2)^{l/2}F,$$

где $Fu(\xi)=\hat u(\xi)=2\pi^{-n/2}\int e^{ix\xi}u(x)\,dx$, Δ — лапласиан.

Именно через h_p^l и H_p^l ($1<p<\infty$, $l>0$) обозначим соответственно пополнения пространства $\mathscr{D}$ по нормам

$$\|u\|_{h_p^l}=\|(-\Delta)^{l/2}u\|_{L_p},\quad \|u\|_{H_p^l}=\|(-\Delta+1)^{l/2}u\|_{L_p}.$$

Следующее утверждение — теорема С. Г. Михлина [98] о мультипликаторах интеграла Фурье.

Теорема 1. *Пусть функция* Φ, *определенная на* $R^n\diagdown\{0\}$, *имеет производные* $\partial^k\Phi(\lambda)/\partial\lambda_{j_1}\ldots\partial\lambda_{j_k}$, *где* $0\leqslant k\leqslant n$ *и* $1\leqslant j_1<j_2\ldots$ $\ldots j_k\leqslant n$. *Пусть, кроме того,*

$$|\lambda|^k\,|\partial^k\Phi(\lambda)/\partial\lambda_{j_1}\ldots\partial\lambda_{j_k}|\leqslant M=\mathrm{const}.$$

Тогда для всех $u\in L_p$ *справедливо неравенство*

$$\|F^{-1}\Phi Fu\|_{L_p}\leqslant cM\|u\|_{L_p},\qquad 1<p<\infty,$$

где c — *постоянная, зависящая только от* n *и* p.

Следствие 1. *Пусть* $l=1, 2, \ldots$ *Тогда существуют положительные числа* c *и* C, *зависящие только от* n, p, l *и такие, что для всех* $u\in\mathscr{D}$

$$c\|(-\Delta)^{l/2}u\|_{L_p}\leqslant\|\nabla_l u\|_{L_p}\leqslant C\|(-\Delta)^{l/2}\|_{L_p}. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть α — мультииндекс порядка l. Тогда $F^{-1}\xi^\alpha Fu=F^{-1}\xi^\alpha|\xi|^{-l}|\xi|^l Fu$. Функция $\xi^\alpha|\xi|^{-l}$ удовлетворяет условиям теоремы 1, что дает правую оценку (1). Вместе с тем $|\xi|^l=$ $=|\xi|^{2l}|\xi|^{-l}=\left(\sum_{|\alpha|=l}c_\alpha\xi^\alpha\xi^\alpha\right)|\xi|^{-l}$, где $c_\alpha=l!/\alpha!$, так что

$$F^{-1}|\xi|^l Fu=\sum_{|\alpha|=l}c_\alpha F^{-1}(\xi^\alpha/|\xi|^l)\,\xi^\alpha Fu.$$

Снова применяя теорему 1, получаем левую оценку (1).

Аналогично доказывается следующее утверждение.

Следствие 2. Пусть $l=1, 2, \ldots$ Существуют положительные числа c и C, зависящие только от n, p, l, такие, что для всех $u\in\mathscr{D}$

$$c\|u\|_{W_p^l}\leqslant\|(-\Delta+1)^{l/2}u\|_{L_p}\leqslant C\|u\|_{W_p^l}.$$

Итак, если $p>1$ и l — целое, то $w_p^l=h_p^l$ и $W_p^l=H_p^l$.

Доказательство следующей теоремы можно найти в статье автора и В. П. Хавина [89].

Теорема 2. *Если* $pl<n$, $p>1$, *то* $u\in h_p^l$ *в том и только в том случае, если* $u=(-\Delta)^{-l/2}f\equiv c|x|^{l-n}*f$, *где* $f\in L_p$, *а звездочкой обозначена свертка.*

Хорошо известно аналогичное свойство пространства H_p^l.

Теорема 3. *Функция u принадлежит пространству H_p^l, $p>1$, в том и только том случае, если*

$$u=(-\Delta+1)^{-l/2}f\equiv G_l*f,$$

где $f\in L_p$, $G_l(x)=c|x|^{(l-n)/2}K_{(n-l)/2}(|x|)$, K_ν — модифицированная функция Бесселя третьего рода.

При $|x|\leqslant 1$ справедливы оценки

$$G_l(x)\leqslant\begin{cases} c|x|^{l-n}, & 0<l<n,\\ c\log(2/|x|), & l=n,\\ c, & l>n.\end{cases}$$

Если $|x|\geqslant 1$, то $G_l(x)\leqslant c|x|^{(l-n-1)/2}e^{-|x|}$. Интегральные операторы $f\xrightarrow{I_l}|x|^{l-n}*f$, $f\xrightarrow{J_l}G_l*f$ называются потенциалами М. Рисса и Бесселя. Таким образом, теоремы 2 и 3 утверждают, что каждый элемент пространства h_p^l $(pl<n)$ (H_p^l) есть потенциал М. Рисса (Бесселя) с плотностью из L_p.

Сформулируем теорему Р. Стрихартца [247] об эквивалентных нормировках пространств h_p^l и H_p^l.

Теорема 4. *Пусть* $\{l\}>0$ *и*

$$(\mathscr{D}_{\{l\}}v)(x)=\left(\int_0^\infty\left[\int_{|\theta|<1}|v(x+\theta y)-v(x)|\,d\theta\right]^2 y^{-1-2\{l\}}\,dy\right)^{1/2}. \quad (2)$$

Имеют место соотношения

$$\|u\|_{h_p^l}\sim\|\mathscr{D}_{\{l\}}\nabla_{[l]}u\|_{L_p}, \quad (3)$$

$$\|u\|_{H_p^l}\sim\|\mathscr{D}_{\{l\}}\nabla_{[l]}u\|_{L_p}+\|u\|_{L_p}. \quad (4)$$

Следующая теорема Т. О. Шапошниковой [131], аналогичная теореме 7.1.1, дает характеристику пространств $h_p^l(R^n)$ и $H_p^l(R^n)$ в терминах продолжений на пространство R^{n+k}. Двусторонние оценки нормы в L_p функции u, заданной на R^1, при помощи ее гармонического продолжения на $R^1\times(0,\infty)$ связаны с именами Литтлвуда, Пэли, Зигмунда и Марцинкевича. Основной результат для функции $g(u)$ Литтлвуда — Пэли, определенной равенством

$$[g(u)](x)=\left(\int_0^\infty|\nabla U(x,y)|^2 y\,dy\right)^{1/2},$$

где $U(x, y)$ — интеграл Пуассона функции u, состоит в эквивалентности норм $\|u\|_{L_p(R^1)}$ и $\|g(u)\|_{L_p(R^1)}$, $1<p<\infty$. В книге И. Стейна [121] эквивалентность этих норм доказана для n-мерного случая.

Теорема 5. *Норма функции* $u \in \mathscr{D}(R^n)$ *в* $h_p^l(R^n)$, $0<l<1$, *эквивалентна норме*

$$\inf_{\{U\}} \left\{ \int_{R^n} \left(\int_{R^k} |y|^{2-2l-k} |\nabla U|^2 \, dy \right)^{p/2} dx \right\}^{1/p},$$

где инфимум берется по всем продолжениям $U \in \mathscr{D}(R^{n+k})$ *функции* u *на* $R^{n+k} = \{(x, y): x \in R^n, y \in R^k\}$. *Норма* u *в* $H_p^l(R^n)$ *оценивается снизу нормой продолжения* Πu, *определенного равенством* (1.7.1/7). *Аналогично*

$$\|u\|_{H_p^l} \sim \inf_{\{U\}} \left\{ \int_{R^n} \left(\int_{R^k} |y|^{2-2l-k} (|\nabla U|^2 + |U|^2) \, dy \right)^{p/2} dx \right\}^{1/p}.$$

7.1.3. Еще несколько свойств введенных функциональных пространств. Следующие две теоремы, доказательства которых можно найти в книгах И. Стейна [121], Я. Петре [234], С. М. Никольского [104], Г. Трибеля [123], представляют собой классические факты теории пространств b_p^l, B_p^l, h_p^l, H_p^l.

Теорема 1. *Если* $2 \leqslant p < \infty$, *то* $h_p^l \subset b_p^l$, $H_p^l \subset B_p^l$. *Если* $1 < p < 2$, *то* $b_p^l \subset h_p^l$, $B_p^l \subset H_p^l$.

Теорема 2. (i) *Если* $p \in (1, \infty)$, $l > 0$, *то*

$$\|u\|_{b_p^l(R^n)} \sim \inf_{\{U\}} \|U\|_{h_p^{l+1/p}(R^{n+1})}.$$

(*Здесь и в* (ii) *обозначение* $\{U\}$ *имеет тот же смысл, что и в теореме* 1.7.1/1.)

(ii) *Если* $p \in [1, \infty)$, $l > 0$, *то*

$$\|u\|_{b_p^l(R^n)} \sim \inf_{\{U\}} \|U\|_{b_p^{l+1/p}(R^{n+1})}.$$

В (i) *и* (ii) *можно заменить* b *и* h *на* B *и* H *соответственно*.

Соотношения (i), (ii) получили далеко идущее обобщение в работе А. Йонссона и Г. Валлина [203], где речь идет о продолжении на R^n функций из класса B_p^l на так называемых d-множествах F. Этот термин означает, что d-мерная мера Хаусдорфа H_d (см. п. 1.2.4) удовлетворяет следующему условию: $H_d(F \cap B(x, \rho)) \sim \rho^d$ для всех $x \in F$ и $\rho < \delta$.

В дальнейшем, если B — шар с радиусом r, то через μB обозначается концентрический шар с радиусом μr. Аналогично кубу Q с длиной ребра d ставится в соответствие концентрический и подобно расположенный куб μQ с длиной ребра μd.

Сформулируем теорему, которая для пространства H_p^l, $\{l\} > 0$, легко выводится из (7.1.2/4) [247]. Для W_p^l и B_p^l это — простое следствие определений пространств.

Теорема 3. *Пусть* $\{B^{(j)}\}_{j \geqslant 0}$ — *покрытие* R^n *шарами с радиусом* 1, *имеющее конечную кратность, зависящую только от* n.

Пусть еще $O^{(j)}$ — *центр шара* $B^{(j)}$, $O^{(0)}=0$ *и* $\eta_j(x)=\eta(x-O^{(j)})$, *где* $\eta\in C_0^\infty(2B^{(0)})$, $\eta=1$ *на* $B^{(0)}$. *Тогда*

$$\|u\|_{S_p^l}\sim\left(\sum\nolimits_{j\geqslant 0}\|u\eta_j\|^p_{s_p^l}\right)^{1/p}, \tag{1}$$

где $S_p^l=H_p^l$, W_p^l *или* B_p^l, *а* $s_p^l=h_p^l$, w_p^l *или* b_p^l *соответственно.*

Можно проверить, что для любой функции $v\in C_0^\infty(B_1)$ справедливо «обобщенное неравенство Фридрихса»

$$\|v\|_{L_p}\leqslant c\|v\|_{s_p^l}. \tag{2}$$

Поэтому норму $\|u\eta_j\|_{s_p^l}$ в (1) можно заменить эквивалентной нормой $\|u\eta_j\|_{S_p^l}$.

Говоря о вложении банахова пространства X в другое банахово пространство Y (обозначение: $X\subset Y$), будем, как всегда, иметь в виду непрерывное вложение.

Теорема 4. 1) *Если* $l=1, 2, \ldots$, *то* $b_1^l\in w_1^l$.

2) *Если* $p>1$, $l>\lambda\geqslant 0$, $n>(l-\lambda)p$ *и* $l-n/p=\lambda-n/\pi$, *то* $h_p^l\subset h_\pi^\lambda$.

3) *Если* $p\geqslant 1$, $l>\lambda>0$ $n>(l-\lambda)p$ *и* $l-n/p=\lambda-n/\pi$, *то* $b_p^l\subset b_\pi^\lambda$.

4) *Если* $p\geqslant 1$, $l>0$, $n>lp$ *и* $1/\pi=1/p-l/n$, *то* $b_p^l\subset L_\pi$.

5) *Если* $l=1, 2, \ldots$, $n\geqslant l-\lambda$ *и* $l-n=\lambda-n/\pi$, *то* $w_1^l\subset b_\pi^\lambda$. *Заменяя в* 1)—5) *строчные буквы* b, h, w *прописными, также получаем верные утверждения.*

6) *Если* $p>1$, $l>\lambda\geqslant 0$, $n=(l-\lambda)p$, *то* $H_p^l\subset H_\pi^\lambda$ *при любом* $\pi\in(1, \infty)$. *Если* $p>1$, $lp>n$, *то* $H_p^l\subset L_\infty\cap C$.

7) *Если* $p>1$, $l>\lambda>0$, $n=(l-\lambda)p$, *то* $B_p^l\subset B_\pi^\lambda$ *при любом* $\pi\in(1, \infty)$.

8) *Если* $p>1$, $l>0$, $n=lp$, *то* $B^l\subset L_\pi$ *при любом* $\pi\in(1, \infty)$.

9) *Если* $p>1$, $lp>n$, *то* $B_p^l\subset L_\infty\cap C$.

Различные доказательства утверждений 1)—4), 6)—9) изложены в монографиях, упомянутых в начале этого раздела, результат п. 5) принадлежит В. А. Солонникову [120]. Вложение 2) — непосредственное следствие непрерывности оператора $(-\Delta)^{(\lambda-l)/2}$: $L_p\to L_\pi$, установленной С. Л. Соболевым [116]. Утверждение 1) следует из неравенств

$$\|\nabla_l u\|_{L_1(R^n)}\leqslant c_1\|\nabla_{l+1}U\|_{L_1(R^{n+1})}\leqslant c_2\|y\nabla_{l+2}U\|_{L_1(R^{n+1})}$$

и из теоремы 7.1. (Здесь $U\in\mathscr{D}(R^{n+1})$ — любое продолжение функции $u\in\mathscr{D}(R^n)$.) Та же теорема вместе с неравенством

$$\||y|^{1-\{\lambda\}-1/\pi}\nabla_{[\lambda]+1}U\|_{L_\pi(R^{n+1})}\leqslant c\||y|^{-\{l\}}\nabla_{[l]+1}U\|_{L_1(R^{n+1})},$$

вытекающим из следствия 2.1.6/4, приводит к 3) при $p=1$. В случае $p>1$ тот же результат следует из вложения $h_p^{l+1/p}(R^{n+1}) \subset h_\pi^{\lambda+1/\pi}(R^{n+1})$ (см. п. 2 и п. (i) теоремы 2. Соответствующие утверждения для пространств H_p^l и B_p^l получаются аналогично. Вложения из п. 6) легко следуют из определения бесселева потенциала. Сказанное в пп. 7) и 9) вытекает из п. 6), примененного к пространству $H_p^{l+1/p}(R^{n+1})$, а утверждение 8) — следствие п. 7).

Наряду с указанной ранее литературой, в которой установлены теоремы вложения и теоремы о следах и продолжениях для различных пространств функций с дробными производными и их обобщений, укажем, не стремясь к полноте, статьи О. В. Бесова [4], В. И. Буренкова [13, 14], Л. Р. Волевича и Б. П. Панеяха [17], К. К. Головкина [23, 24], К. К. Головкина и В. А. Солонникова [25], В. П. Ильина [33, 34], Л. Д. Кудрявцева [45], В. А. Солонникова [119], Н. Ароншайна, Ф. Мулла и П. Шептыцкого [148], Л. Хермандера и Ж.-Л. Лионса [200], М. Тэйблсона [248, 249], первую главу книги Л. Хермандера [130], книгу И. В. Гельмана и автора [185].

§ 7.2. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

7.2.1. Емкость $\operatorname{cap}(e, S_p^l)$ и ее свойства. Каждому из определенных в § 7.1 функциональных пространств $S_p^l = H_p^l$, W_p^l, B_p^l, h_p^l, w_p^l, b_p^l можно поставить в соответствие функцию множества, называемую емкостью. Именно для любого компактного множества $e \subset R^n$ положим

$$\operatorname{cap}(e, S_p^l) = \inf\left\{\|u\|_{S_p^l}^p:\ u \in C_0^\infty,\ u \geqslant 1 \text{ на } e\right\}.$$

Если E — любое подмножество R^n, то *внутренней и внешней емкостями множества* E называются числа

$$\underline{\operatorname{cap}}(E, S_p^l) = \sup\{\operatorname{cap}(e, S_p^l):\ e \subset E,\ e \text{ — компакт}\},$$

$$\overline{\operatorname{cap}}(E, S_p^l) = \inf\{\underline{\operatorname{cap}}(G, S_p^l):\ G \supset E,\ G \text{ — открытое множество}\}.$$

Из теоремы 7.1.3/3 следует, что справедливо соотношение

$$\operatorname{cap}(e, S_p^l) \sim \sum\nolimits_{i \geqslant 0} \operatorname{cap}(e \cap B^{(i)}, S_p^l), \tag{1}$$

где $\{B^{(i)}\}$ — последовательность шаров, введенная в теореме 7.1.3/3.

Сформулируем несколько известных свойств емкости $\operatorname{cap}(\cdot, S_p^l)$, где $S_p^l = H_p^l$ или h_p^l, $p>1$ [89, 109, 216].

1) Если множество $e \subset R^n$ компактно, то по любому числу $\varepsilon > 0$ можно указать такое открытое множество $G \subset R^n$, что $G \supset e$ и $\operatorname{cap}(e', S_p^l) < \operatorname{cap}(e, S_p^l) + \varepsilon$, каково бы ни было компактное подмножество e' множества G.

2) Если множество $e \subset R^n$ компактно, то $\overline{\operatorname{cap}}(e, S_p^l) = \operatorname{cap}(e, S_p^l)$.

3) Если $E_1 \subset E_2 \subset R^n$, то $\underline{\operatorname{cap}}(E_1, S_p^l) \leqslant \underline{\operatorname{cap}}(E_2, S_p^l)$, $\overline{\operatorname{cap}}(E_1, S_p^l) \leqslant \overline{\operatorname{cap}}(E_2, S_p^l)$.

4) Если $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность множеств в R^n, $E = \bigcup\limits_k E_k$, то $\overline{\operatorname{cap}}(E, S_p^l) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\operatorname{cap}}(E_k, S_p^l)$.

Известно, что любое аналитическое (в частности, любое борелевское) подмножество E пространства R^n измеримо относительно емкости $\operatorname{cap}(\cdot, S_p^l)$ (т. е. $\overline{\operatorname{cap}}(E, S_p^l) = \underline{\operatorname{cap}}(E, S_p^l)$) [89, 216].

Наряду с емкостью $\operatorname{cap}(e, S_p^l)$ вводят еще емкость

$$c_{k,p}(E) = \inf \Big\{ \|f\|_{L_p}^p :\ f \in L_p,\ f \geqslant 0 \text{ и } \int k(x-y) f(y)\, dy \geqslant 1 \text{ для всех } x \in E \Big\},$$

где k — положительная, убывающая, непрерывная функция на полуоси $(0, +\infty)$ [216].

Отметим некоторые связи между введенными емкостями.

(i) Если $S_p^l = H_p^l$ или h_p^l, а k — ядро Бесселя или Рисса, то

$$c_{k,p}(E) = a \operatorname{cap}(E, S_p^l).$$

(ii) Если $\operatorname{diam} E \leqslant 1$ и $pl < n$, то

$$\operatorname{cap}(E, H_p^l) \sim \operatorname{cap}(E, h_p^l) \tag{2}$$

[140]. Соотношения, аналогичные (2), верны и для других пар пространств B_p^l, b_p^l и W_p^l, w_p^l.

(iii) Если $2 \leqslant p < \infty$, то

$$\operatorname{cap}(E, H_p^l) \sim \operatorname{cap}(E, B_p^l)$$

[243]. Более того, в случае $2 - l/n < p < 2$ равенства $\operatorname{cap}(E, H_p^l) = 0$ и $\operatorname{cap}(E, B_p^l) = 0$ выполняются одновременно [135]. Для произвольных $p \in (1, \infty)$, $l > 0$ можно утверждать, что

$$\operatorname{cap}(E, H_p^l) \leqslant c \operatorname{cap}(E, B_p^l),$$

где c — постоянная, зависящая только от n, p, l [135, 243].

(iv) Если $E \subset R^n$, $l>0$, $1<p<\infty$, то

$$\operatorname{cap}(E, B_p^l(R^n)) \sim \operatorname{cap}(E, H_p^{l+1/p}(R^{n+1})) \sim \operatorname{cap}(E, B_p^{l+1/p}(R^{n+1}))$$

[243].

(v) Пусть m, $l>0$, $1<p$, $q<\infty$. Для $E \subset R^n$ справедливо неравенство

$$[\operatorname{cap}(E, h_q^m)]^{n-lp} \leqslant c[\operatorname{cap}(E, h_p^l)]^{n-mq} \text{ при } mq<lp<n.$$

Если дополнительно $E \subset B_1$, то

$$[\operatorname{cap}(E, H_q^m)]^{n-lp} \leqslant c[\operatorname{cap}(E, H_p^l)]^{n-mq} \text{ при } mq<lp<n,$$

$$[\log(c_0/\operatorname{cap}(E, H_q^m))]^{1-p} \leqslant c \operatorname{cap}(E, H_p^l) \text{ при } mq<lp=n,$$

$$[\operatorname{cap}(E, H_q^m)]^{p-1} \leqslant c[\operatorname{cap}(E, H_p^l)]^{q-1} \text{ при } mq=lp=n,\ p \leqslant q.$$

Полагая здесь $E=B_r$, убеждаемся, что все показатели степеней точны. Сформулированные оценки получены в работе [139].

7.2.2. Нелинейные потенциалы. При исследовании свойств емкостей, введенных в п. 7.2.1, оказывается полезным аппарат теории нелинейных потенциалов (см. работы В. Г. Мазьи и В. П. Хавина [89], Д. Р. Адамса и Н. Мейерса [141], Л. Хедберга и Т. Вольфа [197] и др.). Здесь собраны некоторые факты этой теории.

Пусть $p \in (1, \infty)$, $n>pl$. Всякая (неотрицательная) мера μ, заданная на борелевском σ-кольце пространства R^n, порождает функцию $U_{p,l}\mu$, определенную в R^n равенством

$$(U_{p,l}\mu)(x) = \int_{R^n} |x-y|^{l-n} \left(\int_{R^n} |z-y|^{l-n} d\mu(z)\right)^{1/(p-1)} dy \qquad (1)$$

или, что то же, $U_{p,l}\mu = I_l(I_l\mu)^{p'-1}$, $p+p'=pp'$.

Если $p=2$, то, переставляя интегралы в (1) и учитывая формулу композиции

$$\int |y-z|^{l-n} |y-x|^{l-n} dy = \text{const}\, |z-x|^{2l-n}$$

[50, с. 64], получаем

$$(U_{2,l}\mu)(x) = c\int (d\mu(z)/|z-x|^{n-2l}).$$

Функция $U_{2,l}\mu$ представляет собой потенциал М. Рисса порядка $2l$ (при $l=1$ — потенциал Ньютона). По аналогии, $U_{p,l}\mu$ называют нелинейным потенциалом ((p, l)-потенциалом) М. Рисса.

Вводится также нелинейный потенциал Бесселя $V_{p,l}\mu = J_l(J_l\mu)^{p'-1}$.

Для потенциалов $U_{p,l}\mu$ и $V_{p,l}\mu$ имеет место следующий грубый принцип максимума.

Предложение 1. *Пусть* $P\mu$ — *один из потенциалов* $U_{p,l}\mu$ *или* $V_{p,l}\mu$. *Тогда существует постоянная* $\mathfrak{M}$, *зависящая только от* n, p, l, *такая, что*

$$(P\mu)(x) \leqslant \mathfrak{M} \sup \{(P\mu)(x):\ x \in \operatorname{supp} \mu\}.$$

Это утверждение доказано в [89, 140]. Известно, что при $p=2$, $l \geqslant 1$ в качестве константы $\mathfrak{M}$ можно взять единицу (см. Н. С. Ландкоф [50, с. 96]). В общем случае это невозможно, даже если $p=2$ (см. Н. С. Ландкоф [50, с. 204]).

Следующее утверждение содержит основные свойства так называемой (p, l)-емкостной меры [89, 216].

Предложение 2. *Пусть* E — *подмножество пространства* R^n. *Если* $\overline{\operatorname{cap}}(E, h_p^l) < \infty$, *то существует единственная мера* μ_E, *обладающая следующими свойствами:*

1) $\|I_l\mu_E\|_{L_{p/(p-1)}}^{p/(p-1)} = \overline{\operatorname{cap}}(E, h_p^l)$;

2) $(U_{p,l}\mu_E)(x) \geqslant 1$ *при* (p, l)-*квазивсех* $x \in E$.

(*Термин* «(p, l)-*квазивсюду*» *означает: всюду, за исключением множества нулевой внешней емкости* $\overline{\operatorname{cap}}(\cdot, h_p^l)$);

3) $\operatorname{supp} \mu \subset \bar{E}$;

4) $\mu_E(\bar{E}) = \overline{\operatorname{cap}}(E, h_p^l)$;

5) $(U_{p,l}\mu_E)(x) \leqslant 1$ *для всех* $x \in \operatorname{supp} \mu_E$.

Меру μ_E называют емкостной мерой множества E, а $U_{p,l}\mu_E$ — емкостным потенциалом множества E.

Это предложение остается верным при замене h_p^l на H_p^l, $U_{p,l}\mu$ на $V_{p,l}\mu$ и I_l на J_l.

Отметим еще, что емкость $\operatorname{cap}(e, S_p^l)$ (для $S_p^l = h_p^l$ или H_p^l) может быть определена равенством

$$\operatorname{cap}(e, S_p^l) = \sup \{\mu(e):\ \operatorname{supp} \mu \subset e \text{ и } (P\mu)(x) \leqslant 1\}, \tag{2}$$

где $P = U_{p,l}$ или $V_{p,l}$ [89].

Сформулируем некоторые точечные оценки (p, l)-потенциалов, очевидные в линейном случае, но совсем не тривиальные в нелинейном.

Предложение 3 [89, 134]. (i) *Если* $2 - l/n < p < n/l$, *то*

$$(V_{p,l}\mu)(x) \leqslant c \int_0^\infty (\mu(B(x, \rho))/\rho^{n-lp})^{1/(p-1)} e^{-c\rho} (d\rho/\rho). \tag{3}$$

(ii) *Если* $p > 1$ *и* $\varphi(\rho) = \sup\limits_x \mu(B(x, \rho))$, *то*

$$(V_{p,l}\mu)(x) \leqslant c \int_0^\infty (\varphi(\rho)/\rho^{n-lp})^{1/(p-1)} e^{-c\rho} (d\rho/\rho). \tag{4}$$

Для потенциала $U_{p,l}\mu$ при тех же значениях p имеют место такие же оценки, в которых отсутствует множитель $e^{-c\rho}$.

Почти очевидно, что оценка

$$(V_{p,l}\mu)(x) \geqslant c\int_0^\infty (\mu(B(x,\rho))/\rho^{n-lp})^{1/(p-1)} e^{-c\rho}(d\rho/\rho), \tag{5}$$

обратная к (3), верна при всех $p \in (1, \infty)$, $l > 0$, но сама оценка (3) в случае $p \leqslant 2 - l/n$ не имеет места. В этом легко убедиться, взяв в качестве меры μ точечную нагрузку.

Недавно Вольф показал [197], что при $pl < n$ имеет место неравенство

$$\| I_l\mu \|^{p/(p-1)}_{L_{p/(p-1)}} \leqslant c\int_0^\infty W_{p,l}\mu\, d\mu, \tag{6}$$

где $(W_{p,l}\mu)(x) = \int_0^\infty (\mu(B(x,\rho))/\rho^{n-lp})^{1/(p-1)}(d\rho/\rho)$. Соответствующее неравенство для бесселевых потенциалов имеет вид

$$\| J_l\mu \|^{p/(p-1)}_{L_{p/(p-1)}} \leqslant c\int_0^\infty S_{p,l}\mu\, d\mu, \tag{7}$$

где $pl \leqslant n$ и

$$(S_{p,l}\mu)(x) = \int_0^\infty (\mu(B(x,\rho))/\rho^{n-lp})^{1/(p-1)} e^{-c\rho}(d\rho/\rho). \tag{8}$$

Оценки, обратные к (6) и (7), непосредственно следуют из (5).

Замечание. Отсутствие неравенства (3) при $p \leqslant 2 - l/n$ вызывало серьезные осложнения при попытке удовлетворительного обобщения основных фактов классической теории потенциала на нелинейный случай. Неравенства (6) и (7) позволили Л. Хедбергу (см. [19]) снять эту трудность при помощи аналога нелинейной теории потенциала, в которой роль $U_{p,l}\mu$ и $V_{p,l}\mu$ играют некоторые функции $\mathscr{W}_{p,l}\mu$ и $\mathscr{S}_{p,l}\mu$, эквивалентные $W_{p,l}\mu$ и $S_{p,l}\mu$.

Верхние точечные оценки типа (3) получены и в случае $1 < p \leqslant 2 - l/n$ при дополнительном предположении об ограниченности потенциала. Именно имеет место следующее утверждение.

Предложение [140].

(i) *Если* $1 < p < 2 - l/n$ *и* $(U_{p,l}\mu)(x) \leqslant K$ *для всех* $x \in R^n$, *то*

$$(U_{p,l}\mu)(x) \leqslant cK^\gamma \int_0^\infty (\mu(B(x,\rho))/\rho^{n-lp})^{(n-l)/(n-lp)}(d\rho/\rho), \tag{9}$$

где $\gamma = ((2-p)n - l)/(n - lp)$.

(ii) *Если* $p = 2 - l/n$ *и* $(U_{p,l}\mu)(x) \leqslant K$ *для всех* $x \in R^n$, *то*

$$(U_{p,l}\mu)(x) \leqslant c\int_0^\infty \left(\frac{\mu(B(x,\rho))}{\rho^{n-lp}} \log\left(cK^{p-1}\frac{\rho^{n-lp}}{\mu(B(x,\rho))}\right)\right)^{p'-1}\frac{d\rho}{\rho}. \tag{10}$$

(*Из условия* $(U_{p,l}\mu)(x) \leqslant K$ *для всех* $x \in R^n$ *следует что* $\mu(B(x,\rho)) \leqslant e^{-1}aK^{p-1}\rho^{n-lp}$.)

7.2.3. Метрические свойства емкостей. Полезно иметь в виду следующие соотношения [216]:

Если $pl<n$ и $0<\rho<1$, то

$$\operatorname{cap}(B_\rho,\ H_p^l)\sim\rho^{n-pl}. \tag{1}$$

Если $pl<n$ и $0<\rho<\infty$, то

$$\operatorname{cap}(B_\rho,\ h_p^l)=c\rho^{n-pl}. \tag{2}$$

Если $pl=n$, $0<\rho\leqslant 1$, то

$$\operatorname{cap}(B_\rho,\ H_p^l)\sim(\log(2/\rho))^{1-p}. \tag{3}$$

Если $pl>n$, то $\operatorname{cap}(\{x\},\ H_p^l)>0$. Таким образом, при $pl>n$ только пустое множество имеет нулевую емкость.

Следующие соотношения для емкости параллелепипеда получены в [137].

Предложение 1. *Пусть* $0<a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots\leqslant a_n$, $a=(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$ *и* $Q(a)=\{x\in R^n\colon\ |x_j|\leqslant a_j,\ j=1,\ \ldots,\ n\}$. *Тогда*:

(i) *Если* $k-1<lp<k$, $k=1,\ \ldots,\ n$, *то*

$$\operatorname{cap}(Q(a),\ h_p^l)\sim a_k^{k-lp}\prod_{j=k+1}^{n}a_j$$

(*здесь произведение равно единице, если* $k=n$);

(ii) *если* $lp=k$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$, *то*

$$\operatorname{cap}(Q(a),\ h_p^l)\sim\min\left\{\left(\log\frac{a_{k+1}}{a_k}\right)^{1-p},\ 1\right\}\prod_{j=k+1}^{n}a_j.$$

Имеют место двусторонние оценки такого же типа и для $\operatorname{cap}(Q(a),\ H_p^l)$.

Если T — квазиизометрическое отображение R^n на себя, то $\operatorname{cap}(TE,\ S_p^l)\sim\operatorname{cap}(E,\ S_p^l)$, где $S_p^l=H_p^l$ или h_p^l. Это — простое следствие равенства (7.2.2/2).

Н. Мейерс [217] показал, что если P — проектор $R^n\to R^k$, $k<n$, то $\operatorname{cap}(PE,\ S_p^l)\leqslant\operatorname{cap}(E,\ S_p^l)$, где $S_p^l=H_p^l$ или h_p^l.

Для произвольного множества $E\subset R^n$ по любой неубывающей положительной на полуоси $[0,\ \infty)$ функции φ определим φ-меру Хаусдорфа:

$$H(E,\ \varphi)=\lim_{\varepsilon\to+0}\inf_{\{B^{(i)}\}}\sum\nolimits_i\varphi(r_i),$$

где $\{B^{(i)}\}$ — любое покрытие множества E открытыми шарами $B^{(i)}$ с радиусами $r_i<\varepsilon$. Если $\varphi(t)=t^d$, то число d называют размерностью меры Хаусдорфа; d-мерная мера Хаусдорфа $H_d(E)$ множества E равна $v_d H(E, t^d)$ (см. п. 1.2.4). При $d=n$ мера H_n совпадает с n-мерной мерой Лебега m_n.

Следующие два предложения содержат не совпадающие, но точные в известном смысле достаточное и необходимое условия положительности емкости, формулируемые в терминах мер Хаусдорфа.

Предложение 2. *Пусть* $1<p\leqslant n/l$ *и* φ — *неотрицательная, неубывающая функция на* $[0, \infty)$, *такая, что* $\varphi(0)=0$ *и*

$$\int_0 (\varphi(t)/t^{n-pl})^{1/(p-1)}(dt/t)<\infty. \tag{4}$$

Тогда $\operatorname{cap}(E, H_p^l)>0$ *для любого борелевского подмножества* E *пространства* R^n, *имеющего положительную* φ*-меру Хаусдорфа.* Это утверждение — следствие оценки (7.2.2/4), см. [89].

Предложение 3 [89, 216]. *Пусть* E — *борелевское подмножество* R^n. *Тогда*:

1) *если* $n>pl$ *и* $H_{n-pl}(E)<\infty$, *то* $\operatorname{cap}(E, S_p^l)=0$, *где* $S_p^l=h_p^l$ *или* H_p^l;

2) *если* $n=pl$ *и* $H(E, \varphi)<\infty$, *где* $\varphi(r)=|\log r|^{1-p}$, *то* $\operatorname{cap}(E, H_p^l)=0$.

Приведем еще одно достаточное условие обращения емкости $\operatorname{cap}(E, H_p^l)$ в нуль.

Предложение 4 [89]. *Пусть* N — *заданная на полуоси* $[0, \infty)$ *измеримая неотрицательная функция. Предположим, что при любом положительном* r *множество* E *можно покрыть не более чем* $N(r)$ *замкнутыми шарами, радиусы которых не превосходят* r. *Если*

$$\int_0 [N(r)]^{1/(1-p)}\, r^{(n-pl)/(1-p)-1}\, dr=\infty,$$

то $\operatorname{cap}(E, H_p^l)=0$.

Предложения 2 и 4 позволяют полностью описать n-мерные канторовы множества положительной емкости $\operatorname{cap}(E, H_p^l)$.

Пусть $\mathscr{L}=\{l_j\}_{j=1}^{\infty}$ — убывающая последовательность положительных чисел, такая, что $2l_{j+1}<l_j$ $(j=1, 2, \ldots)$ и Δ_1 — замкнутый промежуток длиной l_1. Обозначим через e_1 множество, лежащее в Δ_1 и равное объединению двух замкнутых промежутков Δ_2 и Δ_3 длиной l_2 и содержащее оба конца промежутка Δ_1. Положим $E_1=\underbrace{e_1\times\ldots\times e_1}_{n\text{ раз}}$. Проделаем ту же операцию с промежутками Δ_2 и Δ_3 (роль l_2 переходит к l_3); получим четыре замкнутых промежутка длиной l_3, объединение которых обозначим через e_2; $E_2=\underbrace{e_2\times\ldots\times e_2}_{n\text{ раз}}$ и т. д. Положим $E(\mathscr{L})=\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} E_j$.

Предложение 5 [89]. *Следующие утверждения равносильны:*

(i) $\operatorname{cap}(E(\mathscr{L}), H_p^l) > 0$;

(ii) $\sum_{j\geqslant 1} 2^{jn/(1-p)} l_j^{(n-pl)/(1-p)} < \infty$, *если* $n > pl$,

$$\sum_{j\geqslant 1} 2^{jn/(1-p)} \log(l_j/l_{j+1}) < \infty, \text{ если } n = pl.$$

7.2.4. Уточненные функции. Функция φ из H_p^l называется уточненной или (p, l)-уточненной, если существует последовательность $\{\varphi_m\}_{m\geqslant 1}$ функций из $\mathscr{D}$, сходящаяся к φ в H_p^l и такая, что для любого положительного числа ε можно указать такое открытое множество ω, что $\operatorname{cap}(\omega, H_p^l) < \varepsilon$ и $\varphi_m \to \varphi$ равномерно в $R^n \setminus \omega$.

Другое (равносильное) определение таково: функция $\varphi \in H_p^l$ называется уточненной, если по любому $\varepsilon > 0$ можно найти такое открытое множество ω, что $\operatorname{cap}(\omega, H_p^l) < \varepsilon$ и сужение функции φ на множество $R^n \setminus \omega$ непрерывно.

Перечислим основные свойства уточненных функций:

1. Если $\varphi \in H_p^l$, то существует уточненная функция $\tilde{\varphi}$, совпадающая с φ почти везде (по n-мерной мере Лебега) в R^n.

2. Если φ_1 и φ_2 — уточненные функции, совпадающие почти везде (по n-мерной мере Лебега), то φ_1 и φ_2 совпадают квазивсюду.

3. Всякая последовательность уточненных функций класса H_p^l, сходящаяся в H_p^l к уточненной функции φ, содержит подпоследовательность, сходящуюся к φ квазивсюду.

Доказательство этих фактов можно найти в статье автора и В. П. Хавина [89], где указана более ранняя литература.

При $pl > n$ сказанное становится бессодержательным, так как $H_p^l \subset C$.

Следующий результат Т. Бэгби и У. Зимера [151] показывает, что функция из H_p^l совпадает с функцией из C^m $(m \leqslant l)$ вне некоторого множества, малого в смысле соответствующей емкости.

Предложение. *Пусть* $u \in H_p^l$, $1 < p < \infty$, m — *целое число,* $0 \leqslant m \leqslant l$. *Тогда по любому* $\varepsilon > 0$ *найдется функция* $u_\varepsilon \in C^m$ *и открытое множество* ω, *такие, что* $\operatorname{cap}(\omega, H_p^{l-m}) < \varepsilon$ *и* $u(x) = u_\varepsilon(x)$ *для всех* $x \in R^n \setminus \omega$.

В дополнение к литературе по нелинейным потенциалам, уже упомянутой в этом параграфе, укажем лекции Д. Р. Адамса [138], содержащие также обзор ряда вопросов, не затронутых здесь.

Глава 8

О СУММИРУЕМОСТИ ПО ПРОИЗВОЛЬНОЙ МЕРЕ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

§ 8.1. ОПИСАНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Согласно следствию 2.3.3 при $q \geqslant p$ неравенство

$$\|u\|_{L_q(\mu,\, R^n)} \leqslant A \|\nabla u\|_{L_p(R^n)}, \qquad u \in C_0^\infty, \tag{1}$$

вытекает из «изопериметрического» неравенства

$$(\mu(E))^{p/q} \leqslant p^{-p}(p-1)^{p-1} A^p \operatorname{cap}(E,\, w_p^1).$$

Здесь и далее E — любое борелевское множество в R^n, а w_p^1 — пополнение C_0^∞ по норме $\|\nabla u\|_{L_p}$.

Вместе с тем если для любой функции $u \in C_0^\infty$ справедливо неравенство (1), то для всех $E \subset R^n$

$$(\mu(E))^{p/q} \leqslant A^p \operatorname{cap}(E,\, w_p^1).$$

В настоящей главе приведены аналогичные результаты, в которых роль пространства w_p^1 играют пространства H_p^l, h_p^l, W_p^l, w_p^l, B_p^l, b_p^l. Именно, пусть S_p^l — одно из упомянутых пространств. Тогда точная константа в неравенстве

$$\|u\|_{L_q(\mu)} \leqslant A \|u\|_{S_p^l}, \qquad u \in C_0^\infty, \tag{2}$$

где $q \geqslant p$, эквивалентна точной константе в «изопериметрическом» неравенстве

$$(\mu(E))^{p/q} \leqslant B \operatorname{cap}(E,\, S_p^l). \tag{3}$$

Оценка $A \geqslant B$ немедленно следует из определения емкости. Обратное неравенство представляет собой более глубокий факт, доказательство которого основано на неравенстве

$$\int_0^\infty \operatorname{cap}(N_t,\, S_p^l)\, t^{p-1}\, dt \leqslant C \|u\|_{S_p^l}^p, \tag{4}$$

где $u \in S_p^l$, C — постоянная, не зависящая от u и $N_t = \{x\colon |u(x)| \geqslant t\}$. В § 8.2 приведены три доказательства неравенства (4), имеющие разные области применения.

Возникает вопрос, можно ли обойтись без емкости и произвольных множеств E в необходимом и достаточном условии справедливости неравенства (2). Из теоремы 1.4.1 Д. Р. Адамса следует, что для пространства потенциалов М. Рисса $S_p^l = h_p^l$, $pl < n$, ответ положителен в случае $q > p > 1$. Условие Адамса имеет вид

$$\mu(B(x, \rho)) \leqslant C\rho^s, \tag{5}$$

где $B(x, \rho)$ — любой шар с центром x и радиусом ρ и $s = q(n/p - l)$.

Таким образом, оценка (5) (при $q > p$) для любого шара влечет изопериметрическое неравенство (3) для любого множества E.

В § 8.5 дано прямое доказательство более общих утверждений такого типа. Именно пусть для любого шара $B(x, r)$ справедливо неравенство

$$\mu(B(x, r)) \leqslant \Phi(\operatorname{cap}(B_r, h_p^l)), \tag{6}$$

где $B_r = B(0, r)$, Φ — возрастающая функция, подчиненная дополнительным требованиям, μ — мера в R^n. Тогда для всех борелевских множеств $E \subset R^n$

$$\mu(E) \leqslant c\Phi(c \operatorname{cap}(E, h_p^l)). \tag{7}$$

Из этой теоремы и эквивалентности неравенств (2) и (3) в § 8.6 выводится, что неравенства, подобные (6), необходимы и достаточны для справедливости оценок следов потенциалов М. Рисса или Бесселя в пространствах Орлича $L_M(\mu)$ и, в частности, в $L_q(\mu)$. Это дает, между прочим, новое (не использующее интерполяции) доказательство упомянутой теоремы Адамса. Другое следствие, представляющее самостоятельный интерес, утверждает, что неравенство

$$\|u\|_{L_q(\mu)} \leqslant c\|u\|_{H_p^l},$$

где $q > p > 1$, $lp = n$, имеет место в том и только в том случае, если для всех шаров $B(x, r)$ с радиусами $r \in (0, 1/2)$

$$\mu(B(x, r)) \leqslant c|\log r|^{-q/p'}.$$

Приведем еще некоторые результаты, относящиеся к условиям справедливости неравенства (2).

(a) Если $S_p^l = H_p^l$, $pl < n$, то (2) имеет место одновременно с неравенством (5), в котором $0 < \rho < 1$ (см. § 8.6).

(b) В случае $pl > n$ условие, необходимое и достаточное для (2), при $S_p^l = H_p^l$, имеет простой вид $\sup\{\mu(B(x, 1)): x \in R^n\} < \infty$ (см. § 8.6).

(c) При $q = p$ условие (5) не достаточно для (2) (см. замечание 8.6/2), и в этом, по-видимому, наиболее важном для приложений случае, приходится удовлетвориться менее наглядным условием (3).

(d) В § 8.4 дано следующее необходимое и достаточное условие справедливости неравенства (2) при $p > q > 0$.

Пусть $\{g_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ — любая последовательность открытых множеств таких, что $\overline{g_{j+1}} \subset g_j$ и $\mu_j = \mu(g_j)$, $\gamma_j = \operatorname{cap}(g_j, S_p^l)$, где $S_p^l = h_p^l$ или $S_p^l = H_p^l$, $p > 1$. Неравенство (2) при $q < p$ верно в том и только в том случае, если

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left((\mu_j - \mu_{j+1})^{1/q} / \gamma_j^{1/p} \right)^{pq/(p-q)} \leqslant \mathrm{const}.$$

Отсюда следует более простое достаточное условие:

$$\int_0^\infty (t/\varkappa(t))^{q/(p-q)}\, dt < \infty,$$

где $\varkappa(t) = \inf \{\operatorname{cap}(E, S_p^l) \colon \mu(E) \geqslant t\}$ (см. п. 8.4.3).

(e) В случае $pl > n$, $p > q$ необходимое и достаточное условие справедливости оценки (2) можно записать в существенно более простой форме:

$$\sum_i (\mu(Q_i))^{p/(p-q)} < \infty,$$

где $\{Q_i\}$ — последовательность замкнутых кубов с длиной ребра 1, образующих координатную решетку в R^n (см. п. 8.4.4).

(f) Отметим еще случай $q = 1$, $p > 1$, когда неравенство (2) при $S_p^l = h_p^l$ или $S_p^l = H_p^l$ равносильно включению $I_l \mu \in L_{p'}$ или $J_l \mu \in L_{p'}$ соответственно (здесь I_l и J_l — потенциалы М. Рисса и Бесселя порядка l) (см. п. 8.4.4).

(g) В § 8.7 рассмотрен случай $p = 1$. В дополнение к теореме 1.4.3 здесь показано, что для $S_1^l = b_1^l$ неравенство (2) выполнено одновременно с (5), где $p = 1$, а $q \geqslant 1$. В случае $S_1^l = B_1^l$ в (5) следует добавить ограничение $\rho \in (0, 1)$. Напомним, что согласно теореме 1.4.3 сказанное относится и к $s_1^l = w_1^l$, $S_1^l = W_1^l$.

(h) Рассматривая b_p^l и B_p^l, $p > 1$, как пространства следов на гиперплоскости функций из соответствующих пространств потенциалов, получаем из теорем о h_p^l и H_p^l аналогичные утверждения для b_p^l и B_p^l (замечание 8.6/3).

В § 8.8 приведены необходимые и достаточные условия компактности оператора вложения H_p^l в $L_q(\mu)$ и др., являющиеся непосредственными следствиями результатов, полученных в § 8.2 — 8.7.

§ 8.2. ОЦЕНКА ИНТЕГРАЛА ОТ ЕМКОСТИ МНОЖЕСТВА, ОГРАНИЧЕННОГО ПОВЕРХНОСТЬЮ УРОВНЯ

8.2.1. Случай производных второго порядка. В п. 2.3.1 было получено неравенство (8.1/4) для $S_p^l = \mathring{L}_p^1(\Omega)$. Попытка обобщения доказательства на функции с производными порядка $l > 1$ встречает трудности потому, в частности, что операция срезки по уровням выводит функцию из пространства. В этом пункте показано, как можно преодолеть эти трудности в случае $l=2$, $p>1$.

Пусть e — компактное подмножество Ω и

$$\mathrm{cap}^+(e, \mathring{L}_p^2(\Omega)) =$$
$$= \inf\left\{\int_\Omega |\nabla_2 u|^p dx:\ u\in\mathscr{D}(\Omega),\ u\geqslant 0 \text{ в } \Omega,\ u=1 \text{ в окрестности } e\right\}.$$

Теорема. *Для любой неотрицательной функции из* $\mathscr{D}(\Omega)$ *справедливо неравенство*

$$\int_0^\infty \mathrm{cap}^+(N_t, \mathring{L}_p^2(\Omega))\, t^{p-1}dt \leqslant c\int_\Omega |\nabla_2 u|^p dx, \text{ где } p\in(1, \infty). \tag{1}$$

Доказательству этой теоремы предпошлем следующую лемму.

Лемма. *Если* $u\in\mathscr{D}(R^1)$, $u\geqslant 0$, *то*

$$\int_{R^1} (|u'|^{2p}/u^p)\, dt \leqslant ((2p-1)/(p-1))^p \int_{R^1} |u''|^p dt \tag{2}$$

(*интегрирование распространено на носитель функции* u).

Доказательство. Очевидно, что при $\varepsilon>0$

$$\int_{R^1} (|u'|^{2p}/(u+\varepsilon)^p)\, dt = (1/(1-p)) \int_{R^1} |u'|^{2p-2} u' ((u+\varepsilon)^{1-p})'\, dt.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int_{R^1} \frac{|u'|^{2p}}{(u+\varepsilon)^p} dt = \frac{2p-1}{p-1}\int_{R^1} \frac{|u'|^{2(p-1)}}{(u+\varepsilon)^{p-1}} u''\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2p-1}{p-1}\left(\int_{R^1} |u''|^p dt\right)^{1/p}\left(\int_{R^1}\frac{|u'|^{2p}}{(u+\varepsilon)^p}dt\right)^{(p-1)/p}.$$

Следовательно,

$$\int_{R^1} (|u'|^{2p}/(u+\varepsilon)^p)\, dt \leqslant ((2p-1)/(p-1))^p \int_{R^1} |u''|^p dt.$$

Остается перейти к пределу при $\varepsilon\to+0$. ■

Доказательство теоремы. Очевидно, что

$$\int_0^\infty \mathrm{cap}^+(N_t, \mathring{L}_p^2(\Omega))\, d(t^p) \leqslant c\sum_{j=-\infty}^{+\infty} 2^{-pj}\, \mathrm{cap}^+(g_j, \mathring{L}_p^2(\Omega)),$$

где $g_j=\{x:\ u(x)\geqslant 2^{-j}\}$. Используя монотонность функции $\mathrm{cap}^+(\cdot, \mathring{L}_p^2(\Omega))$, получаем

$$\int_0^\infty \mathrm{cap}^+(N_t, \mathring{L}_p^2(\Omega))\, d(t^p) \leqslant c\sum_{j=-\infty}^{+\infty} 2^{-pj}\gamma_j,$$

где $\gamma_j=\mathrm{cap}^+(g_j, \mathring{L}_p^2(g_{j+1}))$.

Остается доказать неравенство

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} 2^{-pj}\gamma_j \leqslant c\int_\Omega |\nabla_2 u|^p dx. \tag{3}$$

Это будет сделано с помощью операции «гладкой срезки». Введем неубывающую функцию $\alpha \in C^\infty[0, 1]$, равную нулю в окрестности точки $t=0$ и единице в окрестности $t=1$. Введем еще функцию $f \in C^\infty(0, \infty)$, определенную на отрезке $[t_{j+1}, t_j]$ равенством

$$f(u)=t_{j+1}+\alpha((u-t_{j+1})/(t_j-t_{j+1}))(t_j-t_{j+1}),$$

где $t_j=2^{-j}$. Так как сужение функции $(f(u)-t_{j+1})(t_j-t_{j+1})^{-1}$ на множество $g_{j+1}\setminus g_j$, продолженное единицей на g_j и нулем во внешность g_{j+1}, — неотрицательная функция из $\mathscr{D}(g_{j+1})$, то

$$2^{-pj}\operatorname{cap}^+(g_j, \mathring{L}_p^2(g_{j+1}))\leqslant c\int_{g_{j+1}\setminus g_j}|\nabla_2 f(u(x))|^p\,dx.$$

Отсюда следует неравенство

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty}2^{-pj}\gamma_j\leqslant c\int_\Omega|\nabla_2 f(u(x))|^p\,dx. \tag{4}$$

Так как $|f'(v)|\leqslant c$, $|f''(v)|\leqslant cv^{-1}$, то

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty}2^{-pj}\gamma_j\leqslant c\left(\int_\Omega|\nabla_2 u|^p\,dx+\int_\Omega(|\nabla u|^{2p}/u^p)\,dx\right).$$

Оценивая второй интеграл в правой части с помощью леммы, получим (3). ■

Если множество Ω совпадает со всем пространством и $n>2p$, $p>1$, то ограничение $u\geqslant 0$ в предыдущей теореме легко снять. Именно справедливо следующее утверждение.

Следствие. *Если $n>2p$, $p>1$, то для любой функции $u\in\mathscr{D}(R^n)$ имеет место неравенство*

$$\int_0^\infty\operatorname{cap}^+(N_t, \mathring{L}_p^2)\,d(t^p)\leqslant c\int_{R^n}|\nabla_2 u|^p\,dx.$$

Доказательство. Пусть $u\in\mathscr{D}(R^n)$ и $\eta_m(x)=\eta(x/m)$, где $\eta\in\mathscr{D}(B_2)$, $\eta=1$ на B_1, а m — достаточно большое число. Положим $v=|x|^{2-n}*|\Delta u|$. Усредняя функцию $(1+m^{-1})\eta_m v$, получаем последовательность функций w_m из $\mathscr{D}$, удовлетворяющих условиям: $|u|\leqslant w_m$,

$$\lim_{m\to\infty}\|\nabla_2 w_m\|_{L_p}\leqslant c\|\nabla_2 u\|_{L_p}. \tag{5}$$

Очевидно, что

$$\int_0^\infty\operatorname{cap}^+(N_t, \mathring{L}_p^2)\,d(t^p)\leqslant\int_0^\infty\operatorname{cap}(\{x: w_m(x)>t\}, \mathring{L}_p^2)\,d(t^p)$$

и в силу теоремы

$$\int_0^\infty\operatorname{cap}^+(N_t, \mathring{L}_p^2)\,d(t^p)\leqslant c\|\nabla w_m\|_{L_p(R^n)}^p.$$

Переходя к пределу и используя (5), заканчиваем доказательство.

Непосредственно обобщить доказательство теоремы на случай производных порядка выше двух не удается из-за отсутствия аналога леммы для высоких производных. Действительно, на примере функции $R^1 \ni t \to u \in \mathscr{D}(R^1)$, $u \geqslant 0$, совпадающей с t^2 при $|t| < 1$, мы видим, что из конечности нормы $\|u^{(l)}\|_{L_p(R^1)}$ при $l > 2$ не следует конечность интеграла $\int_{R^1} |u^{(j)}(t)|^{pl/j} u(t)^{p(j-l)/j}\, dt$.

В следующем пункте показано, что тем не менее операция «гладкой срезки» приводит к успеху в случае $\Omega = R^n$, если ее применить не к произвольной неотрицательной функции, а к потенциалу с неотрицательной плотностью.

8.2.2. Доказательство, основанное на гладкой срезке вблизи поверхностей уровня потенциала. Введем максимальный оператор T Харди — Литтлвуда со значениями

$$(Tg)(x) = \sup_{r>0} (1/m_n B_r) \int_{B_r(x)} |g(\xi)|\, d\xi. \tag{1}$$

Лемма [194]. *Пусть* $0 < \theta < 1$, $0 < r < n$ *и* $I_r f$ — *потенциал М. Рисса порядка* r *с неотрицательной плотностью* f, *т. е.* $I_r f = |x|^{r-n} * f$. Тогда

$$(I_{r\theta} f)(x) \leqslant c\,[(I_r f)(x)]^{\theta}\,[(Tf)(x)]^{1-\theta}. \tag{2}$$

Доказательство. При любом $\delta > 0$

$$\int_{|y-x| \geqslant \delta} f(y)\, |x-y|^{r\theta-n}\, dy \leqslant \delta^{r(\theta-1)} \int_{|y-x| \geqslant \delta} f(y)\, |x-y|^{-n+r}\, dy \leqslant$$
$$\leqslant \delta^{r(\theta-1)} (I_r f)(x).$$

Вместе с тем

$$\int_{|y-x| \leqslant \delta} f(y)\, |x-y|^{r\theta-n}\, dy =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\delta 2^{-k-1} < |y-x| < \delta 2^{-k}} f(y)\, |x-y|^{r\theta-n}\, dy \leqslant$$
$$\leqslant c \sum_{k=0}^{\infty} (\delta 2^{-k})^{r\theta} (\delta 2^{-k})^{-n} \int_{|y-x| \leqslant \delta 2^{-k}} f(y)\, dy \leqslant$$
$$\leqslant c\delta^{r\theta} (Tf)(x) \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-kr\theta}. \tag{3}$$

Следовательно, $$(I_{r\theta} f)(x) \leqslant c\,(\delta^{r\theta} (Tf)(x) + \delta^{r(\theta-1)} (I_r f)(x)).$$

Полагая здесь $\delta^r = (I_r f)(x)/(Tf)(x)$, приходим к (2).

Следствие. *Пусть* l — *целое число,* $0 < l < n$, $I_l f = |x|^{l-n} * f$, *где* $f \geqslant 0$ *и* F — *функция из* $C^l(0, \infty)$, *такая, что*

$$t^{k-1} |F^{(k)}(t)| \leqslant Q, \qquad k = 0, \ldots, l.$$

Тогда п. в. *в* R^n $$|\nabla_l F(I_l f)| \leqslant cQ\,(Tf + |\nabla_l I_l f|).$$

Доказательство. Имеем

$$|\nabla_l F(u)| \leqslant c \sum_{k=1}^{l} |F^{(k)}(u)| \sum_{j_1+\dots+j_k=l} |\nabla_{j_1} u| \dots |\nabla_{j_k} u| \leqslant$$

$$\leqslant cQ \sum_{k=1}^{l} \sum_{j_1+\dots+j_k=l} \frac{|\nabla_{j_1} u|}{u^{1-j_1/l}} \dots \frac{|\nabla_{j_k} u|}{u^{1-j_k/l}}.$$

Так как $|\nabla_s u| \leqslant I_{l-s} f$, то отсюда получаем

$$|\nabla_l F(u)| \leqslant cQ \left(|\nabla_l I_l f| + \sum_{k=1}^{l} \sum_{j_1+\dots+j_k=l}' \frac{I_{l-j_1} f \dots I_{l-j_k} f}{(I_l f)^{1-j_1/l} \dots (I_l f)^{1-j_k/l}} \right),$$

где сумма $\sum'$ распространена на наборы чисел $j_1, \dots, j_k$, каждое из которых меньше l. Применяя лемму 2.1, заканчиваем доказательство.

Пусть w — неотрицательная функция в R^n, удовлетворяющая условию Макенхаупта:

$$\sup_Q \left((1/m_n Q) \int_Q w^p \, dx \right) \left((1/m_n Q) \int_Q w^{-p'} \, dx \right)^{p-1} < \infty, \tag{4}$$

где супремум берется по всем кубам Q. При этом условии операторы T и $\nabla_l I_l$ непрерывны в пространстве функций φ с конечной нормой $\|w\varphi\|_{L_p}$ [162, 227].

Теорема. *Пусть* $p>1$, $l=1, 2, \dots$ *и* $lp<n$. *Справедливо неравенство* (8.1/4), *где* S_p^l — *пополнение пространства* C_0^∞ *по норме* $\|w\nabla_l u\|_{L_p}$.

Доказательство. Пусть $u \in C_0^\infty(R^n)$, $u=I_l f$ и $v=I_l|f|$. Очевидно, что $v \in C^l(R^n)$ и $v(x)=O(|x|^{l-n})$ при $|x| \to \infty$. Так как $v(x) \geqslant |u(x)|$, то, полагая $t_j=2^{-j}$ $(j=0, \pm 1, \dots)$, получаем

$$\int_0^\infty \operatorname{cap}(N_t, S_p^l) \, d(t^p) \leqslant c \sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{-pj} \gamma_j, \tag{5}$$

где $\gamma_j = \operatorname{cap}(\{x: v(x) \geqslant t_j\}, S_p^l)$. Дословно так же, как неравенство (8.2.1/4), получаем

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} 2^{-pj} \gamma_j \leqslant c \|f(v)\|_{S_p^l}^p,$$

где f — функция, введенная в доказательстве теоремы 8.2.1. В силу следствия 1 последняя норма мажорируется величиной

$$c(\|wT|f|\|_{L_p} + \|w\nabla_l I_l |f|\|_{L_p}). \tag{6}$$

Так как весовая функция w удовлетворяет условию (4), то сумма (6) не больше чем $c_1\|wf\|_{L_p} = c_1 \|w(-\Delta)^l I_l u\|_{L_p} \leqslant c\|w\nabla_l u\|_{L_p}$. ■

Следствие. *Справедливо неравенство* (8.1/4), *в котором* $S_p^l = b_p^l$, $p>1$, $l>0$.

Доказательство. Пусть U — любое продолжение функции $u \in C_0^\infty(R^n)$ на пространство $R^{n+1}\{X=(x, x_{n+1}): x\in R^n, x_{n+1}\in R^1\}$. Согласно теореме 7.1.1/1

$$\|u\|_{b_p^l(R^n)} \sim \inf_{\{U\}} \|U\|_{\mathring{L}_p^{[l]+1}\left(R^{n+1},\ x_{n+1}^{1-\{l\}-1/p}\right)},$$

где $\mathring{L}_p^k(R^{n+1}, w)$ — пополнение $C_0^\infty(R^{n+1})$ по норме $\|w\nabla_k u\|_{L_p(R^{n+1})}$. Следовательно, $\operatorname{cap}(e, b_p^l(R^n)) \sim \operatorname{cap}\left(e, L_p^{[l]+1}\left(R^{n+1}, x_{n+1}^{1-\{l\}-1/p}\right)\right)$. Нетрудно проверить, что функция $X \to w(X) = x_{n+1}^{1-\{l\}-1/p}$ удовлетворяет условию (4). Поэтому теорема приводит к оценке

$$\int_0^\infty \operatorname{cap}(N_t, b_p^l(R^n))\, d(t^p) \leqslant c\|U\|^p_{L_p^{[l]+1}\left(R^{n+1},\ x_{n+1}^{1-\{l\}-1/p}\right)}.$$

Минимизируя правую часть по всем продолжениям функции u на R^{n+1}, заканчиваем доказательство.

8.2.3. Доказательство, использующее принцип максимума для нелинейных потенциалов. Пусть $K\mu$ — бесселев или риссов (линейный) потенциал порядка l меры μ и $K(K\mu)^{p'-1}$ — порожденный K нелинейный потенциал, $\mathfrak{M}$ — константа в грубом принципе максимума для потенциала $K(K\mu)^{p'-1}$ (см. предложение 7.2.2/1).

Теорема. *Справедливо неравенство* (8.1/4), *в котором* S_p^l — *любое из пространств* H_p^l *или* h_p^l $(pl<n)$. *Точная константа* C *в* (8.1/4) *допускает оценки*

$$C \leqslant (p')^{p-1}\mathfrak{M}, \qquad \text{если} \quad p\geqslant 2,$$
$$C \leqslant (p')^p p^{-1}\mathfrak{M}^{p-1}, \qquad \text{если} \quad p<2.$$

Доказательство. Пусть для краткости $c(t) = \operatorname{cap}(N_t, S_p^l)$. Можно провести доказательство в предположении, что $u=Kf$, $f\geqslant 0$, $f\in L_p$. Обозначим через μ_t емкостную меру множества N_t (см. предложение 7.2.2/2).

Левая часть неравенства (8.1/4) не превосходит величины

$$\int_0^\infty \int Kf\, d\mu_t t^{p-2}\, dt = \int f\, dx \int_0^\infty K\mu_t t^{p-2}\, dt,$$

которая не больше чем $\|f\|_{L_p} \left\| \int_0^\infty t^{p-2} K\mu_t\, dt \right\|_{L_{p'}}$.

Поэтому теорема будет доказана, если мы получим оценку

$$\int \left(\int_0^\infty t^{p-2} K\mu_t\, dt\right)^p dx \leqslant c^{p'-1} \int_0^\infty c(t)\, t^{p-1}\, dt. \tag{1}$$

Заметим сначала, что в силу принципа максимума

$$\int (K\mu_\tau)^{p'-1} K\mu_t\, dx \leqslant \mathfrak{M} c(t). \tag{2}$$

Далее рассмотрим отдельно случаи $p \geqslant 2$ и $p<2$. Пусть $p \geqslant 2$. Перепишем левую часть неравенства (1) в виде

$$p' \int \int_0^\infty K\mu_\tau \left(\int_\tau^\infty K\mu_t t^{p-2}\, dt\right)^{p'-1} \tau^{p-2}\, d\tau\, dx.$$

Оценим это выражение сверху с помощью неравенства Гельдера величиной

$$p' \left(\int \int_0^\infty \tau^{p-1} (K\mu_\tau)^{p'} d\tau\, dx\right)^{2-p'} \left(\int \int_0^\infty (K\mu_\tau)^{p'-1} \int_\tau^\infty K\mu_t t^{p-2}\, dt\, d\tau\, dx\right)^{p'-1},$$

которая в силу (2) не превосходит

$$p' \mathfrak{M}^{p'-1} \left(\int_0^\infty \| K\mu_t \|_{L_{p'}}^{p'} t^{p-1}\, dt\right)^{2-p'} \left(\int_0^\infty c(t)\, t^{p-1}\, dt\right)^{p'-1}.$$

Неравенство (8.1/4) доказано при $p \geqslant 2$.

Пусть $p<2$. Левая часть (1) равна

$$p' \int \int_0^\infty K\mu_t t^{p-2}\, dt \left(\int_0^t K\mu_\tau \tau^{p-2}\, d\tau\right)^{p'-1} dx$$

и потому согласно неравенству Минковского не превосходит

$$p' \int_0^\infty \left(\int_0^t \left(\int (K\mu_\tau)^{p'-1} K\mu_t\, dx\right)^{p-1} \tau^{p-2}\, d\tau\right)^{p'-1} t^{p-2}\, dt.$$

Оценивая эту величину при помощи неравенства (2), получаем для нее мажоранту

$$p' \mathfrak{M} \int_0^\infty c(t) \left(\int_0^t \tau^{p-2}\, d\tau\right)^{p'-1} t^{p-2}\, dt$$

и неравенство (8.1/4) установлено при $p<2$.

§ 8.3. УСЛОВИЯ СПРАВЕДЛИВОСТИ ТЕОРЕМ ВЛОЖЕНИЯ В ТЕРМИНАХ ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

Сформулируем обобщение теоремы 2.3.2 на случай пространств бесселевых и риссовых потенциалов в R^n. Доказательство не отличается от доказательства теоремы 2.3.2 и поэтому не приводится.

Теорема. *Точная константа A в неравенстве*

$$\| |u|^p \|_{L_M(\mu)} \leqslant A \| u \|_{S_p^l}^p, \tag{1}$$

где $S_p^l = h_p^l$ при $pl<n$ или $S_p^l = H_p^l$ при $pl \leqslant n$, $p \in (1, \infty)$, эквивалентна величине

$$B = \sup \left\{ \frac{\mu(E)\, N^{-1}(1/\mu(E))}{\operatorname{cap}(E, S_p^l)} : E \subset R^n,\ \operatorname{cap}(E, S_p^l) > 0 \right\}.$$

Точнее, $B \leqslant A \leqslant pBC$, где C — постоянная в неравенстве (8.1/4) (*см. теорему* 8.2.3).

Из этого утверждения немедленно получаем следующее утверждение.

Следствие. *Точная константа $C_{p,q}$ в неравенстве*

$$\|u\|_{L_q(\mu)} \leqslant C_{p,q}\|u\|_{S_p^l}, \tag{2}$$

где $q \geqslant p > 1$ и S_p^l — любое из пространств, упомянутых в теореме, допускает оценки $B_{p,q} \leqslant C_{p,q} \leqslant B_{p,q}(pC)^{1/p}$. Здесь

$$B_{p,q} = \sup\{(\mu(E)^{p/q}/\operatorname{cap}(E, S_p^l)) : E \subset R^n, \operatorname{cap}(E, S_p^l) > 0\},$$

а C — постоянная в неравенстве (8.1/4).

§ 8.4. ВЛОЖЕНИЕ В $L_q(\mu)$ ПРИ $p>q>0$

В этом параграфе найдено необходимое и достаточное условие справедливости неравенства (8.3/2) при $p>q>0$, $p>1$. Доказательству этого результата предпошлем лемму.

8.4.1. **Вспомогательная оценка.** Будем использовать обозначения $K\mu$, $K(K\mu)^{p'-1}$ и $\mathfrak{M}$, введенные в начале п. 8.2.3. Обозначим через $\{g_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ последовательность открытых подмножеств R^n и через $\{t_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ — возрастающую последовательность положительных чисел. Пусть еще $\gamma_j = \operatorname{cap}(g_j, S_p^l)$, где $S_p^l = H_p^l$ $(pl \leqslant n)$ или $S_p^l = h_p^l$ $(pl<n)$ и ν_j — емкостная мера множества g_j.

Лемма. *Справедливо неравенство*

$$\left\| \sum\nolimits_j (t_{j+1}-t_j)(K\nu_j)^{p'-1} \right\|_{L_p}^p \leqslant B_p \sum\nolimits_j t_{j+1}^{p-1}(t_{j+1}-t_j)\gamma_j, \tag{1}$$

где $B_p \leqslant p\mathfrak{M}^{p-1}$ при $p \leqslant 2$ и $B_p \leqslant p(p-1)^{p-1}\mathfrak{M}$ при $p \geqslant 2$.

Доказательство. Случай $p \leqslant 2$. Так как $x^\alpha - y^\alpha \leqslant \alpha x^{\alpha-1}(x-y)$ при $\alpha \geqslant 1$, $x>y \geqslant 0$, то для любой положительной последовательности $\{\alpha_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$

$$\left(\sum\nolimits_j \alpha_j\right)^p = \sum\nolimits_j \left[\left(\sum\nolimits_{i \geqslant j}\alpha_i\right)^p - \left(\sum\nolimits_{i \geqslant j+1}\alpha_i\right)^p\right] \leqslant$$
$$\leqslant p\sum\nolimits_j \alpha_j \left(\sum\nolimits_{i \geqslant j}\alpha_i\right)^{p-1}.$$

Следовательно, левая часть неравенства (1) не больше величины

$$\int p\sum\nolimits_j (t_{j+1}-t_j)(K\nu_j)^{p'-1}\left(\sum\nolimits_{j \geqslant i}(t_{i+1}-t_i)(K\nu_i)^{p'-1}\right)^{p-1}dx =$$
$$= \int p\sum\nolimits_j (t_{j+1}-t_j)\left(t_{j+1}^{p-1}(K\nu_j)^{p'}\right)^{2-p}\left(t_{j+1}^{p-2}K\nu_j\right)^{p-1} \times$$
$$\times \left(\sum\nolimits_{j \geqslant i}(t_{i+1}-t_i)(K\nu_i)^{p'-1}\right)^{p-1}dx.$$

Последний интеграл в силу неравенства Гельдера и принципа максимума для нелинейных потенциалов не превосходит

$$p\left(\sum_j (t_{j+1}-t_j)\, t_{j+1}^{p-1} \int (K\nu_j)^{p'}\, dx\right)^{2-p} \times$$
$$\times\left(\sum_i (t_{i+1}-t_i)\, t_{i+1}^{p-2} \sum_{j\geqslant i} (t_{i+1}-t_i) \int K\nu_j\, (K\nu_i)^{p'-1}\, dx\right)^{p-1} \leqslant$$
$$\leqslant p\mathfrak{M}^{p-1}\left(\sum_j (t_{j+1}-t_j)\, t_{j+1}^{p-1}\gamma_j\right)^{2-p} \times$$
$$\times\left(\sum_j (t_{j+1}-t_j)\, t_{j+1}^{p-2}\gamma_j \sum_{i\leqslant j} (t_{i+1}-t_i)\right)^{p-1},$$

и оценка (1) доказана при $p\leqslant 2$.

Случай $p>2$. Достаточно провести доказательство для конечных наборов $\{t_j\}$ и $\{\gamma_j\}$. Рассуждая так же, как в начале доказательства леммы, оцениваем левую часть неравенства (1) величиной

$$p\int \sum_j (t_{j+1}-t_j)\, (K\nu_j)^{p'-1}\left(\sum_{j\leqslant i} (t_{i+1}-t_i)\, (K\nu_i)^{p'-1}\right)^{p-1} dx,$$

которая в силу неравенства Минковского не больше чем

$$p\sum_j (t_{j+1}-t_j)\left(\sum_{j\leqslant i} (t_{i+1}-t_i)\left(\int (K\nu_j)^{p'-1} K\nu_i\, dx\right)^{1/(p-1)}\right)^{p-1}.$$

Это выражение согласно принципу максимума не превосходит

$$p\mathfrak{M}\sum_j (t_{j+1}-t_j)\,\sigma_j^{p-1}, \quad \text{где} \quad \sigma_j=\sum_{j\leqslant i} (t_{i+1}-t_i)\,\gamma_i^{p'-1}.$$

Заметим далее, что

$$\sum_j (t_{j+1}-t_j)\,\sigma_j^{p-1}=\sum_j t_{j+1}\left(\sigma_j^{p-1}-\sigma_{j+1}^{p-1}\right)\leqslant$$
$$\leqslant (p-1)\sum_j t_{j+1}(\sigma_j-\sigma_{j+1})\,\sigma_j^{p-2}=(p-1)\sum_j t_{j+1}(t_{j+1}-t_j)\gamma_j^{p'-1}\sigma_j^{p-2}\leqslant$$
$$\leqslant (p-1)\left(\sum_j \sigma_j^{p-1}(t_{j+1}-t_j)\right)^{(p-2)/(p-1)}\left(\sum_j \gamma_j t_{j+1}^{p-1}(t_{j+1}-t_j)\right)^{1/(p-1)}.$$

Следовательно,

$$\sum_j (t_{j+1}-t_j)\,\sigma_j^{p-1}\leqslant (p-1)^{p-1}\sum_j t_{j+1}^{p-1}(t_{j+1}-t_j)\,\gamma_j.$$

8.4.2. Основная теорема. Пусть $\mathfrak{S}$ — любая последовательность открытых множеств $\{g_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$, такая, что $g_{j+1}\subset g_j$. Положим еще $\mu_j=\mu(g_j)$, $\gamma_j=\operatorname{cap}(g_j, S_p^l)$ и

$$\mathscr{D}_{p,q}=\sup_{\{\mathfrak{S}\}}\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left((\mu_j-\mu_{j+1})^{1/q}/\gamma_j^{1/p}\right)^{pq/(p-q)}\right)^{(p-q)/pq}.$$

Теорема. *Точная константа в неравенстве* (8.3/2), *где* $p>q>0$, *эквивалентна величине* $\mathscr{D}_{p,q}$.

Доказательство. 1) Покажем, что имеет место оценка

$$C_{p,q}\leqslant (4pC)^{1/p}\,\mathscr{D}_{p,q}, \tag{1}$$

где C — постоянная в неравенстве (8.1/4).

Пусть $f\in C_0^\infty$, $f\geqslant 0$, $u=Kf$ и $g_j=\{x:\ (Kf)(x)>\alpha^j\}$, где $\alpha>1$. Очевидно, что

$$\|u\|_{L_q(\mu)}^q\leqslant\sum_j\alpha^{q(j+1)}[\mu(g_j)-\mu(g_{j+1})]=\sum_j\alpha^{q(j+1)}\left((\mu_j-\mu_{j+1})/\gamma_j^{q/p}\right)\gamma_j^{q/p}.$$

В силу неравенства Гельдера последняя сумма не превосходит величины $\mathscr{D}_{p,q}^q\left(\sum_j\alpha^{p(j+1)}\gamma_j\right)^{q/p}$. Отметим, что

$$\sum_j\alpha^{p(j+1)}\gamma_j\leqslant(p\alpha^{2p}/(\alpha^p-1))\sum_l\int_{\alpha^{j-1}}^{\alpha^j}\operatorname{cap}\left(N_t,\ S_p^l\right)t^{p-1}\,dt.$$

Полагая здесь $\alpha^p=2$, получаем неравенство

$$\sum_j\alpha^{p(j+1)}\gamma_j\leqslant 4p\int_0^\infty\operatorname{cap}\left(N_t,\ S_p^l\right)t^{p-1}\,dt.$$

Следовательно,
$$\|u\|_{L_q(\mu)}\leqslant(4pC)^{1/p}\,\mathscr{D}_{p,q}\|u\|_{S_p^l}\tag{2}$$
и неравенство (1) доказано.

2) Получим оценку
$$C_{p,q}\geqslant B_p^{-1/p}\mathscr{D}_{p,q},\tag{3}$$
где B_p — постоянная из леммы 8.4.1.

Пусть $t_0,\ t_{\pm 1},\ \ldots,\ t_{\pm N}$ — положительные числа, которые будут выбраны в дальнейшем, $t_{j+1}>t_j$, $t_{-N}=0$. Положим

$$u=\sum_{|j|<N}(t_{j+1}-t_j)\,K\,(K\mu_j)^{p'-1},$$

где μ_j — емкостная мера множества g_j, входящего в произвольную последовательность $\mathfrak{S}$. В силу леммы 8.4.1

$$\|u\|_{S_p^l}\leqslant B_p^{1/p}\left(\sum_{|j|<N}t_{j+1}^p\gamma_j\right)^{1/p}.\tag{4}$$

Так как $K(K\mu_j)^{p'-1}\geqslant 1$ квазивсюду на g_j и так как из (8.3/1) следует оценка $\mu(E)^{p/q}\leqslant C_p\operatorname{cap}\left(E,\ S_p^l\right)$ для любого множества E, то μ-почти всюду на g_j справедливо неравенство $K(K\mu_j)^{p'-1}\geqslant 1$. Поэтому

$$\|u\|_{L_q(\mu)}\geqslant\Big\|\sum_{|j|<N}(t_{j+1}-t_j)\,\chi_j\Big\|_{L_q(\mu)},$$

где χ_j — характеристическая функция множества g_j. Отсюда получаем

$$\|u\|_{L_q(\mu)}^q\geqslant\Big\|\sum_{|j|<N}t_{j+1}\,(\chi_j-\chi_{j+1})\Big\|_{L_q(\mu)}^q=$$
$$=\sum_{|j|<N}t_{j+1}^q(\mu_j-\mu_{j+1}).\tag{5}$$

Положим $t_{j+1}=((\mu_j-\mu_{j+1})/\gamma_j)^{1/(p-q)}$. Тогда из (4) и (5) находим

$$\left(\sum_{|j|<N}\left((\mu_j-\mu_{j+1})^{p/(p-q)}/\gamma_j^{q/(p-q)}\right)\right)^{(p-q)/pq}\leqslant C_{p,q}B_p^{1/p}.$$

Переходя к пределу при $N \to \infty$, заканчиваем доказательство оценки (3), а вместе с ним и доказательство теоремы.

8.4.3. **Достаточное условие** ($p > q > 0$). Введем функцию $(0, \infty) \ni t \to \varkappa(t) = \inf\limits_{E} \operatorname{cap}(E, S_p^l)$, где инфимум вычисляется по множеству всех $E \subset R^n$, таких, что $\mu(E) \geqslant t$.

В терминах функции $\varkappa$ можно дать следующее достаточное условие справедливости неравенства (8.3/2) при $p > q > 0$:

$$\int_0^\infty (t/\varkappa(t))^{q/(p-q)}\, dt < \infty. \tag{1}$$

Следствие. *Справедливо неравенство*

$$\|u\|_{L_q(\mu)} \leqslant (p/(p-q))^{(p-q)/pq} (4pC)^{1/p} \times$$
$$\times \left(\int_0^\infty (t/\varkappa(t))^{q/(p-q)}\, dt\right)^{(p-q)/pq} \|u\|_{S_p^l}, \tag{2}$$

где $0 < q < p$, $p > 1$.

Доказательство. Неравенство (2) непосредственно получается из (8.4.2/1) и оценок

$$\sum_j \left(\frac{(\mu_j - \mu_{j+1})^{p/q}}{\gamma_j}\right)^{q/(p-q)} \leqslant \sum_j \frac{\mu_j^{p/(p-q)} - \mu_{j+1}^{p/(p-q)}}{\gamma_j^{q/(p-q)}} \leqslant \int_0^\infty \frac{d\,(t^{p/(p-q)})}{(\varkappa(t))^{q/(p-q)}}. \ \blacksquare$$

8.4.4. **Два простых случая.** Если $pl > n$, то необходимое и достаточное условие справедливости оценки (8.3/2), где $S_p^l = H_p^l$, W_p^l или B_p^l, можно записать в существенно более простой форме, чем в теореме 8.4.2. Именно справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Если* $pl > n$, $p > q$ и $C_{p,q}$ — *наилучшая константа в неравенстве* (8.3/2), *то*

$$C_{p,q} \sim \left(\sum\nolimits_{i \geqslant 0} \mu(Q^{(i)})^{p/(p-q)}\right)^{(p-q)/pq}, \tag{1}$$

где $\{Q^{(i)}\}$ — *последовательность замкнутых кубов с длиной ребра* 1, *образующих координатную решетку в* R^n*.

Доказательство. Пусть $O^{(i)}$ — центр куба $Q^{(i)}$, $O^{(0)} = 0$ и $2Q^{(i)}$ — концентрический $Q^{(i)}$ и подобно расположенный куб с вдвое большей длиной ребра. Положим $\eta_i(x) = \eta(x - O^{(i)})$, где $\eta \in C_0^\infty(2Q^{(0)})$, $\eta = 1$ на $Q^{(0)}$. Имеем

$$\|u\|_{L_q(\mu)}^q \leqslant \sum\nolimits_{i \geqslant 0} \|u\|_{C(\overline{Q^{(i)}})}^q \mu(Q^{(i)}) \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sum\nolimits_{i \geqslant 0} \mu(Q^{(i)})^{p/(p-q)}\right)^{1-q/p} \left(\sum\nolimits_{i \geqslant 0} \|u\|_{C(\overline{Q^{(i)}})}^p\right)^{q/p}. \tag{2}$$

---

* Утверждения такого типа были получены в кандидатской диссертации В. Л. Олейника в 1975 г. (Ленингр. ун-т).

Заметим, что при $pl > n$

$$\|u\|_{C(\overline{Q^{(l)}})} \leqslant \|u\eta_l\|_{S_p^l}, \qquad (3)$$

где $S_p^l = h_p^l$, w_p^l или b_p^l (см. (7.1.3/2) и пп. (6), (9) теоремы 7.1.3/4). Из (7.1.3/1), (2) и (3) получаем верхнюю оценку для $C_{p,q}$.

Для оценки $C_{p,q}$ снизу достаточно подставить в (8.3/2) функцию

$$u_N(x) = \sum_{l=0}^{N} \mu(Q^{(l)})\, \eta_l(x), \qquad N = 1, 2, \ldots \blacksquare$$

В случае $q = 1$ константа $C_{p,q}$ легко вычисляется.

Теорема 2. *Пусть S_p^l — любое из пространств H_p^l или h_p^l. Тогда $C_{p,1} = \|K\mu\|_{L_{p'}}$, где $K\mu$ — потенциал Бесселя или М. Рисса.*

Доказательство. Пусть $|u| \leqslant Kf$, $f \geqslant 0$ и $\|f\|_{L_p} = \|u\|_{S_p^l}$. Имеем $\int |u|\, d\mu \leqslant \int fK\mu\, dx \leqslant \|f\|_{L_p} \|K\mu\|_{L_{p'}}$, что дает оценку $C_{p,1} \leqslant \|K\mu\|_{L_{p'}}$. Обратное неравенство получается подстановкой в (8.3/2), где $q = 1$, функции $u = K(K\mu)^{1/(p-1)}$.

§ 8.5. ТЕОРЕМЫ ТИПА КАРТАНА И ОЦЕНКИ ЕМКОСТИ

В этом параграфе устанавливается равносильность неравенств типа (8.1.6) и (8.1.7). Это утверждение получается как следствие теоремы, дающей оценку массивности множества, на котором введенные в п. 7.2.2 функции $W_{p,l}\mu$ и $S_{p,l}\mu$ мажорируют заданную величину. Впервые такие оценки были получены для гармонических функций А. Картаном [160] (см. также Р. Неванлинна [101]). Для линейных потенциалов М. Рисса они даны в книге Н. С. Ландкофа [50].

Аналогичная схема используется здесь в нелинейном случае.

Лемма. *Пусть $1 < p \leqslant n/l$, μ — конечная мера в R^n и φ — такая возрастающая функция на $[0, +\infty)$, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi(r) = \varphi(r_0) = \mu(R^n)$ при $r > r_0$. Обозначим через $\mathscr{D}$ множество $\{x \in R^n: (P\mu)(x) > Y[\varphi]\}$, где $P\mu = W_{p,l}\mu$, если $pl < n$, $P\mu = S_{p,l}\mu$, если $pl = n$, и*

$$Y[\varphi] = \begin{cases} \int_0^\infty \left(\dfrac{\varphi(r)}{r^{n-pl}}\right)^{p'-1} \dfrac{dr}{r}, & \text{если} \quad 1 < p < n/l, \\ \int_0^\infty (\varphi(r))^{p'-1} e^{-br} r^{-1}\, dr, & \text{если} \quad p = n/l. \end{cases}$$

Тогда множество $\mathscr{D}$ можно покрыть последовательностью шаров с радиусами $r_k \leqslant r_0$, удовлетворяющими неравенству

$$\sum_k \varphi(r_k) \leqslant c\mu(R^n). \qquad (1)$$

Доказательство. Рассмотрим случай $1<p<n/l$. Пусть $x\in\mathscr{D}$. Допустим, что $\mu(B(x, r))\leqslant\varphi(r)$ для всех $r>0$. Тогда

$$(W_{p,l}\mu)(x)=\int_0^\infty\left(\frac{\mu(B(x, r))}{r^{n-lp}}\right)^{p'-1}\frac{dr}{r}\leqslant\int_0^\infty\left(\frac{\varphi(r)}{r^{n-lp}}\right)^{p'-1}\frac{dr}{r}.$$

Но это означает, что $x\overline{\in}\mathscr{D}$. Полученное противоречие показывает, что для каждой точки $x\in\mathscr{D}$ найдется такое число $r=r(x)\in(0, r_0)$, что $\varphi(r)<\mu(B(x, r))\leqslant\mu(R^n)$. Применяя теорему 1.2.1, выделяем из объединения шаров $\{B(x, r(x))\}_{x\in\mathscr{D}}$ покрытие $\{B(x_k, r_k)\}$, $k=1, 2, \ldots$, множества $\mathscr{D}$ кратности $c=c(n)$.

Очевидно, что

$$\sum\nolimits_k\varphi(r_k)<\sum\nolimits_k\mu(B(x_k, r_k))\leqslant c\mu(R^n),$$

и лемма доказана в случае $1<p<n/l$. Для $p=n/l$ доказательство проводится точно так же.

В следующей теореме Φ — неотрицательная, возрастающая функция на $[0, +\infty)$, такая, что функция $t\Phi(t^{-1})$ убывает и стремится к нулю при $t\to+\infty$. Пусть еще для всех $u>0$

$$\int_u^{+\infty}\psi(t)\,t^{-1}\,dt\leqslant c\psi(u), \tag{2}$$

где $\psi(v)=(v\Phi(v^{-1}))^{p'-1}$, если $1<p<n/l$, и $\psi(v)=v(\Phi(v^{1-p}))^{p'-1}$, если $p=n/l$.

Теорема. *Пусть $p\in(1, n/l]$, μ — конечная мера в R^n и m — положительное число. Пусть еще $m^{p-1}>\mu(R^n)$ в случае $p=n/l$. Тогда множество $G=\{x\in R^n\colon (P\mu)(x)>m\}$ может быть покрыто последовательностью шаров $\{B(x_k, r_k)\}$, такой, что*

$$\sum\nolimits_k\Phi\left(\operatorname{cap}\left(B_{r_k}, S_p^l\right)\right)<c\Phi\left(cm^{1-p}\mu(R^n)\right). \tag{3}$$

Здесь $S_p^l=h_p^l$ при $lp<n$ и $S_p^l=H_p^l$ при $lp=n$.

Доказательство. Пусть $\varkappa=\operatorname{cap}(B_1, h_p^l)$ при $n>lp$. В случае $n=lp$ введем величину

$$\varkappa=\min\left\{t\colon \operatorname{cap}\left(B_r, H_p^l\right)\leqslant t\,|\log r|^{1-p},\quad r<e^{-1}\right\}.$$

Пусть еще $Q=\mu(R^n)$. Положим в лемме $\varphi(r)=Q$, если $r>r_0$, и

$$\varphi(r)=\begin{cases} Q\Phi(\varkappa r^{n-lp})/\Phi(\varkappa r_0^{n-lp}), & \text{если}\quad pl<n,\ r\leqslant r_0,\\ Q\Phi(\varkappa\,|\log|^{1-p})/\Phi(\varkappa\,|\log r_0|^{1-p}), & \text{если}\quad pl=n,\ r\leqslant r_0.\end{cases}$$

Здесь и далее r_0 — число, которое будет выбрано в дальнейшем так, чтобы выполнялось неравенство $m>Y[\varphi]$ (число $Y[\varphi]$ определено в лемме).

1. Пусть $1<p<n/l$. Имеем

$$Y[\varphi]=\int_0^{r_0}(\varphi(r)/r^{n-lp})^{p'-1}dr/r+Q^{p'-1}((p-1)/(n-lp))r_0^{(n-lp)/(1-p)}.$$

Покажем, что интеграл в правой части не превосходит $cQ^{p'-1}r_0^{(n-lp)/(1-p)}$. Это равносильно следующему неравенству:

$$\left(\Phi\left(\varkappa r_0^{n-lp}\right)\right)^{1-p'}\int_0^{r_0}(\Phi(\varkappa r^{n-lp})/r^{n-lp})^{p'-1}(dr/r)\leqslant cr_0^{(n-lp)/(1-p)}.$$

Полагая здесь $\varkappa r^{pl-n}=t$ и $\varkappa r_0^{pl-n}=t_0$, получаем оценку

$$\int_{t_0}^{\infty}(t\Phi(t^{-1}))^{p'-1}t^{-1}dt\leqslant c(t_0\Phi(t_0^{-1}))^{p'-1},$$

которая верна в силу (8.5/2). Итак, $Y[\varphi]<cQ^{p'-1}r_0^{(n-lp)/(1-p)}$ и неравенство $Y[\varphi]<m$ будет удовлетворено, если положить $r_0^{n-lp}=(cm^{-1})^{p-1}Q$.

Введем открытое (в силу полунепрерывности снизу функции $P\mu$) множество $\mathscr{D}=\{x\in R^n\colon (P\mu)(x)>Y[\varphi]\}$. Так как $m>cY[\varphi]$, то $G\subset\mathscr{D}$. Пусть $\{B(x_k,r_k)\}$ — последовательность шаров, построенная в лемме для множества $\mathscr{D}$ с помощью выбранной здесь функции φ. Неравенство (1) можно переписать в виде

$$\sum_k\Phi\left(\varkappa r_k^{n-lp}\right)\leqslant c\Phi(cm^{1-p}Q).$$

Тем самым построено покрытие множества G шарами $\{B(x_k,r_k)\}$, удовлетворяющими (3).

2. Пусть теперь $p=n/l$. Условимся считать, что $r_0<1/e$. В рассматриваемом случае

$$Y[\varphi]=\int_0^{r_0}(\varphi(r))^{p'-1}e^{-cr}r^{-1}dr+Q^{p'-1}\int_{r_0}^{\infty}e^{-cr}r^{-1}dr. \tag{4}$$

Для второго интеграла имеем оценки

$$\int_{r_0}^{\infty}e^{-br}r^{-1}dr<\int_{r_0}^{1}r^{-1}dr+\int_1^{\infty}e^{-cr}dr\leqslant(1+c^{-1}e^{-c})|\log r_0|.$$

Покажем, что первый интеграл в правой части (4) не превосходит $cQ^{p'-1}|\log r_0|$, т. е. докажем неравенство

$$(\Phi(\varkappa|\log r_0|^{1-p}))^{1-p'}\int_0^{r_0}(\Phi(\varkappa|\log r|^{1-p}))^{p'-1}(dr/r)<c|\log r_0|.$$

Положив здесь $\varkappa|\log r|=t$ и $\varkappa|\log r_0|=t_0$, перепишем эту оценку в виде

$$\int_{t_0}^{\infty}(\Phi(t^{1-p}))^{p'-1}dt\leqslant ct_0\left(\Phi\left(t_0^{1-p}\right)\right)^{p'-1},$$

которая верна в силу (2). Поэтому существует такая постоянная $c\in(1,\infty)$, что $Y[\varphi]<cQ^{p'-1}|\log r_0|$. Таким образом, неравенство

$Y[\varphi]<m$ будет удовлетворено, если положить $|\log r_0|^{1-p}=(cm^{-1})^{p-1}Q$. Окончание доказательства проходит точно так же, как и при $p\in(1, n/l)$.

Замечание 1. Доказательство теоремы показывает, что в случае $pl=n$ радиусы шаров, образующих покрытие множества G, можно считать не превосходящими $1/e$.

Следствие 1. *Пусть* $1<p\leqslant n/l$ *и* Φ — *функция, определенная перед теоремой. Пусть еще* K — *компактное множество в* R^n, *такое, что* $\operatorname{cap}(K, S_p^l)>0$, *где* $S_p^l=h_p^l$, *если* $pl<n$, *и* $S_p^l=H_p^l$, *если* $pl=n$. *Тогда существует покрытие множества* K *шарами* $B(x_k, r_k)$, *такое, что*

$$\sum\nolimits_k \Phi\left(\operatorname{cap}\left(B_{r_k}, S_p^l\right)\right)<c\Phi\left(c\operatorname{cap}\left(K, S_p^l\right)\right), \tag{5}$$

где c — *постоянная, зависящая от* n, p, l *и функции* Φ. *В случае* $pl=n$ *можно считать, что* $r_k\leqslant e^{-1}$.

Доказательство. Ограничимся случаем $pl<n$, при $pl=n$ рассуждения дословно те же.

Положим $C(K)=\inf\left\{\int W_{p,l}\mu\, d\mu:\ W_{p,l}\mu\geqslant 1\ (p,\ l)\text{-квазивсюду}\right.$ $\left.\text{на } K\right\}$. В силу неравенства (7.2.2/6) емкости $C(K)$ и $\operatorname{cap}(K, h_p^l)$ эквивалентны. В работе Л. Хедберга и Т. Вольфа [197] по существу показано, что мера μ_K, реализующая $C(K)$, существует и что $C(K)=\mu_K(K)$. Положим $G_\varepsilon=\{x\in R^n: W_{p,l}\mu_K(x)\geqslant 1-\varepsilon\}$, где $\varepsilon>0$. Так как (p, l)-квазивсюду на K имеет место неравенство $W_{p,l}\mu_K(x)\geqslant 1$, то $E\subset G_\varepsilon\cup E_0$, где $\operatorname{cap}(E_0, h_p^l)=0$.

По теореме существует покрытие множества G_ε шарами $B(x_j, r_j)$, для которых выполнено неравенство (3), где $m=1-\varepsilon$ и $\mu(R^n)=$ $=\operatorname{cap}(K, h_p^l)$.

Так как функция $\psi(t)/t$ суммируема на $(1, +\infty)$, то функция φ, определенная равенством $\varphi(r)=\Phi\left(\operatorname{cap}\left(B_r, h_p^l\right)\right)$, удовлетворяет условию (7.2.3/4). Отсюда и из предложения 7.2.3/2 следует, что множество E_0 имеет нулевую φ-меру Хаусдорфа. Поэтому можно покрыть E_0 шарами $B(y_i, \rho_i)$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\sum\nolimits_i \Phi\left(\operatorname{cap}\left(B_{\rho_i}, h_p^l\right)\right)<\varepsilon.$$

Шары $B(x_j, r_j)$ и $B(y_i, \rho_i)$ в совокупности образуют требуемое покрытие.

Следствие 2. *Пусть* $p\in(1, n/l]$, $S_p^l=h_p^l$, *если* $lp<n$, $S_p^l=H_p^l$, *если* $lp=n$, *и* Φ — *функция, определенная перед теоремой. Если мера* μ *такова, что для любого шара* $B(x, \rho)$

$$\mu(B(x, \rho))\leqslant\Phi\left(c\operatorname{cap}\left(B_\rho, S_p^l\right)\right), \tag{6}$$

то для любого борелевского множества E с конечной емкостью $\operatorname{cap}(E, S_p^l)$ *имеет место неравенство*

$$\mu(E) \leqslant c\Phi(c \operatorname{cap}(E, S_p^l)). \tag{7}$$

Здесь c — постоянная, зависящая от n, p, l и функции Φ.

Доказательство. Достаточно доказать (7) для компакта E. Согласно следствию 1 существует покрытие множества E шарами $B(x_k, r_k)$, удовлетворяющими условию (5). Используя свойство аддитивности меры μ, а также оценку (6), имеем

$$\mu(E) \leqslant \mu\Bigl(\bigcup_k B(x_k, r_k)\Bigr) \leqslant \sum\nolimits_k \mu(B(x_k, r_k)) \leqslant$$
$$\leqslant \sum\nolimits_k \Phi\bigl(c \operatorname{cap}(B_{r_k}, S_p^l)\bigr) < c\Phi(c \operatorname{cap}(E, S_p^l)). \blacksquare$$

Замечание 2. Согласно (7.2.1/2), $\operatorname{cap}(E, H_p^l) \sim \operatorname{cap}(E, h_p^l)$, если $\operatorname{diam} E \leqslant 1$. Поэтому при дополнительном требовании $\operatorname{diam} E \leqslant 1$ в следствии 2 можно и в случае $pl < n$ положить $S_p^l = H_p^l$.

Для того чтобы это показать, проверим, что мера $R^n \supset A \to \mu_1(A) = \mu(A \cap E)$ удовлетворяет условию (6).

Пусть $\operatorname{diam} E \leqslant 1$ и для всех $r \in (0, 1)$

$$\mu(B(x, r)) \leqslant \Phi(\operatorname{cap}(B_r, H_p^l)). \tag{8}$$

При $r < 1$ имеем $\mu_1(B(x, r)) = \mu(B(x, r) \cap E) \leqslant \mu(B(x, r)) \leqslant \leqslant \Phi(\operatorname{cap}(B_r, H_p^l)) \leqslant \Phi(c \operatorname{cap}(B_r, h_p^l))$. В случае $r \geqslant 1$ для любой точки $y \in E$ $\mu_1(B(x, r)) \leqslant \mu(B(y, 1))$. Отсюда, используя (8) и монотонность емкости, получаем

$$\mu_1(B(x, r)) \leqslant \Phi(\operatorname{cap}(B_1, H_p^l)) \leqslant \Phi(c \operatorname{cap}(B_r, h_p^l)).$$

Итак, мера μ_1 удовлетворяет условию (6).

§ 8.6. ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ (УСЛОВИЯ В ТЕРМИНАХ ШАРОВ)

Теорема. *Пусть M — выпуклая функция и N — дополнительная к M. Пусть еще функция Φ, обратная для функции $t \to tN^{-1}(1/t)$, подчинена условию* (8.5/2). *Тогда*:

1) *точная константа A в неравенстве* (8.3/1), *где $S_p^l = h_p^l$, $lp < n$, эквивалентна величине*

$$C_1 = \sup\{\rho^{lp-n}\mu(B(x, \rho))\, N^{-1}(1/\mu(B(x, \rho))) \colon x \in R^n, \rho > 0\};$$

2) *для точной константы A в неравенстве* (8.3/1), *где $S_p^l = H_p^l$, имеют место соотношения*:

$$A \sim C_2 = \sup\{\rho^{lp-n}\mu(B(x, \rho))\, N^{-1}(1/\mu(B(x, \rho))) \colon x \in R^n, 0 < \rho < 1\}$$

в случае $pl<n$,

$$A \sim C_3 = \sup \{|\log \rho|^{p-1} \mu(B(x,\rho)) N^{-1}(1/\mu(B(x,\rho))):\ x \in R^n,\ 0<\rho<1/2\}$$

в случае $pl=n$.

Доказательство непосредственно следует из теоремы 8.3 и соотношений $B \sim C_j$, $j=1, 2, 3$, установленных в следствии 8.5/2 и замечании 8.5/2.

Замечание 1. Очевидно, что в случае $pl>n$ константа A в неравенстве (8.3/1), где $S_p^l = H_p^l$, эквивалентна величине

$$C_4 = \sup \{\mu(B(x, 1)) N^{-1}(1/\mu(B(x, 1))):\ x \in R^n\}.$$

Действительно, пусть $\{\eta^{(j)}\}$ — разбиение единицы, подчиненное конечнократному покрытию пространства R^n единичными шарами $\{B^{(j)}\}$. Из определения нормы в $L_M(\mu)$ и теоремы Соболева о вложении H_p^l в L_∞ получаем оценку

$$\| |u|^p \|_{L_M(\mu)} \leqslant c \sum_j \| |u\eta^{(j)}|^p \|_{L_M(\mu)} \leqslant c_1 \sum_j \|\chi(\cdot, B^{(j)})\|_{L_M(\mu)} \|u\eta^{(j)}\|^p_{H_p^l} \leqslant \leqslant c_1 C_4 \sum_j \|u\eta^{(j)}\|^p_{H_p^l}.$$

Последняя сумма не превосходит $c\|u\|^p_{H_p^l}$ (см. теорему 7.1.3/3) и, значит, $A \leqslant c_2 C_4$. Обратная оценка получается при помощи подстановки в неравенство (8.3/1) функции $\eta \in C_0^\infty(B(x, 2))$, равной единице на $B(x, 1)$.

Теперь теорема 1.4.1 Д. Р. Адамса получается из п. 1) теоремы подстановкой $M(t) = t^{q/p}$, где $q>p$.

Замечание 2. Покажем, что условие (8.1/5) при $s=n-pl$ не достаточно для справедливости оценки (8.1/2) в случае $q=p$. Пусть $q=p$, $n>pl$. Выберем борелевское множество E, мера Хаусдорфа которого размерности $n-pl$ конечна и положительна. Можно считать, что E замкнуто и ограничено (так как любое борелевское подмножество положительной хаусдорфовой меры содержит замкнутое подмножество, обладающее тем же свойством). По теореме Фростмана (см. [35, теорема 1, гл. II]) существует ненулевая мера μ с носителем в E, такая, что

$$\mu(B(x, \rho)) \leqslant c\rho^{n-pl} \qquad (1)$$

с константой c, не зависящей от x и ρ. Согласно предложению 7.2.3/3 $\operatorname{cap}(E, H_p^l)=0$. Вместе с тем из неравенства (8.1/2) следует, что $\mu(E) \leqslant A \operatorname{cap}(E, H_p^l)$, и потому $\mu(E)=0$. Полученное противоречие показывает, что, несмотря на выполнение условия (1), неравенство (8.1/2) неверно.

Полагая в теореме $M(t)=t^{q/p}$, получаем следующий результат, относящийся к случаю $lp=n$.

Следствие 1. *Если $lp=n$, $q>p>1$, то наилучшая константа A в неравенстве*

$$\|u\|_{L_q(\mu)} \leqslant A \|u\|_{H_p^l} \tag{2}$$

эквивалентна величине

$$C_5 = \sup \{|\log \rho|^{p-1} [\mu(B(x, \rho))]^{p/q}: x \in R^n, 0<\rho<{}^1/_2\}.$$

Из теоремы легко получается следующее утверждение, относящееся к случаю $pl=n$ и мерам «степенного» типа.

Следствие 2. *Пусть $pl=n$ и $M(t)=\exp(t^{p'-1})-1$. Неравенство* (8.3/1) *выполнено в том и только в том случае, если при некотором $\beta>0$*

$$\sup\{\rho^{-\beta}\mu(B(x, \rho)): x \in R^n, \quad 0<\rho<1\}<\infty.$$

Доказательство. Так как $N'(t)=(\log t)^{p-1}(1+o(1))$ при $t\to\infty$, то $\Phi^{-1}(t)=tN^{-1}(1/t)=(\log t)^{1-p}(1+o(1))$. Следовательно, $\log \Phi(t) = -t^{p'-1}(1+o(1))$. Очевидно, что функция Φ удовлетворяет условию (8.5/2). Остается вспомнить, что $\operatorname{cap}(B_\rho, H_p^l) \sim \sim |\log \rho|^{1-p}$ при $\rho \in (0, {}^1/_2)$ и применить теорему.

Замечание 3. Так как $B_p^l(R^n)$ есть пространство следов на R^n функций из $H_p^{l+1/p}(R^{n+1})$, то теорема и следствие 1 остаются справедливыми, если в их формулировках заменить $H_p^l(R^n)$ на $B_p^l(R^n)$.

Замечание 4. Можно получить утверждения, аналогичные теореме и следствиям 1 и 2, положив $\nabla_k u$ вместо u в левых частях неравенств (8.3/1) и (2). Например, следствие 1 обобщается следующим образом.

Если $(l-k)p=n$, $q>p>1$, то наилучшая константа в неравенстве

$$\|\nabla_k u\|_{L_q(\mu)} \leqslant A \|u\|_{H_p^l} \tag{3}$$

эквивалентна величине C_5.

Оценка $A \leqslant cC_5$ не требует дополнительного обоснования. Для того чтобы доказать обратное неравенство, поместим начало координат в произвольную точку пространства и положим в (3)

$$u(x) = x_1^k \zeta(\log|x|/\log\rho),$$

где $\rho \in (0, 1/2)$ и $\zeta \in C^\infty(R^1)$, $\zeta(t)=1$ при $t>1$, $\zeta(t)=0$ при $t<1/2$. Очевидно, что $\operatorname{supp} u \subset B_{\rho^{1/2}}$. С помощью стандартных, но довольно громоздких оценок можно показать, что при $|x|<1/2$

$$(\mathscr{D}_l u)(x) \leqslant c\,|x|^{-n/p}(\log(1/|x|))^{-1},$$

где $\mathscr{D}_l u$ — функция Стрихартца (7.1.2/2) при $\{l\}>0$ и $\mathscr{D}_l u=|\nabla_l u|$ при $\{l\}=0$. Отсюда и из теоремы 7.1.2/4 следует неравенство $\|u\|^p_{H^l_p} \leqslant c(\log(1/\rho))^{1-p}$. Вместе с тем $\|\nabla_k u\|^q_{L_q(\mu)} \geqslant k!\mu(B_\rho)$. Следовательно, $A \geqslant cC_5$.

§ 8.7. ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ В СЛУЧАЕ $p=1$

Цель этого параграфа — доказательство следующей теоремы, дополняющей теорему 1.4.3.

Теорема 1. *Пусть k — целое неотрицательное число, $0<l-k\leqslant n$, $1\leqslant q<\infty$. Тогда точная константа A в неравенстве*

$$\|\nabla_k u\|_{L_q(\mu)} \leqslant A\,\|u\|_{b^l_1} \tag{1}$$

эквивалентна величине

$$K=\sup_{x,\,\rho>0} \rho^{l-k-n}\mu(B(x,\rho))^{1/q}.$$

Доказательство. 1) Выведем оценку $A\geqslant cK$. Положим в (8.7/1) $u(\xi)=(x_1-\xi_1)^k\varphi(\rho^{-1}(x-\xi))$, где $\varphi\in C_0^\infty(B_2)$, $\varphi=1$ на B_1. Так как $\|\nabla_k u\|^q_{L_q(\mu)} \geqslant k!\mu(B(x,\rho))$, $\|u\|_{S^l_1}=c\rho^{n-l+k}$, то $A\geqslant cK$.

2) Получим оценку $A\leqslant cK$. В случае $q>1$ в силу теоремы 8.6 и замечания 8.6/2

$$\|\nabla_k u\|_{L_q(\mu)} \leqslant c\sup_{x,\,\rho}(\mu(B(x,\rho))^{1/q}/\rho^{k-(l-n+n/t)+n/t})\,\|u\|_{b_t^{l-n-n/t}},$$

где t — число, достаточно близкое к единице, $t>1$.

Остается применить пункты (iii) и (iv) теоремы 7.1.3/4.

Покажем, что $A\leqslant cK$ при $q=1$. Достаточно рассмотреть случай $k=0$. Пусть $l\in(0,1)$. Согласно следствию 2.1.5

$$\|u\|_{L(\mu,\,R^n)} \leqslant cK\int_{R^{n+1}}|y|^{-l}\,|\nabla_z U|\,dz,$$

где $U\in C_0^\infty(R^{n+1})$ — произвольное продолжение на R^{n+1} функции u. Принимая во внимание соотношение $\|u\|_{b^l_1} \sim \inf_U \int_{R^{n+1}}|y|^{-l}|\nabla_z U|\,dz$, содержащееся в теореме 7.1.1/1, получаем неравенство $A\leqslant cK$.

Если $l=1$, то по теореме 1.4.3 $\|u\|_{L(\mu,\,R^n)} \leqslant cK\,\|\nabla_{2,z}U\|_{L(R^{n+1})}$. Минимизируя правую часть по всем U, приходим к оценке $A\leqslant cK$ для пространства b^1_1.

Допустим, что оценка $A\leqslant cK$ установлена при условии $l\in(N-2,\,N-1)$, где N — целое число, $N\geqslant 2$, и докажем ее для

$l\in(N-1,\ N]$. Имеем

$$\int|u|\,d\mu(x)=c\int\left|\int((\xi-x)\nabla_\xi u(\xi)/|\xi-x|^n)\,d\xi\right|d\mu(x)\leqslant c\int|\nabla u|\,I_1\mu\,dx,$$

где $I_1\mu=|x|^{1-n}*\mu$. По индукционному предположению последний интеграл не превосходит

$$c\sup_{x,\,\rho}\left(r^{l-1-n}\int_{B(x,\,r)}I_1\mu(\xi)\,d\xi\right)\|\nabla u\|_{b_1^{l-1}}.$$

В силу леммы 1.4.3, где $q=1$, последний супремум не превосходит cK. ■

Замечание 1. Подставим в (1) функцию u, определенную равенством $u(x)=\eta(x/\rho)$, где $\eta\in C_0^\infty(R^n)$, $\rho>0$. Устремляя затем ρ к бесконечности, получаем, что неравенство (1) не выполняется при $l-k>n$, если $\mu\neq 0$.

При $l-k=n$, $q<\infty$ это неравенство имеет место в том и только в том случае, если $\mu(R^n)<\infty$.

Теорема 2. *Пусть* $0<k<l$, $l-k\leqslant n$, $1\leqslant q<\infty$. *Тогда точная константа* C_0 *в неравенстве*

$$\|\nabla_k u\|_{L_q(\mu,\ R^n)}\leqslant C_0\|u\|_{B_1^l}\tag{2}$$

эквивалентна величине $K_0=\sup\limits_{x;\ \rho\in(0,\ 1)}\rho^{l-k-n}\mu(B(x,\ \rho))^{1/q}$.

Доказательство. Оценка $C_0\geqslant cK_0$ получается дословно так же, как оценка $C\geqslant cK$ в теореме 1. Для доказательства обратного неравенства воспользуемся разбиением единицы $\{\varphi_j\}_{j\geqslant 1}$, подчиненным покрытию R^n единичными шарами с центрами в узлах достаточно мелкой координатной решетки, и применим теорему 1 к норме $\|\nabla_k(\varphi_j u)\|_{L_q(\mu_j)}$, где μ_j — сужение μ на носитель φ_j. Тогда

$$\int|\nabla_k u|^q\,d\mu\leqslant c\sum_j\int|\nabla_k(\varphi_j u)|^q\,d\mu_j\leqslant cK_0^q\sum_j\|\varphi_j u\|_{s_1^l}^q\leqslant$$
$$\leqslant cK_0^q\left(\sum_j\|\varphi_j u\|_{s_1^l}\right)^q,$$

где $s_1^l=w_1^l$ или b_1^l. (Здесь мы воспользовались неравенством $\sum a_i^q\leqslant(\sum a_i)^q$, где $a_i\geqslant 0$, $q\geqslant 1$.) Ссылка на теорему 7.1.3/3 заканчивает доказательство.

Замечание 2. В случае $l-k\geqslant n$ точная константа в (2) эквивалентна одной из величин:

$$\sup_{x\in R^n}[\mu(B(x,\ 1))]^{1/q},\quad\text{если}\quad q\geqslant 1,$$
$$\left(\sum_{i\geqslant 0}\mu(Q^{(i)})^{(1-q)^{-1}}\right)^{(1-q)q^{-1}},\quad\text{если}\quad 0<q<1,$$

где $\{Q^{(i)}\}$ — та же последовательность, что и в теореме 8.4.4/1. Доказательство содержится в замечании 8.6/1 и в теореме 8.4.4/1.

§ 8.8. КРИТЕРИИ КОМПАКТНОСТИ

Из теорем об интегральных неравенствах, доказанных в предыдущих параграфах этой главы, непосредственно получаются необходимые и достаточные условия компактности операторов вложения пространств H_p^l, h_p^l, W_p^l, w_p^l, B_p^l и b_p^l в пространство $L_q(\mu)$. Доказательства этих результатов проводятся стандартным способом (ср. с теоремами 2.4.2/1 и 2.4.2/2) и поэтому здесь мы ограничимся четырьмя формулировками. Две первые теоремы основаны на следствии 8.3.

Теорема 1. *Пусть $p>1$, $pl<n$ и s_p^l — любое из пространств h_p^l, w_p^l, b_p^l. Любое ограниченное в s_p^l множество функций из $\mathscr{D}$ относительно компактно в $L_q(\mu)$ в том и только в том случае, если*

$$\lim_{\delta\to 0}\sup\left\{(\mu(e)/\mathrm{cap}(e,\ s_p^l)):\ e\subset R^n,\ \mathrm{diam}\, e\leqslant\delta\right\}=0, \tag{1}$$

$$\lim_{\rho\to\infty}\sup\left\{(\mu(e)/\mathrm{cap}(e,\ s_p^l)):\ e\subset R^n\setminus B_\rho\right\}=0, \tag{2}$$

где $B_\rho=\{x:\ |x|<\rho\}$.

Теорема 2. *Пусть $p>1$, $pl\leqslant n$ и S_p^l — любое из пространств H_p^l, W_p^l, B_p^l. Ограниченное в S_p^l множество функций из $\mathscr{D}$ относительно компактно в $L_q(\mu)$ в том и только в том случае, если выполнено условие* (1), *а также условие*

$$\lim_{\rho\to\infty}\sup\left\{(\mu(e)/\mathrm{cap}(e,\ S_p^l)):\ e\subset R^n\setminus B_\rho,\ \mathrm{diam}\, e\leqslant 1\right\}=0. \tag{3}$$

Следующие теоремы получаются из теоремы 8.6 и следствия 8.6/1 соответственно.

Теорема 3. *Пусть $p\geqslant 1$, $l>0$ и $pl<n$. Пусть еще $1\leqslant q<\infty$, если $p=1$ и $p<q<\infty$, если $p>1$. Тогда множество $\{u\in\mathscr{D}:\ \|u\|_{W_p^l}\leqslant 1\}$ относительно компактно в $L_q(\mu)$ в том и только в том случае, если*

(i) $\lim\limits_{\delta\to+0}\ \sup\limits_{x;\ \rho\in(0,\ \delta)} \rho^{l-n/p}[\mu(B(x,\ \rho))]^{1/q}=0,$

(ii) $\lim\limits_{|x|\to\infty}\ \sup\limits_{\rho\in(0,\ 1)} \rho^{l-n/p}[\mu(B(x,\ \rho))]^{1/q}=0.$

Теорема 4. *Пусть $p>1$, $l>0$, $pl=n$ и $q>p$. Множество $\left\{u\in\mathscr{D}:\ \|u\|_{W_p^l}\leqslant 1\right\}$ относительно компактно в $L_q(\mu)$ в том и только в том случае, если*

(i) $\lim\limits_{\delta\to 0}\ \sup\limits_{x;\ \rho\in(0,\ \delta)} |\log\rho|^{1-1/p}[\mu(B(x,\ \rho))]^{1/q}=0,$

(ii) $\lim\limits_{|x|\to\infty}\ \sup\limits_{2\rho<1} |\log\rho|^{1-1/p}[\mu(B(x,\ \rho))]^{1/q}=0.$

§ 8.9. КОММЕНТАРИИ К ГЛАВЕ 8

§ 8.2. Неравенства типа (8.1/4) были доказаны в работе автора [71], где (8.1.4) (и даже более сильная оценка, в которой роль емкости множества Q_t играет емкость конденсатора $Q_t \setminus Q_{2t}$) была получена для $l=1$ и $l=2$. В более трудном случае $l=2$ в доказательстве была использована операция «гладкой срезки» потенциала вблизи эквипотенциальных поверхностей (см. п. 8.2.1). Д. Р. Адамс [136], объединив этот прием с неравенством Л. Хедберга (8.2.2/2), доказал (8.1/4) для пространства Соболева W_p^l при всех целых l. Доказательство Адамса изложено в 8.2.2. Те же средства вместе с теоремой 7.1.1/1 о следах функций из весового пространства Соболева позволили автору [79] получить неравенства (8.1/4) для функций из пространства W_p^l при всех $p>1$ и $l>0$. Как следствие отсюда выводится (9.1/4) для пространства бесселевых потенциалов H_p^l при всех дробных $l>0$, но только в случае $p\geqslant 2$. Последнее ограничение было снято Б. Дальбергом [163], доказательство которого также основано на «гладкой срезке» и использует тонкие оценки потенциалов с неотрицательной плотностью. Наконец, недавно К. Ханссон [190, 191] нашел новое доказательство неравенства (8.1/4) для пространств потенциалов, в котором указанная операция срезки не применяется. Доказательство К. Ханссона пригодно для широкого класса потенциалов с общими ядрами. В 8.2.3 приведено взятое из работы автора [84] доказательство неравенства (8.1/4), основанное иа идее К. Ханссона, но, по-видимому, более простое.

§ 8.3. Эквивалентность теорем вложения и изопериметрических неравенств, связывающих меры и емкости, обнаружена автором в 1962 г. [62, 63]. Результаты такого типа были в дальнейшем получены в статьях автора [65, 70], Д. Р. Адамса [136], автора и С. П. Преображенского [87] и др.

Одна из теорем работы Д. Р. Адамса [136] утверждает, *что условие $\mu(e)^{p/q} \leqslant C_1 \operatorname{cap}(e, h_p^l)$ для всех компактов $e \subset R^n$ равносильно неравенству*

$$\| I_l \mu_e \|_{L_{p'}} \leqslant C_2 \mu(e)^{1/q'} \text{ для всех } e;$$

здесь μ_e — сужение меры μ на множество e.

§ 8.4. Результаты получены автором в [80].

§ 8.5, 8.6. Здесь мы следуем в основном работе автора и С. П. Преображенского [87]. По сравнению с этой работой ограничения на функцию Ф ослаблены при $1<p<2-l/n$ за счет использования результатов появившейся позднее статьи Л. Хедберга и Т. Вольфа [197]. Замечание 8.6/2 принадлежит Д. Р. Адамсу [136], следствие 8.6/2 другим методом ранее доказано Д. Р. Адамсом [132].

§ 8.7. Результаты получены автором в [82].

Теоремы этой главы нашли применение к задаче об описании классов мультипликаторов в различных пространствах дифференцируемых функций (В. Г. Мазья [81, 84], В. Г. Мазья и Т. О. Шапошникова [93—95, 97]). Класс мультипликаторов, действующих из одного функционального пространства S_1 в другое S_2, обозначают через $M(S_1\to S_2)$. Иначе говоря, $M(S_1\to S_2)=\{\gamma\colon \gamma u\in S_2$ для всех $u\in S_1\}$. Норма элемента γ в $M(S_1\to S_2)$ равна норме оператора умножения на γ. Следующие эквивалентные нормировки пространства $M(W_p^m\to W_q^l)$ (m, l — целые, $m\geqslant l$) указаны в работах автора и Т. О. Шапошниковой [93] и автора [84]. Через $\|\gamma\|_{(p,m)\to(q,l)}$ будем обозначать норму в $M(W_p^m\to W_q^l)$.

α) Если $1<p\leqslant n/m$, то

$$\|\gamma\|_{(p,m)\to(p,l)}\sim\sup_{e,\ \operatorname{diam} e\leqslant 1}\left(\frac{\|\nabla_l\gamma\|_{L_p(e)}}{[\operatorname{cap}(e,W_p^m)]^{1/p}}+\frac{\|\gamma\|_{L_p(e)}}{[\operatorname{cap}(e,W_p^{m-l})]^{1/p}}\right),$$

β) Если $1<p<q$ или $1=p\leqslant q$, то

$$\|\gamma\|_{(p,m)\to(q,l)}\sim$$

$$\sim\begin{cases}\sup\limits_{x\in R^n,\ \rho\in(0,1)}\rho^{m-n/p}\left(\|\nabla_l\gamma\|_{L_q(B_\rho(x))}+\rho^{-l}\|\gamma\|_{L_q(B_\rho(x))}\right) & \text{при } mp<n;\\ \sup\limits_{x\in R^n,\ \rho\in(0,1)}\left((\log(2/\rho))^{1/p'}\|\nabla_l\gamma\|_{L_q(B_\rho(x))}+\rho^{-l}\|\gamma\|_{L_q(B_\rho(x))}\right) & \text{при } mp=n,\ p>1;\\ \sup\limits_{x\in R^n}\|\gamma\|_{W_q^l(B_1(x))} \text{ при } mp>n \text{ и при } p=1,\ m=n. & \end{cases}$$

γ) Если $1<q<p$, то

$$\|\gamma\|_{(p,m)\to(q,l)}\sim\sup_{\{\mathfrak{S}\}}\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\|\nabla_l\gamma\|_{L_q(g_j\setminus g_{j-1})}}{[\operatorname{cap}(g_j,W_p^m)]^{1/q}}+\frac{\|\gamma\|_{L_q(g_j\setminus g_{j-1})}}{[\operatorname{cap}(g_j,W_p^{m-l})]^{1/p}}\right)^{pq/(p-q)}\right)^{(p-q)/pq}.$$

Кроме того, в случае $1\leqslant q<p$, $pm>n$

$$\|\gamma\|_{(p,m)\to(q,l)}\sim\left(\sum_i\|\gamma\|^{pq/(p-q)}_{W_p^l(Q^{(i)})}\right)^{(p-q)/pq}.$$

(Обозначения те же, что и в пп. 8.4.2. 8.4.4.)

Глава 9

ОБ ОДНОЙ РАЗНОВИДНОСТИ ЕМКОСТИ

§ 9.1. ЕМКОСТЬ Cap

9.1.1. Простейшие свойства емкости $\mathrm{Cap}(e, \mathring{L}_p^l(\Omega))$. В п. 7.2.1 введена емкость $\mathrm{cap}(e, S_p^l)$ компакта $e \subset R^n$, порожденная любым из пространств $S_p^l = H_p^l$, h_p^l, B_p^l и т. д., т. е. функция множества $\inf\left\{\|u\|_{S_p^l}^p: u \in \mathfrak{N}(e)\right\}$, где $\mathfrak{N}(e) = \{u \in \mathscr{D}: u \geqslant 1 \text{ на } e\}$.

Для многих приложений оказывается полезной другая функция множества, в определении которой роль класса $\mathfrak{N}(e)$ играет класс $\mathfrak{M}(e, \Omega) = \left\{u \in C_0^\infty(\Omega): u = 1 \text{ в окрестности } e\right\}$. (Как обычно, в случае $\Omega = R^n$ указание на Ω будем опускать.) Эту новую функцию множества также называют емкостью; здесь для нее принято обозначение $\mathrm{Cap}(e, S_p^l(\Omega))$.

Имея в виду дальнейшие приложения, мы ограничиваем емкостями Cap, порожденными пространствами $\mathring{L}_p^l(\Omega)$ и W_p^l, где $l = 1, 2, \ldots$

Внутренняя и внешняя емкости произвольного подмножества множества Ω определяются равенствами

$$\underline{\mathrm{Cap}}(E, \mathring{L}_p^l(\Omega)) = \sup_{e \subset E} \mathrm{Cap}(e, \mathring{L}_p^l(\Omega)),$$

$$\overline{\mathrm{Cap}}(E, \mathring{L}_p^l(\Omega)) = \inf_{G \supset E} \underline{\mathrm{Cap}}(G, \mathring{L}_p^l(\Omega)).$$

Здесь e — любое компактное подмножество E и G — любое открытое подмножество Ω, содержащее E. Если верхняя и нижняя емкости совпадают, их общее значение называется емкостью множества E и обозначается через $\mathrm{Cap}(E, \mathring{L}_p^l(\Omega))$.

В дальнейшем, говоря о (p, l)-емкости, будем иметь в виду именно эту функцию множества.

Из определения емкости $\mathrm{Cap}(e, \mathring{L}_p^l(\Omega))$ непосредственно вытекают следующие два свойства.

Монотонность. Если $e_1 \subset e_2$ и $\Omega_1 \supset \Omega_2$, то

$$\mathrm{Cap}(e_1, \mathring{L}_p^l(\Omega_1)) \leqslant \mathrm{Cap}(e_2, \mathring{L}_p^l(\Omega_2)).$$

Непрерывность справа. Для каждого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность ω, $\bar{\omega} \subset \Omega$ компакта e, что для любого компакта e', $e \subset e' \subset \omega$

$$\mathrm{Cap}(e', \mathring{L}_p^l(\Omega)) \leqslant \mathrm{Cap}(e, \mathring{L}_p^l(\Omega)) + \varepsilon.$$

В следующих трех предложениях устанавливаются простейшие связи между емкостями $\operatorname{Cap}(\cdot, S_1)$ и $\operatorname{Cap}(\cdot, S_2)$.

Предложение 1. *Пусть ω и Ω — открытые множества в R^n, $D=\operatorname{diam}\Omega<\infty$, $\bar\omega\subset\Omega$ Тогда для любого компакта $e\subset\omega$, удаленного на расстояние Δ_e от $\partial\omega$, имеет место неравенство*

$$\operatorname{Cap}(e, \mathring{L}_p^l(\omega))\leqslant c(D/\Delta_e)^{lp}\operatorname{Cap}(e, \mathring{L}_p^l(\Omega)).$$

Доказательство. Пусть $u\in\mathfrak{M}(e, \Omega)$ и $\alpha\in C_0^\infty(\omega)$, $\alpha=1$ в окрестности e и $|\nabla_i\alpha(x)|\leqslant c\Delta_e^{-i}$, $i=1, 2, \ldots$ (см. [121, § 2, гл. 6]). Тогда

$$\operatorname{Cap}(e, \mathring{L}_p^l(\omega))\leqslant\|\nabla_l(\alpha u)\|_{L_p(\omega)}^p\leqslant c\sum_{j=0}^l\Delta_e^{(j-l)p}\|\nabla_j u\|_{L_p(\Omega)}^p.$$

Остается воспользоваться неравенством Фридрихса

$$\|\nabla_i u\|_{L_p(\Omega)}\leqslant cD^{l-i}\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)}. \blacksquare$$

Аналогично доказывается следующее утверждение.

Предложение 2. *Пусть $e\subset\Omega$, $D=\operatorname{diam}\Omega$ и $\Delta_e=\operatorname{dist}\{e, \partial\Omega\}$. Тогда*

$$c_1\min\{1, \Delta_e^{lp}\}\leqslant\operatorname{Cap}(e, W_p^l)/\operatorname{Cap}(e, \mathring{L}_p^l(\Omega))\leqslant c_2\max\{1, D^{lp}\}.$$

Вложение $\mathring{L}_p^l(R^n)$ в $\mathring{L}_q^m(R^n)$ при соответствующих значениях p, l, q, m приводит к следующей оценке.

Предложение 3. *Пусть $n>lp$, $p>1$ или $n\geqslant l$, $p=1$. Если $e\subset B_r$, то*

$$\operatorname{Cap}(e, \mathring{L}_p^l(B_{2r}))\leqslant c\operatorname{Cap}(e, \mathring{L}_p^l), \tag{1}$$

где $c=c(n, p, l)$.

Доказательство. Пусть $u\in\mathfrak{M}(e)$, $\alpha\in\mathfrak{M}(\bar B_r, B_{2r})$. Имеем

$$\|\nabla_l(\alpha u)\|_{L_p(B_{2r})}\leqslant c\sum_{j=0}^l\|\nabla_j u\|_{L_p(B_{2r})}\leqslant c_1\sum_{j=0}^l\|\nabla_j u\|_{L_{q_j}}\leqslant c_2\|\nabla_l u\|_{L_p},$$

где $q_j=pn(n-(l-j)p)^{-1}$.

Приведем две нижние оценки для $\operatorname{Cap}(e, \mathring{L}_p^l(\Omega))$.

Предложение 4. *Пусть $e\subset\Omega\cap R^s$, $s\leqslant n$. Тогда*

$$\operatorname{Cap}(e, \mathring{L}_p^l(\Omega))\geqslant c(m_s e)^{p/q},$$

где $q=ps/(n-lp)$ при $p>1$, $s>n-lp>0$ или при $p=1$, $s\geqslant n-l\geqslant 0$. Постоянная c зависит только от n, p, l, q.

Для доказательства достаточно применить неравенство $\|u\|_{L_q(R^s)}\leqslant c\|\nabla_l u\|_{L_p(R^n)}$ к произвольной функции $u\in\mathfrak{M}(e, \Omega)$.

Предложение 5. *Если Ω — открытое множество, e — компакт в Ω и $d_e = \operatorname{dist}(e, \partial\Omega)$, то*

$$\operatorname{Cap}(e, \mathring{L}_p^l(\Omega)) \geqslant c d_e^{n-pl}, \tag{2}$$

где $pl > n$, $p > 1$ или $l \geqslant n$, $p = 1$.

Доказательство. Для любой функции $u \in \mathfrak{M}(e, \Omega)$

$$1 = |u(x)|^p \leqslant c d_e^{pl-n} \int_{|y-x|<d_e} |\nabla_l u|^p \, dy, \qquad x \in e.$$

Поэтому $1 \leqslant c d_e^{l-n/p} \| \nabla_l u \|_{L_p(\Omega)}$. ■

Следствие. *Пусть $pl > n$, $p > 1$ или $l \geqslant n$, $p = 1$ и x_0 — точка шара B_ρ. Тогда*

$$\operatorname{Cap}(x_0, \mathring{L}_p^l(B_{2\rho})) \sim \rho^{n-lp}. \tag{3}$$

Доказательство. Нижняя оценка емкости следует из предложения 5, а верхняя получается подстановкой в норму $\| \nabla_l u \|_{L_p(B_{2\rho})}$ функции u со значениями $u(x) = \eta((x - x_0)\rho^{-1})$, где $\eta \in C_0^\infty(B_1)$.

9.1.2. Емкость континуума.

Предложение 1. *Пусть $n > lp > n-1$, $p \geqslant 1$ и e — континуум с диаметром d. Тогда*

$$\operatorname{Cap}(e, \mathring{L}_p^l) \sim d^{n-lp}. \tag{1}$$

Доказательство. Заключим e в шар $\bar{B}_d$ с радиусом d и обозначим через B_{2d} концентрический шар с радиусом $2d$. Используя монотонность емкости, получаем

$$\operatorname{Cap}(e, \mathring{L}_p^l) \leqslant \operatorname{Cap}(\bar{B}_d, \mathring{L}_p^l) = c d^{n-lp}.$$

Пусть O и P — точки компакта e, $|O - P| = d$. Направим ось Ox_n от точки O к точке P. Введем обозначения: $x = (x', x_n)$, $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, $e(t) = e \cap \{x \colon x_n = t\}$, $B_{2d}^{(n-1)}(t) = B_{2d} \cap \{x : x_n = t\}$, $\nabla_l' = \{\partial^l / \partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}\}$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1} = l$. Для любой функции $u \in \mathfrak{M}(e, B_{2d})$

$$\int_{B_{2d}} |\nabla_l u|^p \, dx \geqslant \int_0^d dt \int_{B_{2d}^{(n-1)}(t)} |\nabla_l' u|^p \, dx' \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^d \operatorname{Cap}\left[e(t), \mathring{L}_p^l(B_{2d}^{(n-1)}(t))\right] dt.$$

Так как $e(t) \neq \varnothing$, $e(t) \subset \bar{B}_d$ и $pl > n-1$, то

$$\operatorname{Cap}(e(t), \mathring{L}_p^l(B_{2d}^{(n-1)}(t))) \geqslant c d^{n-1-lp}.$$

Минимизируя $\|\nabla_l u\|^p_{L_p(B_{2d})}$ на множестве $\mathfrak{M}(e, B_{2d})$, получаем $\mathrm{Cap}(e, \mathring{L}^l_p(B_{2d})) \geqslant cd^{n-lp}$. Остается воспользоваться оценкой (9.1.1/1). ■

Предложение 2. *Если $n = lp$, $p > 1$, то для любого континуума e с диаметром d, $2d < D$ имеет место соотношение*

$$\mathrm{Cap}(e, \mathring{L}^l_p(B_D)) \sim (\log(D/d))^{1-p}. \tag{2}$$

Здесь B_D — открытый шар с радиусом D и центром $O \in e$.

Доказательство. Сначала оценим емкость сверху. Пусть $B_d = \{x: |x| < d\}$. Определим на множестве $B_D \setminus B_d$ функцию v: $v(x) = [\log(D/d)]^{-1} \log(D/|x|)$ и обозначим через α функцию из $C^\infty[0, 1]$, равную нулю вблизи точки $t = 0$, единице вблизи $t = 1$ и такую, что $0 \leqslant \alpha(t) \leqslant 1$. Пусть еще $u(x) = \alpha[v(x)]$ при $x \in B_D \setminus B_d$, $u(x) = 1$ в B_d и $u(x) = 0$ вне B_D. Очевидно, что $u \in \mathfrak{M}(\bar{B}_d, B_D)$. Кроме того, легко видеть, что $|\nabla_l u(x)| \leqslant c[\log(D/d)]^{-1}|x|^{-l}$ на $B_D \setminus B_d$. Отсюда получаем

$$\mathrm{Cap}(\bar{B}_d, \mathring{L}^l_p(B_D)) \leqslant \int_{B_D} |\nabla_l u(x)|^p dx \leqslant$$
$$\leqslant c[\log(D/d)]^{-p} \int_{B_D \setminus B_d} |x|^{-lp} dx = c[\log(D/d)]^{1-p}.$$

Перейдем к доказательству нижней оценки емкости. Пусть P и Q — точки множества e, удаленные на расстояние d. Обозначим через (r, ω) сферические координаты точки в системе с центром Q, $r > 0$, $\omega \in S^{n-1}$ и через u — функцию из $\mathfrak{M}(e, B_{2D}(Q))$, такую, что

$$\int_{B_{2D}(Q)} |\nabla_l u|^p dx \leqslant \gamma - \varepsilon,$$

где $\gamma = \mathrm{Cap}(e, \mathring{L}^l_p(B_{2D}(Q))) \leqslant \mathrm{Cap}(e, \mathring{L}^l_p(B_D))$, а ε — малое положительное число. Введем еще функцию $U(r) = \|u(r, \cdot)\|_{L_p(S^{n-1})}$. Так как, по крайней мере, в одной точке сферы $\{x: |x| = r\}$, где $r < d$, функция u равна единице и так как $pl > n-1$, то $|1 - U(r)| \leqslant c\|u(r, \cdot) - U(r)\|_{W^l_p(S^{n-1})}$. Отсюда

$$\left|1 - 2d^{-1}\int_{d/2}^d U(r)\,dr\right| \leqslant c\sum_{j=1}^l d^{j-l}\|\nabla_j u\|_{L_p(B_d(Q)\setminus B_{d/2}(Q))}. \tag{3}$$

Поскольку $(l-1)p < n$, то

$$\int_{B_{2D}(Q)} r^{(j-l)p}|\nabla_j u|^p dx \leqslant c\int_{B_{2D}(Q)} |\nabla_l u|^p dx, \qquad 1 \leqslant j < l. \tag{4}$$

Поэтому правая часть неравенства (3) не превосходит $c\|\nabla_l u\|_{L_p(B_{2d}(Q))} \leqslant c_0(\gamma - \varepsilon)$. Если $\gamma \geqslant (2c_0)^{-1}$, то нужная оценка получена. Пусть $\gamma < (2c_0)^{-1}$. Тогда $\int_{d/2}^d U(r)\,dr > d/4$ и при некотором $r_0 \in (d/2, d)$ справедливо неравенство $U(r_0) > 1/2$.

Еще раз используя (4), заключаем, что $\gamma-\varepsilon \geqslant c\int_{S^{n-1}} d\omega \times$ $\times \int_d^{2D} |r\nabla u|^p (dr/r)-\varepsilon$. В силу неравенства Гельдера

$$\gamma-\varepsilon \geqslant c\int_{r_0}^{2D} |rU'(r)|^p (dr/r)-\varepsilon \geqslant c\,(\log(2D/d))^{1-p}\left|\int_{r_0}^{2D} U'(r)\,dr\right|^p =$$
$$= c\,(\log(2D/d))^{1-p}\, U(r_0)^p \geqslant 2^{-p}c\,(\log(D/d))^{1-p}. \blacksquare$$

9.1.3. Емкость цилиндра.

Предложение 1. *Пусть* $C_{\delta,d}$ — *цилиндр* $\{x=(x', x_n): |x'|\leqslant\delta, |x_n|\leqslant d/2\}$, *где* $0<2\delta<d$ *и* $Q_{2d}=\{x: |x_i|<d\}$. *Справедливы соотношения*

$$\operatorname{Cap}(C_{\delta,d}, \mathring{L}_p^l(Q_{2d})) \sim \begin{cases} d\delta^{n-pl-1}, & \text{если } n-1>pl,\\ d\,(\log(d/\delta))^{1-p}, & \text{если } n-1=pl. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $u\in\mathfrak{M}(C_{\delta,d}, Q_{2d})$. Очевидно, что

$$\int_{Q_{2d}} |\nabla_l u|^p\,dx \geqslant \int_{-d/2}^{d/2} dx_n \int_{Q_{2d}^{(n-1)}} |\nabla_l' u|^p\,dx', \tag{1}$$

где $\nabla_l'=\{\partial^l/\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}\}$, $\alpha_1+\ldots+\alpha_{n-1}=l$, $Q_{2d}^{(n-1)}=\{x': |x_i|<d$, $i=1,\ldots,n-1\}$. Внутренний интеграл в правой части неравенства (1) не меньше чем $\operatorname{Cap}(B_\delta^{(n-1)}, \mathring{L}_p^l(B_\rho^{(n-1)}))$, где $B_\rho^{(n-1)}$ — $(n-1)$-мерный шар $\{x': |x'|<\rho\}$ и $\rho=2(n-1)^{1/2}d$. Отсюда и из предложений 9.1.2/1 и 9.1.2/2 получаем, что этот интеграл мажорирует $c\delta^{n-pl-1}$ при $n-1>pl$ и $c\,(\log d/\delta)^{1-p}$ при $n-1=pl$. Минимизируя левую часть неравенства (1) на множестве $\mathfrak{M}(C_{\delta,d}, Q_{2d})$, получаем требуемую оценку емкости снизу.

Перейдем к выводу верхней оценки. Пусть $x'\to u(x')$ — гладкая функция с носителем в шаре $B_d^{(n-1)}$, равная единице в окрестности шара $B_\delta^{(n-1)}$. Введем еще функцию η_d равенством $\eta_d(x)=$ $=\eta(x/d)$, где $\eta\in\mathfrak{M}(Q_1, Q_2)$. Так как функция $x\to\eta_d(x)\,u(x')$ принадлежит классу $\mathfrak{M}(C_{\delta,d}, Q_{2d})$, то

$$\operatorname{Cap}(C_{\delta,d}, \mathring{L}_p^l(Q_{2d})) \leqslant \int_{Q_{2d}} |\nabla_l(u\eta_d)|^p\,dx \leqslant$$
$$\leqslant cd\sum_{k=0}^{l} d^{-pk}\int_{B_d^{(n-1)}} |\nabla_{l-k}u|^p\,dx' \leqslant c_1 d\int_{B_d^{(n-1)}} |\nabla_l u|^p\,dx'.$$

Минимизируя последний интеграл и используя предложения 9.1.2/1 и 9.1.2/2, получаем требуемую верхнюю оценку емкости.

9.1.4. Множества нулевой емкости $\operatorname{Cap}(\cdot, W_p^l)$. Из определения емкости $\operatorname{Cap}(\cdot, \mathring{L}_p^l(\Omega))$ и предложения 9.1.1/2 следует, что $\operatorname{Cap}(e, W_p^l)=0$ в том и только в том случае, если существует ограниченное открытое множество Ω, содержащее e, такое, что $\operatorname{Cap}(e, \mathring{L}_p^l(\Omega))=0$. В силу предложения 9.1.1/2 выбор множества Ω безразличен.

Из следствия 9.1.1 получаем, что при $lp>n$, $p>1$ и при $l \geqslant n$, $p=1$ равенство $\operatorname{Cap}(e, W_p^l)=0$ имеет место, только если $e=\varnothing$.

Предложение 9.1.1/3 показывает, что в любом из случаев $n>lp$, $p>1$ или $n \geqslant l$, $p=1$ равенства $\operatorname{Cap}(e, W_p^l)=0$ и $\operatorname{Cap}(e, \mathring{L}_p^l)=0$ равносильны. Из следствия 9.1.1 и предложений 9.1.2/1 и 9.1.2/2 следует, что при $n \leqslant lp$, $p>1$ аналогичное свойство не имеет места. Точнее, если $n \leqslant lp$, $p>1$, то $\operatorname{Cap}(e, \mathring{L}_p^l)=0$ для любого компакта e.

§ 9.2. О (p, l)-ПОЛЯРНЫХ МНОЖЕСТВАХ

Обозначим через $W_{p'}^{-l}$ пространство линейных непрерывных функционалов T: $u \to (u, T)$ на W_p^l.

Множество $E \subset R^n$ назовем *(p, l)-полярным*, если единственным элементом из $W_{p'}^{-l}$ с носителем в E является нуль.

Теорема 1. *Пространство $\mathscr{D}(\Omega)$ плотно в W_p^l в том и только в том случае, если $C\Omega - (p, l)$-полярное множество.*

Доказательство. 1) Допустим, что $\mathscr{D}(\Omega)$ не плотно в W_p^l. Тогда существует ненулевой функционал $T \in W_{p'}^{-l}$, равный нулю на $\mathscr{D}(\Omega)$ *, т. е. с носителем в $C\Omega$. Следовательно, $C\Omega$ не является (p, l)-полярным.

2) Пусть $\mathscr{D}(\Omega)$ плотно в W_p^l. Для любого функционала $T \in W_{p'}^{-l}$ с носителем в $C\Omega$ (при всех $u \in \mathscr{D}(\Omega)$) $(u, T)=0$. Следовательно, это равенство верно для всех $u \in W_p^l$ и $T=0$. Итак, $C\Omega - (p, l)$-полярное множество.

Теорема 2. *Множество $E - (p, l)$-полярно в том и только в том случае, если $\underline{\operatorname{Cap}}(E, W_p^l)=0$.*

Доказательство. 1) Пусть $\underline{\operatorname{Cap}}(E, W_p^l)=0$ и $T \in W_{p'}^{-l}$, $\operatorname{supp} T \subset E$. Не ограничивая общности, будем считать, что $\operatorname{supp} T$ — компакт (в противном случае мы могли бы вместо T взять αT, где $\alpha \in \mathscr{D}$). Пусть φ — любая функция из $\mathscr{D}$ и $\{u_m\}_{m \geqslant 1}$ — последовательность функций из $\mathscr{D}$, равных единице в окрестности носителя T, сходящаяся к нулю в W_p^l. Так как $\varphi(1-u_m)=0$ в окрестности носителя T, то $(\varphi, T)=(\varphi u_m, T)$. Правая часть стремится к нулю при $m \to \infty$ и, значит, $(\varphi, T)=0$ для всех $\varphi \in \mathscr{D}$. Поскольку пространство $\mathscr{D}$ плотно в W_p^l, то $T=0$.

* Здесь используется следствие теоремы Хана — Банаха. Пусть M — линейное множество в банаховом пространстве B и x_0 — элемент B, расположенный на положительном расстоянии от M. Тогда существует такой ненулевой функционал $T \in B^*$, что $(x, T)=0$ для всех $x \in M$.

2) Пусть E — (p, l)-полярное множество. Тогда любой компакт K в E — также (p, l)-полярное множество и пространство $\mathscr{D}(R^n \setminus K)$ плотно в W_p^l. Пусть $v \in \mathfrak{M}(K)$. Так как пространство $\mathscr{D}(R^n \setminus K)$ плотно в W_p^l, то существует последовательность $v_m \in \mathscr{D}(R^n \setminus K)$, сходящаяся к v в W_p^l. Каждая из функций $v_m - v$ равна единице вблизи K, имеет компактный носитель и $\|v_m - v\|_{W_p^l} \to 0$. Следовательно, $\mathrm{Cap}(K, W_p^l) = 0$. ■

Принимая во внимание только что доказанное утверждение, можно дать следующую эквивалентную формулировку теоремы 1.

Теорема 3. *Пространство $\mathscr{D}(\Omega)$ плотно в W_p^l в том и только в том случае, если* $\underline{\mathrm{Cap}}(E, W_p^l) = 0$.

§ 9.3. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ДВУХ ЕМКОСТЕЙ

Сравним емкости $\mathrm{Cap}(e, \mathring{L}_p^1)$ и $\mathrm{cap}(e, \mathring{L}_p^1)$, $p \geqslant 1$. Очевидно, что первая из них мажорирует вторую. Нетрудно видеть, что имеет место и обратное неравенство. Действительно, каковы бы ни были число $\varepsilon \in (0, 1)$ и функция $u \in \mathfrak{N}(e)$, мы можем аппроксимировать функцию $v_\varepsilon = \min\{(1-\varepsilon)^{-1} u, 1\}$ в $\mathring{L}_p^1$ последовательностью функций из $\mathfrak{M}(e)$. Поэтому

$$\mathrm{Cap}(e, \mathring{L}_p^1) \leqslant \int |\nabla v_\varepsilon|^p dx \leqslant (1-\varepsilon)^{-p} \int |\nabla u|^p dx$$

и, следовательно, $\mathrm{Cap}(e, \mathring{L}_p^1) \leqslant \mathrm{cap}(e, \mathring{L}_p^1)$. Итак, емкости $\mathrm{Cap}(e, \mathring{L}_p^1)$ и $\mathrm{cap}(e, \mathring{L}_p^1)$ совпадают.

Поскольку при $l > 1$ операция срезки по уровням выводит функцию из пространств $\mathring{L}_p^l$ и W_p^l, приведенное рассуждение непосредственно не применимо для доказательства эквивалентности емкостей Cap и cap, порожденных этими пространствами. В этом параграфе показано, что тем не менее указанная эквивалентность имеет место при $p > 1$.

9.3.1. Вспомогательное мультипликативное неравенство. Следующее утверждение применяется в п. 9.3.2. Оно представляет собой частный случай теоремы Гальярдо — Ниренберга (см. п. 1.4.8).

Лемма 1. *Если $u \in \mathring{L}_p^l \cap L_\infty$, $p > 1$ и $m = 1, 2, \ldots, l-1$, то*

$$\|\nabla_m u\|_{L_{pl/m}} \leqslant c \|u\|_{L_\infty}^{1-m/l} \|\nabla_l u\|_{L_p}^{m/l}. \tag{1}$$

Докажем сначала одно элементарное неравенство для функций на R^1.

Лемма 2. *Пусть m — натуральное число, $q>m+1$ и v — любая функция на R^1 с конечной нормой*

$$\|v''\|_{L_{q/(m+1)}(R^1)}+\|v\|_{L_{q/(m-1)}(R^1)}.$$

Тогда

$$\|v'\|_{L_{q/m}(R^1)}\leqslant c\,\|v''\|^{1/2}_{L_{q/(m+1)}(R^1)}\|v\|^{1/2}_{L_{q/(m-1)}(R^1)},$$

где $c=\begin{cases}((m-1)/(q-m-1))^{1/2}, & \text{если } q<2m,\\ ((q-m)/m)^{1/2}, & \text{если } q\geqslant 2m.\end{cases}$

Доказательство. Введем обозначение $b_j=\int|v^{(j)}|^{q/(m+j-1)}dx$. (Интегрирование распространено на R^1.) Рассмотрим сначала случай $q<2m$. Пусть $\delta=q(2m-q)/2m(m-1)$. В силу неравенства Гельдера

$$b_1=\int|v|^\delta\frac{|v'|^{q/m}}{|v|^\delta}dx\leqslant\left(\int|v|^{q/(m-1)}dx\right)^{1-q/2m}\left(\int\frac{|v'|^2}{|v|^{(2m-q)/(m-1)}}dx\right)^{q/2m}.$$

Интегрируя по частям в последнем интеграле (это оправдано из-за неравенства $(2m-q)(m-1)^{-1}<1$), получаем, что он не превосходит

$$((m-1)/(q-m-1))\int|v|^{(q-m-1)/(m-1)}|v''|\,dx\leqslant$$
$$\leqslant((m-1)/(q-m-1))\,b_0^{1-(m+1)/q}b_2^{(m+1)/q}.$$

Пусть $q\geqslant 2m$. После интегрирования по частям в b_1 получаем

$$b_1\leqslant(q/m-1)\int|vv''|\,|v'|^{q/m-2}dx.$$

Применяя к последнему интегралу тройное неравенство Гельдера с показателями $p_1=q/(q-m)$, $p_2=q/(m-1)$, $p_3=m$, заключаем, что

$$b_1\leqslant((q-m)/m)\,b_1^{1-2m/q}b_0^{(m-1)/q}b_2^{(m+1)/q}.$$

Итак, $b_1\leqslant cb_0^{(m-1)/2m}b_2^{(m+1)/2m}$, где $c=((m-1)/(q-m-1))^{q/2m}$, если $q<2m$, и $c=((q-m)/m)^{q/2m}$, если $q\geqslant 2m$.

Доказательство леммы 1. Пусть $q>m+1$ и $a_m=\|\nabla_m u\|_{L_{q/m}}$, $m=0, 1, \ldots, l$. В силу леммы 2 $a_m\leqslant c_1a^{1/2}_{m+1}a^{1/2}_{m-1}$. Отсюда при $q=pl$ с помощью индукции получаем $a_m\leqslant\leqslant c_2a_0^{(l-m)/m}a_l^{m/l}$. ■

Следствие. *Если* $u, v\in\mathring{L}^l_p\cap L_\infty$, *то*

$$\|\nabla_l(uv)\|_{L_p}\leqslant c\left(\|u\|_{L_\infty}\|\nabla_l v\|_{L_p}+\|v\|_{L_\infty}\|\nabla_l u\|_{L_p}\right). \quad (2)$$

Доказательство. Используя лемму 1, получаем

$$\|\nabla_l(uv)\|_{L_p}\leqslant c\sum_{k=0}^{l}\| |\nabla_k u|\,|\nabla_{l-k}v|\|_{L_p}\leqslant$$
$$\leqslant c\sum_{k=0}^{l}\|\nabla_k u\|_{L_{pl/k}}\|\nabla_{l-k}v\|_{L_{pl/(l-k)}}\leqslant$$
$$\leqslant c\sum_{k=0}^{l}\|u\|_{L_\infty}^{1-k/l}\|\nabla_l u\|_{L_p}^{k/l}\|v\|_{L_\infty}^{k/l}\|\nabla_l v\|_{L_p}^{1-k/l}. \blacksquare$$

9.3.2. Соотношение Cap $\sim$ cap при $p>1$.

Теорема 1. *Пусть $p>1$, $n>pl$, $l=1, 2, \ldots$ Тогда для любого компакта e*

$$\mathrm{cap}(e, \mathring{L}_p^l)\leqslant \mathrm{Cap}(e, \mathring{L}_p^l)\leqslant c\,\mathrm{cap}(e, \mathring{L}_p^l). \tag{1}$$

Доказательство. Левое неравенство следует из включения $\mathfrak{M}(e)\subset\mathfrak{N}(e)$. Оценим емкость Cap сверху. Обозначим через G ограниченное открытое множество, содержащее e и такое, что

$$\mathrm{cap}(\bar{G}, L_p^l)\leqslant \mathrm{cap}(e, \mathring{L}_p^l)+\varepsilon.$$

Пусть U — (p, l)-емкостный потенциал множества $\bar{G}$ (см. п. 7.2.2). В силу предложения 7.2.2/2 неравенство $U\geqslant 1$ имеет место (p, l)-квазивсюду в $\bar{G}$ и, следовательно, почти всюду в некоторой окрестности компакта e. Применим к U оператор усреднения с радиусом m^{-1}, $m=1, 2, \ldots$, и умножим результат на срезающую функцию η_m со значениями $\eta_m(x)=\eta(x/m)$, где $\eta\in C_0^\infty$, $\eta(0)=1$. Получим последовательность $\{U_m\}_{m\geqslant 1}$ функций из C_0^∞, такую, что $0\leqslant U_m\leqslant a$ в R^n, $U_m\geqslant 1$ в окрестности e,

$$\lim_{m\to\infty}\|\nabla_l U_m\|_{L_p}^p\leqslant \mathrm{cap}(e, \mathring{L}_p^l)+\varepsilon. \tag{2}$$

(Неравенство $U_m\leqslant a$ следует из предложения 7.2.2/1.)

Введем функцию $w=1-[(1-U_m)_+]^{l+1}$, которая очевидно имеет компактный носитель и принадлежит C^l. Кроме того, $\|\nabla_l w\|_{L_p}\leqslant\|\nabla_l[(1-U_m)^{l+1}]\|_{L_p}$. Применяя следствие 9.3.1, отсюда получаем $\|\nabla_l w\|_{L_p}\leqslant c\|\nabla_l U_m\|_{L_p}$. Остается воспользоваться неравенством (2).

Точно так же доказывается следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $p>1$, $l=1, 2, \ldots$ Тогда для любого компакта e*

$$\mathrm{cap}(e, W_p^l)\leqslant \mathrm{Cap}(e, W_p^l)\leqslant c\,\mathrm{cap}(e, W_p^l). \tag{3}$$

Следствие 1. *Пусть $p>1$, $l=1, 2, \ldots$, и e — замкнутое подмножество куба $\bar{Q}_d=\{x\colon 2|x_i|\leqslant d\}$. Тогда*

$$\mathrm{cap}(e, L_p^l(Q_{2d}))\leqslant \mathrm{Cap}(e, \mathring{L}_p^l(Q_{2d}))\leqslant c\,\mathrm{cap}(e, \mathring{L}_p^l(Q_{2d})). \tag{4}$$

Доказательство. Достаточно вывести (4) для $d=1$. Левое неравенство очевидно, а правое следует из предложения 9.1.1/2 и теоремы 2.

Верны ли оценки (1) и (3) при $p=1$, $1<l<n$, по-видимому, неизвестно.

Замечание. Доказательство теорем 1, 2 и следствия 1 не изменятся, если в определении емкости Cap заменить класс $\mathfrak{M}(e, \Omega)$ более узким классом $\{u \in C_0^\infty(\Omega),\ u=1$ в окрестности e, $0 \leqslant u \leqslant 1\}$.

Следствие 2. *Пусть $p>1$, $l=1, 2, \dots$ и e_1, e_2 — компакты в $\bar{Q}_d$. Справедливо неравенство*

$$\operatorname{Cap}(e_1 \cup e_2,\ \mathring{L}_p^l(Q_{2d})) \leqslant c_* \sum\nolimits_{i=1}^2 \operatorname{Cap}(e_i,\ \mathring{L}_p^l(Q_{2d})), \tag{5}$$

где c_* — постоянная, зависящая только от n, p, l.

Доказательство. Пусть $u_i \in \mathfrak{M}(e_i, Q_{2d})$, $0 \leqslant u_i \leqslant 1$, $i=1, 2$, и пусть

$$\|\nabla_l u_i\|_{L_p}^p \leqslant c \operatorname{cap}(e_i,\ \mathring{L}_p^l(Q_{2d})) + \varepsilon \tag{6}$$

(см. замечание). Функция $u=u_1+u_2$ принадлежит пространству $C_0^\infty(Q_{2d})$ и удовлетворяет неравенству $u \geqslant 1$ на $e_1 \cup e_2$. Отсюда и из следствия 1 получаем

$$\operatorname{Cap}(e_1 \cup e_2,\ \mathring{L}_p^l(Q_{2d})) \leqslant c \operatorname{cap}(e_1 \cup e_2,\ \mathring{L}_p^l(Q_{2d})) \leqslant$$
$$\leqslant c \|\nabla_l u\|_{L_p}^p \leqslant 2^{p-1} c \sum\nolimits_{i=1}^2 \|\nabla_l u_i\|_{L_p}^p,$$

что вместе с (6) приводит к (5).

§ 9.4. КОММЕНТАРИИ К ГЛАВЕ 9

§ 9.1. Емкость $\operatorname{Cap}(e, \mathring{L}_2^l(\Omega))$ введена автором [64]. Материал этого параграфа в основном взят из статьи автора [75].

§ 9.2. Определение $(2, l)$-полярного множества дано в статье Л. Хермандера и Ж.-Л. Лионса [200]. Результаты этого параграфа получены в работе У. Литтмана [211]. Относительно теоремы 9.1.4/2 см. более раннюю работу В. В. Грушина [27].

§ 9.3. Эквивалентность емкостей $\operatorname{Cap}(e, \mathring{L}_p^l)$ и $\operatorname{cap}(e, \mathring{L}_p^l)$ установлена автором для целых l [70, 72]. Близкое утверждение получено У. Литтманом [212]. Для дробных l эквивалентность соответствующих емкостей доказана в работе Д. Р. Адамса и Дж. Полкинга [142]. Доказательство леммы 9.3.1/1 взято из статьи автора [72]. Другое доказательство теоремы 9.3.2/1, основанное на использовании «гладкой срезки» и неравенства Л. Хедберга (8.2.2/2), предложено в работе Д. Р. Адамса [136].

Глава 10

ИНТЕГРАЛЬНОЕ НЕРАВЕНСТВО ДЛЯ ФУНКЦИЙ НА КУБЕ

Пусть Q_d — открытый n-мерный куб с длиной ребра d, грани которого параллельны координатным осям. Пусть еще $p \geqslant 1$, k и l — целые числа, $0 \leqslant k \leqslant l$ и u — функция из пространства $W_p^l(Q_d)$, $p \geqslant 1$.

Часто оказывается полезным неравенство

$$\|u\|_{L_q(Q_d)} \leqslant C \sum\nolimits_{j=k+1}^{l} d^{j-l} \|\nabla_j u\|_{L_p(Q_d)}, \qquad (1)$$

где интервал изменения q тот же, что и в теореме вложения Соболева. Это неравенство неоднократно используется и в следующих главах. Очевидно, что (1) неверно для всех $u \in W_p^l(Q_d)$, но если функцию u подчинить дополнительным ограничениям, оно может оказаться справедливым.

В этой главе даны двусторонние оценки для точной константы C в (1). В § 10.1, 10.2 в основном рассматривается случай, когда u обращается в нуль вблизи компакта $e \subset \bar{Q}_d$ и $k=0$. Существование константы C равносильно положительности (p, l)-емкости множества e, и для (p, l)-несущественных множеств e верхние и нижние оценки для C формулируются в терминах этой емкости. Если $q \geqslant p$ и e — (p, l)-существенное множество, т. е. имеет емкость, сравнимую с емкостью куба, то C оценивается с помощью так называемого (p, l)-внутреннего диаметра.

В § 10.3 функция u априори принадлежит произвольному линейному подмножеству $\mathfrak{C}$ пространства $W_p^l(Q_d)$. Здесь получен результат, обобщающий основную теорему первого параграфа, и даны его приложения к конкретным классам $\mathfrak{C}$. При этом мы приходим к необходимости ввести некоторые функции класса $\mathfrak{C}$, играющие ту же роль, что и (p, l)-емкость.

Отметим, что как результаты этой главы, так и их доказательства сохраняют силу, если вместо куба Q_d рассматривать произвольную ограниченную липшицеву область с диаметром d.

10.1. СВЯЗЬ ТОЧНОЙ КОНСТАНТЫ С ЕМКОСТЬЮ (СЛУЧАЙ $k=1$)

10.1.1. Определение (p, l)-несущественного множества.

Определение. Пусть e — компактное подмножество куба $\bar{Q}_d$. В любом из случаев $n \geqslant pl$, $p > 1$ или $n > l$, $p=1$ будем говорить, что e — (p, l)-несущественное подмножество $\bar{Q}_d$, если

$$\operatorname{Cap}(e, \mathring{L}_p^l(Q_{2d})) \leqslant \gamma d^{n-pl}, \qquad (1)$$

где γ — достаточно малая константа, зависящая только от n, p, l. В настоящей главе в качестве такой константы можно взять любое положительное число, удовлетворяющее неравенству

$$\gamma \leqslant 4^{-pn}. \tag{2}$$

Если неравенство (1) не выполнено, то по определению e — (p, l)-существенное подмножество $\bar{Q}_d$.

При $n<pl$, $p>1$ или при $n \leqslant l$, $p=1$ назовем (p, l)-несущественным только пустое множество.

Совокупность всех (p, l)-несущественных подмножеств куба $\bar{Q}_d$ обозначим через $\mathscr{N}(Q_d)$.

10.1.2. Основная теорема. Обозначим через $\bar{u}_{Q_d}$ среднее значение функции u на кубе Q_d, т. е.

$$\bar{u}_{Q_d} = [m_n(Q_d)]^{-1} \int_{Q_d} u\,dx.$$

Введем еще полунорму

$$|u|_{p,l,Q_d} = \sum_{j=1}^{l} d^{j-l} \|\nabla_j u\|_{L_p(Q_d)}.$$

Теорема. *Пусть e — замкнутое подмножество куба $\bar{Q}_d$.*

1) *Для всех функций $u \in C^\infty(\bar{Q}_d)$, таких, что* $\operatorname{dist}(\operatorname{supp} u, e) > 0$, *верно неравенство*

$$\|u\|_{L_q(Q_d)} \leqslant C\,|u|_{p,l,Q_d}, \tag{1}$$

где $q \in [1, pn(n-pl)^{-1}]$ в случае $n>pl$, $p \geqslant 1$; $q \in [1, \infty)$ в случае $n=pl$, $p>1$. Константа C допускает оценку

$$C^{-p} \geqslant c_1 d^{-np/q} \operatorname{Cap}(e, \mathring{L}_p^l(Q_{2d})). \tag{2}$$

2) *Пусть для функций $u \in C^\infty(\bar{Q}_d)$, таких, что* $\operatorname{dist}(\operatorname{supp} u, e) > 0$, *верно неравенство*

$$\|u\|_{L_q(Q_{d/2})} \leqslant C\,|u|_{p,l,Q_d}, \tag{3}$$

где $e \in \mathscr{N}(Q_d)$ и q удовлетворяет тем же условиям, что и в 1). *Тогда*

$$C^{-p} \leqslant c_2 d^{-np/q} \operatorname{Cap}(e, \mathring{L}_p^l(Q_{2d})). \tag{4}$$

Доказательству теоремы предпошлем следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть e — компакт в $\bar{Q}_1$. Существует такая постоянная $c>1$, что*

$$c^{-1}\operatorname{Cap}(e, \mathring{L}_p^l(Q_2)) \leqslant$$
$$\leqslant \inf\left\{\|1-u\|_{V_p^l(Q_1)}^p :\ u \in C^\infty(\bar{Q}_1),\ \operatorname{dist}(\operatorname{supp} u, e)>0\right\} \leqslant$$
$$\leqslant c\operatorname{Cap}(e, \mathring{L}_p^l(Q_2)). \tag{5}$$

В доказательстве левой оценки будем использовать следующее хорошо известное утверждение (см. теорему 1.1.16).

Лемма 2. *Существует линейное непрерывное отображение* A: $C^{k-1,1}(\bar{Q}_d) \to C^{k-1,1}(\bar{Q}_{2d})$, $k=1, 2, \ldots$, *такое, что*: (i) $Av=v$ *на* $\bar{Q}_d$, (ii) *если* $\operatorname{dist}(\operatorname{supp} v, e)>0$, *то* $\operatorname{dist}(\operatorname{supp}(Av), e)>0$, (iii)

$$\|\nabla_i(Av)\|_{L_p(Q_{2d})} \leqslant c\|\nabla_i v\|_{L_p(Q_d)}, \quad i=0, 1, \ldots, l, \ 1\leqslant p\leqslant\infty. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $v=A(1-u)$. Обозначим через η функцию из $\mathscr{D}(Q_2)$, равную единице в окрестности куба Q_1. Тогда

$$\operatorname{Cap}(e, Q_2)\leqslant c\int_{Q_2}|\nabla_l(\eta v)|^p dx\leqslant c\|v\|^p_{V_p^l(Q_2)}. \tag{7}$$

Теперь левая оценка (5) следует из (6) и (7).

Докажем правую оценку (5). Пусть $w\in\mathfrak{M}(e, Q_2)$. Тогда

$$\|w\|^p_{V_p^l(Q_1)}\leqslant c\sum_{k=0}^{l}\|\nabla_k w\|^p_{L_p(Q_2)}\leqslant c\|\nabla_l w\|^p_{L_p(Q_2)}.$$

Минимизируя последнюю норму на множестве $\mathfrak{M}(e, Q_2)$, получаем

$$\|w\|^p_{V_p^l(Q_1)}\leqslant c\operatorname{Cap}(e, \mathring{L}_p^l(Q_2)).$$

Минимизируя левую часть, заканчиваем доказательство леммы.

Доказательство теоремы. Достаточно доказать теорему для случая $d=1$ и затем воспользоваться преобразованием подобия.

1) Пусть $N=\|u\|_{L_p(Q_1)}$. Так как $\operatorname{dist}(\operatorname{supp} u, e)>0$, то по лемме 1

$$\operatorname{Cap}(e, \mathring{L}_p^l(Q_2))\leqslant c\|1-N^{-1}u\|^p_{V_p^l(Q_1)}=$$
$$=cN^{-p}|u|^p_{p,l,Q_1}+c\|1-N^{-1}u\|^p_{L_p(Q_1)},$$

т. е.
$$N^p\operatorname{Cap}(e, \mathring{L}_p^l(Q_2))\leqslant c|u|^p_{p,l,Q_1}+c\|N-u\|^p_{L_p(Q_1)}. \tag{8}$$

Без ограничения общности можно предположить, что $\bar{u}_{Q_1}\geqslant 0$. Тогда

$$|N-\bar{u}_{Q_1}|=\|u\|_{L_p(Q_1)}-\|\bar{u}_{Q_1}\|_{L_p(Q_1)}\leqslant\|u-\bar{u}_{Q_1}\|_{L_p(Q_1)}.$$

Следовательно,

$$\|N-u\|_{L_p(Q_1)}\leqslant\|N-\bar{u}_{Q_1}\|_{L_p(Q_1)}+\|u-\bar{u}_{Q_1}\|_{L_p(Q_1)}\leqslant 2\|u-\bar{u}_{Q_1}\|_{L_p(Q_1)}. \tag{9}$$

В силу (8), (9) и неравенства Пуанкаре $\|u-\bar{u}_{Q_1}\|_{L_p(Q_1)}\leqslant$ $\leqslant c\|\nabla u\|_{L_p(Q_1)}$ справедлива оценка $\operatorname{Cap}(e, \mathring{L}_p^l(Q_2))\|u\|^p_{L_p(Q_1)}\leqslant$ $\leqslant c|u|^p_{p,l,Q_1}$. Из теоремы вложения Соболева и последнего неравенства получаем

$$\|u\|^p_{L_q(Q_1)} \leqslant c\left(|u|^p_{p,\,l,\,Q_1} + \|u\|^p_{L_p(Q_1)}\right) \leqslant$$
$$\leqslant c\left\{1 + [\operatorname{Cap}(e,\ \mathring{L}^l_p(Q_2))]^{-1}\right\}|u|^p_{p,\,l,\,Q_1}.$$

Первое утверждение теоремы доказано.

2) В случае $pl > n$, $p > 1$ или $l \geqslant n$, $p = 1$ утверждение очевидно. Рассмотрим остальные значения p и l. Пусть функция $\psi \in \mathfrak{M}(e,\ Q_2)$ такова, что

$$\|\nabla_l\psi\|^p_{L_p(Q_2)} \leqslant \operatorname{Cap}(e,\ \mathring{L}^l_p(Q_2)) + \varepsilon, \tag{10}$$

и пусть $u = 1 - \psi$. Применяя неравенство $\|\nabla_j\psi\|_{L_p(Q_2)} \leqslant c\|\nabla_l\psi\|_{L_p(Q_2)}$, $j = 1,\ \ldots,\ l-1$, получаем $|u|_{p,\,l,\,Q_1} = |\psi|_{p,\,l,\,Q_1} \leqslant c\|\nabla_l\psi\|_{L_p(Q_2)}$. Отсюда и из (10) следует, что $\|u\|_{L_p(Q_{1/2})} \leqslant cC\left[\operatorname{Cap}(e,\ \mathring{L}^l_p(Q_2)) + \varepsilon\right]^{1/p}$. В силу неравенства Гельдера

$$1 - \bar{\psi}_{Q_{1/2}} = \bar{u}_{Q_{1/2}} \leqslant cC\left[\operatorname{Cap}(e,\ \mathring{L}^l_p(Q_2))\right]^{1/p}. \tag{11}$$

Остается показать, что среднее значение ψ в кубе $Q_{1/2}$ мало. Отмечая, что для любой функции $w \in C^1[-1,\ 1]$, удовлетворяющей условию $w(-1) = w(1) = 0$, справедливо неравенство

$$\int_{-1}^{1}|w|\,dt \leqslant \int_{-1}^{1}|t|\,|w'|\,dt \leqslant \int_{-1}^{1}|w'|\,dt,$$

получаем

$$\int_{Q_{1/2}}\psi\,dx \leqslant \int_{Q_2}|\psi|\,dx \leqslant \int_{Q_2}\left|\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right|dx \leqslant \int_{Q_2}\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}\right|dx \leqslant \ldots$$
$$\ldots \leqslant \int\left|\frac{\partial^l\psi}{\partial x_1^l}\right|dx \leqslant 2^{(p-1)n/p}\|\nabla_l\psi\|_{L_p(Q_2)}. \tag{12}$$

Следовательно, $\bar{\psi}_{Q_{1/2}} \leqslant 2^{(2p-1)n/p}[\operatorname{Cap}(e,\ Q_2) + \varepsilon]^{1/p}$. Отсюда, а также из (10.1.1/1) и (10.1.1/2) следует $\bar{\psi}_{Q_{1/2}} \leqslant 2^{-n/p}$, что вместе с (11) доказывает вторую часть теоремы.

10.1.3. Вариант теоремы 10.1.2 и его следствия. В следующей теореме, которая будет использована в главе 12, доказано утверждение, близкое к первой части теоремы 10.1.2 и относящееся к более широкому классу функций.

Теорема. *Пусть e — замкнутое подмножество $\bar{Q}_d$ и δ — число из интервала* $(0,\ 1)$. *Тогда для всех функций из множества*

$$\left\{u \in C^\infty(\bar{Q}_d):\ \bar{u}_{Q_d} \geqslant 0,\ u(x) \leqslant \delta d^{-n/p}\|u\|_{L_p(Q_d)}\ \text{ при всех }\ x \in e\right\}$$

справедливо неравенство (10.1.2./1), *где* $C^{-p} \geqslant c(1-\delta)^p d^{-np/q} \times \operatorname{cap}(e,\ \mathring{L}^l_p(Q_{2d}))$.

Доказательство. Повторяя доказательство леммы 10.1.2/1, получаем

$$c^{-1}\operatorname{cap}\left(e,\ \mathring{L}_p^l(Q_2)\right)\leqslant \inf\left\{\|1-u\|^p_{V_p^l(Q_1)}:\ u\in C^\infty(\bar{Q}_1),\ u\leqslant 0 \text{ на } e\right\}$$
$$\leqslant c\operatorname{cap}\left(e,\ \mathring{L}_p^l(Q_2)\right).$$

Далее следует заметить, что из неравенства $1-N^{-1}u\geqslant 1-\delta$ на e вытекает оценка

$$(1-\delta)^p\operatorname{cap}\left(e,\ \mathring{L}_p^l(Q_2)\right)\leqslant c\,\|1-N^{-1}u\|^p_{V_p^l(Q_1)},$$

и повторить доказательство первой части теоремы 10.1.2.

Следствие 1. *Пусть e — замкнутое подмножество $\bar{Q}_d$. Для всех функций $u\in C^\infty(\bar{Q}_d)$, обращающихся в нуль на e, имеет место неравенство*

$$\|u\|^p_{L_q(Q_d)}\leqslant c\left(d^{p-n+np/q}\,\|\nabla u\|^p_{L_p(Q_d)}+\frac{d^{np/q}}{\operatorname{cap}\left(e\ \ \mathring{L}_p^l(Q_{2d})\right)}\,\|\nabla_l u\|^p_{L_p(Q_d)}\right).\qquad(1)$$

Доказательство. Достаточно положить $d=1$. Пусть $P(u)=\sum_{0\leqslant|\beta|<l}x^\beta\int_{Q_1}\varphi_\beta(y)\,u(y)\,dy$ — многочлен из обобщенного неравенства Пуанкаре для куба Q_1 (см. лемму 1.1.11). Пусть еще $S(u)=P(u)-\int_{Q_1}\varphi_0(y)\,u(y)\,dy$. Так как при $|\beta|>0$ все функции φ_β ортогональны единице, то

$$|S(u)|\leqslant c\,\|\nabla u\|_{L_p(Q_1)}.\qquad(2)$$

Достаточно доказать (1) в предположении $\|\nabla u\|_{L_p(Q_1)}\leqslant \leqslant\delta\|u\|_{L_p(Q_1)}$, где $\delta=\delta(n,\ p,\ l)$ — малая постоянная. Тогда функция $v=u-S(u)$ удовлетворяет на e неравенству $|v(x)|\leqslant \leqslant c\delta\|v\|_{L_p(Q_1)}$. Пусть для определенности $\bar{v}_{Q_1}\geqslant 0$. Применяя к функции v теорему этого пункта, получаем

$$\|v\|^p_{L_q(Q_1)}\leqslant\frac{c}{\operatorname{cap}\left(e,\ \mathring{L}_p^l(Q_2)\right)}\sum_{j=1}^{l}\|\nabla_j v\|^p_{L_p(Q_1)}.$$

Отсюда и из леммы 1.1.11 находим

$$\|u-S(u)\|^p_{L_q(Q_1)}\leqslant\frac{c}{\operatorname{cap}\left(e,\ \mathring{L}_p^l(Q_2)\right)}\sum_{j=1}^{l}\|\nabla_j(u-P(u))\|^p_{L_p(Q_1)}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{c}{\operatorname{cap}\left(e,\ \mathring{L}_p^l(Q_2)\right)}\|\nabla_l u\|^p_{L_p(Q_1)}.$$

Ссылка на (2) заканчивает доказательство.

Из следствия 1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. *Пусть e — замкнутое подмножество $\bar{Q}_d$. Для всех функций $u \in C^\infty(\bar{Q}_d)$, обращающихся в нуль на e вместе со всеми производными до порядка k, $k < l$, включительно, имеет место неравенство*

$$\|u\|^p_{L_q(Q_d)} \leqslant c\left(d^{pk-n+np/q}\|\nabla_k u\|^p_{L_p(Q_d)} + \frac{d^{np/q}}{\operatorname{cap}\left(e, \mathring{L}^{l-k+1}_p(Q_{2d})\right)}\|\nabla_l u\|^p_{L_p(Q_d)}\right). \tag{3}$$

Доказательство. Достаточно обосновать (3) при $q = p$ и $d = 1$. Согласно следствию 1

$$\|\nabla_j u\|^p_{L_p(Q_1)} \leqslant c\left(\|\nabla_{j+1} u\|^p_{L_p(Q_1)} + \frac{1}{\operatorname{cap}\left(e, \mathring{L}^{l-j}_p(Q_1)\right)}\|\nabla_l u\|^p_{L_p(Q_1)}\right)$$

при $j = 0, 1, \ldots, k-1$. Следовательно,

$$\|u\|^p_{L_p(Q_1)} \leqslant c\left(\|\nabla_k u\|^p_{L_p(Q_1)} + \sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{\operatorname{cap}\left(e, L^{l-j}_p(Q_1)\right)}\|\nabla_l u\|^p_{L_p(Q_1)}\right).$$

Так как $\operatorname{cap}\left(e, L^{l-j}_p(Q_1)\right) \geqslant \operatorname{cap}\left(e, L^{l-k+1}_p(Q_1)\right)$ при $j = 0, \ldots, k-1$, то следствие доказано.

Замечание 1. Согласно следствию 9.3.2/1 при $p > 1$ в формулировках теоремы и следствий 1 и 2 можно заменить cap емкостью Cap.

Замечание 2. Из предложения 9.1.1/3 в формулировках теоремы и следствия 1 при $n > lp$ можно заменить $\operatorname{cap}\left(e, \mathring{L}^l_p(Q_{2d})\right)$ величиной $\operatorname{cap}\left(e, \mathring{L}^l_p(R^n)\right)$. Аналогичное замечание относится к следствию 2 в случае $n > p(l-k+1)$.

Замечание 3. Из предложения 7.2.2/2 и свойств (p, l)-уточненных функций (см. п. 7.2.4) следует, что, определяя емкости $\operatorname{cap}\left(E, h^l_p\right)$ борелевского множества, можно минимизировать норму $\|u\|_{h^l_p}$ по всем (p, l)-уточненным функциям из h^l_p, удовлетворяющим (p, l)-квазивсюду на E неравенству $u \geqslant 1$. Это позволяет говорить в теореме этого пункта о (p, l)-уточненных функциях из $V^l_p(Q_d)$, для которых неравенство $u(x) \leqslant \delta d^{-n/p}\|u\|_{L_p(Q_d)}$ выполнено (p, l)-квазивсюду на борелевском множестве $E \subset \bar{Q}_d$. Аналогично в следствии 1 речь может идти о борелевском множестве $E \subset \bar{Q}_d$ и об уточненных функциях из $V^l_p(Q_d)$, равных нулю квазивсюду на E. Класс функций, рассмотренный в следствии 2, также можно расширить, заменив его классом $\mathfrak{C}^k(E)$ уточненных функций $u \in V^l_p(Q_d)$, таких, что $D^\alpha u(x) = 0$ для $(p, l-|\alpha|)$ — квазивсех $x \in E$, и всех мультииндексов порядка $|\alpha| \leqslant k$.

§ 10.2. СВЯЗЬ ТОЧНОЙ КОНСТАНТЫ С (p, l)-ВНУТРЕННИМ ДИАМЕТРОМ (СЛУЧАЙ $k=1$)

10.2.1. Функция множества $\lambda^l_{p,q}(G)$.

Определение. Любому открытому множеству $G \subset Q_d$ припишем число

$$\lambda^l_{p,q}(G) = \inf \left(| u |^p_{p,l,Q_d} / \| u \|^p_{L_q(Q_d)} \right),$$

где $p \geqslant 1$ и инфимум берется по всем функциям $u \in C^\infty(\bar{Q}_d)$, обращающимся в нуль в окрестности $\overline{Q_d \setminus G}$.

В силу теоремы 10.1.2, если $\overline{Q_d \setminus G}$ — (p, l)-несущественное подмножество $\bar{Q}_d$, то

$$\lambda^l_{p,q}(G) \sim d^{-np/q} \operatorname{Cap}(\overline{Q_d \setminus G};\ \mathring{L}^l_p(Q_{2d})).$$

Без требования малости (p, l)-емкости $Q_d \setminus G$ это соотношение неверно — если множество G «мало», величина $\lambda^l_{p,q}(G)$ становится большой *, в то время как $\operatorname{cap}(\overline{Q_d \setminus G},\ \mathring{L}^l_p(Q_{2d})) \leqslant c d^{n-pl}$.

В этом параграфе дана характеристика функции множества $\lambda^l_{p,q}(G)$ при $q \geqslant p \geqslant 1$ в некоторых новых терминах, связанных с (p, l)-емкостью, при условии $\overline{Q_d \setminus G} \in \mathscr{N}(Q_d)$.

10.2.2. Определение (p, l)-внутреннего диаметра. Зафиксируем куб Q_d и обозначим через $\mathfrak{Q}_\delta$ произвольный открытый куб в Q_d с длиной ребра δ и гранями, параллельными Q_d.

Определение. Пусть G — открытое подмножество куба Q_d. Точную верхнюю грань тех δ, для которых множество $\{\mathfrak{Q}_\delta\colon \overline{\mathfrak{Q}_\delta \setminus G} \in \mathscr{N}(\mathfrak{Q}_\delta)\}$ не пусто, назовем (p, l)-внутренним (кубическим) диаметром G относительно Q_d и обозначим через $D_{p,l}(G, Q_d)$.

В предельном случае $Q_d = R^n$ и будем писать $D_{p,l}(G)$ и говорить о (p, l)-внутреннем (кубическом) диаметре множества G.

Очевидно, что если $\overline{Q_d \setminus G}$ — (p, l)-несущественное подмножество куба $\bar{Q}_d$, то $D_{p,l}(G, Q_d) = d$.

Пусть $n < pl$, $p > 1$ или $n = l$, $p = 1$. При указанных p и l по определению все множества, кроме пустого, являются (p, l)-существенными. Поэтому для любого открытого множества G, $G \subset Q_d$, (p, l)-внутренний (кубический) диаметр $D_{p,l}(G, Q_d)$ совпадает с внутренним (кубическим) диаметром $D(G)$, т. е. с верхней гранью длин ребер кубов $\mathfrak{Q}_\delta$, вписанных в G.

10.2.3. Оценки точной константы в терминах (p, l)-внутреннего диаметра. В следующей теореме содержатся двусторонние оценки $\lambda^l_{p,q}(G)$ при $q \geqslant p \geqslant 1$.

---

* Например, легко проверить, что если G — куб с длиной ребра ε, то $\lambda^l_{p,q}(G) \sim \varepsilon^{n-pl-np/q}$.

Теорема 1. *Пусть G — открытое подмножество Q_d, такое, что $\overline{Q_d \setminus G}$ — (p, l)-существенное подмножество куба $\bar{Q}_d$. Тогда:*

1) *для всех функций $u \in C^\infty(\bar{Q}_d)$, обращающихся в нуль в окрестности множества $\overline{Q_d \setminus G}$, верно неравенство* (10.1.2/1), *в котором $q \geqslant p \geqslant 1$ и*

$$C \leqslant c_1 [D_{p,l}(G, Q_d)]^{l-n(p^{-1}-q^{-1})}; \tag{1}$$

2) *если для всех функций $u \in C^\infty(\bar{Q}_d)$, обращающихся в нуль в окрестности множества $\overline{Q_d \setminus G}$, верно неравенство* (10.1.2/1), *то*

$$C \geqslant c_2 [D_{p,l}(G, Q_d)]^{l-n(p^{-1}-q^{-1})}. \tag{2}$$

Доказательство. 1) Предположим сначала, что $D_{p,l}(G, Q_d) < d$ и обозначим через δ любое число из промежутка $(D_{p,l}(G, Q_d), d]$. Из определения (p, l)-внутреннего диаметра следует, что для любого куба $\bar{\mathfrak{Q}}_\delta$ множество $e = \overline{\mathfrak{Q}_\delta \setminus G}$ является (p, l)-существенным подмножеством, т. е.

$$\operatorname{cap}(e, \mathring{L}_p^l(\mathfrak{Q}_{2\delta})) > \gamma\delta^{n-lp}\,*. \tag{3}$$

В случае $D_{p,l}(G, Q_d) = d$ положим $\delta = d$. Тогда оценка (3) также выполняется, поскольку (по условию) e — (p, l)-существенное подмножество куба $\bar{\mathfrak{Q}}_\delta = \bar{Q}_d$.

Согласно первой части теоремы 10.1.2 и неравенству (3)

$$\|u\|^p_{L_q(\mathfrak{Q}_\delta)} \leqslant \frac{c\delta^{np/q}}{\operatorname{cap}(\bar{\mathfrak{Q}}_\delta \cap e, \mathring{L}_p^l(\mathfrak{Q}_{2\delta}))} |u|^p_{p,l,\mathfrak{Q}_\delta} \leqslant$$
$$\leqslant c\delta^{lp-n(1-p/q)} |u|^p_{p,l,\mathfrak{Q}_\delta}. \tag{4}$$

Построим покрытие куба Q_d кубами $\mathfrak{Q}_\delta$, кратность которого не превосходит некоторого числа, зависящего только от n, и просуммируем (4) по всем кубам покрытия. Тогда

$$\|u\|^p_{L_p(Q_d)} \leqslant c\delta^{lp} \sum_{j=1}^{l} \delta^{p(j-l)} \|\nabla_j u\|^p_{L_p(Q_d)}. \tag{5}$$

Воспользуемся известным мультипликативным неравенством

$$\|\nabla_j v\|_{L_p(Q_d)} \leqslant c \|v\|^{1-j/l}_{L_p(Q_d)} \Big(\sum_{i=0}^{l} d^{i-l} \|\nabla_i v\|_{L_p(Q_d)}\Big)^{j/l} \tag{6}$$

(см. лемму 1.4.7). Полагая в (6) $v = u - \bar{u}_{Q_d}$ и применяя неравенство Пуанкаре $\|u - \bar{u}_{Q_d}\|_{L_p(Q_d)} \leqslant cd\|\nabla u\|_{L_p(Q_d)}$, получаем $\|\nabla_j u\|_{L_p(Q_d)} \leqslant \leqslant c\|u\|^{1-j/l}_{L_p(Q_d)} |u|^{j/l}_{p,l,Q_d}$. Отсюда и из (5), где $q = p$, следует оценка

$$1 \leqslant c \sum_{j=1}^{l} (\delta^l |u|_{p,l,Q_d} / \|u\|_{L_p(Q_d)})^{pj/l}.$$

Поэтому

$$\|u\|_{L_p(Q_d)} \leqslant c\delta^l |u|_{p,l,Q_d}, \tag{7}$$

* Здесь и далее $\mathfrak{Q}_{c\delta}$ — открытый куб с длиной ребра $c\delta$, центр которого совпадает с центром куба $\mathfrak{Q}_\delta$, а грани параллельны граням $\mathfrak{Q}_\delta$.

и в случае $q=p$ первая часть теоремы доказана. Пусть $q>p$. Суммируя неравенство

$$\|u\|^p_{L_q(\mathfrak{Q}_\delta)} \leq c\delta^{lp-n(1-p/q)}\left(\|\nabla_l u\|^p_{L_p(\mathfrak{Q}_\delta)}+\delta^{-pl}\|u\|^p_{L_p(\mathfrak{Q}_\delta)}\right)$$

по всем кубам покрытия $\{\mathfrak{Q}_\delta\}$ и используя неравенство $\left(\sum a_i\right)^\varepsilon \leq \sum a_i^\varepsilon$, $a_i>0$, $0<\varepsilon<1$, получаем оценку

$$\|u\|^p_{L_p(Q_\delta)} \leq c\delta^{lp-n(1-p/q)}\left(\|\nabla_l u\|^p_{L_p(Q_d)}+\delta^{-l}\|u\|^p_{L_p(Q_d)}\right).$$

Остается применить неравенство (7).

2) Пусть $0<\delta<D_{p,l}(G, Q_d)$ и $\overline{\mathfrak{Q}}_\delta$ — куб, имеющий (p, l)-несущественное пересечение с $\overline{Q_d \setminus G}$. Обозначим через η функцию из $C^\infty(\mathfrak{Q}_\delta)$, равную нулю вблизи $\partial\mathfrak{Q}_\delta$, единице на кубе $\mathfrak{Q}_{\delta/2}$ и удовлетворяющую неравенствам $|\nabla_j\eta|\leq c\delta^{-j}$, $j=1, 2, \ldots$ Если v — любая функция из $C^\infty(\overline{\mathfrak{Q}}_\delta)$, равная нулю вблизи $\overline{Q_d \setminus G}$, то для функции $u=\eta v$, продолженной нулем во внешность $\mathfrak{Q}_\delta$, по условию теоремы справедливо неравенство (10.1.2/3). Поэтому

$$\|v\|_{L_p(\mathfrak{Q}_{\delta/2})} \leq C\sum_{j=1}^{l}\|\nabla_j(\eta v)\|_{L_p(\mathfrak{Q}_\delta)} \leq$$
$$\leq cC\sum_{j=1}^{l}\sum_{k=0}^{j}\delta^{k-j}\|\nabla_k v\|_{L_p(\mathfrak{Q}_\delta)} \leq cC\left(|v|_{p,l,\mathfrak{Q}_\delta}+\delta^{-l}\|v\|_{L_p(\mathfrak{Q}_\delta)}\right).$$

Отсюда и из оценки

$$\|v\|_{L_p(\mathfrak{Q}_\delta)} \leq c\left(\delta\|\nabla v\|_{L_p(\mathfrak{Q}_\delta)}+c\delta^{n(p^{-1}-q^{-1})}\|v\|_{L_q(\mathfrak{Q}_{\delta/2})}\right)$$

получаем

$$\|v\|_{L_p(\mathfrak{Q}_{\delta/2})} \leq c'C\left(|v|_{p,l,\mathfrak{Q}_\delta}+\delta^{-l+n(p^{-1}-q^{-1})}\|v\|_{L_q(\mathfrak{Q}_{\delta/2})}\right). \tag{8}$$

Можно считать, что $2c'C\delta^{-l+n(p^{-1}-q^{-1})}<1$, так как противоположное неравенство и есть требуемое неравенство (3). Тогда в силу (8) $\|v\|_{L_q(\mathfrak{Q}_{\delta/2})}\leq 2c'C|v|_{p,l,\mathfrak{Q}_\delta}$, и (2) следует из второй части теоремы 10.1.2, примененной к кубу $\mathfrak{Q}_\delta$. ■

В каждом из случаев $pl<n$, $p>1$ или $l=n$, $p=1$ теорема 1 может быть сформулирована в терминах внутреннего диаметра $D(G)$.

Теорема 2. *Пусть G — произвольное открытое подмножество куба Q_d, $G\neq Q_d$ и числа n, p, l удовлетворяют одному из условий $pl>n$, $p>1$ или $l=n$, $p=1$. Пусть еще C — точная константа в неравенстве* (10.1.2/1), *где* $q\in[p, \infty)$. *Тогда*

$$C \sim D(G)^{l-n(p^{-1}-q^{-1})}. \tag{9}$$

§ 10.3. ОЦЕНКИ ТОЧНОЙ КОНСТАНТЫ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Будем обозначать через $\mathfrak{C}$ линейное подмножество пространства $W_p^l(Q_d)$.

Наша цель — изучение неравенства

$$\| u \|_{L_q(Q_d)} \leqslant C \sum\nolimits_{j=k+1}^{l} d^{j-l} \| \nabla_j u \|_{L_p(Q_d)}, \tag{1}$$

где $u \in \mathfrak{C}$ и q — то же число, что и в теореме 10.1.2. Норму в правой части (1) можно заменить эквивалентной, оставив слагаемые, соответствующие $j=l$ и $j=k+1$.

10.3.1. Необходимое и достаточное условие справедливости основного неравенства. Пусть $\bar{\mathfrak{C}}$ — замыкание $\mathfrak{C}$ в метрике пространства $V_p^l(Q_d)$ и $\mathbb{P}_k$ — множество полиномов Π степени, не превышающей k, $k \leqslant l-1$, нормированных равенством

$$d^{-n} \int_{Q_d} |\Pi|^p \, dx = 1. \tag{1}$$

Теорема. *Неравенство* (10.3/1) *справедливо в том и только в том случае, если* $\mathbb{P}_k \cap \bar{\mathfrak{C}} = \varnothing$.

Доказательство. Необходимость условия $\mathbb{P}_k \cap \bar{\mathfrak{C}} = \varnothing$ очевидна. Докажем достаточность.

Если $\mathbb{P}_k \cap \bar{\mathfrak{C}} = \varnothing$, то в $\bar{\mathfrak{C}}$ можно ввести норму $|u|_{\mathfrak{S}} = \sum\nolimits_{j=k+1}^{l} d^{j-l} \| \nabla_j u \|_{L_p(Q_d)}$, превратив это множество в банахово пространство. Пусть I — тождественное отображение $\bar{\mathfrak{S}}$ в $L_p(Q_d)$. Так как $\bar{\mathfrak{S}} \subset V_p^l(Q_d) \subset L_q(Q_d)$, то оператор I определен на $\bar{\mathfrak{S}}$. Покажем, что он замкнут. Пусть $|u_m|_{\mathfrak{S}} \to 0$ и $\| u_m - u \|_{L_q(Q_d)} \to 0$ при $m \to \infty$. Тогда существует последовательность полиномов $\{\Pi_m\}_{m \geqslant 1}$ степени не выше k, такая, что $u_m - \Pi_m \to 0$ в $L_q(Q_d)$. Следовательно, $u = \lim \Pi_m$ в пространстве $V_p^l(Q_d)$, и так как $\mathbb{P}_k \cap \bar{\mathfrak{S}} = \varnothing$, то $u=0$. Замкнутость оператора I доказана. Теперь из теоремы Банаха следует, что этот оператор непрерывен, т. е. что справедливо неравенство (10.3/1). ∎

В качестве примера рассмотрим класс $\mathfrak{C}^r(E)$ ($r=0, \ldots, l-1$, E — борелевское подмножество $\bar{Q}_d$ (p, l)-уточненных функций $u \in V_p^l(Q_d)$, $p > 1$, таких, что $\nabla_j u = 0$ (p, $l-j$)-квазивсюду на E, $j=0, \ldots, r$.

Так как из любой последовательности (p, l)-уточненных функций, сходящейся в $V_p^l(Q_d)$, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся (p, l)-квазивсюду (см. п. 7.2.4), то $\mathfrak{C}^r(E)$ — замкнутое подмножество $V_p^l(Q_d)$.

Значит согласно теореме 1 неравенство (10.3/1) верно для всех $u \in \mathfrak{C}^r(E)$ в том и только в том случае, если в $\mathbb{P}_k$ нет многочлена, удовлетворяющего условию $\nabla_j \Pi = 0$ $(p,\ l-j)$-квазивсюду на E, $j=0, \ldots, r$

10.3.2. Емкости классов функций. Пусть Π — многочлен из $\mathbb{P}_k$ и пусть $\operatorname{cap}(\mathfrak{C}, \Pi, \mathring{L}_p^l(Q_{2d})) = \inf \int_{Q_{2d}} |\nabla_l u|^p dx$, где инфимум берется по всем функциям $u \in \mathring{L}_p^l(Q_{2d})$, таким, что сужение $u - \Pi$ на $\bar{Q}_d$ принадлежит линейному подмножеству $\mathfrak{C}$ пространства $V_p^l(Q_d)$.

Свяжем с $\mathfrak{C}$ следующие l емкостей:

$$\mathrm{CAP}_k(\mathfrak{S}, \mathring{L}_p^l(Q_{2d})) = \inf_{\{\Pi:\ \Pi \in \mathbb{P}_k\}} \operatorname{cap}(\mathfrak{S}, \Pi, \mathring{L}_p^l(Q_{2d})).$$

Иначе говоря, $\mathrm{CAP}_k(\mathfrak{C}, \mathring{L}_p^l(Q_{2d})) = \inf\limits_{\{\Pi,\ u\}} \int_{Q_{2d}} |\nabla_l u|^p dx,$ (1)

где инфимум берется по всем парам: $\{\Pi, u\}$, $\Pi \in \mathbb{P}_k$, $u|_{\bar{Q}_d} \in \mathfrak{S}$, $\Pi - u \in \mathring{L}_p^l(Q_{2d})$.

Очевидно, что $\mathrm{CAP}_k(\mathfrak{C}, \mathring{L}_p^l(Q_{2d}))$ не увеличивается с ростом k. Справедливо неравенство

$$\mathrm{CAP}_k(\mathfrak{C}, \mathring{L}_p^l(Q_{2d})) \leq c d^{n-pl}. \tag{2}$$

Действительно, пусть $\eta \in \mathfrak{M}(\bar{Q}_1, Q_2)$ и $\eta_d(x) = \eta(x/d)$. Так как $1 \in \mathbb{P}_k$ и сужение функции $1 - \eta_d$ на Q_d равно нулю, то пара $\{1, \eta_d\}$ является допустимой для вариационной задачи (1). Отсюда и следует (2).

Введем норму $|\!|\!| u |\!|\!|_{V_p^l(Q_d)} = \sum_{j=0}^{l} d^{j-l} \| \nabla_j u \|_{L_p(Q_d)}$.

Следующее утверждение аналогично лемме 10.1.2/1.

Лемма. *Емкость* $\mathrm{CAP}_k(\mathfrak{C}, \mathring{L}_p^l(Q_d))$ *эквивалентна следующей емкости класса* $\mathfrak{C}$:

$$\inf |\!|\!| \Pi - u |\!|\!|^p_{V_p^l(Q_d)}, \tag{3}$$

где инфимум берется по всем парам $\{\Pi, u\}$, $\Pi \in \mathbb{P}_k$, $\Pi - u \in V_p^l(Q_d)$, $u \in \mathfrak{C}$.

Доказательство. Имеем

$$\mathrm{CAP}_k(\mathfrak{C}, \mathring{L}_p^l(Q_{2d})) \leq \int_{Q_{2d}} |\nabla_l(\eta_d(\Pi - Au))|^p dx,$$

где A — оператор продолжения из леммы 10.1.2/2. Правая часть очевидно не превосходит $c |\!|\!| \Pi - Au |\!|\!|^p_{V_p^l(Q_d)}$. В силу (10.1.2/6) $A\Pi = \Pi$, поэтому, еще раз используя (10.1.2/6), получаем

$$\mathrm{CAP}_k(\mathfrak{C}; \mathring{L}_p^l(Q_{2d})) \leq c |\!|\!| \Pi - u |\!|\!|^p_{V_p^l(Q_d)}.$$

Минимизируя правую часть, получаем требуемую верхнюю оценку для CAP_k.

Докажем нижнюю оценку. Так как функцию $(\Pi - u)|_{Q_d}$ можно продолжить до функции из $\mathring{L}^l_p(Q_{2d})$, то классы допустимых функций в определениях обеих рассматриваемых емкостей одновременно пусты или не пусты. Пусть $\Pi \in \mathbb{P}_k$, $v \in \mathring{L}^l_p(Q_{2d})$, $(\Pi - v)_{\bar{Q}_d} \in \mathfrak{C}$. Тогда емкость (3) не превосходит $|||v|||_{V^l_p(Q_d)} \leqslant c\|\nabla_l v\|_{L_p(Q_{2d})}$. ■

10.3.3. Оценки точной константы в основном неравенстве. Из теоремы 10.3.1 следует, что неравенство (10.3/1) справедливо в том и только в том случае, если $\mathrm{CAP}_k(\mathfrak{C};\ \mathring{L}^l_p(Q_{2d})) > 0$. Следующая теорема дает двусторонние оценки точной константы C в (10.3.1), формулируемые в терминах емкости $\mathrm{CAP}_k(\mathfrak{C};\ \mathring{L}^l_p(Q_{2d}))$.

Теорема. 1) *Если* $\mathrm{CAP}_k(\mathfrak{C};\ \mathring{L}^l_p(Q_{2d})) > 0$, *то для всех функций* $u \in \mathfrak{C}$ *выполнено неравенство* (10.3/1), *в котором*

$$C \leqslant c d^{n/q} \left[\mathrm{CAP}_k(\mathfrak{C};\ \mathring{L}^l_p(Q_{2d}))\right]^{-1/p}. \tag{1}$$

2) *Если для всех функций* $u \in \mathfrak{C}$ *выполнено неравенство* (10.3/1) *и если* $\mathrm{CAP}_k(\mathfrak{C};\ \mathring{L}^l_p(Q_{2d})) \leqslant c_0 d^{n-pl}$, *где* c_0 — *достаточно малая постоянная, зависящая лишь от* n, p, l, k, *то*

$$C \geqslant c d^{n/q} \left[\mathrm{CAP}_k(\mathfrak{C};\ \mathring{L}^l_p(Q_{2d}))\right]^{-1/p}. \tag{2}$$

Доказательство. 1) Пусть u — функция из $\mathfrak{C}$, нормированная равенством

$$\|u;\ L_p(Q_d)\| = d^{n/p}, \tag{3}$$

и Π — любой многочлен из $\mathbb{P}_k$. Согласно лемме 10.3.2

$$\left[\mathrm{CAP}_k(\mathfrak{C};\ \mathring{L}^l_p(Q_{2d}))\right]^{1/p} \leqslant c\sum_{i=0}^{k} d^{i-l}\|\nabla_i(\Pi - u)\|_{L_p(Q_d)} + \\ + c\sum_{i=k+1}^{l} d^{i-l}\|\nabla_i u\|_{L_p(Q_d)}. \tag{4}$$

Отсюда и из неравенства $\|\nabla_i v\|_{L_p(Q_d)} \leqslant c d^{l-i}\|\nabla_l v\|_{L_p(Q_d)} + c d^{-i}\|v\|_{L_p(Q_d)}$ получаем, что первая сумма в (4) не превосходит $c d^{-l}\|\Pi - u\|_{L_p(Q_d)} + c\|\nabla_l u\|_{L_p(Q_d)}$. Значит,

$$\left[\mathrm{CAP}_k(\mathfrak{C};\ \mathring{L}^l_p(Q_{2d}))\right]^{1/p} \leqslant c d^{-l}\|\Pi - u\|_{L_p(Q_d)} + \\ + c\sum_{i=k+1}^{l} d^{i-l}\|\nabla_i u\|_{L_p(Q_d)}. \tag{5}$$

Для каждой функции $u \in V^l_p(Q_d)$ найдется такой полином π степени, меньшей $k+1$, что

$$\|\pi - u\|_{L_p(Q_d)} \leqslant c' d^{k+1}\|\nabla_{k+1} u\|_{L_p(Q_d)}. \tag{6}$$

Допустим сначала, что $\|\nabla_{k+1}u\|_{L_p(Q_d)} > (2c')^{-1} d^{n/p-k-1}$. Тогда в силу (10.3.2/2)

$$[\mathrm{CAP}_k(\mathfrak{C};\ \mathring{L}_p^l(Q_{2d}))]^{1/p} \leqslant cd^{k-l+1} \|\nabla_{k+1}u\|_{L_p(Q_d)}. \tag{7}$$

Пусть теперь $\|\nabla_{k+1}u\|_{L_p(Q_d)} \leqslant (2c')^{-1} d^{n/p-k-1}$. Из (6) выводим оценку $\|\pi - u\|_{L_p(Q_d)} \leqslant 2^{-1}d^{n/p} = 2^{-1}\|u\|_{L_p(Q_d)}$ и, следовательно,

$$2^{-1}d^{n/p} \leqslant \|\pi\|_{L_p(Q_d)} \leqslant 3\cdot 2^{-1}d^{n/p}. \tag{8}$$

Положим $\Pi = d^{n/p}\|\pi\|^{-1}_{L_p(Q_d)}\pi$. Тогда из (8) получим

$$\|\Pi - u\|_{L_p(Q_d)} \leqslant 2\|\pi - d^{-n/p}\|\pi\|_{L_p(Q_d)} u\|_{L_p(Q_d)}.$$

Правая часть очевидно не превосходит

$$2\|\pi - u\|_{L_p(Q_d)} + 2\|u\|_{L_p(Q_d)} |d^{-n/p}\|\pi\|_{L_p(Q_d)} - 1| =$$
$$= 2\|\pi - u\|_{L_p(Q_d)} + 2\,|\,\|\pi\|_{L_p(Q_d)} - \|u\|_{L_p(Q_d)}| \leqslant 4\|\pi - u\|_{L_p(Q_d)}.$$

Используя оценку (6), получаем $\|\Pi - u\|_{L_p(Q_d)} \leqslant 4c'd^{k+1}\|\nabla_{k+1}u\|_{L_p(Q_d)}$, что вместе с (5) и (7) дает оценку

$$[\mathrm{CAP}_k(\mathfrak{C};\ \mathring{L}_p^l(Q_{2d}))]^{1/p} \leqslant c\sum\nolimits_{i=k+1}^{l} d^{i-l}\|\nabla_i u\|_{L_p(Q_d)}, \tag{9}$$

справедливую для всех функций $u \in \mathfrak{C}$, нормированных равенством (3).

Из теоремы вложения Соболева и оценки (10.3.2/2) следует

$$\|u\|_{L_q(Q_d)} \leqslant cd^{k+1+n(q^{-1}-p^{-1})}\|\nabla_{k+1}u\|_{L_p(Q_d)} +$$
$$+ cd^{n(q^{-1}-p^{-1})}\|u\|_{L_p(Q_d)} \leqslant cd^{k-l+nq^{-1}+1}[\mathrm{CAP}_k(\mathfrak{C}\ \ \mathring{L}_p^l(Q_{2d}))]^{-1/p}\times$$
$$\times\|\nabla_{k+1}u\|_{L_p(Q_d)} + cd^{n(q^{-1}-p^{-1})}\|u\|_{L_p(Q_d)},$$

что вместе с (9) дает (10.3/1) с постоянной C, удовлетворяющей неравенству (10.3.3/1).

2) Пусть ε — любое положительное число и пусть $\Pi \in \mathbb{P}_k$, $\psi \in \mathring{L}_p^l(Q_{2d})$, $\Pi - \psi|_{Q_d} \in \mathfrak{C}$, причем

$$\int_{Q_{2d}} |\nabla_l\psi|^p\,dx \leqslant \mathrm{CAP}_k(\mathfrak{C};\ \mathring{L}_p^l(Q_{2d})) + \varepsilon d^{n-lp}.$$

Так как сужение $\psi - \Pi$ на $\bar{Q}_d$ принадлежит классу $\mathfrak{C}$, то по условию теоремы

$$\|\psi - \Pi\|_{L_q(Q_d)} \leqslant C\sum\nolimits_{j=k+1}^{l} d^{j-l}\|\nabla_j\psi\|_{L_p(Q_d)}. \tag{10}$$

Поскольку $\psi \in \mathring{L}_p^l(Q_{2d})$, правая часть этого неравенства не превосходит

$$cC\,\|\nabla_l\psi\|_{L_p(Q_d)} \leqslant cC\bigl(\mathrm{CAP}_k(\mathfrak{C};\ \mathring{L}_p^l(Q_{2d}))+\varepsilon d^{n-lp}\bigr)^{1/p}.$$

Аналогично $\|\psi\|_{L_q(Q_d)} \leqslant cd^{l+n(q^{-1}-p^{-1})}\|\nabla_l\psi\|_{L_p(Q_{2d})} \leqslant c\,(c_0+\varepsilon)^{1/p}d^{n/q}$.

Значит, $\quad \|\psi-\Pi\|_{L_q(Q_d)} \geqslant \|\Pi\|_{L_q(Q_d)} - c\,(c_0+\varepsilon)^{1/p}d^{n/q}$

и в силу (10)

$$\|\psi\|_{L_q(Q_d)} \leqslant c\,(c_0+\varepsilon)^{1/p}d^{n/q}+cC\bigl(\mathrm{CAP}_k(\mathfrak{C};\ \mathring{L}_p^l(Q_{2d}))+\varepsilon d^{n-lp}\bigr)^{1/p}. \tag{11}$$

Заметим теперь, что $\|\Pi\|_{L_p(Q_d)} \leqslant cd^{n(p^{-1}-q^{-1})}\|\Pi\|_{L_q(Q_d)}$. Эта оценка следует из неравенства Гельдера, если $p \leqslant q$. В случае $p > q$ ее можно получить, например, следующим образом:

$$\|\Pi\|_{L_p(Q_d)} \leqslant c\,(d^{k+1}\|\nabla_{k+1}\Pi\|_{L_p(Q_d)}+d^{n(p^{-1}-q^{-1})}\|\Pi\|_{L_q(Q_d)}) =$$
$$= cd^{n(p^{-1}-q^{-1})}\|\Pi\|_{L_q(Q_d)}.$$

Так как $\Pi \in P_k$, то $\|\Pi\|_{L_p(Q_d)} = d^{n/p}$. Поэтому $\|\Pi\|_{L_q(Q_d)} \geqslant cd^{n/q}$. Используя малость постоянной c_0, получаем (10.3.3/2). ■

10.3.4. Класс $\mathfrak{C}_0(e)$ и емкость $\mathrm{Cap}_k\bigl(e,\ \mathring{L}_p^l(Q_{2d})\bigr)$. Оставшуюся часть параграфа посвятим рассмотрению класса

$$\mathfrak{C}_0(e) = \{u \in C^\infty(\bar{Q}_d):\ \mathrm{dist}\,(\mathrm{supp}\,u,\ e) > 0\}, \tag{1}$$

где e — компактное подмножество куба $\bar{Q}_d$.

Введем еще функцию множества e:

$$\mathrm{Cap}_k\bigl(e,\ \mathring{L}_p^l(Q_{2d})\bigr) = \inf_{\Pi \in \mathrm{P}_k}\ \inf_{\{f\}} \int_{Q_{2d}} |\nabla_l f|^p\,dx, \tag{2}$$

где $p \geqslant 1$ и $\{f\}$ — совокупность функций из $\mathring{L}_p^l(Q_{2d})$, каждая из которых совпадает с многочленом $\Pi \in \mathrm{P}_k$ в некоторой окрестности компакта e. Так как $\mathrm{P}_0 = \{\pm 1\}$, то $\mathrm{Cap}_0\bigl(e,\ \mathring{L}_p^l(Q_{2d})\bigr) = \mathrm{Cap}\,\bigl(e,\ \mathring{L}_p^l(Q_{2d})\bigr)$.

Покажем, что емкости $\mathrm{Cap}_k\bigl(e,\ \mathring{L}_p^l(Q_{2d})\bigr)$ и $\mathrm{CAP}_k\bigl(\mathfrak{C}_0(e),\ \mathring{L}_p^l(Q_{2d})\bigr)$ эквивалентны.

Лемма. *Справедливы неравенства*

$$\mathrm{CAP}_k\bigl(\mathfrak{C}_0(e),\ \mathring{L}_p^l(Q_{2d})\bigr) \leqslant \mathrm{Cap}_k\bigl(e,\ \mathring{L}_p^l(Q_{2d})\bigr) \leqslant c\,\mathrm{CAP}_k\bigl(\mathfrak{C}_0(e),\ \mathring{L}_p^l(Q_{2d})\bigr).$$

Доказательство. Левое неравенство — очевидное следствие определений обеих емкостей.

Докажем правое неравенство. Пусть $\Pi \in \mathrm{P}_k$, $u \in \mathfrak{C}_0(e)$, A — оператор продолжения из леммы 10.1.2/2 и η_d — функция, использованная при выводе неравенства (10.3.2/2). Из свойства (ii) оператора A следует, что функция $\eta_d(\Pi - Au)$ принадлежит классу $\{f\}$, введенному в определении емкости $\mathrm{Cap}_k(e, \mathring{L}_p^l(Q_{2d}))$. Поэтому

$$\mathrm{Cap}_k(e, \mathring{L}_p^l(Q_{2d})) \leqslant \|\eta_d(\Pi - Au)\|^p_{\mathring{L}_p^l(Q_{2d})} \leqslant c\|\Pi - Au\|^p_{V_p^l(Q_{2d})}.$$

Принимая во внимание равенство $A\Pi = \Pi$ и оценку (10.1.2/6) для функции $v = \Pi - u$, заканчиваем доказательство ссылкой на лемму 10.3.2.

Из теоремы 10.3.1, примененной к классу $\mathfrak{C}_0(e)$, и леммы получаем следующее утверждение, совпадающее при $k=0$ с теоремой 10.1.2.

Следствие. 1) *Если* $\mathrm{Cap}_k(e, \mathring{L}_p^l(Q_{2d})) > 0$, *то для всех функций* $u \in \mathfrak{C}_0(e)$ *выполнено неравенство* (10.3/1), *в котором*

$$C \leqslant cd^{n/q}[\mathrm{Cap}_k(e, \mathring{L}_p^l(Q_{2d}))]^{-1/p}.$$

2) *Если для всех функций* $u \in \mathfrak{C}_0(e)$ *выполнено неравенство* (10.3/1) *и если* $\mathrm{Cap}_k(e, \mathring{L}_p^l(Q_{2d})) \leqslant c_0 d^{n-pl}$, *где* c_0 — *достаточно малая постоянная, зависящая только от* n, p, l, *то*

$$C \geqslant cd^{n/q}[\mathrm{Cap}_k(e, \mathring{L}_p^l(Q_{2d}))]^{-1/p}.$$

10.3.5. Нижняя оценка для Cap_k. Выведем нижнюю оценку для $\mathrm{Cap}_k(e, \mathring{L}_p^l(Q_{2d}))$ через емкость $\mathrm{Cap}(e, \mathring{L}_p^{l-k}(Q_{2d}))$.

Предложение. *Справедливо неравенство*

$$\mathrm{Cap}_k(e, \mathring{L}_p^l(Q_{2d})) \geqslant cd^{-kp}\,\mathrm{Cap}(e, \mathring{L}_p^{l-k}(Q_{2d})). \qquad (1)$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $d=1$. Из неравенства

$$\|\nabla_l v\|_{L_p(Q_2)} \geqslant c\|\nabla_{l-k} v\|_{L_p(Q_2)}, \qquad v \in \mathring{L}_p^l(Q_2),$$

следует, что

$$\mathrm{Cap}(e, \mathring{L}_p^l(Q_2)) \geqslant c\,\mathrm{Cap}(e, \mathring{L}_p^{l-k}(Q_2)). \qquad (2)$$

Пусть $\Pi \in \mathbb{P}_k$ и f — функция из $\mathring{L}_p^l(Q_{2d})$, такая, что, $f = \Pi$ в окрестности множества e. Очевидно, что для всех $i = 1, \ldots, n$ разность $\partial\Pi/\partial x_i - \partial f/\partial x_i$ принадлежит классу $\mathfrak{S}_0(e)$. Пусть для некоторого i

$$\|\partial\Pi/\partial x_i\|_{L_k(Q_2)} \geqslant \varepsilon, \qquad (3)$$

где ε — положительное число (зависящее только от k, l, n), значение которого указано в дальнейшем. Тогда

$$\|\nabla_l f\|^p_{L_p(Q_2)} \geqslant \left\|\nabla_{l-1}\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\|^p_{L_p(Q_2)} \geqslant \varepsilon^p\,\mathrm{Cap}_{k-1}(e, \mathring{L}_p^{l-1}(Q_2)). \qquad (4)$$

Если для всех $i=1, \ldots,$ неравенство (3) не выполнено, то с помощью условия нормировки $\|\Pi\|_{L_p(Q_1)}=1$ получим оценку

$$||\Pi(x)|-1|\leqslant c\varepsilon, \qquad x\in Q_2.$$

В качестве ε можно взять число $1/(2c)$. Так как $\Pi=f$ на e, то $|f(x)|\geqslant 1/2$, $x\in e$ и, значит,

$$\|\nabla_l f\|^p_{L_p(Q_2)}\geqslant 2^{-p}\,\mathrm{Cap}(e, \mathring{L}^l_p(Q_2)).$$

Отсюда и из (4) следует неравенство

$$\mathrm{Cap}_k(e, \mathring{L}^l_p(Q_2))\geqslant c\min\{\mathrm{Cap}_{k-1}(e; \mathring{L}^{l-1}_p(Q_2)), \mathrm{Cap}(e, \mathring{L}^l_p(Q_2))\}.$$

Применяя (2), заканчиваем доказательство.

Приведем пример множества e, для которого

$$\mathrm{Cap}_1(e, \mathring{L}^2_2(Q_2))=0 \quad \text{и} \quad \mathrm{Cap}(e, \mathring{L}^2_2(Q_2))>0.$$

Пример. Пусть $n=3$, $p=2$, $l=2$ и e — центр куба $Q_1=\{x: |x_i|<1/2\}$. Так как в силу теоремы вложения Соболева для всех $u\in\mathscr{D}(Q_2)$

$$|u(e)|^2\leqslant c\int_{Q_2}|\nabla_2 u|^2\,dx,$$

то $\mathrm{Cap}(e, \mathring{L}^2_2(Q_2))\geqslant c^{-1}>0$.

Покажем, что $\mathrm{Cap}_1(e, \mathring{L}^2_2(Q_2))=0$. Пусть $\Pi=2\sqrt{3}\,x$. Очевидно, что $\Pi\in\mathbb{P}_k$. Обозначим через η_ε функцию из $\mathfrak{M}(\bar{Q}_\varepsilon, Q_{2\varepsilon})$, такую, что $|\nabla_j\eta_\varepsilon|\leqslant c\varepsilon^{-j}$. Функция $\Pi\eta_\varepsilon$ совпадает с Π в окрестности точки e и, значит,

$$\mathrm{Cap}_1(e, \mathring{L}^2_2(Q_2))\leqslant\int_{Q_2}|\nabla_2\Pi\eta_\varepsilon)|^2\,dx.$$

Но, как легко видеть, последний интеграл есть $O(\varepsilon)$. Итак, $\mathrm{Cap}_1(e, \mathring{L}^2_2(Q_2))=0$.

Замечание. В связи с только что приведенным примером рассмотрим квадратичные формы

$$S_1(u, u)=\int_{Q_1}\Big[\sum_{i,j=1}^3(\partial^2u/\partial x_i\partial x_j)^2+\sum_{i,j=1}^3(\partial u/\partial x_i)^2\Big]dx,$$

$$S_2(u, u)=\int_{Q_1}\sum_{i,j=1}^3(\partial^2u/\partial x_i\partial x_j)^2\,dx,$$

определенные на функциях $u\in C^\infty(\bar{Q}_1)$, равных нулю вблизи центра куба Q_1. Эти формы порождают операторы $\Delta^2-\Delta$ и Δ^2 со свободными граничными условиями на ∂Q_1 и дополнительным условием $u=0$ в точке e. Из следствия 10.3.4 и сказанного в примере следует, что первый из этих операторов — положительно определенный, а второй — нет.

Вообще говоря, в случае $p=2$ основные результаты этого параграфа немедленно переформулируются как необходимые и достаточные условия положительной определенности и как двусторонние оценки первого собственного числа эллиптического оператора, порожденного квадратичной формой $S(u, u)$. Эта форма задается на линейном подмножестве $\mathfrak{C}$ пространства $V_2^l(Q_1)$ и удовлетворяет условию «коэрцитивности»:

$$c_1 \sum_{j=k+1}^{l} \|\nabla_j u\|^2_{L_2(Q_1)} \leqslant S(u, u) \leqslant c_2 \sum_{j=k+1}^{l} \|\nabla_j u\|^2_{L_2(Q_1)}$$

для всех $u \in \mathfrak{C}$.

10.3.6. Оценки точной константы при малом (p, l)-внутреннем диаметре. Здесь показано, что при условии малости (p, l)-внутреннего диаметра множества $\bar{Q}_d \setminus e$ точная константа (10.3/1) (при $q \geqslant p \geqslant 1$ и $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_0(e)$) эквивалентна некоторой степени этого диаметра.

Лемма. *Пусть G — открытое подмножество куба Q_d, такое, что*

$$D_{p,l}(G, Q_d) \leqslant c_0 d, \tag{1}$$

где c_0 — достаточно малая постоянная, зависящая только от n, p, l. Тогда для всех функций $u \in C^\infty(\bar{Q}_d)$, обращающихся в нуль в окрестности множества $\bar{Q}_d \setminus G$, справедливо неравенство

$$\|\nabla_j u\|_{L_p(Q_d)} \leqslant c\,[D_{p,l}(G, Q_d)]^{l-j} \|\nabla_l u\|_{L_p(Q_d)}, \tag{2}$$

где $j = 0, 1, \ldots, l-1$.

Доказательство. Достаточно предположить, что $d = 1$ и $l > 1$. Положим $D = D_{p,l}(G; Q_1)$. Так как $\delta < 1$, то $\overline{Q_1 \setminus G} \in \mathscr{N}(Q_1)$ и согласно теоремам 10.2.3/1 и 10.2.3/2

$$\|u\|_{L_p(Q_1)} \leqslant cD^l \sum_{j=1}^{l} \|\nabla_j u\|_{L_p(Q_1)}.$$

Отсюда и из неравенства

$$\|\nabla_j u\|_{L_p(Q_1)} \leqslant c(\|\nabla_l u\|_{L_p(Q_1)} + \|u\|_{L_p(Q_1)})$$

следует, что

$$\|u\|_{L_p(Q_1)} \leqslant cD^l(\|\nabla_l u\|_{L_p(Q_1)} + \|u\|_{L_p(Q_1)}).$$

Итак, неравенство (2) при $j = 0$ доказано.

Для оценки $\|\nabla_j u\|_{L_p(Q_1)}$ при $j \geqslant 1$ можно воспользоваться неравенством

$$\|\nabla_j u\|_{L_p(Q_1)} \leqslant c(\|\nabla_l u\|_{L_p(Q_1)} + \|u\|_{L_p(Q_1)})^{j/l} \|u\|^{(l-j)/l}_{L_p(Q_1)}. \quad \blacksquare$$

Теорема. *Пусть q — то же число, что и в теореме 10.1.2, и пусть выполнено условие (1). Тогда для всех функций $u \in C^\infty(\bar{Q}_d)$, обращающихся в нуль в окрестности множества $\bar{Q}_d \setminus G$, справедливо неравенство*

$$\|u\|_{L_q(Q_d)} \leqslant C \sum_{j=k+1}^{l} d^{j-l} \|\nabla_j u\|_{L_p(Q_d)}, \tag{3}$$

где $k=0, 1, \ldots, l-1$. *Точная константа* C *в* (3) *удовлетворяет неравенствам*

$$c_1[D_{p,l}(G, Q_d)]^{l-n(p^{-1}-q^{-1})} \leqslant C \leqslant c_2[D_{p,l}(G, Q_d)]^{l-n(p^{-1}-q^{-1})}. \quad (4)$$

(*В случае* $n<pl$, $p>1$ *или* $n=l$, $p=1$ *в* (3) *и* (4) *величину* $D_{p,l}(G, Q_d)$ *можно заменить внутренним диаметром* $D(G, Q_d)$.)

Доказательство. Правая оценка (4) следует из (10.2.3/1) и леммы, а левая содержится во второй части теоремы 10.2.3/1 и в теореме 10.2.3/2.

Замечание. Малость (p, l)-внутреннего диаметра существенна для справедливости теоремы. В самом деле, пусть G — куб $Q_1 \subset R^3$ с исключенным центром. Тогда $d=1$, $D(G)=1/2$, но согласно замечанию 10.3.5 неравенство

$$\|u\|_{L_2(Q_1)} \leqslant C\|\nabla_2 u\|_{L_2(Q_1)} \quad (5)$$

неверно. (Это легко увидеть и непосредственно, если положить в (5) $u(x)=x_1\zeta(x/\varepsilon)$, где $\varepsilon>0$, $\zeta=0$ на $B_1(0)$, $\zeta=1$ вне $B_2(0)$.)

10.3.7. Приложение к граничной теореме единственности для аналитических функций класса $L_p^1(U)$. Из неравенства (10.1.2/1) можно вывести некоторую оценку для интеграла от логарифма модуля функции из L_p^1, которая характеризует малость множества нулей функции, достаточную для конечности упомянутого интеграла [91].

Пусть E — борелевское множество в $R^{n-1}=\{x=(x', x_n)\in R^n: x_n=0\}$ и $\{B\}$ — совокупность n-мерных открытых шаров с центрами в R^{n-1}. Через $2B$ обозначим концентрический шар вдвое большего радиуса. Пусть $s(B) = \mathrm{mes}_{n-1}(R^{n-1}\cap B)$, $c(E\cap B) = \mathrm{cap}(E\cap B, \mathring{W}_p^1(2B))$, $S=\sum_{\{B\}} s(B)$ и $\chi(x)$ — число различных шаров B, содержащих точку x.

Лемма. *Пусть* φ — $(p, 1)$-*уточненная функция класса* $L_p^1(\bigcup B)$, *равная нулю на* $E\cap G$. *Тогда*

$$(1/S)\int_{\bigcup(B\cup R^{n-1})} \log|\varphi(x')|\chi(x')\,dx' \leqslant$$
$$\leqslant (1/pS)\sum_{\{B\}} s(B)\log(s(B)/c(E\cap B)) +$$
$$+(1/p)\log\left[(c/S)\int_{\bigcup B}|\nabla\varphi|^p\chi\,dx\right], \quad (1)$$

где $c=c(n, p)$.

Доказательство. Если $(\mathscr{X}, \Sigma, \mu)$ — пространство с конечной мерой μ, а f — неотрицательная функция, заданная на $\mathscr{X}$ и измеримая относительно σ-кольца Σ, то при любом $p>0$

$$\exp\left((1/\mu(\mathscr{X}))\int_{\mathscr{X}}\log f\,d\mu\right) \leqslant \left((1/\mu(\mathscr{X}))\int_{\mathscr{X}} f^p\,d\mu\right)^{1/p}. \quad (2)$$

Поэтому

$$(1/S(B))\int_{B\cap R^{n-1}}\log|\varphi|\,dx' \leqslant (1/p)\log\left((1/s(B))\int_{B\cap R^{n-1}}|\varphi|^p\,dx'\right),$$

каков бы ни был шар B. Заметим теперь, что при $p \geqslant 1$

$$\frac{1}{s(B)} \int_{B \cap R^{n-1}} |\varphi|^p dx' \leqslant$$
$$\leqslant c\left(\frac{1}{\mathrm{mes}_n(B)} \int_B |\varphi|^p dx + \frac{1}{\mathrm{cap}\,(\bar{B},\ \mathring{W}^1_p(2B))} \int_B |\nabla\varphi|^p dx\right)$$

и воспользуемся неравенством (10.1.2/1) и замечанием 10.1.3/3. Имеем

$$(1/\mathrm{mes}_n(B)) \int_B |\varphi|^p dx \leqslant (c/c(E \cap B)) \int_B |\nabla\varphi|^p dx.$$

Тогда $\quad (1/s(B)) \int_{B \cap R^{n-1}} |\varphi|^p dx' \leqslant (c/c(E \cap B)) \int_B |\nabla\varphi|^p dx$

и, следовательно,

$$\int_{\bigcup (B \cap R^{n-1})} \log|\varphi|\chi\, dx' = \sum_{\{B\}} \int_{B \cap R^{n-1}} \log|\varphi|\, dx' \leqslant$$
$$\leqslant (1/p) \sum_{\{B\}} [S(B) \log(S(B)/c(E \cap B))] +$$
$$+ (1/p) \sum_{\{B\}} \left[S(B) \log\left((c/s(B)) \int_B |\nabla\varphi|^p dx\right)\right].$$

Применяя к последней сумме неравенство (2), получаем нужную оценку.

При помощи неравенства (1) может быть доказана теорема единственности для аналитических функций класса L^1_p в круге (см. статью автора и В. П. Хавина [91], где этот вопрос рассмотрен подробно и где указана библиография *).

Пусть $\mathfrak{A}$ — множество всех функций, аналитических в единичном круге U, и пусть $\mathcal{X} \subset \mathfrak{A}$. Говорят, что множество E, содержащееся в промежутке $(0, 2\pi)$, есть множество единственности для $\mathcal{X}$, если всякая функция $f \in \mathcal{X}$, для которой $\lim\limits_{r \to 1-0} f(re^{i\theta}) = 0$ при любом $\theta \in E$, тождественно равна нулю на U.

Пусть E — борелевское подмножество интервала $(0, 2\pi)$ и $\{\delta\}$ — совокупность попарно непересекающихся открытых промежутков $\delta \subset (0, 2\pi)$. Пусть еще $l(\delta)$ — длина δ, B — круг, диаметром которого служит интервал δ, $2B$ — концентрический круг вдвое большего радиуса и $c(E \cap \delta) = \mathrm{cap}\,(E \cap \delta;\ \mathring{W}^1_p(2B))$.

Пусть множество E таково, что

$$\sum l(\delta) \log(l(\delta)/c(E \cap \delta)) = -\infty \tag{3}$$

и аналитическая функция f класса $L^1_p(U)$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{r \to 1-0} f(re^{i\theta}) = 0$ при любом $\theta \in E$. Из (1) следует (см. [91,

* См. также задачу В. П. Хавина и С. В. Хрущева в книге «99 задач комплексного анализа». Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1978, т. 81, с. 242—245.

569—570]) равенство

$$\int_0^{\infty} \log\left(\lim_{r\to 1-0} |f(re^{i\theta})|\right) d\theta = -\infty,$$

которое вместе с известной теоремой единственности для аналитических функций из класса Харди H^1 показывает, что $f(z)=0$ при всех $z\in U$. Итак, E есть множество единственности для $L_p^1(U)$.

Поскольку $c(E\cap\delta)\sim 1$ при $p>2$, то в этом случае в (3) можно опустить $c(E\cap\delta)$. В случае $p<2$ можно под $c(E\cap\delta)$ понимать $\operatorname{cap}(E\cap\delta,\ W_p^1(R^2))$.

§ 10.4. КОММЕНТАРИИ К ГЛАВЕ 10

§ 10.1. Термин «несущественное множество» применительно к множествам малой емкости Винера введен А. М. Молчановым [99], где (в неявной форме) доказана теорема 10.1.2 при $p=2$, $l=1$. Потребовавший нового доказательства случай $l>1$ рассмотрен автором [64] (см. также В. Г. Мазья [66, 75]). Эти результаты были повторены У. Донохью [168], Р. А. Адамсом [143], Дж. Полкингом [236].

Неравенство (10.1.3/3) и его частный случай (10.1.3/1), усиливающие первую часть теоремы 10.1.2, были установлены Л. Хедбергом [195] при $p>1$ и при помощи другого метода, для которого ограничение $p\neq 1$ существенно. В п. 10.1.3 эти результаты получаются как следствия теоремы 10.1.3, доказательство которой (но не формулировка) содержалось уже в работе автора [75]. Отметим, что наше доказательство пригодно и для $p=1$.

Неравенство (10.1.3/3) играет важную роль в упомянутой работе Л. Хедберга, где решена известная проблема «спектрального синтеза в пространствах С. Л. Соболева». Основной результат Хедберга формулируется следующим образом.

Пусть $u\in W_p^l(R^n)$, $p>1$, m — целое положительное число. Пусть еще K — замкнутое подмножество R^n и $D^\alpha u|_K=0$ для всех мультииндексов α, $0\leq|\alpha|\leq l-1$. Тогда $u\in \mathring{W}_p^l(R^n\setminus K)$, т. е. существуют такие функции $u_m\in C_0^\infty(R^n\setminus K)$, что $\lim_{m\to\infty}\|u-u_m\|_{W_p^l(R^n)}=0$.

Очевидным следствием этой теоремы Хедберга является следующая теорема единственности задачи Дирихле.

Пусть $\Omega\subset R^n$ — ограниченное открытое подмножество R^n и u — решение уравнения $\Delta^l u=0$ в Ω из пространства $W_2^m(R^n)$, удовлетворяющее условию Дирихле $D^\alpha u|_{\partial\Omega}=0$, $0\leq|\alpha|\leq l-1$. Тогда $u=0$ в Ω.

§ 10.2. Функция множества, аналогичная $\lambda^l_{2,2}$, введена и использована для описания условий единственности решения первой краевой задачи В. А. Кондратьевым [40, 41]. В этих работах она называется емкостью $C^n_{l,c}$. Связь $\lambda^l_{p,q}$ с (p, l)-внутренним диаметром установлена автором [77].

§ 10.3. Результаты этого параграфа (за исключением предложения 10.3.5 и п. 10.3.6) взяты из статьи автора [75]. Предложение 10.3.5 было опубликовано в книге автора [214]. Оно вместе со следствием 10.3.4 показывает, что для константы C, рассмотренной в следствии 10.3.4, верна оценка

$$C \leqslant c d^{k+n/q}\left[\operatorname{Cap}\left(e, \mathring{L}_p^{l-k}(Q_{2d})\right)\right]^{-1/p},$$

ранее полученная прямым методом в работе Л. Хедберга [195] (ср. с более сильным неравенством (10.1.3/3), о котором шла речь в комментариях к § 10.1).

В связи с материалом этой главы упомянем статью Н. Мейерса [218], в которой изучается неравенство

$$\| u - Lu \|_{W_p^k(\Omega)} \leqslant C \| \nabla_{k+1} u \|_{W_p^{l-k-1}(\Omega)}, \qquad u \in W_p^l(\Omega),$$

где L — некоторый проектор $W_p^l(\Omega) \to \mathcal{P}_k$ и Ω — липшицева область.

Некоторое семейство «полиномиальных (p, l)-емкостей», близких к $\operatorname{cap}\left(\mathfrak{C}_0(e), \Pi, \mathring{L}_p^l(Q_{2d})\right)$, было использовано Т. Бэгби [150] при исследовании проблемы аппроксимации в L_p решениями эллиптических уравнений.

Глава 11

ВЛОЖЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА $\mathring{L}_p^l(\Omega)$ В ДРУГИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 11.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Если $n > pl$ при $p > 1$ и $n \geqslant l$ при $p = 1$, то для всех функций $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ справедливо неравенство Соболева

$$\| u \|_{L_q(\Omega)} \leqslant c \| \nabla_l u \|_{L_p(\Omega)}, \tag{1}$$

где $q = pn/(n - pl)^{-1}$. В силу (1) отображение $\mathcal{D}(\Omega) \ni u \to u \in L_q(\Omega)$ непрерывно. Так как пространство $\mathcal{D}(\Omega)$ плотно в $\mathring{L}_p^l(\Omega)$, это отображение можно единственным образом распространить на $\mathring{L}_p^l(\Omega)$ с сохранением непрерывности. Нетрудно показать, что построенное отображение биоднозначно. Действительно, пусть образом в $L_q(\Omega)$ элемента $u \in \mathring{L}_p^l(\Omega)$ является нуль и пусть последовательность $\{u_m\}_{m\geqslant 1}$ функций из $\mathscr{D}(\Omega)$ сходится к u в $L_p^l(\Omega)$. Тогда для всех мультииндексов α порядка l и всех функций $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Omega \varphi D^\alpha u_m \, dx = \lim_{m\to\infty} (-1)^l \int_\Omega u_m D^\alpha \varphi \, dx = 0,$$

и так как последовательность $D^\alpha u_m$ сходится в $L_p(\Omega)$, то она сходится к нулю.

Из сказанного следует, что каждый элемент пространства $\mathring{L}_p^l(\Omega)$ ($n > pl$ при $p > 1$ или $n \geqslant l$ при $p = 1$) можно отождествить с функцией из $L_q(\Omega)$ и тождественное отображение $\mathring{L}_p^l(\Omega) \ni u \to u \in L_q(\Omega)$ взаимно однозначно, линейно и непрерывно (т. е. является топологическим вложением).

Если $n \leqslant lp$, $p > 1$ или $n < l$, $p = 1$ и если при некотором $q > 0$ справедливо неравенство (1) с константой c, не зависящей от $u \in \mathscr{D}(\Omega)$, то мы придем к тому же выводу. Однако при указанных значениях n, l, p неравенство (1) выполнено не всегда и более того пространство $\mathring{L}_p^l(\Omega)$ не всегда можно топологически вложить в пространство обобщенных функций $\mathscr{D}'(\Omega)$.

Теоремы этой главы содержат условия, необходимые и достаточные для топологического вложения $\mathring{L}_p^l(\Omega)$ в пространства $\mathscr{D}'(\Omega)$, $L_q(\Omega, \text{loc})$ и $L_q(\Omega)$ (§ 11.1 – 11.4). В § 11.5 найдены условия компактности вложения $\mathring{L}_p^l(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$, а в § 11.6 результаты первых параграфов применяются к исследованию первой краевой задачи для эллиптических уравнений порядка $2l$.

§ 11.2. ВЛОЖЕНИЕ $\mathring{L}_p^l(\Omega)$ В $\mathscr{D}'(\Omega)$

Цель этого параграфа — доказательство следующего утверждения.

Теорема. *Пространство* $\mathring{L}_p^l(\Omega)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ *топологически вложено в* $\mathscr{D}'(\Omega)$ *в том и только в том случае, если выполняется одно из условий:*

1) $n > pl$ *при* $p > 1$, $n \geqslant l$ *при* $p = 1$;

2) $C\Omega$ — *не* $(p, n/p)$-*полярное множество, если* $n = pl$, $p > 1$;

3) $C\Omega$ — *непустое множество, если* $n < pl$ *и* n/p — *нецелое*;

4) $C\Omega$ — *не* $(p, n/p)$-*полярное или не лежит в* $(n-1)$-*мерной гиперплоскости, если* $n < pl$, n/p — *целое.*

Принимая во внимание теорему 9.2/2, в приведенной формулировке можно вместо «$(p, n/p)$-полярное множество» читать «множество нулевой внутренней $(p, n/p)$-емкости».

11.2.1. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пространство* $\mathring{L}_p^l(\Omega)$ *топологически вложено в* $\mathscr{D}'(\Omega)$ *в том и только в том случае, если для любой функции* $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$

функционал

$$\mathscr{D}(\Omega) \ni u \to \int_\Omega u\psi\, dx \equiv (u, \psi) \in \mathscr{D}'(\Omega) \tag{1}$$

непрерывен относительно нормы $\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)}$.

Доказательство. 1) Если $\mathring{L}_p^l(\Omega) \subset \mathscr{D}'(\Omega)$, то всякая последовательность $u_m \in \mathscr{D}'(\Omega)$, фундаментальная в норме $\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)}$, сходится в $\mathscr{D}'(\Omega)$, следовательно, функционал (u, ψ) непрерывен.

2) Пусть функционал (u, ψ) непрерывен относительно нормы $\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)}$. Тогда отображение (1) можно по непрерывности распространить на $\mathring{L}_p^l(\Omega)$. Остается показать, что мы получим таким образом биоднозначное отображение. Пусть u_m — фундаментальная последовательность в $\mathring{L}_p^l(\Omega)$, сходящаяся к нулю в $\mathscr{D}'(\Omega)$. Очевидно, что для всех $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ и всех мультииндексов α порядка l

$$\int_\Omega \varphi D^\alpha u_m\, dx = (-1)^l \int_\Omega u_m D^\alpha \varphi\, dx \to 0;$$

и так как последовательность $D^\alpha u_m$ сходится в $L_p(\Omega)$, то она сходится к нулю.

Следствие. *Пространство* $\mathring{L}_p^l(\Omega)$ *вложено в* $\mathscr{D}'(\Omega)$ *в том и только в том случае, если для любой функции* $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$ *и для всех* $u \in \mathscr{D}(\Omega)$ *верна оценка*

$$|(u, \psi)| \leqslant K \|\nabla_l u\|_{L_p(R^n)}. \tag{2}$$

Лемма 2. *Пространство* $\mathring{L}_p^l(\Omega)$ *вложено в* $\mathscr{D}'(\Omega)$ *в том и только в том случае, если для любой функции* $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$ *существует обобщенная функция* $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ *с носителем в* $C\Omega$, *такая, что*

$$|(u, \psi - T)| \leqslant K \|\nabla_l u\|_{L_p(R^n)}, \qquad u \in \mathscr{D}(R^n). \tag{3}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathring{L}_p^l(\Omega) \subset \mathscr{D}'(\Omega)$. Тогда по следствию для всех $u \in \mathscr{D}(\Omega)$ верно неравенство (2). Пространство $\mathscr{D}(\Omega)$ можно отождествить с подпространством $\mathscr{D}(R^n)$, продолжив функции нулем в $C\Omega$. По теореме Хана — Банаха функционал (1) можно продолжить до функционала $u \to (u, s)$ на $\mathscr{D}(R^n)$, непрерывного относительно нормы $\|\nabla_l u\|_{L_p(R^n)}$, т. е. допускающего оценку

$$|(u, s)| \leqslant K \|\nabla_l u\|_{L_p(R^n)}, \tag{4}$$

где K не зависит от u. Так как $s = \psi$ в Ω, то носитель обобщенной функции $T = \psi - s$ расположен в $C\Omega$. Оценки (3) и (4) эквивалентны.

Достаточность. Пусть верна оценка (3) Тогда функционал $\mathscr{D}(R^n) \ni u \to (u, s)$, где $s = \psi - T$ непрерывен относительно нормы $\|\nabla_l u\|_{L_p(R^n)}$ на $\mathscr{D}(R^n)$, а, значит, и на $\mathscr{D}(\Omega)$, где он совпадает с (1). Остается сослаться на следствие.

Лемма 3. *Пусть $n \leqslant pl$ при $p > 1$ и $n < l$ при $p = 1$. Если для любой функции $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$ существует обобщенная функция $T \in W_{p'}^{-l}(R^n)$ с компактным носителем в $C\Omega$, такая, что*

$$(x^\beta, \psi - T) = 0 \tag{5}$$

для всех мультииндексов β порядка $|\beta| \leqslant k = [l - n/p]$, то пространство $\mathring{L}_p^l(\Omega)$ вложено в $\mathscr{D}'(\Omega)$.

Доказательство. Пусть B_ρ — шар $\{x: |x| < \rho\}$, содержащий носители ψ и T. Покажем, что для всех функций $u \in \mathscr{D}(R^n)$ справедлива оценка (3). В самом деле, для любого полинома P степени не выше k

$$|(u, \psi - T)| = |(u - P, \psi - T)| = |((u - P)\eta, \psi - T)|,$$

где η — функция из $\mathscr{D}(B_{2\rho})$, равная единице в B_ρ. Пусть $K = \|\psi - T\|_{W_{p'}^{-l}(R^n)}$. Тогда

$$|(u, \psi - T)| \leqslant K \|(u - P)\eta\|_{W_p^l(R^n)} \leqslant C\left(\|\nabla_l u\|_{L_p(R^n)} + \|u - P\|_{L_p(B_{2\rho})}\right).$$

Применяя неравенство $\inf\limits_{\{P\}} \|u - P\|_{L_p(B_{2\rho})} \leqslant C \|\nabla_{k+1} u\|_{L_p(B_{2\rho})}$, где $\{P\}$ — множество всех полиномов P степени не выше k, а также неравенства $\|\nabla_{k+1} u\|_{L_p(B_{2\rho})} \leqslant \|\nabla_{k+1} u\|_{L_q(B_{2\rho})} \leqslant c\|\nabla_l u\|_{L_p(R^n)}$, где $q = pn[n - p(l - k - 1)]^{-1}$, получим (3). ■

11.2.2. Случай $\Omega = R^n$.

Лемма. *Пусть $n \leqslant lp$ при $p > 1$ или $n < l$ при $p = 1$ и α — мультииндекс порядка $|\alpha| \leqslant l - n/p$. Тогда существует последовательность функций $u_\nu \in \mathscr{D}(R^n)$, такая, что $u_\nu \to x^\alpha$ в $\mathscr{D}'(R^n)$ и $u_\nu \to 0$ в $\mathring{L}_p^l(R^n)$.*

Доказательство. Пусть $|\alpha| < l - n/p$ и η — бесконечно дифференцируемая функция на полуоси $(0, \infty)$, равная единице в окрестности отрезка $[0, 1]$ и нулю в окрестности полуоси $[2, \infty)$. Очевидно, что последовательность $u_\nu(x) = x^\alpha \eta(\nu^{-1}|x|)$ стремится к x^α в $\mathscr{D}'(\Omega)$. Вместе с тем

$$\|\nabla_l u_\nu\|_{L_p(R^n)} \leqslant \text{const}\, \nu^{n/p + |\alpha| - l} \xrightarrow[\nu \to \infty]{} 0.$$

Пусть $|\alpha| = l - n/p$. Положим при $x \in B_{\nu^2} \setminus B_\nu = \{x: \nu^2 > |x| \geqslant \nu\}$ $(\nu > 2)$

$$v_\nu(x) = (1/\log \nu) \log(\nu^2/|x|)$$

и через $\varphi(t)$ обозначим функцию из $C^\infty[0, 1]$, равную нулю вблизи $t = 0$ и единице вблизи $t = 1$. Пусть еще $w_\nu(x) = \varphi[v_\nu(x)]$ при $x \in B_{\nu^2} \setminus B_\nu$, $w_\nu(x) = 1$ в B_ν и $w_\nu(x) = 0$ вне B_{ν^2}. Очевидно, что последовательность $u_\nu(x)=x^\alpha w_\nu(x)$ стремится к x^α в $\mathscr{D}'(R^n)$. Вместе с тем, так как $|\nabla_j w_\nu(x)|\leqslant \text{const}(\log\nu)^{-1}|x|^{-j}$ при $j>0$, то $\|\nabla_l u_\nu\|_{L_p(R^n)}\leqslant \text{const}(\log\nu)^{-1}\left(\int_{B_{\nu^2}\setminus B_\nu}|x|^{(|\alpha|-l)p}dx\right)^{1/p}=\text{const}\times$ $\times(\log\nu)^{1/p-1}\xrightarrow[\nu\to\infty]{}0$.

Теорема. *Пространство $\mathring{L}_p^l(R^n)$ вложено в $\mathscr{D}'(R^n)$ в том и только в том случае, если $n>lp$, $p>1$ или $n\geqslant l$, $p=1$.*

Необходимость непосредственно следует из леммы, а достаточность — из оценки $\|u\|_{L_{pn/(n-lp)}(\Omega)}\leqslant c(n,l,p)\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)}$ и приведенного в § 11.1 доказательства биоднозначности.

Следствие. *Пространство $\mathring{L}_p^l(\Omega)$ вложено в $\mathscr{D}'(\Omega)$ для всех открытых множеств Ω в том и только в том случае, если $n>lp$, $p>1$ или $n\geqslant l$, $p=1$.*

Необходимость доказана в теореме. Продолжая любую функцию $u\in\mathscr{D}(\Omega)$ нулем в $C\Omega$, получаем вложение $\mathscr{D}(\Omega)$ в $\mathscr{D}(R^n)$, а, следовательно, и вложение $\mathscr{D}'(R^n)$ в $\mathscr{D}'(\Omega)$. Поэтому $\mathring{L}_p^l(\Omega)\subset$ $\subset\mathring{L}_p^l(R^n)\subset\mathscr{D}'(R^n)\subset\mathscr{D}'(\Omega)$, где знак $\subset$ означает топологическое вложение.

11.2.3. Случай $n=pl$, $p>1$.

Лемма. *Если замкнутое множество E не (p,l)-полярно, то существует обобщенная функция $T\in W_{p'}^{-l}(R^n)$ с компактным носителем в E, такая, что $(1,T)=1$.*

Доказательство. Так как E не (p,l)-полярно, то существует обобщенная функция $S\in W_{p'}^{-l}(R^n)$, $S\neq 0$, с носителем в E. Пусть функция $T=\varphi S$ такова, что $(\varphi,S)=1$. Очевидно, что обобщенная функция $T=\varphi S$ удовлетворяет требованиям леммы.

Теорема. *Пусть $n=lp$, $p>1$. Для того чтобы $\mathring{L}_p^l(\Omega)$ было вложено в $\mathscr{D}'(\Omega)$, необходимо и достаточно, чтобы $C\Omega$ не было $(p,n/p)$-полярным.*

Доказательство. Необходимость. Из леммы 11.2.2 следует, что какова бы ни была функция $\psi\in\mathscr{D}(\Omega)$, такая, что $(1,\psi)\neq 0$, неравенство не может выполняться для всех $u\in$ $\in\mathscr{D}(R^n)$. Так как $\mathring{L}_p^l(\Omega)\subset\mathscr{D}'(\Omega)$, то существует обобщенная функция $T\in\mathscr{D}'(R^n)$, такая, что $\operatorname{supp}T\subset C\Omega$ и $|(u,\psi-T)|\leqslant$ $\leqslant c\|\nabla_l u\|_{L_p(R^n)}$ для всех $u\in\mathscr{D}(R^n)$ (лемма 11.2.1/2). Очевидно, что $T\neq 0$. Вместе с тем

$$|(u,T)|\leqslant c\|\nabla_l u\|_{L_p(R^n)}+|(u,\psi)|\leqslant c\|u\|_{W_p^l(R^n)},$$

т. е. $T\in W_{p'}^{-l}(R^n)$. Итак, $C\Omega$ — не $(p,n/p)$-полярное множество.

Достаточность. Так как $C\Omega$ — не $(p,n/p)$-полярное множество, то существует обобщенная функция $T_0\in W_{p'}^{-l}(R^n)$ с компактным носителем в $C\Omega$, такая, что $(1,T_0)=1$. Пусть $\psi\in\mathscr{D}(\Omega)$

и $T=(\psi, 1)T_0$. Так как $(1, \psi-T)=0$, то согласно лемме 11.2.1/3 (где $k=0$) пространство $\mathring{L}_p^l(\Omega)$ вложено в $\mathscr{D}'(\Omega)$. ■

11.2.4. Случай $n<pl$, n/p — дробное.

Теорема. *Если $n<pl$, n/p — нецелое, то для вложения $\mathring{L}_p^l(\Omega)$ в $\mathscr{D}'(\Omega)$ необходимо и достаточно, чтобы множество $C\Omega$ было непусто.*

Доказательство. Необходимость. Если $C\Omega=\varnothing$, то по теореме 11.2.2 пространство $\mathring{L}_p^l(\Omega)$ не вложено в $\mathscr{D}'(\Omega)$.

Достаточность. Пусть $C\Omega\neq\varnothing$. Можно считать, что $0\in C\Omega$. Положим

$$T=\sum\nolimits_{|\alpha|\leqslant k}(-1)^{\alpha}(\psi, x^{\alpha}/\alpha!)\,D^{\alpha}\delta(x),$$

где δ — дельта-функция, D — вещественное дифференцирование, $k=[l-n/p]$ и $\psi\in\mathscr{D}(\Omega)$. Так как $k<l-n/p$, то $D^{\alpha}\delta\in W_{p'}^{-l}(R^n)$ при $|\alpha|\leqslant k$ и $T\in W_{p'}^{-l}(R^n)$. Кроме того, очевидно, что $(x^{\beta}, \psi-T)=0$ при $|\beta|\leqslant k$. Остается воспользоваться леммой 11.2.1/3. ■

11.2.5. Случай $n<pl$, n/p — целое, $1<p<\infty$.

Теорема. *Пусть $n<pl$, n/p — целое, $1<p<\infty$. Пространство $\mathring{L}_p^l(\Omega)$ вложено в $\mathscr{D}'(\Omega)$ в том и только в том случае, если $C\Omega$ не $(p, n/p)$-полярное или не содержится в $(n-1)$-мерной гиперплоскости.*

Доказательство. Положим $k=l-n/p$.

Достаточность. а) Допустим, что множество $C\Omega$ не $(p, n/p)$-полярно. Тогда по лемме 11.2.3 существует обобщенная функция $T_0\in W_{p'}^{k-l}(R^n)$ с компактным носителем в $C\Omega$, такая, что $(1, T_0)=1$. Положим $T=\sum_{|\alpha|\leqslant k}a_{\alpha}(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}T_0$. Очевидно, что T — обобщенная функция из $W_{p'}^{-l}(R^n)$ с компактным носителем в $C\Omega$.

Остается показать, что для любой функции $\psi\in\mathscr{D}(\Omega)$ можно выбрать числа a_{α} так, чтобы удовлетворялось условие (11.2.1/5) для всех мультииндексов β порядка $|\beta|\leqslant k$. Иначе говоря, должна быть разрешима система линейных уравнений

$$\sum\nolimits_{|\alpha|\leqslant k}a_{\alpha}(D^{\alpha}T_0, x^{\beta})=(\psi, x^{\beta}), \qquad |\beta|\leqslant k.$$

В силу того что $(D^{\gamma}T_0, 1)=0$ при $|\gamma|>0$, эта система может быть записана в виде

$$\sum\nolimits_{\alpha\leqslant\beta}a_{\alpha}(\beta!/(\beta-\alpha)!)(T_0, x^{\beta-\alpha})=(\psi, x^{\beta}). \tag{1}$$

Матрица системы (1) — треугольная с ненулевыми элементами на главной диагонали (на ней расположены числа $\beta!(T_0, 1)=\beta!$). Значит, система (1) разрешима.

б) Пусть $C\Omega$ не лежит в $(n-1)$-мерной гиперплоскости. Допустим, что точки $0, a_1, \ldots, a_n$ расположены в $C\Omega$ и аффинно-независимы. Пусть еще $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Введем обобщенную функцию

$$T = P_0(-i\nabla)\,\delta(x) + \sum\nolimits_{j=1}^n P_j(-i\nabla)\,\delta(x-a_j),$$

где $P_0, P_1, \ldots, P_n$ — однородные многочлены, степени которых не превосходят $k-1$. Так как $p(l-k+1) > n$, то $T \in W_{p'}^{-l}(R^n)$.

Выберем многочлены $P_0, P_1, \ldots, P_n$ так, чтобы выполнялось условие (11.2.1/5). Пусть $Q(\xi)$ и $R(\xi)$ — суммы членов степени не выше k в разложениях Тейлора преобразований Фурье $\hat{T}(\xi)$ и $\hat{\psi}(\xi)$ соответственно и пусть $r(\xi)$ — однородная часть $R(\xi)$ степени k. Очевидно, что

$$\hat{T}(\xi) = P_0(\xi) + \sum\nolimits_{j=1}^n P_j(\xi)\exp(-i\langle a_j, \xi\rangle),$$

$$Q(\xi) = \sum\nolimits_{j=0}^n P_j(\xi) - i\sum\nolimits_{j=1}^n \langle a_j, \xi\rangle P_j(\xi).$$

Так как формы $\langle a_j, \xi\rangle$ независимы, можно выбрать полиномы $P_1, P_2, \ldots, P_n$ так, чтобы выполнялось равенство

$$-i\sum\nolimits_{j=1}^n \langle a_j, \xi\rangle P_j(\xi) = r(\xi).$$

Многочлен P_0 определим равенством $P_0 = -(P_1 + \ldots + P_n) + R - r$. (Ясно, что степень P_0 меньше k.) Итак, $Q(\xi) = R(\xi)$, что равносильно (11.2.1/5).

Необходимость. Пусть $\mathring{L}^l_p(\Omega)$ вложено в $\mathscr{D}'(\Omega)$ и пусть $C\Omega \subset R^{n-1}$ (положим для определенности $R^{n-1} = \{x : x_1 = 0\}$). Покажем, что $C\Omega$ не $(p, n/p)$-полярно. По лемме 11.2.1/2 для любой функции $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$ существует такая обобщенная функция T с носителем в $C\Omega$, что выполнено неравенство (11.2.1/3). Так как $C\Omega \subset R^{n-1}$, то T допускает представление

$$T = \sum\nolimits_{j=0}^l \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^j \delta(x_1) \otimes S_j(x_2, \ldots, x_n) = \sum\nolimits_{j=0}^l T_j,$$

где $S_j \in \mathscr{D}'(R^{n-1})$, $\operatorname{supp} S_j \subset C\Omega$ (см. [242, т. 1, с. 101]). Покажем, что $T_j \neq 0$ и что $T_j \in W_{p'}^{-l}(R^n)$. Имеем

$$\hat{T}(\xi) = \sum\nolimits_{j=0}^l \xi_1^j \hat{S}_j(\xi_2, \ldots, \xi_n) = \sum\nolimits_{j=0}^l \hat{T}_j(\xi).$$

Пусть $\beta_0, \ldots, \beta_l$ — различные числа из $(0, 1)$. Интерполяционная формула Лагранжа показывает, что существуют постоянные $\gamma_0, \ldots, \gamma_l$, такие, что $a_k = \sum\nolimits_{j=0}^l \gamma_j P(\beta_j)$ для любого полинома $P(t) = a_0 + a_1 + \ldots + a_l t^l$. В частности, если $P(t) = t^k$, то

$$1 = \sum\nolimits_{j=0}^l \gamma_j \beta_j^k. \tag{2}$$

Для полинома $\hat{T}(t\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)=\sum_{j=0}^{l}\xi_1^j\hat{S}_j(\xi_2, \ldots, \xi_n)t^j$ имеем $\xi_1^k\hat{S}_k(\xi_2, \ldots, \xi_n)=\sum_{j=0}^{l}\gamma_j\hat{T}(\beta_j\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Следовательно,

$$T_k=((1/i)(\partial/\partial x_1))^k\delta(x_1)\otimes S_k(x_2, \ldots, x_n)=$$
$$=\sum_{j=0}^{l}(\gamma_j/\beta_j)T(x_1/\beta_j, x_2, \ldots, x_n).$$

Определим функцию

$$\psi_k=\sum_{j=0}^{l}(\gamma_j/\beta_j)\psi(x_1/\beta_j, x_2, \ldots, x_n). \qquad (3)$$

Из неравенства (11.2.1/3) для $\psi-T$ получаем

$$|(u, \psi_k-T_k)|\leqslant K\|\nabla_l u\|_{L_p(R^n)} \qquad (4)$$

при всех $u\in\mathscr{D}(R^n)$. Мы можем считать, что функция $\psi\in\mathscr{D}(R^n)$ удовлетворяет условию $(\psi, x_1^k)=1$. Отсюда в силу (2) и (3) следует, что $(\psi_k, x_1^k)=1$. Допустим, что $T_k=0$. Тогда для всех $u\in\mathscr{D}(R^n)$

$$|(u, \psi_k)|\leqslant K\|\nabla_l u\|_{L_p(R^n)}.$$

Применяя лемму 11.2.2, получаем отсюда, что $(\psi_k, x_1^k)=0$. Итак, $T_k\neq 0$ или, что равносильно, $S_k\neq 0$. Так как $\varphi\in\mathscr{D}(R^n)$, то из (4) следует, что $T_k\in W_{p'}^{-l}(R^n)$.

Покажем теперь, что $\delta(x_1)\otimes S_k\in W_{p'}^{k-l}(R^n)$. Как известно (см., например, [121, § 4, гл. 6]), для любого набора функций $g_j\in W_p^{l-j}(R^n)$ $(j=0, 1, \ldots, l-1)$ существует такая функция $\Phi\in W_p^l(R^n)$, что $\partial^j\Phi/\partial x_j=g_j$ при $x\in R^{n-1}$ и

$$\|\Phi\|_{W_p^l(R^n)}\leqslant K\sum_{j=0}^{l-1}\|g_j\|_{W_p^{l-j}(R^n)}.$$

Пусть $g_j=0$ при $j\neq k$ и $g_k=u$, где u — любая функция из $W_p^{l-k}(R^n)$. Тогда

$$(u, \delta(x_1)\otimes S_k)=\left(\Phi, \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^k\delta(x_1)\otimes S_k\right)=(\Phi, T_k).$$

Так как $T_k\in W_{p'}^{-l}(R^n)$, то, применяя только что сформулированную теорему, получаем

$$|(u, \delta(x_1)\otimes S_k)|\leqslant K\|\Phi\|_{W_p^l(R^n)}\leqslant K\|u\|_{W_p^{l-k}(R^n)}.$$

Итак, $\delta(x_1)\otimes S_k\in W_{p'}^{-n/p}(R^n)$ и множество $C\Omega$ не $(p, n/p)$-полярно. ■

Итак, теорема 11.2 доказана полностью.

§ 11.3. ВЛОЖЕНИЕ $\mathring{L}_p^l(\Omega)$ В $L_q(\Omega, \mathrm{loc})$

Следующее утверждение показывает, что теорема 11.2 содержит также необходимые и достаточные условия вложения $\mathring{L}_p^l(\Omega)$ в $L_q(\Omega, \mathrm{loc})$.

Теорема. *Пусть $n \leqslant pl$ при $p > 1$ или $n < l$ при $p = 1$. Если пространство $\mathring{L}_p^l(\Omega)$ вложено в $\mathscr{D}'(\Omega)$, то оно вложено в $L_q(\Omega, \mathrm{loc})$, где q — любое положительное число при $n = pl$ и в $C(\Omega)$ при $n < pl$.*

Доказательство. Пусть G — область в R^n с компактным замыканием и гладкой границей, $G \cap \Omega \neq \varnothing$. Покажем сначала, что существует набор функций φ_α из $\mathscr{D}(G \cap \Omega)$, $|\alpha| = l - 1$, такой, что матрица $\|(\varphi_\alpha, x^\beta)\|$ невырождена. Пусть φ — любая функция из $\mathscr{D}(G \cap \Omega)$, удовлетворяющая условию $(\varphi, 1) \neq 0$, и пусть $\varphi_\alpha = D^\alpha\varphi$. Очевидно, что если $\alpha > \beta$, то $(\varphi_\alpha, x^\beta) = (-1)^{|\alpha|}(\varphi, D^\alpha x^\beta) = 0$ и матрица $\|(\varphi_\alpha, x^\beta)\|$ — треугольная. Так как на главной диагонали находятся числа $(-1)^{|\alpha|}\alpha!\,(\varphi, 1) \neq 0$, то определитель отличен от нуля и существование функций φ_α доказано.

Поскольку $\mathring{L}_p^l(\Omega) \subset \mathscr{D}'(\Omega)$, то по следствию 11.2.1 справедлива оценка

$$|(\varphi_\alpha, u)| \leqslant K \|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)} \tag{1}$$

с постоянной K, не зависящей от u. В силу теоремы вложения Соболева для всех $u \in \mathscr{D}(\Omega)$

$$\|u\|_{L_q(G)} \leqslant K \|\nabla_l u\|_{L_p(G)} + \sum_{|\alpha| = l-1} |(\varphi_\alpha, u)|,$$

что вместе с (1) дает $\|u\|_{L_q(G)} \leqslant K \|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)}$.

Биоднозначность отображения $\mathring{L}_p^l(\Omega) \ni u \to u \in L_q(\Omega, \mathrm{loc})$ доказывается точно так же, как и в § 11.1. ■

Приведем еще два следствия теоремы 10.1.2, дополняющие теорему этого параграфа.

Следствие 1. *Пусть $n = lp$, $p > 1$ и Q_d — куб, для которого*

$$\mathrm{Cap}(\bar{Q}_d \setminus \Omega, \mathring{L}_p^l(Q_{2d})) > 0.$$

Тогда для всех функций $u \in \mathscr{D}(\Omega)$

$$\|u\|^p_{L_q(Q_d)} \leqslant C \|\nabla_l u\|^p_{L_p(\Omega)}, \tag{2}$$

где $C \leqslant c d^{np/q} [\mathrm{Cap}(\bar{Q}_d \setminus \Omega, \mathring{L}_p^l(Q_{2d}))]^{-1}$.

Доказательство. Согласно теореме 10.1.2

$$\|u\|^p_{L_q(Q_d)} \leqslant c d^{np/q} [\mathrm{Cap}(\bar{Q}_d \setminus \Omega, \mathring{L}_p^l(Q_{2d}))]^{-1} |u|^p_{p, l, Q_d}. \tag{3}$$

Поскольку при $j \geqslant 1$, $q_j = pn[n - p(l-j)]^{-1}$ справедливы неравенства

$$\|\nabla_j u\|_{L_p(Q_{2d})} \leqslant cd^{l-j} \|\nabla_j u\|_{L_{q_j}(\Omega)} \leqslant cd^{l-j} \|\nabla_l u\|_{L_q(\Omega)},$$

то $|u|_{p,l,Q_{2d}} \leqslant c\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)}$, что вместе с (3) дает оценку (2).

Следствие 2. 1) *Если $pl > n$, n/p — целое и* $\mathrm{Cap}(\bar{Q}_d \setminus \Omega, \overset{\circ}{L}{}_p^{n/p}(Q_{2d})) > 0$, *то для всех функций* $u \in \mathscr{D}(\Omega)$

$$\max_{\bar{Q}_d} |u|^p \leqslant C\|\nabla_l u\|^p_{L_p(\Omega)}, \tag{4}$$

где $C \leqslant cd^{lp-n}[\mathrm{Cap}(\bar{Q}_d \setminus \Omega, \overset{\circ}{L}{}_p^{n/p}(Q_{2d}))]^{-1}$.

2) *Если $pl > n$, n/p — нецелое и $\bar{Q}_d \setminus \Omega \neq \varnothing$, то для всех функций $u \in \mathscr{D}(\Omega)$ справедливо неравенство* (4), *где* $C \leqslant cd^{lp-n}$.

Доказательство. 1) Пусть $kp = n$ и $q > n$. Тогда, используя теорему Соболева, получаем

$$\max_{\bar{Q}_d} |u| \leqslant cd^{l-k-1} \max_{\bar{Q}_d} |\nabla_{l-k-1} u| \leqslant cd^{l-k-n/q} \|\nabla_{l-k} u\|_{L_q(Q_d)}. \tag{5}$$

В силу неравенства (2), в котором l и u заменены на k и $\nabla_{l-k} u$, имеем

$$\|\nabla_{l-k} u\|_{L_p(Q_d)} \leqslant cd^{n/p} [\mathrm{Cap}(\bar{Q}_d \setminus \Omega, \overset{\circ}{L}{}_p^k(Q_{2d}))]^{-1/p} \|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)}.$$

Отсюда и из (5) следует (4).

2) Пусть j — такое целое число, что $l - p^{-1}n < j < l - p^{-1}n + 1$. Так как $p(l-j) < n$, то

$$\|\nabla_j u\|_{L_q(\Omega)} \leqslant C\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)},$$

где $q = pn[n - (l-j)p]^{-1}$. Условие $p(l-j+1) > n$ эквивалентно неравенству $q > n$. Следовательно,

$$\max_{\bar{Q}_d} |\nabla_{j-1} u| \leqslant cd^{1-q^{-1}n} \|\nabla_j u\|_{L_q(Q_d)} \leqslant cd^{-p^{-1}+l-j+1} \|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)}.$$

Отсюда и из неравенства $\max_{\bar{Q}_d} |u| \leqslant cd^{j-1} \max_{\bar{Q}_d} |\nabla_{j-1} u|$ получаем (4). ■

§ 11.4. ВЛОЖЕНИЕ $\overset{\circ}{L}{}_p^l(\Omega)$ В $L_q(\Omega)$ (СЛУЧАЙ $p \leqslant q$)

В этом параграфе найдены необходимые и достаточные условия справедливости неравенства (11.1), где u — любая функция из $\mathscr{D}(\Omega)$.

Полученные здесь результаты можно вывести (правда, только для $p > 1$) из более общих теорем, доказанных в § 12.2, где изучается пространство $\mathring{L}_p^l(\Omega, \nu)$. Тем не менее отдельное изложение показалось автору не лишенным смысла из-за важности рассматриваемого частного случая, возможности включить $p=1$ и большей наглядности формулировок.

11.4.1. Условие в терминах (p, l)-внутреннего диаметра. Если в доказательствах теорем 10.2.3/1 и 10.2.3/2 положить $d=\infty$, то получается следующее утверждение.

Теорема. *Пусть число q удовлетворяет одному из условий:*
(i) $q \in [p, np(n-pl)^{-1}]$, *если* $p \geqslant 1$, $n > pl$;
(ii) $q \in [p, \infty)$, *если* $p > 1$, $n = pl$;
(iii) $q \in [p, \infty]$, *если* $pl > n$, $p > 1$ *или* $l = n$, $p = 1$.
Неравенство (11.1) *справедливо в том и только в том случае, если*
(α) $D_{p,l}(\Omega) < \infty$ *при* $n > pl$, $p \geqslant 1$ *или* $n = pl$, $p > 1$;
(β) $D(\Omega) < \infty$ *при* $n < pl$, $p > 1$ *или* $l = n$, $p = 1$.
Точная константа C в (11.1) *удовлетворяет соотношению*

$$C \sim \begin{cases} [D_{p,l}(\Omega)]^{l-n(p^{-1}-q^{-1})} & \text{в случае } (\alpha), \\ [D(\Omega)]^{l-n(p^{-1}-q^{-1})} & \text{в случае } (\beta). \end{cases} \quad (1)$$

11.4.2. Условие в терминах емкости. В силу теоремы Соболева при $q = pn(n-pl)^{-1}$, $n > pl$ и при $q = \infty$, $p = 1$, $l = n$ неравенство (11.1) справедливо, каково бы ни было множество Ω. Поэтому остается рассмотреть только случаи: $q < pn(n-pl)^{-1}$ при $n = pl$ и $q \leqslant \infty$ при $n < pl$, $p \geqslant 1$.

Приведем необходимое и достаточное условие справедливости неравенства (11.1), формулируемое в других терминах и вытекающее из теоремы 10.1.2.

Теорема 1. *Пусть q — то же число, что и в теореме* 11.4.1. *Неравенство* (11.1) *справедливо в том и только в том случае, если при некотором $d > 0$ имеет место неравенство*

$$\inf \operatorname{Cap}(\bar{Q}_d \setminus \Omega; \ \mathring{L}_p^l(Q_{2d})) > 0. \quad (1)$$

Здесь инфимум берется по всем кубам Q_d с длиной ребра d и гранями, параллельными координатным осям.

Доказательство. Достаточность. Построим в R^n кубическую решетку с длиной ребра. Пусть $d^{lp-n} \operatorname{Cap}(\bar{Q}_d \setminus \Omega; \mathring{L}_p^l(Q_{2d})) \geqslant \varkappa > 0$ для любого куба решетки.

Согласно теореме 10.1.2

$$\| u \|^p_{L_p(Q_d)} \leqslant c\varkappa^{-1} \sum_{k=1}^{l} d^{pk} \| \nabla_k u \|^p_{L_p(Q_d)}.$$

Суммируя по всем кубам решетки, получаем неравенство

$$\| u \|^p_{L_p(\Omega)} \leqslant c\varkappa^{-1} \sum_{k=1}^{l} d^{pk} \| \nabla_k u \|^p_{L_p(\Omega)}.$$

Для оценки правой части воспользуемся неравенством

$$\|\nabla_k u\|_{L_p(\Omega)} \leqslant c \|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)}^{k/l} \|u\|_{L_p(\Omega)}^{1-k/l}. \tag{2}$$

Тогда

$$\|u\|_{L_p(\Omega)}^p \leqslant c \sum_{k=1}^l \left(d^{pl}\varkappa^{-l/k} \|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)}^p\right)^{k/l} \|u\|_{L_p(\Omega)}^{p(1-k/l)}. \tag{3}$$

Так как $\mathrm{Cap}\,(\bar{Q}_d \setminus \Omega,\ \mathring{L}_p^l(Q_{2d})) \leqslant cd^{n-pl}$, то $\varkappa \leqslant c$ и, следовательно, правая часть неравенства (3) не превосходит

$$2^{-1}\|u\|_{L_p(\Omega)}^p + cd^{pl}\varkappa^{-l}\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)}^p.$$

Значит,

$$\|u\|_{L_p(\Omega)}^p \leqslant cd^{pl}\varkappa^{-l}\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)}^p. \tag{4}$$

Докажем неравенство (11.4.1/1) в случае $q > p$. В силу теоремы 10.1.2

$$\|u\|_{L_q(Q_d)}^p \leqslant cd^{np/q}\varkappa^{-1} \sum_{j=1}^l d^{pj-n} \int_{Q_d} |\nabla_j u|^p\, dx.$$

Суммируя по всем кубам Q_d и используя неравенство $\left(\sum a_i\right)^\varepsilon \leqslant \sum a_i^\varepsilon$ $(a_i \geqslant 0,\ \varepsilon \geqslant 1)$, получаем

$$\|u\|_{L_q(\Omega)}^p \leqslant c\varkappa^{-1}d^{np/q} \sum_{j=1}^l d^{pj-n} \int_\Omega |\nabla_j u|^p\, dx.$$

Теперь неравенство (2) дает

$$\|u\|_{L_q(\Omega)}^p \leqslant c\varkappa^{-1}d^{np/q} \sum_{j=1}^l d^{pj-n} \|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)}^{pj/l} \|u\|_{L_p(\Omega)}^{p(1-j/l)}.$$

Применяя (4), получаем окончательно

$$\|u\|_{L_q(\Omega)}^p \leqslant c\varkappa^{-l}d^{np/q+pl-n}\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)}^p. \tag{5}$$

Необходимость. Пусть Q_d — произвольный куб с ребром d и u — любая функция из пространства $C^\infty(\bar{Q}_d)$, такая, что $\mathrm{dist}\,(\bar{Q}_d \setminus \Omega,\ \mathrm{supp}\, u) > 0$. Заменим в (11.1) функцию u функцией η, где $\eta \in \mathscr{D}(Q_d)$, $\eta = 1$ на $Q_{d/2}$, $|\nabla_j \eta| \leqslant cd^{-j}$. Тогда

$$\|u\|_{L_p(Q_{d/2})} \leqslant C\|\nabla_l(u\eta)\|_{L_p(Q_d)}.$$

Отсюда

$$\|u\|_{L_q(Q_{d/2})} \leqslant cC \sum_{j=0}^l d^{j-l}\|\nabla_j u\|_{L_p(Q_d)}.$$

Применяя известное неравенство

$$\|u\|_{L_p(Q_d)} \leqslant cd\|\nabla u\|_{L_p(Q_d)} + c\|u\|_{L_p(Q_{d/2})}$$

и неравенство Гельдера, получаем

$$\|u\|_{L_q(Q_{d/2})} \leqslant cC \sum_{j=1}^l d^{j-l}\|\nabla_j u\|_{L_p(Q_d)} + cCd^{-l+n(q-p)/pq}\|u\|_{L_q(Q_{d/2})}.$$

Поэтому если число d столь велико, что $2cCd^{-l+n(q-p)/pq} < 1$, то

$$\|u\|_{L_q(Q_{d/2})} \leqslant cC \sum_{j=1}^{l} d^{j-l} \|\nabla_j u\|_{L_p(Q_d)}.$$

Поскольку

$$\|u\|_{L_q(Q_d)} \leqslant cd^{n(p-q)/pq+1} \|\nabla u\|_{L_p(Q_d)} + c\|u\|_{L_q(Q_{d/2})},$$

то
$$\|u\|_{L_q(Q_d)} \leqslant c\,(C + d^{l+n(p-q)/pq}) \sum_{j=1}^{l} d^{j-l} \|\nabla_j u\|_{L_p(Q_d)}.$$

В силу второй части теоремы 10.1.2 либо $\operatorname{Cap}(\bar{Q}_d \setminus \Omega;\ \mathring{L}_p^l(Q_{2d})) \geqslant \geqslant \gamma d^{n-pl}$, где γ — постоянная, удовлетворяющая неравенству (10.1.1/2), либо

$$\operatorname{Cap}(\bar{Q}_d \setminus \Omega;\ \mathring{L}_p^l(Q_{2d})) \geqslant cd^{np/q}(C + d^{l+n(p-q)/pq})^{-p}. \blacksquare$$

Теорему 1 можно перефразировать следующим образом.

Теорема 2. *Для справедливости неравенства* (11.1) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:*

1) *при некотором* $d > 0$

$$\inf_{\bar{Q}_d} \operatorname{Cap}(\bar{Q}_d \setminus \Omega;\ \mathring{L}_p^l(R^n)) > 0, \quad \text{если } n > pl;$$

2) *при некотором* $d > 0$

$$\inf_{Q_d} \operatorname{Cap}(\bar{Q}_d \setminus \Omega;\ \mathring{L}_p^l(Q_{2d})) > 0, \quad \text{если } n = pl,\ p > 1;$$

3) *область* Ω *не содержит произвольно больших кубов, если:* (i) $n < pl$, $p > 1$, (ii) $n \leqslant l$, $p = 1$, (iii) $n = pl$ *и дополнение* Ω *связно.*

Доказательство. В случае 1) утверждение следует из теоремы 1 и предложения 9.11/3. Случай 2) содержится в теореме 1. Если $n < pl$, условие $\operatorname{Cap}(\bar{Q}_d \setminus \Omega;\ \mathring{L}_p^l(Q_{2d})) \geqslant cd^{n-pl}$ эквивалентно непустоте $\bar{Q}_d \setminus \Omega$, что доказывает 3) при $n \neq pl$, $p > 1$.

Пусть $n = pl$, $p > 1$ и дополнение Ω связно. Если Ω содержит произвольно большие кубы, то очевидно, что неравенство (1) не выполнено. Пусть в Ω нельзя поместить кубы любого размера и пусть число d_0 столь велико, что при $d > d_0$ любой куб Q_d имеет непустое пересечение с дополнением Ω. Тогда в $R^n \setminus \Omega$ существует континуум, содержащий точки из Q_d и $R^n \setminus Q_{2d}$. Остается применить предложение 9.1.2/1.

Приведем пример бесконечной области, для которой выполняются условия теоремы 1.

Пример. В каждом кубе $Q_1^{(i)}$, $i \geqslant 1$, координатной решетки с ребром 1 выделим замкнутое подмножество e_i, лежащее на s-мерной плоскости, $s > n - pl \geqslant 0$. Пусть $\inf m_s e_i \geqslant \text{const} > 0$. Обозначим через Ω дополнение множества $\bigcup\limits_i e_i$. Тогда в силу предложения 9.1.1/4 $\operatorname{Cap}(e_i, \mathring{L}_p^l(Q_2^{(i)})) \geqslant \text{const} > 0$ для любого куба $Q_2^{(i)}$. Значит, для множества Ω неравенство (11.1) выполнено.

§ 11.5. ВЛОЖЕНИЕ $\mathring{L}_p^l(\Omega)$ В $L_q(\Omega)$ (СЛУЧАЙ $p > q \geqslant 1$)

11.5.1. Определения и леммы. Продолжим изучение неравенства (11.1). Здесь получено необходимое и достаточное условие при $q \in [1, p)$. В отличие от случая $q \geqslant p$, рассмотренного ранее, это условие зависит от q. Оно означает, что с «малой погрешностью» множество Ω есть сумма кубов $Q^{(i)}$, кратность пересечения которых конечна, а длины ребер $\{d_i\}_{i \geqslant 1}$ удовлетворяют условию

$$\sum_{i=1}^{\infty} d_i^{n+lpq/(p-q)} < \infty. \qquad (1)$$

«Малость» описывается в терминах введенной в п. 10.3.4 емкости

$$\mathrm{Cap}_{l-1}\left(e;\ \mathring{L}_p^l(Q_{2d})\right) = \inf_{\Pi \in \mathscr{P}_{l-1}} \inf_{\{u\}} \int_{Q_{2d}} |\nabla_l u|^p\, dx.$$

Напомним, что $\mathscr{P}_{l-1}$ — множество полиномов степени, не превышающей $l-1$, нормированных равенством $d^{-n}\int_{Q_d} |\Pi|^p dx = 1$, а $\{u\}$ — множество функций из $\mathring{L}_p^l(Q_{2d})$, каждая из которых совпадает с многочленом $\Pi \in \mathscr{P}_{l-1}$ в окрестности компакта $e \subset \bar{Q}_d$.

Будем использовать следующее утверждение, представляющее собой частный случай ($k = l-1$) следствия 10.3.4.

Лемма 1. 1) *Пусть e — компактное подмножество куба $\bar{Q}_d$, такое, что* $\mathrm{Cap}_{l-1}(e;\ \mathring{L}_p^l(Q_{2d})) > 0$. *Тогда для любой функции $u \in C^\infty(Q_d)$, равной нулю в окрестности множества e, выполнено неравенство*

$$\|u\|_{L_q(Q_d)} \leqslant A \|\nabla_l u\|_{L_p(Q_d)}.$$

Здесь $1 \leqslant q \leqslant pn(n-pl)^{-1}$ *при* $n > pl$; $1 \leqslant q < \infty$ *при* $n = pl$; $1 \leqslant q \leqslant \infty$ *при* $n < pl$ *и*

$$A \leqslant c d^{n/q} \left[\mathrm{Cap}_{l-1}(e;\ \mathring{L}_p^l(Q_{2d}))\right]^{-1/p}.$$

2) *Если для любой функции $u \in C^\infty(\bar{Q}_d)$, равной нулю в окрестности компакта $e \subset \bar{Q}_d$, выполнено неравенство* (11.1) *и если* $\mathrm{Cap}_{l-1}(e,\ \mathring{L}_p^l(Q_{2d})) \leqslant c_0 d^{n-pl}$, *где c_0 — достаточно малая постоянная, то*

$$A \geqslant c d^{n/q} \left[\mathrm{Cap}_{l-1}(e;\ \mathring{L}_p^l(Q_{2d}))\right]^{-1/p}.$$

Определение 1. Пусть γ — некоторая достаточно малая константа, зависящая только от n, p, l. Компактное подмножество куба $\bar{Q}_d$ назовем $(p, l, l-1)$-несущественным, если

$$\mathrm{Cap}_{l-1}\left(e;\ \mathring{L}_p^l(Q_{2d})\right) < \gamma d^{n-pl} \qquad (2)$$

В противном случае множество e называется $(p, l, l-1)$-существенным.

Совокупность $(p, l, l-1)$-несущественных подмножеств куба $\bar{Q}_d$ обозначим через $\mathscr{N}_{l-1}(Q_d)$.

Лемма 2. *Пусть* $1 \leqslant q \leqslant p$ *и для любой функции* $u \in C_0^\infty(\Omega)$ *имеет место неравенство* (11.1). *Тогда существует такая зависящая только от* n, p, q, l *константа* c, *что для любого куба* Q_d *с ребром* d, $d \geqslant cC^{pq/(n(p-q)+lpq)}$, *множество* $\bar{Q}_d \setminus \Omega$ *является* $(p, l, l-1)$*-существенным подмножеством* Q_d.

Доказательство. Рассмотрим функцию $u \in C^\infty(\bar{Q}_d)$, такую, что $\operatorname{dist}(\operatorname{supp} u, \bar{Q}_d \setminus \Omega) > 0$. Пусть $\eta \in C_0^\infty(Q_1)$, $\eta = 1$ на $Q_{1/2}$ и $\eta_d(x) = \eta(x/d)$.

После подстановки функции $u\eta_d$ в неравенство (11.1) имеем

$$\|u\|_{L_p(Q_{d/2})} \leqslant \|u\eta_d\|_{L_q(Q_d)} \leqslant C\|\nabla_l(u\eta_d)\|_{L_p(Q_d)} \leqslant$$
$$\leqslant cC\left(\|\nabla_l u\|_{L_p(Q_d)} + d^{-l}\|u\|_{L_p(Q_d)}\right).$$

Отсюда и из неравенства

$$\|u\|_{L_p(Q_d)} \leqslant cd^l\|\nabla_l u\|_{L_p(Q_d)} + cd^{n(q-p)/pq}\|u\|_{L_q(Q_{d/2})} \tag{3}$$

(см., например, лемму 1.1.11) получаем

$$\|u\|_{L_q(Q_{d/2})} \leqslant c_0C\left(\|\nabla_l u\|_{L_p(Q_d)} + d^{n(q-p)/pq-l}\|u\|_{L_q(Q_{d/2})}\right).$$

Следовательно, при $2c_0Cd^{n(q-p)/pq-l} < 1$

$$\|u\|_{L_q(Q_{d/2})} \leqslant 2c_0C\|\nabla_l u\|_{L_p(Q_d)}.$$

Вместе с тем из (3) и неравенства Гельдера вытекает, что

$$\|u\|_{L_q(Q_d)} \leqslant d^{n(p-q)/pq}\|u\|_{L_p(Q_d)} \leqslant$$
$$\leqslant c\left(d^{n(p-q)/pq+l}\|\nabla_l u\|_{L_p(Q_d)} + \|u\|_{L_q(Q_{d/2})}\right).$$

Поэтому при $2c_0Cd^{n(q-p)/pq-l} < 1$

$$\|u\|_{L_q(Q_d)} \leqslant c_1(d^{n(p-q)/pq+l} + C)\|\nabla_l u\|_{L_p(Q_d)}.$$

Предполагая дополнительно, что $d^{n(p-q)/pq+l} > C$, получаем оценку

$$\|u\|_{L_q(Q_d)} \leqslant 2c_1d^{n(p-q)/pq+l}\|\nabla_l u\|_{L_p(Q_d)}. \tag{4}$$

Если $\bar{Q}_d \setminus \Omega \,\bar{\in}\, \mathscr{N}_{l-1}(Q_d)$, то доказывать нечего. В противном случае согласно п. 2) леммы 1 из неравенства (4) следует оценка

$$cd^{n/q}\left[\operatorname{Cap}_{l-1}(\bar{Q}_d \setminus \Omega, \mathring{L}_p^l(Q_{2d}))\right]^{-1/p} \leqslant 2c_1d^{n(p-q)/pq+l},$$

или, что то же самое,

$$\operatorname{Cap}_{l-1}(\bar{Q}_d \setminus \Omega, \mathring{L}_p^l(Q_{2d})) \geqslant (c/2c_1)^p d^{n-pl}.$$

Но всегда можно считать, что $\gamma \leqslant (c/2c_1)^p$. Следовательно $\bar{Q}_d \setminus \Omega \in \mathscr{N}_{l-1}(Q_d)$. ■

Определение 2. Куб $Q_D = Q_D(x)$ с центром в точке $x \in \Omega$ называется критическим, если

$$D = \sup\{d: \bar{Q}_d \setminus \Omega \in \mathscr{N}_{l-1}(Q_d)\}.$$

Из леммы 2 вытекает следующее утверждение.

Следствие. *Пусть* $1 \leqslant q < p$ *и для любой функции* $u \in C_0^\infty(\Omega)$ *имеет место неравенство* (11.1). *Тогда для любой точки* $x \in \Omega$ *существует критический куб* $Q_D(x)$.

В дальнейшем $Q^{(i)}$ — открытый куб, грани которого параллельны координатным осям, а длина ребра равна d_i, $i = 1, 2, \ldots$ Пусть еще $cQ^{(i)}$ — концентрический подобно расположенный куб с длиной ребра cd_i и μ — положительная константа, зависящая только от n.

Определение 3. Покрытие $\{Q^{(i)}\}_{i \geqslant 1}$ множества Ω принадлежит классу $C_{l,p,q}$, если: 1) $\overline{P^{(i)}} \setminus \Omega \in \mathscr{N}_{l-1}(P^{(i)})$, где $P^{(i)} = \mu Q^{(i)}$; 2) $P^{(i)} \cap P^{(j)} = \varnothing$, если $i \neq j$; 3) кратность покрытия $\{Q^{(i)}\}$ не превосходит постоянной, зависящей только от n; 4) $\overline{Q^{(i)}} \setminus \Omega \in \mathscr{N}_{l-1}(Q^{(i)})$; 5) ряд (1) сходится.

11.5.2. Основной результат.

Теорема. *Пусть* $1 \leqslant q < p$. *Неравенство* (11.1) *выполнено для всех* $u \in \mathring{L}_p^l(\Omega)$ *в том и только в том случае, если существует покрытие множества* Ω *из класса* $C_{l,p,q}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $x \in \Omega$, $Q_d = Q_d(x)$, D — длина ребра критического куба с центром в точке x. Положим

$$g(d) = d^{pl-n} \operatorname{Cap}_{l-1}(\bar{Q}_d \setminus \Omega;\ \mathring{L}_p^l(Q_{2d}))$$

и обозначим через d такое число из промежутка $[D, 2D]$, что $g(d) \geqslant \gamma$, где γ — константа из (11.5.1/2). Пусть еще M — совокупность кубов $\{Q_d\}_{x \in \Omega}$.

Покажем, что для любой последовательности $\{Q^{(i)}\}$ непересекающихся кубов из M ряд (11.5.1/1) сходится. В силу леммы 11.5.1/1, каково бы ни было число $\varepsilon_i > 0$, существует такая функция $v_i \in C^\infty(\overline{Q^{(i)}})$, что $\operatorname{dist}(\operatorname{supp} v_i, \overline{Q^{(i)}} \setminus \Omega) > 0$ и

$$\int_{Q^{(i)}} |\nabla_l v_i|^p\,dx \leqslant \left[cd_i^{-n} \operatorname{Cap}_{l-1}(\overline{Q^{(i)}} \setminus \Omega;\ \mathring{L}_p^l(2Q^{(i)})) + \varepsilon_i\right] \int_{Q^{(i)}} |v_i|^p\,dx.$$

Будем считать, что $\varepsilon_i = \gamma d_i^{-pl}$. Тогда в силу (11.5.1/2)

$$\int_{Q^{(i)}} |\nabla_l v_i|^p\,dx \leqslant c\gamma d_i^{-pl} \int_{Q^{(i)}} |v_i|^p\,dx. \qquad (1$$

Оценивая правую часть с помощью неравенства

$$\| v_i \|_{L_p(Q^{(i)})} \leqslant c d_i^l \| \nabla_l v_i \|_{L_p(Q^{(i)})} + c d_i^{n(p-q)/pq} \| v_i \|_{L_q(^1/_2 Q^{(i)})} \tag{2}$$

(см. лемму 1.1.11) и используя малость постоянной γ, приходим к оценке

$$\int_{Q^{(i)}} | \nabla_l v_i |^p dx \leqslant c d_i^{n(q-p)/q - pl} \| v_i \|^p_{L_q(^1/_2 Q^{(i)})}. \tag{3}$$

Пусть $\zeta_i \in \mathscr{D}(Q^{(i)})$, $\zeta_i = 1$ в $^1/_2 Q^{(i)}$, $|\nabla_k \zeta_i| \leqslant c d_i^{-k}$, $k = 1, 2, \ldots$ Введем функцию $u_i = \zeta_i v_i$. Очевидно, что

$$\| \nabla_l u_i \|_{L_p(Q^{(i)})} \leqslant c \sum_{k=0}^{l} d^{k-l} \| \nabla_k v_i \|_{L_p(Q^{(i)})} \leqslant$$
$$\leqslant c \left(\| \nabla_l v_i \|_{L_p(Q^{(i)})} + d^{-l} \| v_i \|_{L_p(Q^{(i)})} \right).$$

Применяя (2), получаем

$$\| \nabla_l u_i \|_{L_p(Q^{(i)})} \leqslant c \| \nabla_l v_i \|_{L_p(Q^{(i)})} + c d^{n(q-p)/pq - l} \| v_i \|_{L_p(^1/_2 Q^{(i)})}.$$

Отсюда и из (3) следует оценка

$$\| \nabla_l u_i \|_{L_p(Q^{(i)})} \leqslant c d_i^{n(q-p)/pq - l} \| u_i \|_{L_q(Q^{(i)})}. \tag{4}$$

По условию теоремы для любой функции $u \in \mathscr{D}(\Omega)$ верно неравенство (11.1). Нормируем функцию u_i равенством

$$\| u_i \|_{L_q(Q^{(i)})} = d_i^{n/q - pl/(q-p)} \tag{5}$$

и положим в (11.1) $u = \sum_{i=1}^{N} u_i$. Тогда

$$\left(\sum_{i=1}^{N} \| u_i \|^q_{L_q(Q^{(i)})} \right)^{p/q} = \left(\int_\Omega | u |^q dx \right)^{p/q} \leqslant C^p \sum_{i=1}^{N} \int_{Q^{(i)}} | \nabla_l u_i |^p dx.$$

В силу (4)

$$\left(\sum_{i=1}^{N} \| u_i \|^q_{L_q(Q^{(i)})} \right)^{p/q} \leqslant c C^p \sum_{i=1}^{N} d_i^{n(q-p)/q - pl} \| u_i \|^p_{L_q(Q^{(i)})},$$

что вместе с (5) дает $\left(\sum_{i=1}^{N} d_i^{n - pql/(q-p)} \right)^{(p-q)/q} \leqslant c C^p$. Значит, ряд (11.5.1/1) сходится.

Согласно теореме 1.2.1 существует последовательность кубов $\{Q^{(i)}\}_{i \geqslant 1} \subset M$, образующая покрытие Ω конечной кратности, причем $\mu Q^{(i)} \cap \mu Q^{(j)} = \varnothing$, $i \neq j$. Сходимость ряда (11.5.1/1) была только что доказана (рассуждение следует провести для последовательности попарно непересекающихся кубов $\mu Q^{(i)}$). Следовательно, $\{Q^{(i)}\}_{i \geqslant 1}$ — покрытие класса $C_{l,p,q}$.

Достаточность. Пусть $u \in C_0^\infty(\Omega)$ и $\{Q^{(i)}\}_{i \geqslant 1}$ — покрытие множества Ω, принадлежащее классу $C_{l,p,q}$. Очевидно, что

$$\int_\Omega | u |^q dx \leqslant \sum_{i \geqslant 1} \lambda_i^{q/p} \lambda_i^{-q/p} \int_{Q^{(i)}} | u |^q dx,$$

где $\lambda_i = d_i^{-pn/q} \operatorname{Cap}_{l-1}(\bar{Q}^{(i)} \setminus \Omega;\ \overset{\circ}{L}{}_p^l(2Q^{(i)}))$. Применяя неравенство Гельдера, получаем

$$\int_\Omega |u|^q dx \leqslant \Big(\sum_{i \geqslant 1} \lambda_i^{q/(p-q)}\Big)^{(p-q)/q} \cdot \Big[\sum_{i \geqslant 1} \lambda_i \Big(\int_{Q^{(i)}} |u|^q dx\Big)^{p/q}\Big]^{q/p}.$$

В силу леммы 11.5.1/1

$$c\lambda_i \Big(\int_{Q^{(i)}} |u|^q dx\Big)^{p/q} \leqslant \int_{Q^{(i)}} |\nabla_l u|^p dx.$$

Отсюда вытекает оценка

$$\int_\Omega |u|^q dx \leqslant c\Big(\sum_{i \geqslant 1} \lambda_i^{q/(p-q)}\Big)^{(p-q)/p} \Big(\int_\Omega |\nabla_l u|^p dx\Big)^{q/p},$$

и так как $\overline{Q^{(i)}} \setminus \Omega \overline{\in} \mathcal{N}(Q^{(i)})$, то

$$\|u\|_{L_q(\Omega)} \leqslant c\Big(\sum_{i \geqslant 1} d_i^{n+lpq/(p-q)}\Big)^{(p-q)/pq} \|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)}. \ \blacksquare \qquad (6)$$

В доказательстве необходимости попутно установлено следующее необходимое условие справедливости неравенства (11.1).

Предложение. *Пусть* $\{Q^{(i)}\}_{i \geqslant 1}$ — *последовательность непересекающихся кубов, расположенных в* Ω. *Тогда для справедливости неравенства* (11.1) *при* $q<p$ *необходимо, чтобы ряд* (11.5.1/1) *сходился.*

11.5.3. Вложение $\overset{\circ}{L}{}_p^l(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$ для «бесконечной воронки».

Пример. Рассмотрим область

Ω: $\{x=(x', x_n),\ x'=(x_1, \ldots, x_{n-1})\colon x_n>0,\ |x'|<\varphi(x_n)\}$,

где φ — ограниченная убывающая функция.

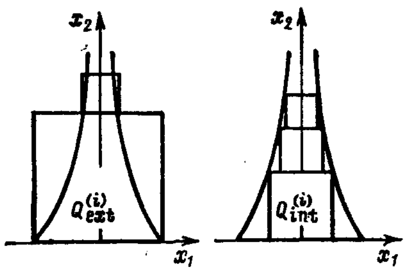

Рис. 25.

Покажем, что для справедливости неравенства (11.1) при $p>q\geqslant 1$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\int_0^\infty [\varphi(t)]^\alpha dt < \infty, \quad \text{где } \alpha = n-1+lpq/(p-q). \qquad (1)$$

Доказательство. Обозначим через $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$ числовые последовательности, определяемые соотношениями

$$a_0=0,\ a_{i+1}-a_i = 2\varphi(a_i), \qquad i \geqslant 1,$$
$$b_0=0,\ b_{i+1}-b_i = (2/\sqrt{n-1})\,\varphi(b_i), \qquad i \geqslant 1.$$

Очевидно, что $a_i, b_i \to 0$ при $i\to\infty$ и что разности $a_{i+1}-a_i$, $b_{i+1}-b_i$ не возрастают.

Построим две последовательности кубов (рис. 25):

$$Q^{(i)}_{\text{ext}} = \{a_i < x_n < a_{i+1},\ 2|x_\nu| < a_{i+1}-a_i,\ \ 1\leqslant \nu \leqslant n-1\},$$
$$Q^{(i)}_{\text{int}} = \{b_i < x_n < b_{i+1},\ 2|x_\nu| < b_{i+1}-b_i,\ \ 1\leqslant \nu \leqslant n-1\}.$$

Кубы $Q_{\text{ext}}^{(i)}$ покрывают область Ω. Все $(n-1)$-мерные грани $Q_{\text{ext}}^{(i)}$, за исключением двух, полностью лежат в $R^n \setminus \Omega$ и

$$\operatorname{Cap}\left(Q_{\text{ext}}^{(i)} \setminus \Omega;\ \mathring{L}_p^1\left(2Q_{\text{ext}}^{(i)}\right)\right) \geqslant c\,(b_{i+1}-b_i)^{n-p}.$$

Отсюда и из предложения 10.3.5 следует, что $Q_{\text{ext}}^{(i)} \setminus \Omega$ — $(p,\ l,\ l-1)$-существенное подмножество куба $Q_{\text{ext}}^{(i)}$.

Допустим, что интеграл (1) сходится, и покажем, что сходится ряд (11.5.1/1). Действительно,

$$\sum_{i=0}^{\infty}(a_{i+1}-a_i)^{\alpha+1} \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}(a_{i+1}-a_i)^{\alpha}(a_i-a_{i-1})+a_1^{\alpha+1} =$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty}[\varphi(a_i)]^{\alpha}(a_i-a_{i-1})+[\varphi(0)]^{\alpha+1}.$$

Так как функция φ не возрастает, то

$$[\varphi(a_i)]^{\alpha}(a_i-a_{i-1}) \leqslant \int_{a_{i-1}}^{a_i}[\varphi(t)]^{\alpha}\,dt.$$

Значит, $\sum_{i=0}^{\infty}(a_{i+1}-a_i)^{\alpha+1} \leqslant [\varphi(0)]^{\alpha+1}+\int_0^{\infty}[\varphi(t)]^{\alpha}\,dt$ и достаточное условие теоремы 11.5.2 выполнено.

Докажем необходимость условия (1). Допустим, что $\int_0^{\infty}[\varphi(t)]^{\alpha}\,dt=\infty$ и что для любой последовательности расположенных в Ω непересекающихся кубов ряд (11.5.1/1) сходится.

В силу монотонности функции φ

$$\sum_{i=1}^{\infty}(b_i-b_{i-1})^{\alpha+1} \geqslant \sum_{i=1}^{\infty}(b_i-b_{i-1})^{\alpha}(b_{i+1}-b_i) =$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty}[\varphi(b_i)]^{\alpha}(b_{i+1}-b_i) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty}\int_{b_i}^{b_{i+1}}[\varphi(t)]^{\alpha}\,dt.$$

Следовательно, для последовательности кубов $Q_{\text{in}}^{(i)}$ ряд (11.5.1/1) расходится. Мы пришли к противоречию. Остается воспользоваться предложением этого пункта.

§ 11.6. КОМПАКТНОСТЬ ВЛОЖЕНИЯ $\mathring{L}_p^l(\Omega)$ В $L_q(\Omega)$

В этом параграфе получены необходимые и достаточные условия компактности оператора вложения $\mathring{L}_p^l(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$, $p,\ q \geqslant 1$.

11.6.1. Случай $p \leqslant q$.

Теорема. *Для относительной компактности множества* $\mathcal{F} = \{u \in \mathcal{D}(\Omega):\ \|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)} \leqslant 1\}$ *в* $L_q(\Omega)$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:*

1) *для любого* $d>0$

$$\lim_{\rho\to\infty}\ \inf_{Q_d \subset R^n \setminus B_\rho} \operatorname{Cap}\left(\bar{Q}_d \setminus \Omega;\ \mathring{L}_p^l(\Omega)\right) > k d^{n-pl}, \qquad (1)$$

если $n>pl$. *Здесь* k — *положительная постоянная, не зависящая от* d;

2) *для любого* $d > 0$

$$\lim_{\rho \to \infty} \inf_{Q_d \subset R^n \setminus B_\rho} \operatorname{Cap}(\bar{Q}_d \setminus \Omega;\ \mathring{L}^l_p(Q_{2d})) > k, \tag{2}$$

если $n = pl$;

3) *множество* Ω *не содержит бесконечной последовательности непересекающихся кубов, если* $pl > n$ *или если* $pl = n$ *и множество* $R^n \setminus \Omega$ *связно.*

Доказательство. Достаточность. Прежде всего отметим, что в силу предложений 9.1.1/3, 9.1.2/1 и следствия 9.1.1 условия теоремы эквивалентны неравенству

$$\lim_{\rho \to \infty} \inf_{Q_d \subset R^n \setminus B_\rho} \operatorname{Cap}(\bar{Q}_d \setminus \Omega;\ \mathring{L}^l_p(Q_{2d})) > kd^{n-pl} \tag{3}$$

(см. доказательство теоремы 11.4.2/1). Отсюда и из первой части теоремы 11.4.2/1 получаем (11.1) для всех $u \in \mathscr{D}(\Omega)$, а значит, и ограниченность множества $\mathscr{F}$ в $W^l_p(\Omega)$.

Поскольку всякое ограниченное подмножество $W^l_p(\Omega)$ компактно в $L_q(\Omega \setminus B_\rho)$, то достаточно доказать неравенство

$$\| u \|_{L_q(\Omega \setminus B_\rho)} \leqslant \varepsilon \| u \|_{W^l_p(\Omega)}, \tag{4}$$

где ε — любое положительное, а ρ — достаточно большое число.

Пусть $\eta \in C^\infty(R^n)$, $\eta = 0$ в $B_{1/2}$, $\eta = 1$ вне B_1 и $\eta_\rho(x) = \eta(x/\rho)$. Обозначим через d зависящее от ε малое число, значение которого будет уточнено в дальнейшем. Согласно условию (3) существует столь большой радиус $\rho(d)$, что при $\rho > \rho(d) > 1$ для всех кубов Q_d, $Q_d \subset R^n \setminus B_{\rho/4}$, выполнено

$$d^{pl-n} \operatorname{Cap}(\bar{Q}_d \setminus \Omega;\ \mathring{L}^l_p(Q_{2d})) > kd^{n-pl}.$$

Поэтому из неравенства (11.1), в котором роль множества Ω играет $\Omega \setminus B_{\rho/2}$, следует

$$\| u\eta_\rho \|_{L_q(\Omega \setminus B_{\rho/2})} \leqslant ck^{-l} d^{lp-n+np/q} \| \nabla_l (u\eta_\rho) \|_{L_p(\Omega \setminus B_{\rho/2})}.$$

Мы могли заранее выбрать число d так, чтобы выполнялось неравенство $ck^{-l} d^{lp-n+np/q} < \varepsilon$. Тогда

$$\| u \|_{L_q(\Omega \setminus B_\rho)} \leqslant c\varepsilon \sum_{j=0}^{l} \rho^{j-l} \| \nabla_j u \|_{L_p(\Omega)} \leqslant c\varepsilon \| u \|_{W^l_p(\Omega)},$$

что доказывает первую часть теоремы.

Необходимость. Пусть ε — любое положительное число. Предположим, что множество $\mathscr{F}$ относительно компактно в $L_q(\Omega)$. Тогда существует столь большое число $\rho = \rho(\varepsilon)$, что для всех $u \in \mathscr{D}(\Omega \setminus \bar{B}_\rho)$

$$\| u \|_{L_q(\Omega)} \leqslant \varepsilon \| \nabla_l u \|_{L_p(\Omega)}.$$

Обозначим через Q_d любой куб с ребром d, расположенный вне шара B_ρ. В доказательстве второй части теоремы 11.4.2/1 показано, что либо

$$\operatorname{Cap}(\bar{Q}_d \setminus \Omega;\ \mathring{L}_p^l(Q_{2d})) \geqslant \gamma d^{n-pl},$$

где γ — постоянная, удовлетворяющая неравенству (10.1.1/2), либо

$$\operatorname{Cap}(\bar{Q}_d \setminus \Omega;\ \mathring{L}_p^l(Q_{2d})) \geqslant c d^{np/q}(\varepsilon + d^{l+n(p-q)/pq})^{-p}. \ \blacksquare$$

11.6.2. Случай $p>q$. Следующее утверждение показывает, что при $p>q\geqslant 1$ оператор вложения $\mathring{L}_p^l(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$ вполне непрерывен и непрерывен одновременно.

Теорема. *Для относительной компактности множества* $\mathcal{F} = \{u \in \mathscr{D}(\Omega)\colon \|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)} \leqslant 1\}$ *в* $L_q(\Omega)$ $(1 \leqslant q < p)$ *необходимо и достаточно, чтобы для* Ω *существовало покрытие класса* $C_{l,p,q}$.

Доказательство. Необходимость непосредственно следует из теоремы 11.5.2. Докажем достаточность. Пусть $\{Q^{(i)}\}_{i\geqslant 1}$ — покрытие Ω класса $C_{l,p,q}$, d_i — длина ребра куба $Q^{(i)}$, ε — положительное число и N — столь большой номер, что

$$\sum\nolimits_{i\geqslant N+1} d_i^{n+lpq/(p-q)} < \varepsilon^{pq/(p-q)}. \qquad (1)$$

Обозначим через ρ радиус такого шара $B_\rho = \{x\colon |x|<\rho\}$, что $B_{\rho/4}$ содержит кубы $Q^{(1)}, \ldots, Q^{(N)}$. Из неравенства (11.5.2/6) для множества $\Omega \setminus \bar{B}_{\rho/2}$ получаем

$$\|u\eta_\rho\|_{L_q(\Omega \setminus \dot{B}_{\rho/2})} \leqslant$$
$$\leqslant c\left(\sum\nolimits_{i\geqslant N+1} d_i^{n+lpq/(p-q)}\right)^{(p-q)/pq} \|\nabla_l(u\eta_\rho)\|_{L_p(\Omega \setminus B_{\rho/2})},$$

где η_ρ — та же функция, что и в доказательстве теоремы 11.6.1. Отсюда и из (1) немедленно получается оценка

$$\|u\|_{L_q(\Omega \setminus B_\rho)} \leqslant \varepsilon \|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)} + c(\rho)\|u\|_{W_p^{l-1}(\Omega \cap (B_\rho \setminus B_{\rho/2}))}.$$

Теперь утверждение теоремы следует из компактности вложения $\mathring{L}_p^l(\Omega) \cap L_q(\Omega)$ в $W_p^{l-1}(\Omega \cap (B_\rho \setminus B_{\rho/2}))$.

§ 11.7. ПРИЛОЖЕНИЯ К ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ СИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

Пусть l — целое положительное число и i, j — мультииндексы порядка не выше l. Рассмотрим измеримые ограниченные в Ω функции a_{ij}, такие, что $a_{ij} = \overline{a_{ij}}$ для любой пары (i, j). Пусть для всех комплексных чисел ζ_i, $|i| = l$, и для почти всех $x \in \Omega$

$$\sum\nolimits_{|i|=|j|=l} a_{ij}(x)\zeta_i\bar{\zeta}_j \geqslant \gamma \sum\nolimits_{|j|=l} |\zeta_j|^2, \qquad \gamma = \mathrm{const} > 0. \qquad (1)$$

На пространстве $L_2^l(\Omega)$ определим квадратичную форму

$$\mathfrak{R}(T, T) = \int_\Omega \sum_{|i|=|j|=l} a_{ij} D^i T \overline{D^j T}\, dx.$$

Очевидно, что полунормы $[\mathfrak{R}(T, T)]^{1/2}$ и $\|\nabla_l T\|_{L_2(\Omega)}$ эквивалентны.

Далее показано, как результаты предыдущих параграфов этой главы применяются при исследовании задачи Дирихле для оператора

$$Au = (-1)^l \sum_{|i|=|j|=l} D^j (a_{ij} D^i u).$$

11.7.1. Задача Дирихле с неоднородным граничным условием.

Лемма. *Пусть $\mathring{L}_2^l(\Omega)$ есть подпространство $\mathcal{D}'(\Omega)$. Тогда любая функция $T \in L_2^l(\Omega)$ представляется в виде*

$$T = u + h, \tag{1}$$

где $u \in \mathring{L}_2^l(\Omega)$, $h \in L_2^l(\Omega)$ и $Ah = 0$ (в смысле теории обобщенных функций).

Доказательство. Введем в $\mathring{L}_2^l(\Omega)$ норму $[\mathfrak{R}(u, u)]^{1/2}$. Пусть $T = u_i + h_i$ $(i = 1, 2)$ — два разложения типа (1). Поскольку $A(h_1 - h_2) = 0$ и $(u_1 - u_2) \in \mathring{L}_2^l(\Omega)$, то $\mathfrak{R}(u_1 - u_2, h_1 - h_2) = 0$. Следовательно, $\mathfrak{R}(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0$ и $u_1 = u_2$. Единственность представления (1) доказана.

Пространство $L_2^l(\Omega)$ становится гильбертовым, если в нем ввести любое из скалярных произведений

$$\mathfrak{R}_N(T, G) = \mathfrak{R}(T, G) + N^{-1}(T, G)_{L_2(\omega)}, \qquad N = 1, 2, \ldots,$$

где ω — непустое ограниченное открытое множество, $\bar{\omega} \subset \Omega$. Обозначим через u_N проекцию функции $T \in L_2^l(\Omega)$ на $\mathring{L}_2^l(\Omega)$ (по условию $\mathring{L}_2^l(\Omega)$ — подпространство $L_2^l(\Omega)$) в пространстве $L_2^l(\Omega)$ с нормой $[\mathfrak{R}_N(G, G)]^{1/2}$. Тогда

$$\mathfrak{R}_N(T - u_N, \varphi) = 0. \tag{2}$$

Как было отмечено в § 11.3, из вложения $\mathring{L}_2^l(\Omega)$ в $\mathcal{D}'(\Omega)$ следует вложение $\mathring{L}_2^l(\Omega)$ в $L_2(\Omega, \mathrm{loc})$, а, значит, и оценка

$$\|u_N\|^2_{L_2(\omega)} \leqslant C\mathfrak{R}(u_N, u_N),$$

где C — постоянная, не зависящая от u_N. Отсюда и из очевидного неравенства $\mathfrak{R}(u_N, u_N) \leqslant \mathfrak{R}_N(T, T)$ следует, что последовательность u_N можно считать сходящейся слабо в $\mathring{L}_2^l(\Omega)$ и в $L_2(\Omega)$ к некоторой функции u из $\mathring{L}_2^l(\Omega)$. Переходя к пределу в (2), получаем, что для функции $h = T - u$ справедливо равенство $\mathfrak{R}(h, \varphi) = 0$, где φ — любая функция из $\mathring{L}_2^l(\Omega)$. ■

Представление (1) позволяет найти решение уравнения $Ah = 0$ «принимающее вместе со своими производными порядка не выше

$l-1$ те же граничные значения, что и T», т. е. решает задачу Дирихле для уравнения $Ah=0$. Поэтому содержащиеся в теореме 11.2 условия вложения $\mathring{L}_2^l(\Omega)$ в $\mathscr{D}'(\Omega)$ дают формулируемые в терминах $(2, l)$-емкости критерии разрешимости задачи Дирихле для уравнения $Ah=0$. Именно справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Для того чтобы любая функция $T\in L_2^l(\Omega)$ была представима в виде* (1), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий:* 1) $n>2l$; 2) $C\Omega\neq\varnothing$ *при нечетном* n, $n<2l$; 3) $C\Omega$ *— множество положительной* $(2, n/2)$*-емкости при* $n=2l$; 4) $C\Omega$ *не содержится в* $(n-1)$*-мерной гиперплоскости или является множеством положительной* $(2, n/2)$*-емкости при четном* n, $n<2l$.

11.7.2. Задача Дирихле с однородным граничным условием. Результаты § 11.4, 11.5 дают условия однозначной разрешимости в $\mathring{L}_2^l(\Omega)$ первой краевой задачи для уравнения $Au=f$ с правой частью из $L_r(\Omega)$.

Постановка задачи. Пусть f — известная функция из $L_{q'}(\Omega)$ $(q'=q(q-1)^{-1}, \infty\geqslant q>1)$. Требуется найти обобщенную функцию $T\in\mathring{L}_2^l(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению $AT=f$.

Следующий факт хорошо известен.

Лемма. *Для разрешимости задачи Дирихле при всех $f\in L_{q'}(\Omega)$ необходимо и достаточно, чтобы для любой функции $u\in\mathscr{D}(\Omega)$ выполнялось неравенство*

$$\|u\|_{L_q(\Omega)}\leqslant C\|\nabla_l u\|_{L_2(\Omega)}. \tag{1}$$

Доказательство. Достаточность. Поскольку для всех $u\in\mathscr{D}(\Omega)$

$$|(f, u)|\leqslant\|f\|_{L_{q'}(\Omega)}\|u\|_{L_q(\Omega)}\leqslant C\|f\|_{L_{q'}(\Omega)}\|\nabla_l u\|_{L_2(\Omega)},$$

то функционал (f, u), заданный на линеале $\mathscr{D}(\Omega)$, плотном в $L_2^l(\Omega)$, ограничен в $\mathring{L}_2^l(\Omega)$. Следовательно, по теореме М. Рисса существует такой элемент $T\in\mathring{L}_2^l(\Omega)$, что для любой функции $u\in\mathscr{D}(\Omega)$ справедливо равенство $(f, u)=\Re(T, u)$, эквивалентное уравнению $AT=f$.

Необходимость. Каждая функция $u\in\mathscr{D}(\Omega)$, расположенная на единичной сфере пространства $\mathring{L}_2^l(\Omega)$, порождает функционал (v, f) определенный на $L_{q'}(\Omega)$. Так как любой функции $f\in L_{q'}(\Omega)$ соответствует решение Tf задачи Дирихле, то $|(v, f)|\leqslant$ $\leqslant\|\nabla_l Tf\|_{L_2(\Omega)}$. Следовательно, функционалы (v, f) ограничены на каждой функции $f\in L_{q'}(\Omega)$. Тогда нормы (v, f) ограничены в совокупности, что эквивалентно неравенству (1). ■

При $q\geqslant 2n(n-2l)^{-1}$, $n>2l$ (а также при $q=\infty$, $n=2l$) неравенство (1) не может быть верным для всех u с одной и той же константой. Вместе с тем, если $q=2n(n-2l)^{-1}$, $n>2l$, неравенство (1) справедливо, какова бы ни была область Ω. Оставшиеся случаи были рассмотрены в § 11.4, 11.5. Для $q\geq 2$ теорема 11.4.2/1 вместе с леммой приводит к следующему результату.

Теорема 1. *Первая краевая задача разрешима в* $\mathring{L}_2^l(\Omega)$ *при всех* $f\in L_{q'}(\Omega)$ $(2\geq q'>2n/(n+2l),\ n\geq 2l$ *или* $2\geq q'\geq 1,\ n<2l)$ *в том и только в том случае, если выполнено одно из условий:*

1) *существует такое* $d>0$, *что* $\inf\limits_{Q_d}\operatorname{Cap}(\bar{Q}_d\setminus\Omega;\ \mathring{L}_2^l)>0$ *в случае* $n>2l$;

2) *существует такое* $d>0$, *что* $\inf\limits_{Q_d}\operatorname{Cap}(\bar{Q}_d\setminus\Omega;\ \mathring{L}_2^l(Q_{2d}))>0$ *в случае* $n=2l$;

3) *область* Ω *не содержит произвольно больших кубов, если* $n<2l$ *или если* $n=2l$ *и дополнение к* Ω *связно.*

При $q<2$ из теоремы 11.5.2 и леммы получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Первая краевая задача для уравнения* $AT=f$ *разрешима в* $\mathring{L}_2^l(\Omega)$ *при всех* $f\in L_{q'}(\Omega)$, $1<q<2$, *в том и только в том случае, если существует покрытие множества* Ω *из класса* $C_{l,2,q}$, *имеющее конечную кратность.*

11.7.3. Дискретность спектра задачи Дирихле. Квадратичная форма $\mathfrak{R}(u, u)$ порождает в $L_2(\Omega)$ самосопряженный оператор A. По известной теореме Реллиха, необходимым и достаточным условием дискретности спектра этого оператора является компактность вложения $\mathring{L}_2^l(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$. Поэтому из теоремы 11.6.1 получаем следующий формулируемый в терминах $(2, l)$-емкости критерий дискретности спектра.

Теорема. *Для дискретности спектра оператора* A *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1) *для любого* $d>0$

$$\lim_{\rho\to\infty}\ \inf_{Q_d\subset R^n\setminus B_\rho}\ \operatorname{Cap}(\bar{Q}_d\setminus\Omega;\ L_2^l)>kd^{n-2l},\quad \text{если}\quad n>2l.$$

(Здесь и далее k *— положительная константа, не зависящая от* d.*)*

2) *для любого* $d>0$

$$\lim_{\rho\to\infty}\ \inf_{Q_d\subset R^n\setminus B_\rho}\ \operatorname{Cap}(\bar{Q}_d\setminus\Omega;\ \mathring{L}_2^l(Q_{2d}))>k,\quad \text{если}\quad n=2l;$$

3) *область* Ω *не содержит бесконечной последовательности непересекающихся одинаковых кубов, если* $n<2l$ *или если* $n=2l$ *и дополнение к* Ω *связно.*

11.7.4. Задача Дирихле для несамосопряженного оператора. Рассмотрим квадратичную форму

$$\mathfrak{B}(u, u) = \int_\Omega \sum_{|i|, |j| \leqslant l} a_{ij}(x) D^i u \overline{D^j u}\, dx$$

(i, j — n-мерные мультииндексы).

Задачу Дирихле с однородным граничным условием для оператора

$$Bu = \sum_{|i|, |j| \leqslant l} (-1)^{|j|} D^j (a_{ij}(x) D^i u)$$

поставим следующим образом. Пусть f — непрерывный функционал на $\mathring{W}_2^l(\Omega)$, требуется найти элемент из пространства $W_2^l(\Omega)$, для которого

$$\mathfrak{B}(u, \varphi) = (\varphi, f), \tag{1}$$

какова бы ни была функция $\varphi \in \mathring{W}_2^l(\Omega)$.

Следующее утверждение представляет собой конкретизацию известной теоремы из теории гильбертова пространства (см., например, [58, 9.1, гл. 2]).

Лемма. *Если для всех* $\varphi \in \mathring{W}_2^l(\Omega)$

$$\|\varphi\|^2_{W_2^l} \leqslant C |\mathfrak{B}(\varphi, \varphi)|,$$

то задача Дирихле (1) *однозначно разрешима.*

Обозначим через Γ такую положительную постоянную, что

$$\operatorname{Re} \sum_{\substack{|i|, |j| \leqslant l, \\ |i|+|j| < 2l}} a_{ij}(x) \zeta_i \bar{\zeta}_j \geqslant -\Gamma \Big(\sum_{|i| \leqslant l} |\zeta_i|^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{|i| < l} |\zeta_i|^2\Big)^{1/2}$$

для всех комплексных чисел ζ_i, $|i| \leqslant l$. Пусть еще

$$\lambda_\Omega = \inf \{\|\nabla_l u\|^2_{L_2(\Omega)} : \|u\|_{L_2(\Omega)} = 1, \quad u \in \mathring{L}_2^l(\Omega)\}.$$

Теорема. *Пусть выполнено одно из неравенств:*

$$\delta_{2,l}(\Omega) < c_0 \gamma / \Gamma, \quad \text{если} \quad n \geqslant 2l,$$
$$\delta(\Omega) < c_0 \gamma / \Gamma, \quad \text{если} \quad n < 2l,$$

где $\delta_{2,l}(\Omega)$ — *(2, l)-внутренний диаметр* Ω, $\delta(\Omega)$ — *внутренний диаметр* Ω, *а* c_0 — *некоторая постоянная, зависящая только от* n *и* l. *Тогда задача Дирихле* (1) *однозначно разрешима.*

Доказательство. Очевидно, что

$$\mathfrak{R}(u, u) - \operatorname{Re} \mathfrak{B}(u, u) \leqslant \Gamma \Big(\sum_{k=0}^{l} \|\nabla_k u\|^2_{L_2(\Omega)}\Big)^{1/2} \Big(\sum_{k=0}^{l-1} \|\nabla_k u\|^2_{L_2(\Omega)}\Big)^{1/2}.$$

Используя неравенство $\|\nabla_k u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c \|\nabla_l u\|^{k/l}_{L_2(\Omega)} \|u\|^{1-k/l}_{L_2(\Omega)}$, $u \in \mathring{L}_2^l(\Omega)$, получаем

$$\mathfrak{N}(u, u) - \operatorname{Re}\mathfrak{B}(u, u) \leqslant (\gamma/2)\|\nabla_l u\|^2_{L_2(\Omega)} + c(\Gamma^{2l}/\gamma^{2l-1})\|u\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Re}\mathfrak{B}(u, u) \geqslant (\gamma/4)\|\nabla_l u\|^2_{L_2(\Omega)} + (\lambda_\Omega\gamma/4 - (c\Gamma^{2l}/\gamma^{2l-1}))\|u\|^2_{L_2(\Omega)}. \quad (2)$$

Остается воспользоваться теоремой 11.4.1, согласно которой

$$\lambda_\Omega \sim \begin{cases} \delta_{2,l}(\Omega)^{-2l}, & \text{если } n \geqslant 2l, \\ \delta(\Omega)^{-2l}, & \text{если } n < 2l. \end{cases} \blacksquare$$

Итак, задача Дирихле однозначно разрешима для областей с малым $(2, l)$-внутренним диаметром при $n \geqslant 2l$ или с малым внутренним диаметром при $n < 2l$.

§ 11.8. КОММЕНТАРИИ К ГЛАВЕ 11

§ 11.1, 11.2. Ж. Дени и Ж.-Л. Лионс [167] в связи с вопросом о применимости метода ортогональных проекций к задаче Дирихле для оператора Лапласа дали следующее описание множеств Ω, для которых пространство $\mathring{L}_2^1(\Omega)$ вложено в $\mathscr{D}'(\Omega)$. Это вложение имеет место при $n \geqslant 3$ для любого множества Ω, при $n = 2$, если емкость Винера дополнения $C\Omega$ положительна, и при $n = 1$, если дополнение $C\Omega$ непусто. Доказательство Дени и Лионса использует тонкую теорию потенциала.

Для любого целого l вопрос о вложении $\mathring{L}_2^l(\Omega)$ в $\mathscr{D}'(\Omega)$ был решен другим методом Л. Хермандером и Ж.-Л. Лионсом [200]. Их результат был сформулирован в терминах $(2, l)$-полярности. В работе автора [66] было отмечено, что условия теоремы Хермандера и Лионса можно переформулировать в терминах введенной в [64] l-гармонической емкости.

Метод доказательства теоремы 11.2 представляет собой модификацию метода работы Л. Хермандера и Ж.-Л. Лионса [200]. Изложение в основном следует статье автора и А. А. Хволеса [92], где получен следующий результат.

Теорема. *Пусть* $p > 1$, $l > 0$ *и* $\mathring{h}_p^l(\Omega)$ — *пополнение* $\mathscr{D}(\Omega)$ *по норме* $\|(-\Delta)^{l/2}u\|_{L_p(R^n)}$. (*В частности,* $\mathring{h}_p^l(\Omega) = \mathring{L}_p^l(\Omega)$ *для целого* l.)

Пространство $\mathring{h}_p^l(\Omega)$ *вложено в* $\mathscr{D}'(\Omega)$ *в том и только в том случае, если выполняется одно из условий*:

1) $n > pl$; 2) $\operatorname{cap}(C\Omega, H_p^l) > 0$, *если* $n = pl$; 3) $C\Omega \neq \varnothing$, *если* $n < pl$ *и* $l - n/p$ — *дробное*; 4) *либо* $\operatorname{cap}(C\Omega, H_p^{n/p}) > 0$, *либо* $C\Omega$ *не лежит в* $(n-1)$-*мерной гиперплоскости, если* $n < pl$, $l - n/p$ — *целое*.

§ 11.3—11.6. Результаты этих параграфов получены автором [75, 77, 80].

§ 11.7. Изложенная здесь схема приложений теорем об интегральных неравенствах к краевым задачам в вариационной форме хорошо известна (см., например, Ж. Дени и Ж.-Л. Лионс [167]), Ж.-Л. Лионс и Э. Мадженес [58].

Критерий дискретности спектра задачи Дирихле для оператора Лапласа (теорема 11.7.3 при $l=1$) найден А. М. Молчановым [99]. Для любых целых l теорема 11.7.3 доказана автором [64]. Аналогичные результаты для более общих операторов приведены в § 12.3.

Однозначная разрешимость задачи Дирихле для оператора B (см. п. 11.7.4) в области малого $(2, l)$-внутреннего диаметра, понимаемого в несколько ином смысле, установлена В. А. Кондратьевым [40, 41] (см. комментарии к § 10.2). Известны и другие приложения результатов главы 10 к теории эллиптических уравнений (теоремы типа Фрагмена — Линделефа для эллиптических уравнений произвольного порядка — Е. М. Ландис [49], оценки собственных чисел оператора задачи Дирихле в неограниченной области — Г. В. Розенблюм [112], М. Отелбаев [106, 107], условия регулярности по Винеру) граничной точки для полигармонического уравнения — автор [215], автор и Т. Дончев [85].

Теоремы, доказанные в п. 11.7.2, справедливы и для квазилинейных эллиптических уравнений. Вот пример обобщения такого рода [73].

Рассмотрим уравнение

$$Au \equiv (-1)^l D^\alpha (a_\alpha(x, \nabla_l u)) = f(x), \qquad x \in \Omega,$$

где f — суммируемая в Ω функция, α — мультииндекс порядка l, $D^\alpha = \partial^l/\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}$. По паре одинаковых индексов производится суммирование. Все функции вещественны.

Допустим, что функции a_α непрерывны при почти всех $x \in \Omega$ по совокупности всех остальных переменных и при любых значениях этих переменных измеримы по x. Кроме того, предположим, что для любого вектора $v = \{v_\alpha\}$ при некотором $p > 1$ справедливы неравенства

$$a_\alpha(x, v) v_\alpha \geqslant |v|^p, \qquad \sum_\alpha |a_\alpha(x, v)| \leqslant \lambda |v|^{p-1}.$$

Будем считать выполненным условие «монотонности»: если $w \neq v$, то

$$[a_\alpha(x, v) - a_\alpha(x, w)](v_\alpha - w_\alpha) > 0.$$

Назовем функцию $u \in \mathring{L}_p^l(\Omega) \cap L(\Omega, \mathrm{loc})$ решением задачи Дирихле: $Au = f$ в Ω, $u = 0$ на $\partial\Omega$, если для всех $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$

$$\int_\Omega a_\alpha(x, \nabla_l u) D^\alpha \varphi \, dx = \int_\Omega f \varphi \, dx.$$

При помощи теоремы Ж. Лере и Ж.-Л. Лионса [167] нетрудно показать, что эта задача разрешима для любой функции $f \in L_{q'}(\Omega)$, $1 \leqslant q' < \infty$, $1/q + 1/q' = 1$, в том и только в том случае, если $\mathring{L}_p^l(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ Отсюда и из теорем, доказанных в § 11.4 и § 11.5, следуют явные необходимые и достаточные условия разрешимости.

Глава 12

ВЛОЖЕНИЕ $\mathring{L}_p^l(\Omega, \nu)$ В $W_r^m(\Omega)$

В этой главе рассматривается пополнение $\mathring{L}_p^l(\Omega, \nu)$ пространства $\mathscr{D}(\Omega)$ в метрике $\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)} + \|u\|_{L_p(\Omega, \nu)}$, где $p > 1$, Ω — открытое подмножество R^n и ν — мера в Ω.

В § 12.2 показано, например, что пространство $\mathscr{D}(\Omega)$, снабженное метрикой $\mathring{L}_p^l(R^n, \nu)$, непрерывно вложено в $L_p(R^n)$ в том и только в том случае, если при достаточно большом d для любого куба Q_d с ребром d

$$\inf_{\{e\}} \nu(Q_d \setminus e) \geqslant \text{const} > 0. \tag{1}$$

Здесь $\{e\}$ — совокупность всех подмножеств куба Q_d, имеющих достаточно малую емкость $\operatorname{cap}(e, \mathring{L}_p^l(Q_{2d}))$. Соответствующий оператор вложения вполне непрерывен в том и только в том случае, если выполнено условие (1) и $\inf\limits_{\{e\}} \nu(Q_d \setminus e)$ стремится к бесконечности, когда куб Q_d удаляется в бесконечность (§ 12.3).

В § 12.4 рассматривается вопрос о возможности замыкания некоторых операторов вложения. Одна из теорем этого параграфа утверждает, что тождественный оператор, определенный на $\mathscr{D}(\Omega)$ и действующий из $L_p(\Omega)$ в $\mathring{L}_p^l(\Omega, \nu)$, допускает замыкание в том и только в том случае, если мера ν абсолютно непрерывна относительно (p, l)-емкости. В § 12.5 доказанные ранее критерии переформулируются в случае $p = 2$ как необходимые и достаточные условия положительной определенности и дискретности спектра самосопряженного эллиптического оператора, порожденного квадратичной формой

$$\int_\Omega \sum_{|\alpha| = |\beta| = l} a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u \overline{D^\beta u}\, dx + \int_\Omega |u|^2 d\nu, \quad u \in \mathscr{D}(\Omega).$$

§ 12.1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Лемма 1. *Для любой функции $u \in C^\infty(\bar{Q}_d)$ верно неравенство*

$$\|u\|_{L_p(Q_d)}^p \leqslant c\gamma^{-1} d^{pl} |u|_{p,l,Q_d}^p + \frac{cd^n}{\inf \nu(Q_d \setminus e)} \|u\|_{L_p(Q_d, \nu)}^p, \tag{1}$$

где ν — *мера в* Q_d, *инфимум берется по всем компактным множествам* $e \subset \overline{Q_d}$, *таким, что* $\operatorname{cap}(e, \mathring{L}_p^l(Q_{2d})) \leqslant \lambda d^{n-pl}$ (λ — *произвольная постоянная*), *полунорма* $|\cdot|_{p,\,l,\,Q_d}$ *введена в п.* 10.1.2.

Доказательство. Будем считать, что среднее значение $\bar{u}_{Q_d}$ функции u в кубе Q_d неотрицательно, и положим

$$2\tau = d^{-n/p}\|u\|_{L_p(Q_d)}, \quad e_\tau = \{x \in \bar{Q}_d\colon\ u(x) \leqslant \tau\}.$$

Очевидно, что $\|u\|_{L_p(Q_d)} \leqslant \|u-\tau\|_{L_p(Q_d)} + \tau d^{n/p}$

и, значит,
$$\|u\|_{L_p(Q_d)} \leqslant 2\|u-\tau\|_{L_p(Q_d)}. \tag{2}$$

Рассмотрим случай $\operatorname{cap}(e_\tau, \mathring{L}_p^l(Q_{2d})) > \lambda d^{n-pl}$. Если $\bar{u}_{Q_d} \geqslant \tau$, то, применяя к функции $u-\tau$ теорему 10.1.3 и используя (2), выводим оценку

$$\|u\|^p_{L_p(Q_d)} \leqslant c\lambda^{-1} d^{pl}\,|u|^p_{p,\,l,\,Q_d}. \tag{3}$$

Если же $\bar{u}_{Q_d} < \tau$, то в силу неравенства $\|u - \bar{u}_{Q_d}\|_{L_p(Q_d)} \leqslant cd\|\nabla u\|_{L_p(Q_d)}$ получаем

$$\|u\|_{L_p(Q_d)} \leqslant 2\left(\|u\|_{L_p(Q_d)} - \bar{u}_{Q_d} d^{n/p}\right) \leqslant 2cd\,\|\nabla u\|_{L_p(Q_d)}.$$

(Здесь мы воспользовались неотрицательностью функции $\bar{u}_{Q_d}$.) Итак, при $\operatorname{cap}(e_\tau, \mathring{L}_p^l(Q_{2d})) > \lambda d^{n-pl}$ справедлива оценка (3). В случае $\operatorname{cap}(e_\tau, \mathring{L}_p^l(Q_{2d})) \leqslant \lambda d^{n-pl}$ имеем

$$\|u\|^p_{L_p(Q_d)} = 2^p d^n \tau^p \leqslant (2^p d^n/\nu(Q_d \setminus e_\tau)) \int_{Q_d \setminus e_\tau} |u|^p\, d\nu \leqslant$$
$$\leqslant (2^p d^n/\inf \nu(Q_d \setminus e))\,\|u\|^p_{L_p(Q_d,\,\nu)}.$$

Отсюда и из (3) следует неравенство (1).

Лемма 2. *Пусть* e — *компактное подмножество* $\overline{Q_d}$, *такое, что*

$$\operatorname{cap}(e, \mathring{L}_p^l(Q_{2d})) < \mu d^{n-pl}, \tag{4}$$

где μ — *достаточно малая зависящая только от* n, l, p *положительная постоянная. Тогда*

$$\inf_{u \in C_0^\infty(Q_d \setminus e)} \left(\|u\|_{\mathring{L}_p^l(R^n,\,\nu)} / \|u\|_{L_p(R^n)}\right) \leqslant c\,(d^{-l} + d^{n/p}\nu(Q_d \setminus e)^{1/p}). \tag{5}$$

Доказательство. Очевидно, что достаточно ограничиться случаем $d=1$. Согласно замечанию 9.3.2 существует функция $\varphi \in \mathfrak{M}(e, Q_2)$, такая, что $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$ и

$$\|\nabla_l \varphi\|_{L_p(R^n)} \leqslant c_0 \mu^{1/p}. \tag{6}$$

Обозначим через ω произвольную функцию из класса $C_0^\infty(Q_1)$, равную единице на $Q_{1/2}$ и удовлетворяющую условию $0 \leqslant \omega \leqslant 1$. Для функции $u = \omega(1-\varphi)$, которая очевидно принадлежит классу $C_0^\infty(Q_1 \setminus E)$, получаем неравенства

$$\int_{Q_1} |u|^p d\nu \leqslant \nu(Q_1 \setminus E), \tag{7}$$

$$\|\nabla_l u\|_{L_p(R^n)} \leqslant c\left(\|\nabla_l \omega\|_{L_p(R^n)} + \|\nabla_l(\omega\varphi)\|_{L_p(R^n)}\right) \leqslant$$
$$\leqslant c_1 + c_2 \|\nabla_l \varphi\|_{L_p(R^n)} \leqslant c_1 + c_0 c_2 \mu^{1/p}. \tag{8}$$

Оценим норму функции u в L_p снизу:

$$\|u\|_{L_p(R^n)} \geqslant \|\omega\|_{L_p(R^n)} - \|\varphi\|_{L_p(R^n)} \geqslant 2^{-n/p} -$$
$$- \|\nabla_l \varphi\|_{L_p(R^n)} \sup_{u \in C_0^\infty(Q_2)} \left(\|u\|_{L_p(R^n)} / \|\nabla_l u\|_{L_p(R^n)}\right).$$

Используя малость постоянной μ, отсюда и из (6) получаем оценку $\|u\|_{L_p(R^n)} \geqslant 2^{-1-n/p}$. Объединяя последнее неравенство с (7) и (8), приходим к (5). ■

Из доказательства леммы 2 следует, что достаточно считать число μ удовлетворяющим неравенству

$$\mu \leqslant 2^{-n-p} c_0^{-p} \inf_{u \in C_0^\infty(Q_2)} \left(\|\nabla_l u\|_{L_p(R^n)} / \|u\|_{L_p(R^n)}\right)^p, \tag{9}$$

где c_0 — константа в (6).

В дальнейшем подмножества куба Q_d, удовлетворяющие неравенству $\operatorname{Cap}(e, \mathring{L}_p^l(Q_{2d})) \leqslant \gamma d^{n-pl}$, где $n \geqslant pl$, $\gamma = \mu c_*^{-1}$, c_* — константа в (9.3.2/5), будем называть (p, l)-несущественными (ср. с определением 10.1.1). При $pl > n$, как и ранее, единственным (p, l)-несущественным, по определению является пустое множество.

Совокупность всех (p, l)-несущественных замкнутых подмножеств куба $\bar{Q}_d$, как и ранее, будем обозначать через $\mathscr{N}(\bar{Q}_d)$.

§ 12.2. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ОПЕРАТОРА ВЛОЖЕНИЯ $\mathring{L}_p^l(\Omega, \nu)$ В $W_r^m(\Omega)$

Пусть Ω — произвольное открытое множество в R^n и ν — мера в Ω. Через F_Ω обозначим множество всех кубов $\bar{Q}_d$, пересечения которых с $C\Omega$ (p, l)-несущественны.

Введем число

$$D = D_{p,l}(\nu, \Omega) = \sup_{\bar{Q}_d \in F_\Omega} \left\{d : d^{n-pl} \geqslant \inf_{e \in N(Q_d)} \nu(\bar{Q}_d \setminus e)\right\}. \tag{1}$$

Очевидно, что D — неубывающая функция множества Ω. При $\nu = 0$ величина D совпадает с введенным в § 10.2 (p, l)-внутренним диаметром множества Ω.

Теорема 1. *Пусть* $0 \leqslant m \leqslant l$, $p \leqslant r < \infty$, $l - m > n/p - n/r$. *Тогда*:

1) *неравенство*

$$\|u\|_{W_r^m(R^n)} \leqslant C \|u\|_{\mathring{L}_p^l(\Omega, \nu)} \tag{2}$$

верно для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$ *в том и только в том случае, если существуют такие положительные постоянные* d *и* k, *что для всех кубов* $\bar{Q}_d$ *из* F_Ω *и всех компактов* E *из* $\mathscr{N}(Q_d)$

$$\nu(\bar{Q}_d \setminus E) \geqslant k; \tag{3}$$

2) *для наименьшей константы в неравенстве* (2) *справедливы оценки*

$$c^{-1}C \leqslant D^{l-n(1/p-1/r)} \max\{D^{-m}, 1\} \leqslant cC. \tag{4}$$

Доказательство. Сначала докажем правое неравенство (4) и необходимость условия (3). Из определения D следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует куб $\bar{Q}_d \in F_\Omega$, для которого

$$d^{n-pl} \geqslant \inf_{e \in \mathscr{N}(Q_d)} \nu(\bar{Q}_d \setminus e)$$

и $D \geqslant d \geqslant D - \varepsilon$, если $D < \infty$, $d > \varepsilon^{-1}$, если $D = \infty$.

Пусть $e \in \mathscr{N}(Q_d)$. Согласно следствию 9.3.2/2 множество $E = e \cup (\bar{Q}_d \setminus \Omega)$ удовлетворяет условию (12.1/4), и по лемме 12.1/2 найдется функция $u \in C_0^\infty(Q_d \setminus E)$, такая, что

$$\|u\|_{\mathring{L}_p^l(\Omega, \nu)} \leqslant c_1 (d^{-pl} + d^{-n}\nu(\bar{Q}_d \setminus E))^{1/p} \|u\|_{L_p(Q_d)} \leqslant c_2 d^{-l} \|u\|_{L_p(Q_d)}. \tag{5}$$

Используя очевидные неравенства

$$\|u\|_{L_p(Q_d)} \leqslant c_3 \min\{d^{n/p-n/r}\|u\|_{L_r(Q_d)},\ d^{n/p-n/r+m}\|\nabla_m u\|_{L_r(R^n)}\} \leqslant$$
$$\leqslant c_4 d^{n/p-n/r} \min\{1, d^m\} \|u\|_{W_r^m(R^n)},$$

из (5) получаем

$$\|u\|_{\mathring{L}_p^l(\Omega, \nu)} \leqslant c_5 d^{-l+n/p-n/r} \min\{1, d^m\} \|u\|_{W_r^m(R^n)}.$$

Так как ε — сколь угодно малое число, то правое неравенство (4) доказано.

Если имеет место (2), то из правого неравенства (4) и из условия $l > n/p - n/r$ следует, что $D < \infty$. Но тогда при $d = 2D$ и $k = d^{n-pl}$ выполняется (3).

Докажем достаточность условия (3) и левое неравенство (4). Покроем R^n решеткой кубов $\bar{Q}_d$, где d — такая постоянная, что неравенство (3) выполнено. Если куб Q_d имеет (p, l)-существенное пересечение с $R^n \setminus \Omega$, то по теореме 10.1.2

$$\|u\|^p_{L_p(Q_d)} \leqslant cd^{pl}|u|^p_{p,\, l,\, Q_d}.$$

Если же $\bar{Q}_d \setminus \Omega \,\overline{\in}\, \mathscr{N}(Q_d)$, то по лемме 12.1/1

$$\|u\|^p_{L_p(Q_d)} \leqslant cd^{pl}|u|^p_{p,\, l,\, Q_d} + ck^{-1}d^n|u|^p_{L_p(Q_d,\, \nu)}. \tag{6}$$

Суммируя по всем кубам решетки, получаем

$$\|u\|^p_{L_p(\Omega)} \leqslant c\sum_{j=1}^{l} d^{pj}\|\nabla_j u\|^p_{L_p(\Omega)} + ck^{-1}d^n\|u\|^p_{L_p(\Omega,\, \nu)}. \tag{7}$$

Применяя неравенство (11.4.2/2) и неравенство Гельдера, из (7) получаем

$$\|u\|^p_{L_p(\Omega)} \leqslant cd^{pl}\|\nabla_l u\|^p_{L_p(\Omega)} + ck^{-1}d^n\|u\|^p_{L_p(\Omega,\, \nu)}. \tag{8}$$

Так как оператор вложения W_p^l в W_r^m непрерывен, то достаточность условия (3) доказана.

Пусть $R = \max\{d, (d^n k^{-1})^{1/pl}\}$. Тогда из (8) получаем $\|u\|_{L_p} \leqslant cR^l\|u\|_{\mathring{L}_p^l(\Omega,\, \nu)}$. Отсюда следует оценка для точной константы C в неравенстве (2)

$$C \leqslant c \sup_{u \in \mathscr{D}} \frac{\|\nabla_m u\|_{L_r} + \|u\|_{L_r}}{\|\nabla_l u\|_{L_p} + R^{-l}\|u\|_{L_p}}.$$

Заменим здесь u на $u(x/R)$. Тогда

$$C \leqslant c \sup_{u \in \mathscr{D}} \frac{R^{-m+n/r}\|\nabla_m u\|_{L_r} + R^{n/r}\|u\|_{L_r}}{R^{n/p-l}\left(\|\nabla_l u\|_{L_p} + \|u\|_{L_p}\right)} \leqslant$$

$$\leqslant cR^{l-n/p+n/r}\max\{R^{-m}, 1\}\sup_{u \in \mathscr{D}} \frac{\|u\|_{W_r^m}}{\|u\|_{W_p^l}}. \tag{9}$$

Можно предположить, что $D < \infty$. Из определения величины D получаем, что для $d = 2D$, $k = d^{n-pl}$ выполняется неравенство (3). Подставляя в (9) $\lambda = 2D$, получаем левое неравенство (4). ■

Так как при $pl > n$ несущественным является только пустое множество, то в этом случае теорема 1 допускает следующую эквивалентную формулировку, не использующую понятия емкости

Теорема 2. *Пусть $pl > n$, $0 \leqslant m \leqslant l$, $p \leqslant r < \infty$, $l - m > n/p - n/r$. Тогда:*

1) *неравенство (2) выполнено для всех $u \in \mathscr{D}(\Omega)$ в том и только в том случае, если при некоторых $d > 0$ и $k > 0$ для всех кубов Q_d, $\bar{Q}_d \subset \Omega$ верна оценка $\nu(Q_d) > k$;*

2) *для наименьшей константы C в неравенстве* (2) *верна оценка* (4), *где*

$$D = D_{p,l}(\nu, \Omega) = \sup_{\bar{Q}_d \subset \Omega} \{d\colon d^{n-pl} \geqslant \nu(\bar{Q}_d)\}. \tag{10}$$

Формулировку части 1) теоремы 1 можно упростить и в случае $pl = n$, когда $R^n \setminus \Omega$ — связное множество.

Теорема 3. *Пусть $pl = n$ и множество $R^n \setminus \Omega$ связно. Неравенство* (2) *выполнено для всех $u \in \mathscr{D}(\Omega)$ в том и только в том случае, если существуют такие постоянные $d > 0$ и $k > 0$, что для всех кубов Q_d, $\bar{Q}_d \subset \Omega$ и всех (p, l)-несущественных компактов $F \subset \bar{Q}_d$ справедливо неравенство* (3).

Доказательство. Следует установить только достаточность сформулированного условия, поскольку необходимость установлена в теореме 1.

Пусть Q_d — куб координатной решетки, имеющий непустое пересечение с $R^n \setminus \Omega$. Тогда куб Q_{2d} содержит континуум длины, не меньшей d, принадлежащий $R^n \setminus \Omega$. Поэтому согласно предложению 9.1.2/2 $\operatorname{cap}(\bar{Q}_{2d} \setminus \Omega, \overset{\circ}{L}{}^l_p(Q_{4d})) \geqslant c$.

Отсюда и из теоремы 10.1.2 следует неравенство

$$\| u \|^p_{L_p(Q_d)} \leqslant c d^{pl} | u |^p_{p,l,Q_d}, \qquad u \in \mathscr{D}(\Omega). \tag{11}$$

Из этой оценки, примененной к каждому кубу $\bar{Q}_d$, пересекающемуся с $R^n \setminus \Omega$, и неравенства (6) для кубов $\bar{Q}_d \subset \Omega$ получим (7). Дальнейшие рассуждения — в точности те же, что и в доказательстве достаточности условия (3) в теореме 1. ■

§ 12.3. КОМПАКТНОСТЬ ОПЕРАТОРА ВЛОЖЕНИЯ $\overset{\circ}{L}{}^l_p(\Omega, \nu)$ В $W^m_r(\Omega)$

12.3.1. Существенная норма оператора вложения. Пусть E — тождественное отображение пространства $C_0^\infty(\Omega)$, рассматриваемое как оператор из пространства $\overset{\circ}{L}{}^l_p(\Omega, \nu)$ в пространство $W^m_r(R^n)$.

Поставим в соответствие оператору E его существенную норму, т. е. величину

$$\rho = \rho_{p,l,m} = \inf_{\{T\}} \| E - T \|, \tag{1}$$

где $\{T\}$ — множество всех вполне непрерывных операторов;

$$\overset{\circ}{L}{}^l_p(\Omega, \nu) \to W^m_r(\mathrm{R}^n).$$

Теорема. *Пусть $0 \leqslant m < l$, $p \leqslant r < \infty$, $l - m > n/p - n/r$. Тогда:*
1) $\rho < \infty$ *в том и только в том случае, если $D = D_{p,l}(\nu, \Omega) < \infty$;*

2) *существует такая постоянная* $c>1$, *что*

$$c^{-1}\rho \leqslant \overset{\infty}{D}{}^{l-n/p+n/r} \max\{\overset{\infty}{D}{}^{-m},\ 1\} \leqslant c\rho, \tag{2}$$

где
$$\overset{\infty}{D} = \overset{\infty}{D}_{p,l}(\nu,\ \Omega) = \lim_{N\to\infty} D_{p,l}(\nu,\ \Omega\setminus \bar{Q}_N), \tag{3}$$

Q_N — *куб с центром в точке* O.

Доказательство. Утверждение 1) следует из теоремы 12.2/1. Докажем левое неравенство (2). Пусть T_N $(N=1, 2, \ldots)$ — оператор умножения на функцию $\eta(N^{-1}x)$, где $\eta\in C_0^\infty(Q_2)$, $\eta=1$ на Q_1. В силу теоремы 12.2/1 для любой функции $u\in C_0^\infty(Q_2)$ справедливы неравенства

$$c^{-1}\|u\|_{\mathring{L}_p^l(\Omega,\ \nu)} \leqslant \|\nabla_l u\|_{L_p} + D^{-l}\|u\|_{L_p} + \|u\|_{L_p(\Omega,\ \nu)} \leqslant c\|u\|_{\mathring{L}_p^l(\Omega,\ \nu)}. \tag{4}$$

Поэтому при $N\geqslant D$ имеем

$$\|T_N\|_{\mathring{L}_p^l(\Omega,\ \nu)\to \mathring{L}_p^l(\Omega,\ \nu)} \leqslant c. \tag{5}$$

Из (4) и известной теоремы о компактности следует, что оператор T_N вполне непрерывен: $\mathring{L}_p^l(\Omega,\ \nu)\to W_r^m$. Применяя теорему 12.2/1 к множеству $\Omega\setminus \bar{Q}_N$, для любой функции $u\in C_0^\infty(\Omega)$ получаем оценку

$$\|(E-T_N)\|_{W_r^m} \leqslant cD_N^{l-n/p+n/r} \max\{D_N^{-m},\ 1\}\,\|(E-T_N)u\|_{L_p^l(\Omega,\ \nu)},$$

где $D_N=D_{p,l}(\nu,\ \Omega\setminus\bar{Q}_N)$. Отсюда, используя (5) и переходя к пределу при $N\to\infty$, приходим к левому неравенству (2).

Докажем правое неравенство (2). Можно предположить, что $\overset{\infty}{D}\neq 0$. Очевидно, что $D_1\geqslant D_2\geqslant \ldots D_r\geqslant \ldots \geqslant \overset{\infty}{D}$. Рассуждая так же, как и при доказательстве правого неравенства (12.2/4), для любого достаточно большого номера N построим функцию $u_N\in C_0^\infty(\Omega\setminus\bar{Q}_N)$, диаметр носителя которой не превосходит $2\overset{\infty}{D}$ и такую, что

$$\|u_N\|_{\mathring{L}_p^l(\Omega,\ \nu)} \leqslant c\overset{\infty}{D}{}^{-l}, \quad \|u_N\|_{L_p}=1. \tag{6}$$

Очевидно, что

$$\|u_N\|_{L_p} = \overset{\infty}{D}{}^{n/p}\left\|G_{\underset{D}{\infty}}u_N\right\|_{L_p} \leqslant c_1\overset{\infty}{D}{}^{n/p}\min\left\{\left\|G_{\underset{D}{\infty}}u_N\right\|_{L_r},\ \left\|\nabla_m G_{\underset{D}{\infty}}u_N\right\|_{L_r}\right\}, \tag{7}$$

где G_a — оператор, определенный равенством $(G_a u)(x)=u(ax)$. Выберем последовательность $\{N_i\}_{i\geqslant 1}$ так, чтобы расстояние между носителями u_{N_i}, u_{N_j} $(i\neq j)$ было больше чем $2\sqrt{n}\,\overset{\infty}{D}$. Из (6) и (7) получаем

$$1 \leqslant c_2 \overset{\infty}{D}{}^{n/p} \min \left\{ \left\| G_{\underset{D}{\infty}} (u_{N_j} - u_{N_i}) \right\|_{L_r}, \left\| \nabla_m G_{\underset{D}{\infty}} (u_{N_i} - u_{N_j}) \right\|_{L_r} \right\} \leqslant$$
$$\leqslant c_3 \overset{\infty}{D}{}^{n/p - n/r} \min \{ \overset{\infty}{D}{}^m, 1 \} \| u_{N_i} - u_{N_j} \|_{W_r^m}. \qquad (8)$$

Обозначим через T произвольный вполне непрерывный оператор: $\overset{\circ}{L}{}_p^l(\Omega, \nu) \to W_r^m$. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что последовательность $\{Tu_{N_i}\}$ сходится в W_r^m. Далее,

$$\|(E - T)(u_{N_i} - u_{N_j})\|_{W_r^m} \geqslant \|u_{N_i} - u_{N_j}\|_{W_r^m} - \|T(u_{N_i} - u_{N_j})\|_{W_r^m},$$

что вместе с (8) дает оценку

$$c_5 \overline{\lim_{N_i,\, N_j \to \infty}} \|(E - T)(u_{N_i} - u_{N_j})\|_{W_r^m} \geqslant \overset{\infty}{D}{}^{l - n/p + n/r} \max \{ \overset{\infty}{D}{}^{-m}, 1 \}.$$

Отсюда и из (6) следует неравенство

$$c_6 \| E - T \|_{\overset{\circ}{L}{}_p^l(\Omega, \nu) \to W_r^m} \geqslant \overset{\infty}{D}{}^{l - n/p + n/r} \max \{ \overset{\infty}{D}{}^{-m}, 1 \}. \ \blacksquare$$

12.3.2. Критерии компактности. Из теоремы 12.3 непосредственно получаем следующий критерий компактности.

Теорема 1. *Пусть* $0 \leqslant m \leqslant l$, $p \leqslant r < \infty$, $l - m > n(p^{-1} - r^{-1})$. *Тогда множество*

$$\mathcal{F} = \left\{ u \in \mathcal{D}(\Omega) \colon \|u\|_{\overset{\circ}{L}{}_p^l(\Omega, \nu)} \leqslant 1 \right\}$$

относительно компактно в W_r^m *в том и только в том случае, если* $D = D_{p,l}(\nu, \Omega) < \infty$ *и* $\lim_{N \to \infty} D_{p,l}(\nu, \Omega \setminus \bar{Q}_N) = 0$.

Последняя теорема допускает следующую эквивалентную формулировку.

Теорема 2. *Пусть* $0 \leqslant m \leqslant l$, $p \leqslant r < \infty$, $l - m > n(p^{-1} - r^{-1})$. *Тогда множество* $\mathcal{F}$ *относительно компактно в* W_r^m *в том и только в том случае, если существуют такие положительные постоянные* d_0 *и* k, *что для любого куба* Q_{d_0}, $\bar{Q}_{d_0} \subset F_\Omega$ *и для любого компакта* $E \in \mathcal{N}(Q_{d_0})$ *выполнено неравенство* (12.2/3) *и при стремлении куба* Q_d, $\bar{Q}_d \subset F_\Omega$ (d — *любое положительное число*) *в бесконечность*

$$\inf_{e \in N(Q_d)} \nu(\bar{Q}_d \setminus e) \to \infty. \qquad (1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Неравенство (12.2/3) вытекает из теоремы 12.2/1. Если (1) не выполняется, то существует уходящая в бесконечность последовательность кубов

$\{Q^{(i)}\}_{i\geqslant 1}$, удовлетворяющая следующим условиям: (i) множество $\{d_i\}$ длин ребер кубов $Q^{(i)}$ ограничено и (ii) справедливо неравенство $\inf\limits_{e\in N(Q^{(i)})} \nu(\overline{Q^{(i)}}\setminus e)<c_0$. Отсюда и из леммы 12.1/2 следует, что найдется последовательность функций $\{u_i\}_{i\geqslant 1}$ из $\mathscr{D}(\Omega)$, удовлетворяющих условиям

$$\operatorname{diam}\operatorname{supp} u_i\leqslant c,\quad \operatorname{dist}(\operatorname{supp} u_i,\ \operatorname{supp} u_j)\geqslant c>0,\qquad i\neq j;$$
$$\|u_i\|_{L_p^l(\Omega,\,\nu)}\leqslant c,\quad \|u_i\|_{W_r^m}\geqslant c_1,\quad \|u_i\|_{L_p}\geqslant c_2>0.$$

Достаточность. Пусть выполняются условия (12.2/3) и (1). В силу теоремы 12.2/1 из (12.2/3) следует конечность $D_{p,l}(\nu,\ \Omega)$. Согласно (1) и (12.2/8)

$$\lim_{N\to\infty}\ \sup_{u\in C_0^\infty(\Omega\setminus\bar{Q}_N)}\|u\|_{W_r^m}\Big/\|u\|_{L_p^l(\Omega,\,\nu)}=0.$$

Отсюда и из правого неравенства (12.2/4), примененного к множеству $\Omega\setminus\bar{Q}_N$, получаем, что $\lim\limits_{N\to\infty} D_{p,l}(\nu,\ \Omega\setminus\bar{Q}_N)=0$. Поэтому множество $\mathscr{F}$ относительно компактно в W_r^m на основании теоремы 1. ■

Очевидно, что в случае $pl>n$ теорему 2 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 3. *Пусть $pl>n$, $0\leqslant m<l$, $p\leqslant r<\infty$, $l-m>n/p-n/r$. Множество $\mathscr{F}$ относительно компактно в W_r^m в том и только в том случае, если выполнено условие теоремы* 12.2/1 *и если при стремлении куба Q_d, $\bar{Q}_d\subset\Omega$ (с произвольной длиной ребра) в бесконечность*

$$\nu(Q_d)\to\infty. \tag{2}$$

В случае $pl=n$ при условии, что $R^n\setminus\Omega$ — связное множество, формулировку теоремы 2 можно упростить.

Теорема 4. *Пусть $pl=n$, $0\leqslant m<l$, $p\leqslant r<\infty$, $m<n/r$ и множество $R^n\setminus\Omega$ связно. Тогда множество $\mathscr{F}$ относительно компактно в W_r^m в том и только в том случае, если выполнено условие теоремы* 12.2/3 *и при стремлении куба Q_d, $\bar{Q}_d\subset\Omega$ (d — любое положительное число) в бесконечность справедливо соотношение* (1).

Доказательство. Используя теорему 2, можно ограничиться доказательством достаточности. Согласно теореме Гальярдо — Ниренберга (см. теорему 1.4.7)

$$\|\nabla_k u\|_{L_r}\leqslant c\|\nabla_l u\|_{L_p}^{\beta}\|u\|_{L_p}^{1-\beta},$$

где $0\leqslant k\leqslant l$ и $\beta=l^{-1}(n/p-n/r+k)$. Поэтому достаточно доказать относительную компактность множества $\mathscr{F}$ в L_p. В силу теоремы 12.2/3 множество $\mathcal{F}$ ограничено в W_p^l и, следовательно, относительно компактно в $L_p(B_\rho)$ при любом $\rho \in (0, \infty)$. Остается показать, что для любого ε можно найти такое $\rho = \rho(\varepsilon)$, что

$$\| u \|_{L_p(R^n \setminus B_\rho)} \leqslant \varepsilon. \tag{3}$$

Положим в (12.1/1) $d^l = \varepsilon$ и выберем $\rho = \rho(\varepsilon)$ так, чтобы для любого куба $\bar{Q}_d \subset \Omega$, пересекающегося с $R^n \setminus B_\rho$, выполнялось неравенство $\inf\limits_{e \in N(Q_d)} \nu(\bar{Q}_d \setminus e)\, \varepsilon^{-p} d^n$. Тогда для таких кубов

$$\| u \|_{L_p(Q_d)} \leqslant c\varepsilon \left(| u |_{p, l, Q_d} + \| u \|_{L_p(Q_d, \nu)} \right). \tag{4}$$

Для всех $\bar{Q}_d$, пересекающихся с $R^n \setminus \Omega$ и $R^n \setminus B_\rho$, согласно (12.2/11) имеем

$$\| u \|_{L_p(Q_d)} \leqslant c\varepsilon \, | u |_{p, l, Q_d}. \tag{5}$$

Возведем (4) и (5) в степень p и просуммируем полученные неравенства по всем кубам координатной решетки с ребром d, пересекающимся с $R^n \setminus B_\rho$. Это приводит к (3). ■

§ 12.4. О ЗАМЫКАНИИ ОПЕРАТОРОВ ВЛОЖЕНИЯ

Пусть ν — мера в R^n. Будем называть ее (p, l)-абсолютно непрерывной, если из равенства $\operatorname{cap}(B, W_p^l) = 0$ (B — борелевское множество) следует $\nu(B) = 0$. Например, согласно предложению 7.2.3/2 φ-мера Хаусдорфа (p, l)-абсолютно непрерывна, если сходится интеграл (7.2.3/4).

Пусть $\mathscr{E}$ — тождественный оператор, определенный на $\mathscr{D}(\Omega)$ и действующий из $L_p(\Omega)$ в $\mathring{L}_p^l(\Omega, \nu)$.

Теорема 1. *Пусть $n \geqslant pl$, $p > 1$. Оператор $\mathscr{E}$ допускает замыкание в том и только в том случае, если мера ν — (p, l)-абсолютно непрерывна.*

Доказательство. Достаточность. Пусть последовательность $\{u_k\}_{k \geqslant 1}$ функций из $\mathscr{D}(\Omega)$ сходится к нулю в $L_p(\Omega)$ и в себе в $\mathring{L}_p^l(\Omega, \nu)$ и пусть $D^\alpha u_k \to v_\alpha$ в $L_p(\Omega)$ для любого мультииндекса α порядка l. Тогда для всех $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$

$$(-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v_\alpha \varphi \, dx = \lim_{k \to \infty} \int_\Omega u_k D^\alpha \varphi \, dx = 0$$

и $v_\alpha = 0$ почти везде в Ω. Следовательно, $u_k \to 0$ в $\mathring{W}_p^l(\Omega)$. Последовательность $\{u_k\}$ содержит подпоследовательность $\{w_k\}$, сходящуюся к нулю (p, l)-квазивсюду (см. п. 7.2.4). Из (p, l)-абсолютной непрерывности меры ν следует, что ν-почти всюду $w_k \to 0$. Так как $\{u_k\}$ сходится в себе в $L_p(\Omega, \nu)$, то $u_k \to 0$ в этом пространстве.

Необходимость. Пусть существует такое борелевское множество $B \subset \Omega$, что $\operatorname{cap}(B, W_p^l)=0$ и $\nu(B)>0$. Обозначим через F компактное подмножество B, удовлетворяющее условию $2\nu(F)>\nu(B)$, и через $\{\omega_k\}_{k\geqslant 0}$ — последовательность открытых множеств со следующими свойствами: 1) $F \subset \bar{\omega}_{k+1} \subset \omega_k \subset \Omega$, 2) $\operatorname{cap}(\bar{\omega}_k, W_p^l) \to 0$, 3) $\nu(\omega_k) \to \nu(F)$. Введем емкостную меру μ_k и емкостный бесселев потенциал $w_k = V_{p,l}\mu_k$ множества $\bar{\omega}_k$ (см. предложение 7.2.2/2).

Покажем, что $w_k \to 0$ в пространстве $C(e)$, где e — любой компакт, не пересекающийся с F. Пусть $\delta = \operatorname{dist}(e, F)$ и k — такой номер, что $2\operatorname{dist}(e, \omega_k)>\delta$. Положим

$$g_k(y) = \left[\int G_l(y-z)\,d\mu_k(z)\right]^{1/(p-1)}$$

(см. определение бесселева потенциала в п. 7.1.2). Если $4|x-y|<\delta$, то $4|z-y|\geqslant\delta$ для всех $z \in \bar{\omega}_k$ и, значит,

$$g_k(y) \leqslant c(\delta)\,[\mu_k(\bar{\omega}_k)]^{1/(p-1)} = c(\delta)\left[\operatorname{cap}(\bar{\omega}_k, W_p^l)\right]^{1/(p-1)}.$$

Поэтому

$$\int_{4|x-y|\leqslant\delta} G_l(x-y)\,g_k(y)\,dy \leqslant c_1(\delta)\left[\operatorname{cap}(\bar{\omega}_k, W_p^l)\right]^{1/(p-1)}.$$

Вместе с тем

$$\int_{4|x-y|>\delta} G_l(x-y)\,g_k(y)\,dy \leqslant c_2(\delta)\,\|g_k\|_{L_p} = c_2(\delta)\left[\operatorname{cap}(\bar{\omega}_k, W_p^l)\right]^{1/(p-1)}.$$

Из этих оценок и равенства $w_k(x) = \int G_l(x-y)\,g_k(y)\,dy$ следует, что $w_k \to 0$ в $C(e)$.

Рассуждение, использованное в доказательстве теоремы 9.3.2/1, показывает, что для функций $v_k = 1-[(1-w_k)_+]^l$ справедлива оценка

$$\|v_k\|_{W_p^l} \leqslant c\,\|w_k\|_{W_p^l}. \tag{1}$$

Кроме того, очевидно, что $v_k=1$ в окрестности F и $0\leqslant v_k\leqslant 1$ в R^n, а также что последовательность $\{v_k\}$ стремится к нулю равномерно на любом компакте, не пересекающемся с F.

Обозначим через u_k усреднение функции v_k с достаточно малым радиусом. Используя равенство $\lim\operatorname{cap}(\bar{\omega}_k, W_p^l)=0$ и оценку (1), получаем, что $\|u_k\|_{W_p^l}\to 0$. Пусть η — любая функция из $\mathfrak{M}(\bar{\omega}, \Omega)$ с носителем S. Очевидно, что $\eta u_k = 1$ в окрестности F и $\|\eta u_k\|_{W_p^l}\to 0$. Покажем, что последовательность ηu_k сходится в себе в $L_p(\Omega, \nu)$. Пусть ε — произвольное положительное число и M — столь большой номер, что $\nu(\omega_M \setminus F)<\varepsilon$. Выберем такое целое число N, что для всех $k > N$

$$|u_k(x)|^p \leqslant \varepsilon/\nu(S) \quad \text{при } x \in S \setminus \omega_M.$$

Отсюда при любых k, $l > N$ получаем

$$\int_\Omega |\eta(u_k - u_l)|^p d\nu \leqslant \int_{S \setminus \omega_M} |u_k - u_l|^p d\nu + \int_{\omega_M \setminus F} |u_k - u_l|^p d\nu < c\varepsilon.$$

Поэтому последовательность ηu_k сходится в себе в $L_p(\Omega, \nu)$.

Поскольку $u_k = 1$ на F, то $\|\eta u_k\|^p_{L_p(\Omega, \nu)} \geqslant \nu(F) > 0$. Существование такой последовательности противоречит возможности замыкания оператора $\mathscr{E}$. ■

В случае $pl > n$ оператор $\mathscr{E}$ всегда допускает замыкание. Это — очевидное следствие теоремы Соболева о вложении $W^l_p(\Omega)$ в $C(\Omega, \text{loc})$.

Теорема 2. *Для того чтобы тождественный оператор, определенный на $\mathscr{D}(\Omega)$ и действующий из $\mathring{W}^l_p(\Omega)$ в $L_p(\Omega, \nu)$, допускал замыкание, необходимо и достаточно, чтобы мера ν была (p, l)-абсолютно непрерывной.*

Доказательство. Достаточность. Пусть последовательность $\{u_k\}_{k \geqslant 1}$ функций из $\mathscr{D}(\Omega)$ сходится к нулю в $\mathring{W}^l_p(\Omega)$ и в себе в $L_p(\Omega, \nu)$. Тогда она стремится к нулю в $L_p(\Omega, \nu)$ в силу предыдущей теоремы.

Необходимость. Пусть существует такое борелевское множество B, что $\text{cap}(B, W^l_p) = 0$ и $\nu(B) > 0$. При этом условии в доказательстве теоремы 1 была построена последовательность $u_k \in \mathscr{D}(\Omega)$, сходящаяся к нулю в $\mathring{W}^l_p(\Omega)$ и в себе в $L_p(\Omega, \nu)$, но не сходящаяся к нулю в $L_p(\Omega, \nu)$. ■

Теорема 3. 1) *Для того чтобы тождественный оператор, действующий из $\mathring{L}^l_p(\Omega)$ в $L_p(\Omega, \nu)$ $(lp < n)$ и определенный на $\mathscr{D}(\Omega)$, допускал замыкание, необходимо и достаточно, чтобы мера ν была (p, l)-абсолютно непрерывной.*

2) *То же утверждение верно и для случая $n = pl$, если $R^n \setminus \Omega$ — множество положительной (p, l)-емкости.*

Доказательство. 1) Достаточность. Пусть последовательность $\{u_k\}_{k \geqslant 1}$ функций из $\mathscr{D}(\Omega)$ сходится к нулю в $\mathring{L}^l_p(\Omega)$ и в себе в $L_p(\Omega, \nu)$. Так как $lp < n$, то $\mathring{L}^l_p(\Omega) \subset L_q(\Omega)$, $q = pn(n - pl)^{-1}$ и, следовательно, последовательность $\{u_k\}$ сходится к нулю по n-мерной мере Лебега. Далее так же, как и при доказательстве достаточности в теореме 1, можно из $\{u_k\}$ выделить подпоследовательность $\{w_k\}$, сходящуюся к нулю ν-почти всюду.

Необходимость следует из теоремы 2.

2) Случай $n = pl$ рассматривается точно так же. При этом следует воспользоваться вложением $\mathring{L}^l_p(\Omega)$ в $L_q(\Omega, \text{loc})$ (см § 11.3).

§ 12.5. ПРИЛОЖЕНИЯ: ПОЛОЖИТЕЛЬНАЯ ОПРЕДЕЛЕННОСТЬ И ДИСКРЕТНОСТЬ СПЕКТРА СИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

Определим на функциях $u \in \mathscr{D}(\Omega)$ квадратичные формы

$$\mathfrak{A}(u, u) = \sum_{|\alpha|=|\beta|=l} \int_\Omega a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u D^\beta \bar{u}\, dx,$$
$$\mathfrak{B}(u, u) = \mathfrak{A}(u, u) + \int_\Omega |u|^2 d\nu,$$

где $a_{\alpha\beta}$ — измеримые функции, а ν — мера в Ω. Предположим, что для всех $u \in \mathscr{D}(\Omega)$

$$\varkappa_1 \|\nabla_l u\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \mathfrak{A}(u, u) \leqslant \varkappa_2 \|\nabla_l u\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

По определению форма $\mathfrak{B}$ допускает замыкание в $L_2(\Omega)$, если любая последовательность функций $u_m \in \mathscr{D}(\Omega)$, сходящаяся в себе в метрике $\mathfrak{B}(u, u)^{1/2}$ и к нулю в $L_2(\Omega)$, сходится к нулю в метрике $\mathfrak{B}(u, u)^{1/2}$. При этом условии существует единственный самосопряженный оператор B в $L_2(\Omega)$, такой, что $(u, Bv) = \mathfrak{B}(u, v)$, u, $v \in \mathscr{D}(\Omega)$. Очевидно, что возможность замыкания формы $\mathfrak{B}$ также необходима для существования оператора B.

Согласно теореме 12.4/1 форма $\mathfrak{B}$ допускает замыкание в $L_2(\Omega)$ в том и только в том случае, если мера ν является (p, l)-абсолютно непрерывной. Допустим, что ν обладает этим свойством.

Следующее утверждение является частным случаем теоремы 12.2/1.

Теорема 1. 1) *Для положительной определенности оператора B необходимо и достаточно, чтобы при некоторых $d > 0$, $k > 0$ для всех кубов $\bar{Q}_d$, имеющих $(2, l)$-несущественное пересечение с $C\Omega$ и всех $(2, l)$-несущественных компактов $F \subset \bar{Q}_d$, выполнялось неравенство*

$$\nu(Q_d \setminus F) \geqslant k. \qquad (1)$$

2) *Для нижней грани Λ спектра оператора B справедливы оценки*

$$c_1\varkappa_1 D^{-2l} \leqslant \Lambda \leqslant c_2\varkappa_2 D^{-2l}, \qquad (2)$$

где c_1, c_2 — постоянные, зависящие только от n, l, а D определяется равенством (12.2/1) при $p = 2$.

Следствие 1. 1) *Если $2l > n$, то необходимым и достаточным условием положительной определенности оператора B является неравенство $\nu(Q_d) \geqslant k$, где d и k — некоторые положительные постоянные, а $\bar{Q}_d$ — любой куб, расположенный в Ω.*

2) *Для нижней грани Λ спектра оператора B справедливы оценки (2), где D определяется равенством (12.2/10) при $p = 2$.*

Следствие 2. *Если $2l = n$ и множество $C\Omega$ связно, то для положительной определенности оператора B необходимо и доста-*

точно, чтобы при некоторых $d>0$ *и* $k>0$ *для всех кубов* $\bar{Q}_d\subset\Omega$ *и всех* $(2,\ n/2)$*-несущественных компактов* $F\subset\bar{Q}_d$ *выполнялось неравенство* (1).

Этот факт есть частный случай теоремы 12.2/3.

Теорема 2. *Для нижней грани* Γ *точек сгущения спектра оператора* B *справедлива оценка*

$$c_1\varkappa_1\overset{\infty}{D}{}^{2l}\leqslant\Gamma\leqslant c_2\varkappa_2\overset{\infty}{D}{}^{-2l},\tag{3}$$

где $\overset{\infty}{D}$ *определяется равенством* (12.3.1/3) *при* $p=2$.

Доказательство. Пусть ρ — число, определенное равенством (12.3.1/1) при $p=2$. В силу теоремы 12.3.1 достаточно доказать, что $\Gamma=\rho^{-2}$. Из теорем 12.3.1 и 1 следует, что $\Gamma=0$ в том и только в том случае, если $\rho=\infty$. Поэтому можно считать, что $\Gamma\neq0$ и $\rho\neq\infty$.

Обозначим через E_λ соответствующее самосопряженному оператору B семейство ортогональных проекторов, отвечающих разложению единичного оператора пространства $L_2(\Omega)$. Тогда

$$\lambda^{-1}\mathfrak{B}(u,\ u)\geqslant\|(E-E_\lambda)u\|^2_{L_2(\Omega)}.\tag{4}$$

Так как при $\lambda<\Gamma$ проектор E_λ конечномерен, из (4) и определения ρ следует оценка $\Gamma\leqslant\rho^{-2}$.

Для любого ε, $0<\varepsilon<\Gamma$, существует ортонормированная в $L_2(\Omega)$ бесконечная последовательность функций $\{\varphi_i\}_{i\geqslant1}$, такая, что $(B\varphi_i,\ \varphi_j)=0$ при $i\neq j$, $\Gamma-\varepsilon\leqslant(B\varphi_i,\ \varphi_i)\leqslant\Gamma+\varepsilon$.

Пусть T — произвольный вполне непрерывный оператор из $\mathring{L}{}_2^l(\Omega,\ \nu)$ в $L_2(\Omega)$. Имеем

$$\frac{\|(E-T)(\varphi_i-\varphi_j)\|_{L_2(\Omega)}}{\|\varphi_i-\varphi_j\|_{\mathring{L}{}_2^l(\Omega,\ \nu)}}\geqslant\frac{\|\varphi_i-\varphi_j\|_{L_2(\Omega)}-\|T(\varphi_i-\varphi_j)\|_{L_2(\Omega)}}{(B(\varphi_i-\varphi_j),\ \varphi_i-\varphi_j)^{1/2}}=$$
$$=\frac{(\|\varphi_i\|^2_{L_2(\Omega)}+\|\varphi_j\|^2_{L_2(\Omega)})^{1/2}-\|T(\varphi_i-\varphi_j)\|_{L_2(\Omega)}}{[(B\varphi_i,\ \varphi_i)+(B\varphi_j,\ \varphi_j)]^{1/2}}\geqslant$$
$$\geqslant(\Gamma+\varepsilon)^{-1/2}-2^{-1/2}(\Gamma-\varepsilon)^{-1/2}\|T(\varphi_i-\varphi_j)\|_{L_2(\Omega)}.$$

Верхний предел правой части при $i,\ j\to\infty$ равен $(\Gamma+\varepsilon)^{-1/2}$. Поэтому в силу произвольности ε из определения ρ получаем, что $\rho^2\geqslant\Gamma^{-1}$. ■

Из этой теоремы вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. *Спектр оператора* B *дискретен в том и только в том случае, если* $\overset{\infty}{D}=0$.

Эта теорема эквивалентна следующему утверждению.

Теорема 4. *Спектр оператора* B *дискретен в том и только в том случае, если при стремлении к бесконечности куба* $\bar{Q}_d$ *(*d *— любое положительное число), имеющего* $(2,\ l)$*-несущественное* *пересечение с* $C\Omega$,

$$\inf_{F \in N(Q_d)} \nu(\bar{Q}_d \setminus F) \to \infty. \tag{5}$$

В случае $2l > n$ этот критерий можно перефразировать следующим образом.

Теорема 5. *Пусть* $2l > n$. *Оператор* B *имеет дискретный спектр в том и только в том случае, если при стремлении к бесконечности куба* $\bar{Q}_d \subset \Omega$ (d — *любое положительное число*)

$$\nu(\bar{Q}_d) \to \infty.$$

Из теоремы 12.3.2/4 получаем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть* $2l = n$ *и множество* $C\Omega$ *связно. Тогда оператор* B *имеет дискретный спектр в том и только в том случае, если при стремлении к бесконечности куба* $\bar{Q}_d \subset \Omega$ (d — *любое положительное число*) *имеет место* (5).

§ 12.6. КОММЕНТАРИИ К ГЛАВЕ 12

Результаты этой главы представляют собой развитие работы А. М. Молчанова [99], в которой найдено необходимое и достаточное условие дискретности спектра задачи Дирихле для оператора Шредингера $-\Delta + \nu$ (ν — абсолютно непрерывная мера) или, что эквивалентно, условие компактности вложения $\mathring{L}_2^1(\Omega, \nu)$ в $L_2(\Omega)$. Для пространства $\mathring{L}_2^l(\Omega, \nu)$ при $2l > n$ (когда можно обойтись без емкости) такие критерии были получены М. Ш. Бирманом и Б. С. Павловым [9]. В случае $q \geqslant p > 1$, $l = 1, 2, \ldots$ необходимые и достаточные условия ограниченности и компактности оператора вложения $\mathring{L}_p^l(\Omega, \nu)$ в $L_q(\Omega)$ найдены автором [75]. Двусторонние оценки нормы и существенной нормы этого оператора даны автором и М. Отелбаевым [86], где рассмотрено пространство с нормой

$$\|(-\Delta)^{l/2} u\|_{L_p(\Omega)} + \|u\|_{L_p(\Omega, \nu)}$$

(l — произвольное положительное число). Теоремы вложения для более общих весовых пространств в дальнейшем получены П. И. Лизоркиным и М. Отелбаевым [57], а также М. Отелбаевым [107]. Функция

$$D_{p,l}(x) = \sup \left\{ d\colon\ d^{n-pl} \geqslant \inf_{e \in N(Q_d(x))} \nu(Q_d(x) \setminus e) \right\}$$

(ср. с (12.2/1)) была использована М. Отелбаевым [106] для получения оценок поперечников по А. Н. Колмогорову единичного шара в $\mathring{L}_p^l(\Omega, \nu)$, измеряемого в метрике $L_p(\Omega)$. Приведем этот результат.

Поперечником по Колмогорову множества M в банаховом пространстве B называется число

$$d_k(M, B) = \begin{cases} \inf\limits_{\{L_k\}} \sup\limits_{f \in M} \inf\limits_{g \in L_k} \|f-g\|_B, & k=1, 2, \ldots, \\ \sup\limits_{f \in M} \|f\|_B, & k=0, \end{cases}$$

где $\{L_k\}$ — совокупность подпространств B размерности, не превосходящей k.

Теорема [106]. *Пусть M — единичный шар пространства $\mathring{L}_p^l(\Omega, \nu)$ и $N(\lambda)$ — число поперечников M в $L_p(\Omega)$, превосходящих λ^{-1}, $\lambda > 0$. Тогда*

$$c^{-1}N(c\lambda) \leqslant \lambda^{n/l} m_n \{x\colon D_{p,l}(x) \geqslant \lambda^{-1/l}\} \leqslant cN(c\lambda),$$

где c не зависит от Ω, ν и λ.

По определению оператор вложения $\mathring{L}_p^l(\Omega, \nu)$ в $L_p(\Omega)$ принадлежит классу l_θ, если

$$\sum\nolimits_{k=0}^{\infty} [d_k(M, L_p(\Omega))]^\theta < \infty.$$

Только что сформулированная теорема показывает, что рассматриваемый оператор вложения принадлежит классу l_θ в том и только в том случае, если $\theta l > n$ и $\int_\Omega [D_{p,l}(x)]^{n-l\theta} dx < \infty$.

Непосредственные приложения этих результатов — двусторонние оценки собственных чисел задачи Дирихле для оператора $(-\Delta)^l + \nu$, условия ядерности резольвенты этого оператора и т. п.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Функциональные пространства

$C^\infty(\Omega)$, $\dot C^\infty(\Omega)$, $\mathscr{D}(\Omega)=C_0^\infty(\Omega)$,

$C^k(\Omega)$, $C^k(\bar\Omega)$, $C_0^k(\Omega)$,

$C^{k,\alpha}(\Omega)$, $C^{k,\alpha}(\bar\Omega)$, $\mathscr{D}'(\Omega)$,

$\mathscr{D}=\mathscr{D}(R^n)$, $L_p(\Omega)$,

$L_p(\Omega, \text{loc})$ . . . 1.1.1

$L_p^l(\Omega)$ . . . 1.1.2

$W_p^l(\Omega)$, $V_p^l(\Omega)$ . . . 1.1.4

$\dot L_p^l(\Omega)$, $\mathscr{P}_k$ . . . 1.1.13

$\mathring W_p^l(\Omega)$ . . . 1.1.16

$L_q(R^n, \mu)=L_q(\mu)$, $L_q(\Omega, \mu)$ . . . 1.4.1

$\mathfrak{N}(e, \Omega)$, $\mathfrak{P}(e, \Omega)$ . . . 2.2.1

$W_{p,r}^l(\Omega)$ . . . 3.1.1

$W_{p,r}^1(\Omega, \partial\Omega)$ . . . 3.6.1

$U_\Omega(K)$, $V_\Omega(K)$, $T_\Omega(K)$ . . . 4.1.1

$\overset{(0)}{L}{}_p^1(\Omega)$ . . . 4.7.4

$\tilde L_p^l(\Omega)$, $\tilde W_p^l(\Omega)$ . . . 4.11.1

$BV(\Omega)$ . . . 6.1.1

w_p^l, W_p^l, b_p^l, B_p^l . . . 7.1.1

h_p^l, H_p^l . . . 7.1.2

S_p^l . . . 7.2.1

$\mathfrak{M}(e, \Omega)$ . . . 9.1.1

$W_{p'}^{-l}$ . . . 9.1.4

$\mathfrak{C}$ . . . 10.3

P_k, $\mathfrak{C}^r(E)$ . . . 10.3.1

$\mathfrak{C}^0(e)$ . . . 10.3.4

Подмножества R^n

Ω, supp f, $B(x, \rho)=B_\rho(x)$, B_ρ 1.1.1

E_t, L_t . . . 2.1.1,

E, ∂E, $\operatorname{clos}_\Omega E$, $\partial_i E$, Ω_ρ, N_t . . . 3.1.1

$\partial^* E$ . . . 6.2.1

$[\ ]_\varepsilon$ . . . 6.2.4

Q_d . . . 10

Классы подмножеств R^n

$C^{0,1}$ . . . 1.1.9

EV_p^l . . . 1.1.16

J_α . . . 3.2.1

$\mathring J_\alpha$ . . . 3.5.1

$K_{\alpha,\beta}$ . . . 3.6.1

$I_{p,\alpha}$ . . . 4.3.1

$H_{p,\alpha}$ . . . 4.4.2

$\overset{\infty}{J}_\alpha$, $\overset{\infty}{I}_{p,\alpha}$ . . . 4.7.1

$\overset{\infty}{J}_\alpha(0)$, $\overset{\infty}{I}_{p,\alpha}(0)$ . . . 4.7.4

$\mathring I_{p,\alpha}$, $\mathring H_{p,\alpha}$ . . . 4.8.1

$I_{p,\alpha}^{(n-1)}$, $J_\alpha^{(n-1)}$ . . . 4.11.2

$\mathring I_{p,\alpha}^{(n-1)}$ . . . 4.11.5

$N(Q_d)$ . . . 10.1.1

$\mathfrak{C}_{l,p,q}$ . . . 11.5.1

Функции множества

m_n, dist (E, F) . . . 1.1.1

H_d . . . 1.1.5

μ . . . 1.4.1

s, $\sigma(\partial g)$ 2.1.1
(p, Φ)-cap (e, Ω), p-cap (e, Ω) . . 2.2.1
$\pi_{p,M}(F, \Omega)$, $\pi(F, \Omega)$ 2.4.1
$\mathfrak{A}_G^{(\alpha)}$, $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$ 3.2.3
$c_p(K)$ 4.1.1
$\mathfrak{A}_G^{(p,\alpha)}$ 4.2
$\mathfrak{B}_G^{(p,\alpha)}$ 4.4.1
$c_p(K)$ 4.11.1
$c_{p,l}(G \setminus F)$ 5.6.1
$P_\Omega(E)$, $P(E)$, $P_{C\Omega}$ 6.1.1
$\tau_\Omega(\mathscr{E})$ 6.3
$|\Omega|$, A_Ω 6.3.4
$\zeta_{\mathscr{A}}^{(\alpha)}$ 6.5.3
$\mathrm{cap}\left(e, S_p^l\right)$, $\underline{\mathrm{cap}}\left(E, S_p^l\right)$,
$\overline{\mathrm{cap}}\left(E, S_p^l\right)$ 7.2.1
μ_E 7.2.2
$H(E, \varphi)$ 7.2.3
$\mathrm{cap}^+\left(e, \mathring{L}_p^2(\Omega)\right)$ 8.2.1
$\mathrm{Cap}\left(e, \mathring{L}_p^l(\Omega)\right)$ 9.1.1
$\lambda_{p,q}^l(G)$ 10.2.1
$D_{p,l}(G, Q_d)$, $D_{p,l}(G)$, $D(G)$ . . 10.2.2
$\mathrm{Cap}_k\left(e, \mathring{L}_p^l(Q_{2d})\right)$ 10.3.4
$D_{p,l}(\nu, \Omega)$ 12.2
$\rho=\rho_{p,l,m}$, $\overset{\infty}{D}=\overset{\infty}{D}_{p,l}(\nu, \Omega)$ . . 12.3.1

Операторы

D^α, ∇_l, $\nabla=\nabla_1$ 1.1.1
$\mathscr{M}_\varepsilon$ 1.1.5
I_l 1.4.1, 7.1.2
$\mathring{\mathscr{E}}$ 1.5.3
∇_Ω 6.1.1
$Fu=0$, J_l, $\mathscr{D}_{(l)}$ 7.1.2
$U_{p,l}\mu$, $V_{p,l}\mu$, $W_{p,l}\mu$, $S_{p,l}\mu$ . . 7.2.2
T 8.2.2

Константы

c, c_1, c_2, $\ldots$, c_n 1.1.1
p' 1.1.14
ω_n 2.1.1
$\mathfrak{M}$ 7.2.2

Функции

$N(x)$ 2.1.1
u^-, u^+ 3.1.1
$\mathfrak{A}_\alpha(M)$ 3.2.1
λ_M, λ 3.2.4
$\mathfrak{A}_{p,\alpha}(M)$ 4.3.1
$\nu_{M,p}$ 4.3.4
$\mathfrak{B}_{p,\alpha}(M)$ 4.4.2
$\overset{\infty}{\mathfrak{A}}_{p,\alpha}(M)$, $\overset{\infty}{\mathfrak{A}}_{1,\alpha}(M)$ 4.7.1
σ_p 4.11.1
γ_p, $\check{\gamma}_p$ 5.1.1
$u^*(x)$ 6.5.1
$\zeta_\alpha(S)$ 6.5.3
$\bar{u}(x)$, $\underline{u}(x)$ 6.6.1
η_d 10.3.2

Другие символы

$\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha|$, $\alpha!$, $a \sim b$ 1.1.1
$Y[\varphi]$ 8.5
$\bar{u}_{Q_d}$, $\|u\|_{p,l,Q_d}$ 10.1.2
$\mathrm{CAP}\left(\mathfrak{S}, \Pi, \mathring{L}_p^l(Q_{2d})\right)$,
$\mathrm{CAP}_k\left(\mathfrak{S}, \mathring{L}_p^l(Q_{2d})\right)$ 10.3.2

УКАЗАТЕЛЬ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Альфорс Л.** Лекции по квазиконформным отображениям. М., 1969, 132 с.

2. **Бабич В. М.** К вопросу о распространении функций. — Успехи мат. наук, 1953, т. 8, № 2, с. 111—113.

3. **Бабич В. М., Слободецкий Л. Н.** Об ограниченности интеграла Дирихле. — Докл. АН СССР, 1956, т. 106, № 4, с. 604—607.

4. **Бесов О. В.** Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1961, т. 60, с. 42—81.

5. **Бесов О. В., Ильин В. П., Кудрявцев Л. Д., Лизоркин П. И., Никольский С. М.** Теория вложений классов дифференцируемых функций многих переменных. — В кн.: Дифференциальные уравнения с частными производными. М., 1970, с. 38—63.

6. **Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.** Интегральные представления функций и теоремы вложения. М., 1975. 408 с.

7. **Бирман М. Ш.** Возмущения квадратичных форм и спектр сингулярных граничных задач. — Докл. АН СССР, 1959, т. 125, № 3, с. 471—474.

8. **Бирман М. Ш.** О спектре сингулярных задач. — Мат. сб., 1961, т. 55, с. 125—174.

9. **Бирман М. Ш., Павлов Б. С.** О полной непрерывности некоторых операторов вложения. — Вестн. Ленингр. ун-та, 1961, № 1, с. 61—74.

10. **Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А.** Геометрические неравенства. Л., 1980. 288 с.

11. **Бураго Ю. Д., Мазья В. Г.** Некоторые вопросы теории потенциала и теории функций для областей с нерегулярными границами. — Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1967, т. 3. 152 с.

12. **Бурбаки Н.** Топологические векторные пространства. М., 1959. 410 с.

13. **Буренков В. И.** О теоремах вложения для области $R_k = \{\alpha_i h < x_i^{k_i} < \beta_i h;\ 0 < h < 1\}$. — Мат. сб., 1968, т. 75, № 4, с. 496—501.

14. **Буренков В. И.** Об аддитивности пространств W_p^r и B_p^r и о теоремах вложения для областей общего вида. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1969, т. 105, с. 30—45.

15. **Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М., Латфуллин Т. Г.** Критерий продолжения функций класса L_2^1 из неограниченных плоских областей. — Сиб. мат. журн., 1979, т. 20, № 2, с. 416—419.

16. **Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г.** О геометрических свойствах функций с первыми обобщенными производными. — Успехи мат. наук, 1979, т. 34, № 1, с. 17—65.

17. **Волевич Л. Р., Панеях Б. П.** Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения. — Успехи мат. наук, 1965, т. 20, № 1, с. 3—74.

18. **Вольперт А. И.** Пространства BV и квазилинейные уравнения. — Мат. сб., 1967, т. 73, № 3, с. 255—302.

19. **Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.** Пространства основных и обобщенных функций. М., 1958. 307 с.

20. **Глазман И. М.** Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М., 1963. 339 с.

21. **Глобенко И. В.** Некоторые вопросы теории вложения для областей с особенностями на границе. — Мат. сб., 1962, т. 57, № 2, с. 201—224.

22. **Глушко В. П.** Об областях, звездных относительно шара. — Докл. АН СССР, 1962, т. 144, № 6, с. 1215—1216.

23. **Головкин К. К.** Теоремы вложения для дробных пространств. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1964, т. 70, с. 38—46.

24. **Головкин К. К.** Параметрически нормированные пространства и нормированные массивы. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1969, т. 106, с. 1—135.

25. **Головкин К. К., Солонников В. А.** Теоремы вложения для дробных пространств. — Докл. АН СССР, 1962, т. 143, № 4, с. 767—770.

26. **Гольдштейн В. М.** Продолжение функций с первыми обобщенными производными из плоских областей. — Докл. АН СССР, 1981, т. 257, № 2, с. 268—271.

27. **Грушин В. В.** О задаче во всем пространстве для некоторого класса уравнений в частных производных. — Докл. АН СССР, 1962, т. 146, № 6, с. 1251—1254.

28. **Гусман М.** Дифференцирование интегралов в R^n. М., 1978. 200 с.

29. **Данфорд Н., Шварц Дж.** Линейные операторы. Общая теория. М., 1962. 892 с.

30. **Ильин В. П.** Некоторые неравенства в функциональных пространствах и их применение к исследованию сходимости вариационных процессов: Автореф. канд. дис. Л., 1951. 12 с.

31. **Ильин В. П.** К теореме вложения для предельного показателя. — Докл. АН СССР, 1954, т. 96, с. 905—908.

32. **Ильин В. П.** Некоторые интегральные неравенства и их применение к теории дифференцируемых функций многих переменных. — Мат. сб., 1961, т. 54, № 3, с. 331—380.

33. **Ильин В. П.** Интегральные представления дифференцируемых функций и их применение к вопросам продолжения функций классов $W_p^l(G)$. — Сиб. мат. журн., 1967, т. 8, № 3, с. 573—586.

34. **Ильин В. П.** Интегральные представления функций классов $L_p^l(G)$ и теоремы вложения. — Зап. науч. семинаров Лен. отд. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1970, т. 19, с. 95—155.

35. **Карлесон Л.** Избранные проблемы теории исключительных множеств. М., 1971. 126 с.

36. **Климов В. С.** Теоремы вложения для пространств Орлича и их приложения к краевым задачам. — Сиб. мат. журн., 1972, т. 13, № 2, с. 334—348.

37. **Климов В. С.** Изопериметрические неравенства и теоремы вложения. — Докл. АН СССР, 1974, т. 217, № 2, с. 272—275.

38. **Климов В. С.** Теоремы вложения и изопериметрические неравенства. — Изв. АН СССР, 1976, т. 40, № 3, с. 645—671.

39. **Кокилашвили В. М.** О неравенствах Харди в весовых пространствах. — Сообщ. АН Груз. ССР, 1979, т. 96, № 2, с. 37—40.

40. **Кондратьев В. А.** О разрешимости первой краевой задачи для эллиптических уравнений. — Докл. АН СССР, 1961, т. 136, № 4, с. 771—774.

41. **Кондратьев В. А.** О разрешимости первой краевой задачи для сильноэллиптических уравнений. — Труды Моск. мат. о-ва, 1967, т. 16, с. 209—292.

42. **Кондрашов В. И.** О некоторых свойствах функций из пространства L_p. — Докл. АН СССР, 1945, т. 48, с. 563—566.

43. **Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.** Выпуклые функции и пространства Орлича. М., 1958. 271 с.

44. **Кронрод А. С.** О функциях двух переменных. — Успехи мат. наук, 1950, т. 5, № 1, с. 24—134.

45. **Кудрявцев Л. Д.** Прямые и обратные теоремы вложения. Приложения к решению вариационным методом эллиптических уравнений. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1959, т. 55, с. 1—181.

46. **Курант Р., Гильберт Д.** Методы математической физики. М., 1951. 544 с.

47. **Ладыженская О. А.** Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., 1970. 288 с.

48. **Ландис Е. М.** Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. М., 1971. 287 с.

49. **Ландис Е. М.** О поведении решени эллиптических уравнений высокого порядка в неограниченных областях. — Труды Моск. мат. о-ва 1974, т. 31, с. 35—58.

50. **Ландкоф Н. С.** Основы современной теории потенциала. М., 1966. 545 с.

51. **Лаптев Г. А.** О замыкании в метрике обобщенного интеграла Дирихле. — Дифференциальные уравнения, 1971, т. 7, № 4, с. 727—736.

52. **Левин В. И.** Точные константы в неравенствах типа Карлсона. — Докл. АН СССР, 1948, т. 59, с. 635—639.

53. **Лизоркин П. И.** Граничные свойства функций из «весовых классов». — Докл. АН СССР, 1960, т. 132, № 3, с. 514—517.

54. **Лизоркин П. И.** Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и функциональные пространства $L_p^r(E_n)$. Теоремы вложения. — Мат. сб. 1963, т. 60, № 3, с. 325—353.

55. **Лизоркин П. И.** Обобщенные гельдеровы пространства $B_{p,\theta}^r$ и их соотношения с пространствами С. Л. Соболева L_p^r. — Сиб. мат. журн., 1968, т. 9, № 5, с. 1127—1152.

56. **Лизоркин П. И.** Оценки интегралов типа потенциала в нормах с разностными отношениями. — В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к некоторым задачам математической физики. Новосибирск, 1975, с. 94—109.

57. **Лизоркин П. И., Отелбаев М.** Теоремы вложения и компактности для пространств соболевского типа с весами. I — Мат. сб. 1979. т. 108, № 3, с. 358—377; II — Мат. сб., 1980, т. 112, № 1, с. 56—85.

58. **Лионс Ж.-Л., Мадженес Е.** Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., 1971. 371 с.

59. **Люстерник Л. А.** Неравенство Брунна—Минковского для произвольных множеств. — Докл. АН СССР, 1935, т. 3, с. 55—58.

60. **Мазья В. Г.** Классы областей и теоремы вложения функциональных пространств. — Докл. АН СССР, 1960, т. 133, № 3, с. 527—530.

61. **Мазья В. Г.** P-проводимость и теоремы вложения некоторых функциональных пространств в пространство C. — Докл. АН СССР, т. 140, № 2, 1961, с. 299—302.

62. **Мазья В. Г.** Классы множеств и теоремы вложения функциональных пространств: Автореф. канд. дис. М., 1962. 15 с.

63. **Мазья В. Г.** Об отрицательном спектре многомерного оператора Шредингера. — Докл. АН СССР, 1962, т. 144, № 4, с. 721—722.

64. **Мазья В. Г.** О задаче Дирихле для эллиптических уравнений произвольного порядка в неограниченных областях. — Докл. АН СССР, 1963, т. 150, № 6, с. 1221—1224.

65. **Мазья В. Г.** К теории многомерного оператора Шредингера. — Докл. АН СССР, 1964, т. 28, № 5, с. 1145—1172.

66. **Мазья В. Г.** Полигармоническая емкость в теории первой краевой задачи. — Сиб. мат. журн., 1965, т. 6, № 1, с. 127—148.

67. **Мазья В. Г.** О замыкании в метрике обобщенного интеграла Дирихле. — Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1967, т. 5, № 1, с. 192—195.

68. **Мазья В. Г.** О задаче Неймана в областях с нерегулярными границами. — Сиб. мат. журн., 1968, т. 9, № 6, с. 1322—1350.

69. **Мазья В. Г.** О слабых решениях задач Дирихле и Неймана. — Труды Моск. мат. о-ва, 1969, т. 2, с. 137—172.

70. **Мазья В. Г.** Классы множеств и мер, связанные с теоремами вложения. — В кн.: Теоремы вложения и их приложения (Труды симпозиума по теоремам вложения, Баку, 1966). М., 1970, с. 142—159.

71. **Мазья В. Г.** О некоторых интегральных неравенствах для функций многих переменных. — В кн.: Проблемы мат. анализа. Л., 1972, вып. 3, с. 33—68.

72. **Мазья В. Г.** Об устранимых особенностях ограниченных решений квазилинейных эллиптических уравнений любого порядка. — Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1972, т. 26, с. 116—130.

73. **Мазья В. Г.** Приложения некоторых интегральных неравенств к теории квазилинейных эллиптических уравнений. — Comment. Math. Univ. Carolinae, 1972, т. 13, № 3, с. 535—552.

74. **Мазья В. Г.** О вырождающейся задаче с косой производной. — Мат. сб., 1972, т. 87, № 3, с. 417—454.

75. **Мазья В. Г.** О (p, l)-емкости, теоремах вложения и спектре самосопряженного эллиптического оператора. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1973, т. 37, № 2, с. 356—385.

76. **Мазья В. Г.** О непрерывности и ограниченности функций из пространств С. Л. Соболева. — В кн.: Проблемы мат. анализа, Л., 1973, вып. 4, с. 46—77.

77. **Мазья В. Г.** О связи двух видов емкости. — Вестн. Ленингр. ун-та, 1974, № 7, с. 33—40.

78. **Мазья В. Г.** О суммируемости функций из пространств С. Л. Соболева. — В кн.: Проблемы мат. анализа. Л., 1975, вып. 5, с. 66—98.

79. **Мазья В. Г.** О емкостных оценках сильного типа для «дробных» норм. — Зап. науч. семинаров Ленингр. отд-ния Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1977, т. 70, с. 161—168.

80. **Мазья В. Г.** Об одном интегральном неравенстве. Семинар института прикладной математики Тбил. ун-та. — Доклады, 1978, № 12—13, с. 33—36.

81. **Мазья В. Г.** Мультипликаторы в пространствах С. Л. Соболева. — В кн.: Применение методов теории функций и функционального анализа к задачам математической физики. Пятое Советско-Чехословацкое совещание. Новосибирск, 1978, с. 181—189.

82. **Мазья В. Г.** О суммируемости по произвольной мере функций из пространств С. Л. Соболева-Л. Н. Слободецкого. — Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1979, т. 92, с. 192—202.

83. **Мазья В. Г.** Интегральное представление функций, удовлетворяющих однородным краевым условиям, и его приложения. — Изв. вуз. Математика, 1980, № 2, с. 34—44.

84. **Мазья В. Г.** Об одной теореме вложения и мультипликаторах в парах пространств С. Л. Соболева. — Труды Тбил. мат. ин-та им. А. М. Размадзе, 1980, т. 66, с. 59—69.

85. **Мазья В. Г., Дончев Т.** О регулярности по Винеру граничной точки для полигармонического оператора. — Докл. Болг. Акад. наук, 1983, т. 136, с. 177—179.

86. **Мазья В. Г., Отелбаев М.** О теоремах вложения и спектре одного псевдодифференциального оператора. — Сиб. мат. журн., 1977, т. 18, № 5, с. 1073—1087.

87. **Мазья В. Г., Преображенский С. П.** Об оценках (l, p)-емкостей и следах потенциалов. — Wissenschaftliche Informationen. Karl-Marx-Stadt. Sect. Math., 1981, N 28, S. 1—38.

88. **Мазья В. Г., Хавин В. П.** Нелинейный аналог ньютоновского потенциала и метрические свойства (p, l)-емкости. — Докл. АН СССР, 1970, т. 194, № 4, с. 770—773.

89. **Мазья В. Г., Хавин В. П.** Нелинейная теория потенциала. — Успехи мат. наук, 1972, т. 27, № 6, с. 67—138.

90. **Мазья В. Г., Хавин В. П.** Об аппроксимации в среднем аналитическими функциями. — Вестн. Ленингр. ун-та, 1968, № 13, с. 62—74.

91. **Мазья В. Г., Хавин В. П.** Приложения (p, l)-емкости к нескольким задачам теории исключительных множеств.— Мат. сб., 1973, т. 90, № 4, с. 558—591,

92. **Мазья В. Г., Хволес А. А.** О вложении пространства $L_p^l(\Omega)$ в пространство обобщенных функций. — Труды Тбил. мат. ин-та им. А. М. Размадзе, 1981, т. 66, с. 70—83.

93. **Мазья В. Г., Шапошникова Т. О.** О мультипликаторах в пространствах С. Л. Соболева. — Вестн. Ленингр. ун-та, 1979, № 7, с. 33—40.

94. **Мазья В. Г., Шапошникова Т. О.** Мультипликаторы в пространствах дифференцируемых функций. — В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математ ческой физики. Новосибирск, 1979, с. 37—90.

95. **Мазья В. Г., Шапошникова Т. О.** Мультипликаторы в парах пространств потенциалов. — Math. Nachrichten, 1980, Bd. 99, S. 363—379.

96. **Мазья В. Г., Шапошникова Т. О.** Замена переменных как оператор в паре пространств С. Л. Соболева. — Вестн. Ленингр. ун-та, 1982, № 1, с. 43—48.

97. **Мазья В. Г., Шапошникова Т. О.** Мультипликаторы в парах пространств дифференцируемых функций. — Труды Моск. мат. о-ва, 1981, т. 43, с. 37—80.

98. **Михлин С. Г.** Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М., 1962. 254 с.

99. **Молчанов А. М.** Об условиях дискретности спектра самосопряженных дифференциальных уравнений второго порядка. — Труды Моск. мат. о-ва, 1953, т. 2, с. 169—200.

100. **Натансон И. П.** Теория функций вещественной переменной. М., 1974. 480 с.

101. **Неванлинна Р.** Однозначные аналитические функции. М., 1941. 388 с.

102. **Никольский С. М.** Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1951, т. 38, с. 244—278.

103. **Никольский С. М.** Свойства некоторых классов функций многих переменных на дифференцируемых многообразиях. — Мат. сб., 1953, т. 33, № 2, 261—326.

104. **Никольский С. М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., 1977. 455 с.

105. **Олейник В. Л., Павлов Б. С.** О критериях ограниченности и полной непрерывности некоторых операторов вложения. — В кн.: Проблемы мат. физики. Л., 1970, вып. 4, с. 112—116.

106. **Отелбаев М.** Двусторонние оценки поперечников и их применения. — Докл. АН СССР, 1976, т. 231, № 4, с. 810—813.

107. **Отелбаев М.** Теоремы вложения пространств с весом и их применения к изучению спектра оператора Шредингера. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1979, т. 150, с. 265—305.

108. **Полиа Г.** и **Сеге Г.** Изопериметрические неравенства в математической физике. М., 1962. 336 с.

109. **Решетняк Ю. Г.** О понятии емкости в теории функций с обобщенными производными. — Сиб. мат. журн., 1969, т. 10, № 5, с. 1109—1138.

110. **Решетняк Ю. Г.** Некоторые интегральные представления дифференцируемых функций. — Сиб. мат. журн., 1971, т. 12, № 2, с. 420—432.

111. **Решетняк Ю. Г.** Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск, 1982. 285 с.

112. **Розенблюм Г. В.** Об оценках спектра оператора Шредингера. — В кн.: Проблемы мат. анализа. Л., 1975, № 5, с. 152—165.

113. **Слободецкий Л. Н.** Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложение к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных.— Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та им. А. И. Герцена, 1958, т. 197, с. 54—112.

114. **Смирнов В. И.** Курс высшей математики. Т. 5. М., 1959. 665 с.

115. **Соболев С. Л.** О некоторых оценках, относящихся к семействам функций, имеющих производные, интегрируемые с квадратом. — Докл. АН СССР, 1936, т. 1, с. 267—270.

116. **Соболев С. Л.** Об одной теореме функционального анализа. — Мат. сб., 1938, т. 4, № 3, с. 471—497.

117. **Соболев С. Л.** Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л., 1950. 255 с.

118. **Соболев С. Л.** Введение в теорию кубатурных формул. М., 1974. 808 с.

119. **Солонников В. А.** О некоторых свойствах пространств $\mathcal{W}^l_p$ дробного порядка. — Докл. АН СССР, 1960, т. 134, № 2, с. 282—285.

120. **Солонников В. А.** О некоторых неравенствах для функций из классов $W^m_p(R^n)$. — Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1972, т. 27, с. 194—210.

121. **Стейн И.** Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М., 1973. 342 с.

122. **Тащиян Г. М.** Классическая формула асимптотики спектра эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области. — Мат. заметки, 1981, т. 30, № 6, с. 871—880.

123. **Трибель Х.** Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М., 1980. 664 с.

124. **Уральцева Н. Н.** О несамосопряженности в $L_2(R^n)$ эллиптического оператора с быстро растущими коэффициентами. — Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1969, т. 14, с. 288—294.

125. **Успенский С. В.** Свойства классов W^r_p с дробной производной на дифференцируемых многообразиях. — Докл. АН СССР, 1960, т. 132, № 1, с. 60—62.

126. **Успенский С. В.** О теоремах вложения для весовых классов. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1961, т. 60, с. 282—303.

127. **Фаддеев Д. К.** О представлении суммируемых функций сингулярными интегралами в точках Лебега. — Мат. сб., 1936, т. 1, № 3, с. 352—368.

128. **Харди Г. Г., Литтлвуд Д. Е., Полиа Г.** Неравенства. М., 1948. 456 с.

129. **Хейман В. К.** Многолистные функции. М., 1960. 179 с.

130. **Хермандер Л.** Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М., 1965. 379 с.

131. **Шапошникова Т. О.** Эквивалентные нормировки в пространствах функций с дробной или функциональной гладкостью. — Сиб. мат. журн., 1980, т. 2, № 3, с. 184—196.

132. **Adams D. R.** Traces of potentials arising from translation invariant operators. — Ann. Sci. Norm. Sup. Pisa, 1971, vol. 25, N 1, p. 203—217.

133. **Adams D. R.** A trace inequality for generalized potentials. — Studia Math., 1973, vol. 48, N 1, p. 99—105.

134. **Adams D. R.** Traces of potentials II. — Ind. Univ. Math. J., 1973, vol. 22, N 10, p. 907—918.

135. **Adams D. R.** On the exceptional sets for spaces of potentials. — Pacific J. Math., 1974, vol. 52, N 1, p. 1—5.

136. **Adams D. R.** On the existence of capacitary strong type estimates in R^n. — Ark. Mat., 1976, vol. 14, N 1, p. 125—140.

137. **Adams D. R.** Sets and functions of finite L^p-capacity. — Ind. Univ. Math. J., 1978, vol. 27, p. 611—627.

138. **Adams D. R.** Lectures on L^p-potential theory. Preprint, Univ. of Umeå, Depart. of Math. 1981, N 2, p. 1—74.

139. **Adams D. R., Hedberg L. I.** Inclusion relations among fine topologies in non-linear potential theory. — Reports Depart. of Math., Univ. of Stockholm, Sweden, 1982, N 10, p. 1—15.

140. **Adams D. R., Meyers N. G.** Thinness and Wiener criteria for non-linear potentials. — Ind. Univ. Math. J., 1972, vol. 22, N 2, p. 139—158.

141. **Adams D. R., Meyers N. G.** Bessel potentials. Inclusion relations among classes of exceptional sets. — Ind. Univ. Math. J., 1973, vol. 22, N 9, p. 873—905.

142. **Adams D. R., Polking J. C.** The equivalence of two definitions of capacity. — Proc. Amer. Math. Soc., 1973, vol. 37, N 2, p. 529—534.

143. **Adams R. A.** Sobolev spaces. New York; San Francisco; London, 1975. 268 p.
144. **Amick C. J.** Some remarks on Rellich's theorem and the Poincaré inequality. — J. London Math. Soc. Ser. 2, 1978, vol. 18, pt. 1, p. 81—93.
145. **Andersson R.** Unbounded Soboleff regions. — Math. Scand., 1963, vol. 13, p. 75—89.
146. **Andersson R.** The type set of a generalized Sobolev operator. — Meddelanden fran Lunds Universitets Mat. Semin., 1972, vol. 19, p. 1—101.
147. **Aronszajn N.** On coercive integro-differential quadratic forms. — In: Conference on partial differential equations. Univ. of Kansas, 1954, Report N 14, p. 94—106.
148. **Aronszajn N., Mulla F., Szeptycki P.** On spaces of potentials connected with L^p-classes. — Ann. Inst. Fourier, 1963, vol. 13, N 2, p. 211—306.
149. **Aubin T.** Problèmes isopérimètriques et espaces de Sobolev. — C. R. Acad. Sci. Paris, 1975, t. 280, N 5, p. 279—281.
150. **Bagby T.** Approximation in the mean by solutions of elliptic equations. — Trans. Amer. Math. Soc., 1984, vol. 281, p. 761—784.
151. **Bagby T., Ziemer W. P.** Pointwise differentiability and absolute continuity. — Trans. Amer. Math. Soc., 1974, vol. 191, p. 129—148.
152. **Besicovitch A. S.** A general form of the covering principle and relative differentiation of additive functions. — In: Proc. Cambridge Philos. Soc. I — 1945, vol. 41, p. 103—110; II — 1946, vol. 42, p. 1—10.
153. **Beurling A.** Ensembles exceptionnels. — Acta Math., 1939, vol. 72., p. 1—13.
154. **Björup K.** On inequalities of Poincare's type. — Math. Scand., 1960, vol. 8, p. 157—160.
155. **Bokowski J., Sperner E.** Zerlegung konvexer Körper durch minimale Trennflächen. — J. reine und angew. Math., 1979, Bd. 311/312, S. 80—100.
156. **Caccioppoli R.** Misure e integrazione sugli insiemi dimensionalmente orientati. — Rend. della Accad. Naz. dei Lincei. Ser. 8, 1952, vol. 12, N 1, p. 3—11.
157. **Caccioppoli R.** Misure e integrazione sugli insiemi dimensionalmente orientati. — Rend. della Accad. Naz. dei Lincei. Ser. 8, 1952, vol. 12, N 2, p. 137—146.
158. **Campanato S.** Il teorema di immersione di Sobolev per una classe di aperti non dotati della proprieta di cono. — Ric. di Mat., 1962, vol. 11, N 1, p. 103—122.
159. **Calderon A. P.** Lebesgue spaces of differentiable functions and distributions. — Proc. Sympos. Pure Math., 1961, vol. 4, p. 33—49.
160. **Cartan H.** Sur les systèmes des fonctions holomorphes à variétés linéaires et leurs applications. — Ann. Ecole Norm. Sup., 1928, vol. 3, p. 255—346.
161. **Choquet G.** Theory of capacities. — Ann. Inst. Fourier, vol. 155, N 5, p. 131—395.
162. **Coifman R., Fefferman C.** Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals. — Studia Math., 1974, vol. 5, p. 241—250.
163. **Dahlberg B. E. J.** Regularity properties of Riesz potentials. — Ind. Univ. Math., J., 1979, vol. 28, N 2, p. 257—268.
164. **De Giorgi E.** Su una teoria generale della misure $(r-1)$-dimensionale in uno spazio ad r dimensioni. — Ann. Mat. Ser. 4, 1954, vol. 36, p. 191—213.
165. **De Giorgi E.** Nuovi teoremi relative alle misure $(r-1)$-dimensionale in spazio ad r dimensioni. — Ric. Mat., 1955, vol. 4, p. 95—113.
166. **Dinghas A.** Minkowskische Summen und Integrale, superadditiv Mengenfunktionale, isoperimetrische Ungleichungen. — Mem. Sci. Math., 1961, N 149, p. 1—101.
167. **Deny J., Lions J.-L.** Les espaces du type de Beppo Levi. — Ann. Inst. Fourier, 1953—1954, vol. 5, p. 305—370.
168. **Donoghue W. F., jr.** A coerciveness inequality. — Ann. Scuola Norm. Super. Pisa, 1966, vol. 20, p. 589—593.

169. **Edmunds D. E.** Embeddings of Sobolev spaces: Non-linear analysis, function spaces and applications. — Proc. of a spring school held in Horni Bradlo, 1978. Teubner-Texte zur Math. Leipzig, 1979, p. 38—58.
170. **Ehrling G.** On a type of eigenvalue problems for certain elliptic differential operators. — Math. Scand., 1954, vol. 2, p. 267—285.
171. **Federer H.** A note on the Gauss-Green theorem. — Proc. Amer. Math. Soc., 1958, vol. 9, p. 447—451.
172. **Federer H.** Curvature measures. — Trans. Amer. Math. Soc., 1959, vol. 93, N 3, p. 418—491.
173. **Federer H.** The area of non-parametric surfaces. — Proc. Amer. Math. Soc., 1960, vol. 11, N 3, p. 436—439.
174. **Federer H.** Geometric measure theory. Berlin; Heidelberg; New York, 1969. 676 p.
175. **Federer H.** A minimizing property of extremal submanifolds. — Arch. Rat. Mech. Anal., 1975, vol. 9, N 3, p. 207—217.
176. **Federer H., Fleming W. H.** Normal and integral currents. — Ann. Math., 1960, vol. 72, p. 458—520.
177. **Fleming W. H.** Functions whose partial derivatives are measures. — Illinois J. Math., 1960, vol. 4, N 3, p. 452—478.
178. **Fleming W. H., Rishel R. W.** An integral formula for total gradient variation. — Arch. Math., 1960, vol. 11, N 3, p. 218—222.
179. **Fraenkel L. E.** On regularity of the boundary in the theory of Sobolev spaces. — Proc. London Math. Soc., 1979, vol. 39, N 3, p. 385—427.
180. **Freud G., Králik D.** Über die Anwendbarkeit des Dirichletschen Prinzips für den Kreis. — Acta Math. Hung., 1956, Bd. 7, N 3—4, S. 411—418.
181. **Friedrichs K.** Spektraltheorie halbbeschrankter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren. — Math. Ann., 1934, Bd. 109, S. 465—487, 685—713.
182. **Gagliardo E.** Caratterizazioni delle trace sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in piu variabili. — Rend. Semin. Mat. Univ. Padova, 1957, vol. 27, p. 284—305.
183. **Gagliardo E.** Proprieta di alcune classi di funzioni in piu variabili. — Ric. Mat., 1958, vol. 7, p. 102—137.
184. **Gagliardo E.** Ulteriori proprieta di alcune classi di funzioni in piu variabili. — Ric., Mat., 1959, vol. 8, N 1, p. 24—51.
185. **Gelman I. W., Mazja W. G.** Abschätzungen für Differentialoperatoren im Halbraum. Berlin, 1982. 221 S.
186. **Gol'dstein V. M., Vodopjanov S. K.** Prolongement des fonctions de classe L_p^1 et applications quasi conformes. — C. R. Acad. Sci. Paris, 1980, t. 290, N 10, p. 453—456.
187. **Gustin W.** Boxing inequalities. — J. Math. Mech., 1960, vol. 9, 229—239.
188. **Hadwiger H.** Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie. Berlin; Göttingen; Heidelberg, 1957. 312 S.
189. **Hahn H., Rosenthal A.** Set functions. Albuquerque; New Mexico, 1948. 324 p.
190. **Hansson K.** On a maximal inbedding theorem of Sobolev type and spectra of Schrödinger operators. Diss. Linköping, 1978. 76 p.
191. **Hansson K.** Imbedding theorems of Sobolev type in potential theory. — Math. Scand., 1979, vol. 45, p. 77—102.
192. **Hansson K.** Continuity and compactness of certain convolution operators. Inst. Mittag-Leffler, 1982, Report N 9, p. 1—12.
193. **Hardy G. H., Littlewood . E., Pólya G.** Some simple inequalities satisfied by convex functions. — Messenger Math., 1929, vol. 58, N 10, p. 145—152.
194. **Hedberg L. I.** On certain convolution inequalities. — Proc. Amer. Math. Soc., 1972, vol. 36, N 2, p. 505—510.
195. **Hedberg L. I.** Two approximation problems in function spaces. — Ark. Mat., 1978, vol. 16, N 1, p. 51—81.

196. **Hedberg L. I.** Spectral synthesis in Sobolev spaces and uniqueness of solutions of the Dirichlet problem. — Acta Math., 1981, vol. 147, p. 237—264.

197. **Hedberg L. I., Wolff T. H.** Thin sets in non-linear potential theory. Ann. Inst. Fourier, 1983, vol. 33, N 4, p. 161—187.

198. **Hestenes M. R.** Extension of the range of a differentiable functions. — Duke Math. J., 1941, vol. 8, p. 183—192.

199. **Hoffmann D., Spruck J.** Sobolev and isoperimetric inequalities for Riemannian submanifolds. — Comm. Pure Appl. Math., 1974, vol. 27, N 6, p. 715—727; 1975, vol. 28, N 6, p. 765—766.

200. **Hörmander L., Lions J.-L.** Sur la complétion par rapport à une intégrale de Dirichlet. — Math. Scand., 1956, vol. 4, N 3, p. 259—270.

201. **Hurd A. E.** Boundary regularity in the Sobolev imbedding theorems. — Can. J. Math., 1966, vol. 18, N 2, p. 350—356.

202. **Jones P. W.** Quasiconformal mappings and extendability of functions in Sobolev spaces. — Acta Math., 1981, vol. 147, N 1—2, p. 71—88.

203. **Jonsson A., Wallin H.** A Whitney extension theorem in L^p and Besov spaces. — Ann. Inst. Fourier, 1978, vol. 28, f. 1, p. 139—192.

204. **Kolsrud T.** Approximation by smooth functions in Sobolev spaces, a counterexample. — Bull. London Math. Soc., 1981, vol. 13, p. 167—169.

205. **Krickeberg K.** Distributionen, Funktionen beschränkter Variation und Lebesguescher Inhalt nichtparametrischer Flächen. — Ann Mat. Ser. 4, 1957, vol. 44, p. 105—134.

206. **Kufner A.** Weighted Sobolev spaces. — Teubner Texte zur Math. Leipzig, 1980. 152 S.

207. **Leray J., Lions J.-L.** Quelques résultats de Višik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder. — Bull. Soc. Math., France, 1965, vol. 93, p. 97—107.

208. **Levi B.** Sul prinzipio di Dirichlet. — Rend. Palermo, 1906, vol. 22, p. 293—359.

209. **Lichtenstein L.** Eine elementare Bemerkung zur reelen Analysis. — Math. Z., 1929, Bd. 30, S. 794—795.

210. **Lions J.-L.** Ouverts m-réguliers. — Revista de la Union Mat. Argentina, 1955, vol. 17, p. 103—116.

211. **Littman W.** A connection between α-capacity and (m, p)-polarity. — Bull. Amer. Math. Soc., 1967, vol. 73, p. 862—866.

212. **Littman W.** Polar sets and removable singularities of partial differential equation. — Ark. Math., 1967, Bd. 7, N 1, S. 1—9.

213. **Mazja W. G.** Einbettungssätze für Sobolewsche Räume. Teubner-Texte zur Math. T. 1. Leipzig, 1979. 204 S; T. 2, 1980. 188 S.

214. **Mazja W. G.** Zur Theorie Sobolewscher Räume. Teubner-Texte zur Math. Leipzig, 1981. 170 S.

215. **Maz'ya V. G.** Behaviour of solutions to the Dirichlet problem for the biharmonic operator at a boundary point. Equadiff IV. Prague, 1977. — Lecture Notes in Mathematics, 1979, vol. 703, p. 250—262.

216. **Meyers N. G.** A theory of capacities for potentials of functions in Lebesgue classes. — Math. Scand, 1970, vol. 26, N 2, p. 255—292.

217. **Meyers N. G.** Continuity of Bessel potentials. — Israel J. Math., 1972, vol. 11, N 3, p. 271—283.

218. **Meyers N. G.** Integral inequalities of Poincaré and Wirtinger type. — Arch. Rat. Mech. Anal., 1978, vol. 68, N 2, p. 113—120.

219. **Meyers N., Serrin J.** H-W. — Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1964, vol. 51, p. 1055—1056.

220. **Michael J. H., Simon L. M.** Sobolev and mean-value inequalities on generalized submanifolds of R^n. — Comm. Pure Appl. Math., 1973, vol. 26, N 3, p. 362—379.

221. **Miranda M.** Disuguaglianze di Sobolev sulle ipersuperfici minimali. — Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 1967, vol. 38, p. 69—79.

222. **Morrey C. B.** Functions of several variables and absolute continuity II. — Duke Math. J., 1940, vol. 6, p. 187—215.

223. **Morrey C. B.** Multiple integrals in the calculus of variations. Berlin; Heidelberg; New York, 1966. 506 p.

224. **Morse A. P.** The behavior of a function on its critical set. — Ann. Math. 1939, vol. 40, N 1, p. 62—70.

225. **Morse A. P.** A theory of covering and differentiation. — Trans. Amer. Math. Soc., 1944, vol. 55, p. 205—235.

226. **Muckenhoupt B.** Hardy's inequality with weights. — Studia Math. 1972, vol. 44, N 1, p. 31—38.

227. **Muckenhoupt B.** Weight d norm inequalities for the Hardy maximal function. — Trans. Amer. Math. Soc., 1972, vol. 165, p. 207—226.

228. **Nečas J.** Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques. Prague, 1967. 351 p.

229. **Nikodým O.** Sur une classe de fonctions considérées dans le problème de Dirichlet. — Fundam. Mat., 1933, vol. 21, p. 129—150.

230. **Nirenberg L.** On elliptic partial differential equation (Lecture II). — Ann. Scuola Norm. Super Pisa. Ser. 3, 1959, vol. 13, p. 115—162.

231. **Nirenberg L.** An extended interpolation inequality. — Ann. Scuola Norm. Super. Pisa. Sci. fis. e mat., 1966, vol. 20, N 4, p. 733—737.

232. **Osserman R.** The isoperimetric inequality. — Bull. Amer. Math. Soc., 1978, vol. 84, N 6, p. 1182—1238.

233. **Otsuki T.** A remark on the Sobolev inequality for Riemannian submanifolds. — Proc. Japan Acad., 1975, vol. 51, p. 785—789.

234. **Peetre J.** New thoughts on Besov spaces: Duke Univ. Math. Series, I. Durham, 1976. 304 p.

235. **Pfaltzgraff J. A.** Radial symmetrization and capacities in space. — Duke Math. J., 1967, vol. 34, N 4, p. 747—755.

236. **Polking J C.** Approximation in L^p by solutions of elliptic partial differential equations. — Amer. J. Math., vol. 94, 1972, p. 1231—1244.

237. **Pólya G., Szegö G.** Inequalities for the capacity of a condenser. — Amer. J. Math., 1945, vol. 67, p. 1—32.

238. **Rellich F.** Ein Satz über mittlere Konvergenz. — Math. Nachr., 1930, Bd. 31, S. 30—35.

239. **Rickman S.** Characterization of quasiconformal arcs. — Ann. Acad. Sci. Fenn., 1966, AI—395, p. 7—30.

240. **Rosen G.** Minimum value for C in the Sobolev inequality $\|\varphi^3\| \leqslant C \|\operatorname{grad} \varphi\|^3$. — SIAM J. Appl. Math., 1971, vol. 21, N 1, p. 30—33.

241. **Schmidt E.** Über das isoperimetrische Problem im Raum von n Dimensionen. —Math. Z., 1939, Bd. 44, S. 689—788.

242. **Schwartz L.** Théorie des distributions. Paris, 1973. 420 p.

243. **Sjödin T.** Capacities of compact sets in linear subspaces of R^n. — Pacif J. Math., 1978, vol. 78, N 1, p. 261—266.

244. **Smith K. T.** Inequalities for formally positive integro-differential forms. — Bull. Amer. Math. Soc., 1961, vol. 67, p. 368—370.

245. **Souček J.** Spaces of functions on domain Ω, whose k-th derivatives are measures defined on $\bar{\Omega}$. — Časopis Pest. Mat., 1972, vol. 97, p. 10—46, 94.

246. **Stampacchia G.** Problemi al contorno ellittici, con dati discontinui, dotati di soluzioni hölderiane. — Ann. Mat. pura ed applicata, Ser 4. 1958, vol. 51, p. 1—38.

247. **Strichartz R. S.** Multipliers on fractional Sobolev spaces. — J. Math. a. Mech., 1967, vol. 16, N 9, p. 1031—1060.

248. **Taibleson M. H.** Lipschitz classes of functions and distributions in E_n. — Bull. Amer. Math. Soc., 1963, vol. 69, N 4, p. 487—493.

249. **Taibleson M. H.** On the theory of Lipschitz spaces of distributions on Euclidean *n*-space. I. Principal properties. — J. Math. a. Mech., 1964, vol. 13, N 3, p. 407—479.

250. **Talenti G.** Best constant in Sobolev inequality. — Ann. Mat. pura ed Appl. Ser 4 1976, vol. 110, p. 353—372.

251. **Tonelli L.** L'estremo assoluto degli integrali döppi. — Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 1933. vol. 2, p. 89—130.

252. **Triebel H.** Spaces of Besov — Hardy — Sobolev type. Teubner-Texte zur Math. Leipzig, 1978. 207 S.

253. **Whitney H.** A function not constant on a connected set of critical points. — Duke Math. J., 1935, vol. 1, p. 514—517.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3
Введение 5

Глава 1. **Основные свойства пространств С. Л. Соболева** 11

§ 1.1. Пространства $L_p^l(\Omega)$, $V_p^l(\Omega)$ и $W_p^l(\Omega)$ . . . . —
§ 1.2. Некоторые факты теории множеств и теории функций . . . 33
§ 1.3. Некоторые неравенства для функций одной переменной . . 41
§ 1.4. Теоремы вложения типа С. Л. Соболева 50
§ 1.5. Еще о продолжении функций из пространств С. Л. Соболева 67
§ 1.6. Неравенства для функций, исчезающих на границе вместе с производными до некоторого порядка 74

Глава 2. **Неравенства, содержащие первые производные функций, равных нулю на границе** 81

§ 2.1. Условия справедливости интегральных неравенств (случай $p=1$) 82
§ 2.2. О (p, Φ)-емкости 91
§ 2.3. Условия справедливости интегральных неравенств (случай $p \geqslant 1$) 97
§ 2.4. Непрерывность и компактность операторов вложения $\mathring{L}_p^1(\Omega)$ и $\mathring{W}_p^1(\Omega)$ в пространство Орлича 113
§ 2.5. Приложения к спектральной теории многомерного оператора Шредингера 119
§ 2.6. Об одной вырождающейся квадратичной форме 127
§ 2.7. О пополнении в метрике обобщенного интеграла Дирихле 129
§ 2.8. Комментарии к главе 2 133

Глава 3. **О суммируемости функций из пространства $L_1^1(\Omega)$** 136

§ 3.1. Предварительные сведения . . . . —
§ 3.2. Классы множеств J_α и вложение $L_1^1(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$ 138
§ 3.3. Субареальные отображения и классы J_α 145
§ 3.4. Двусторонние оценки функции λ для области из примера Никодима 150

§ 3.5. Компактность вложения $L_1^1(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$ $(q \geq 1)$ 152
§ 3.6. Вложение $W_{1,r}^1(\Omega, \partial\Omega)$ в $L_q(\Omega)$ 154
§ 3.7. Комментарии к главе 3 158

Глава 4. О суммируемости функций из пространства $L_p^1(\Omega)$ 159

§ 4.1. О p-проводимости . . . . —
§ 4.2. О мультипликативном неравенстве для функций, равных нулю на подмножестве Ω 162
§ 4.3. Классы множеств $I_{v,\alpha}$ 164
§ 4.4. Вложение $W_{p,s}^1(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$ при $q<p$ 171
§ 4.5. Еще о примере Никодима 184
§ 4.6. Некоторые обобщения 190
§ 4.7. Вложение $W_{p,r}^1(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$ $(r>q)$ для областей бесконечного объема 193
§ 4.8. О компактности вложения $L_p^1(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$ 203
§ 4.9. О вложении $L_p^l(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$ 207
§ 4.10. Приложения к задаче Неймана для сильно эллиптических операторов 208
§ 4.11. Неравенства, содержащие интегралы по границе 215
§ 4.12. Комментарии к главе 4 224

Глава 5. О непрерывности и ограниченности функций из пространств С. Л. Соболева 226

§ 5.1. О вложении $W_p^1(\Omega)$ в $C(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ . . . . —
§ 5.2. О мультипликативной оценке модуля функции из $W_p^1(\Omega)$ 230
§ 5.3. О модуле непрерывности функций из $L_p^1(\Omega)$ 233
§ 5.4. Ограниченность функций с производными из класса Орлича 235
§ 5.5. О компактности вложения $W_p^1(\Omega)$ в $C(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ 237
§ 5.6. Обобщения на пространства С. Л. Соболева произвольного целого порядка 241

Глава 6. О функциях из пространства $BV(\Omega)$ 247

§ 6.1. Свойства периметра множества и функций из $BV(\Omega)$ 248
§ 6.2. Формула Гаусса—Остроградского для липшицевых функций 254
§ 6.3. О продолжении функций из $BV(\Omega)$ на все пространство . . 263
§ 6.4. Некоторые точные константы для выпуклых областей . . . 268
§ 6.5. Грубый след функции из $BV(\Omega)$ и некоторые интегральные неравенства 273
§ 6.6. След функции из $BV(\Omega)$ на границе и формула Гаусса—Остроградского 280
§ 6.7. Комментарии к главе 6 286

Глава 7. **Некоторые функциональные пространства, емкости и потенциалы** 287
§ 7.1. Пространства дифференцируемых функций любого положительного порядка . . . . —
§ 7.2. Некоторые сведения из теории потенциала 293

Глава 8. **О суммируемости по произвольной мере функций из пространств дифференцируемых функций** 301
§ 8.1. Описание результатов . . . . —
§ 8.2. Оценка интеграла от емкости множества, ограниченного поверхностью уровня 303
§ 8.3. Условия справедливости теорем вложения в терминах изопериметрических неравенств 309
§ 8.4. Вложение в $L_q(\mu)$ при $p>q>0$ 310
§ 8.5. Теоремы типа Картана и оценки емкости 314
§ 8.6. Теоремы вложения (условия в терминах шаров) 318
§ 8.7. Теоремы вложения в случае $p=1$ 321
§ 8.8. Критерии компактности 323
§ 8.9. Комментарии к главе 8 324

Глава 9. **Об одной разновидности емкости** 326
§ 9.1. Емкость Cap . . . . —
§ 9.2. О (p, l)-полярных множествах 331
§ 9.3. Эквивалентность двух емкостей 332
§ 9.4. Комментарии к главе 9 335

Глава 10. **Интегральное неравенство для функций на кубе** 336
§ 10.1. Связь точной константы с емкостью (случай $k=1$) . . . . —
§ 10.2. Связь точной константы с (p, l)-внутренним диаметром (случай $k=1$) 342
§ 10.3. Оценки точной константы в общем случае 345
§ 10.4. Комментарии к главе 10 355

Глава 11. **Вложение пространства $\mathring{L}_p^l(\Omega)$ в другие функциональные пространства** 356
§ 11.1. Постановка задачи . . . . —
§ 11.2. Вложение $\mathring{L}_p^l(\Omega)$ в $\mathcal{D}'(\Omega)$ 357
§ 11.3. Вложение $\mathring{L}_p^l(\Omega)$ в $L_q(\Omega, \mathrm{loc})$ 361
§ 11.4. Вложение $\mathring{L}_p^l(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$ (случай $p\leq q$) 365
§ 11.5. Вложение $\mathring{L}_p^l(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$ (случай $q>p\geq 1$) 369
§ 11.6. Компактность вложения $\mathring{L}_p^l(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$ 374
§ 11.7. Приложения к задаче Дирихле для сильно эллиптического оператора 376
§ 11.8. Комментарии к главе 11 381

Глава 12. Вложение $\overset{\circ}{L}{}_p^l(\Omega, \nu)$ в $W_r^m(\Omega)$ 383

§ 12.1. Вспомогательные утверждения . . . . —

§ 12.2. Непрерывность оператора вложения $\overset{\circ}{L}{}_p^l(\Omega, \nu)$ в $W_r^m(\Omega)$ 385

§ 12.3. Компактность оператора вложения $\overset{\circ}{L}{}_p^l(\Omega, \nu)$ в $W_r^m(\Omega)$ 388

§ 12.4. О замыкании операторов вложения 392

§ 12.5. Приложения. положительная определенность и дискретность спектра сильно эллиптического оператора 395

§ 12.6. Комментарии к главе 12 397

Условные обозначения 399

Указатель литературы 401