8. Задача на Дирихле за елиптични уравнения от втори ред. Лема на Лакс-Милграм. Съществуване на обобщено решение. Фредхолмовост.

Въведение. Изучаването на елиптичните уравнения започва с въвеждането на уравнението на Лаплас

$$\Delta u \equiv u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3} = 0,$$

където $u = u(x_1, x_2, x_3)$ е търсената функция на три променливи. То се нарича още уравнение на потенциала, понеже се удовлетворява от потенциалите на полета, създадени от пространствено разпределени електрически заряди или гравитационни маси. Изучаването на свойствата на потенциалите на електрическите или гравитацинни полета чрез изучаването на гранични задачи за уравнението на потенциала, което е частно диференциално уравнение от втори ред, се оказало извънредно плодотворна идея и инспирирало появата на теорията на частните диференциални уравнения, която с цялото многообразие от идеи и методи е съществена част от съвременната математика и е повлияла съществено за развитието на редица нейни направления, например за развитието на функционалния анализ.

Ако разгледаме потенциала на поле, който не се променя при изменението на третата променлива x_3 (такъв е например потенциалът на тънък еднороден зареден прът разположен по оста Ox_3), понеже $u_{x_3x_3} = 0$, стигаме до двумерното уравнение на Лаплас

$$\Delta u \equiv u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} = 0,$$

в което се търси функцията на две променливи $u = u(x_1, x_2)$.

Типични гранична задача за уравнеието на Лаплас е задачата на Дирихле, в която се търси решението $u = u(x_1, x_2, x_3)$ на уравнението на Лаплас в ограничена област G, като стойностите му по границата й Γ са известни

$$\Delta u \equiv u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3} = 0, \ x \in G,$$

$$u(x) = g(x) \text{ при } x \in \Gamma,$$

като $g : \Gamma \to R$ е известна непрекъсната функция на x. Тази задача е математически модел за описание както на електрическо поле, така и на гравитационно поле, създадено от неподвижно разположени в пространството съответно заряди или маси. Виждаме, че различни по своята физическа природа явления се описват чрез един и същ математически модел.

Друга задача, естествена от физическа гледна точка, е задачата на Нойман

$$\Delta u \equiv u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3} = 0, \ x \in G,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = g(x) \text{ при } x \in \Gamma,$$

при която във всяка точка x от границата Γ се задава производната на решението $\frac{\partial u}{\partial n}(x)$ по направление на единичния външен нормален вектор $n = (n_1, n_2, n_3)$.

Класификацията на частните диферениициални уравнения от втори (и по-висок ред) на елиптични, хиперболични и параболични е математическа.

От физическа гледна точка елиптични са уравненията, които описват така наречените стационарни процеси, т.е. процеси, при които измененията във времето вече са приключили.

Хиперболични са уравненията, които описват нестационарни процеси, или още ги наричат еволюционни процеси, т.е. процеси при които се наблюдават изменения във времето, но за които смущенията (трептенията) се разпространяват със крайна скорост. Типичен представител е уравнението, което описва разпространението на трептенията, например звуковите трептения, електромагнитните трептения и в частност разпространението на светлината. Математически модел (при известни предположения) за тези разнородни процеси е вълновото уравнение

$$u_{tt} - a^2 \Delta u \equiv u_{tt} - a^2 (u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + u_{x_3 x_3}) = 0, \; a = Const > 0,$$

като в случая на звукови трептения $u = u(t, x)$ е отклонението на точка $x = (x_1, x_2, x_3)$ от трептящата среда от равновесното ѝ положение в момент от време t.

Параболични са тези еволюционни (нестационарни) уравнения, при които разпространението на смущенията става с безкрайна скорост, т.е. малко изменение на решението в дадена точка предизвиква веднага изменение на решението във всички точки (разбира се изменението е малко в отдалечените точки). Типичен представител тук е уравнението на топлопроводността

$$u_t - a^2 \Delta u \equiv u_t - a^2 (u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + u_{x_3 x_3}) = 0, \; a = Const > 0,$$

описващо изменението на температурата $u = u(t, x)$ на произволна точка $x = (x_1, x_2, x_3)$ от топлопроводящата среда при изменението на времето t.

Да разгледаме граничната задача, описваща трептенията с малка амплитуда (големина) на еластична мембрана.

$$u_{tt} - a^2 \Delta u \equiv u_{tt} - a^2 (u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2}) = 0, \; G = (0, \infty) \times D,$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \; x \in D,$$

$$u_t(0, x) = \psi(x), \; x \in D,$$

$$u(t, x) = g(x), \; x \in \gamma, \; t \geq 0.$$

Предполага се, че в спокойно състояние мембраната (незакрепена по краищата) е плоска и лежи в хоризонталната равнина Ox_1x_2, заемайки областта $D \in R^2$ с граница γ, а при трептения с малка амплитуда (големина) всяка точка се движи нагоре-надолу по вертикална права, като

$u = u(t, x_1, x_2)$ е големината на отклонението на точката от мембраната с координати $x = (x_1, x_2)$ от равновесното ѝ положение в момент от време t. Граничното условие $u(t, x) = g(x),\ x \in \gamma,\ t \geq 0$ показва, че мембраната е закрепена (опъната) по края, защото във всеки момент точките от края имат предписаните чрез функцията g отклонения Началното условие $u(0, x) = \varphi(x),\ x \in D$ показва каква е формата на мембраната в началния момент, а началното условие $u_t(0, x) = \psi(x),\ x \in D$ показва какви са началните скорости на точките от мембраната. Ако предизвикаме трептения на мембраната, след което я оставим да трепти свободно, без външно въздействие, то под влияние на загуби на енергия заради съпротивлението на средата и триене в самата мембрана, големината на трептенията ще намалява постепенно и в един момент мембраната ще престане да трепти, и ще застане в равновесно положение. Тъй като в равновесно положение u не се изменя с времето (мембраната е неподвижна), то $u_{tt} = 0$ и горната нестационарна задача преминава в стационарната задача,

$$\Delta u = u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} = 0,\ x \in D,$$

$$u|_{\gamma} = g(x),\ x \in \gamma,$$

описваща равновесното положение на закрепената мембрана, която очевидно съвпада по форма с двумерната задача на Дирихле за уравнението на потенциала.

До същата стационарна задача на Дирихле стигаме, ако си представим, че мембраната е топлопроводяща еднородна пластина (например метална) заемаща областта $D \in R^2$ с граница γ в равнината Ox_1x_2, а $u = u(t, x_1, x_2)$ е температурата на точка $x = (x_1, x_2)$ от нея, измерена в момент t. Граничната задача

$$u_t - a^2 \Delta u \equiv u_t - a^2(u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2}) = 0,\ G = (0, \infty) \times D,$$

$$u(0, x) = \varphi(x),\ x \in D,$$

$$u(t, x) = g(x),\ x \in \gamma,\ t \geq 0.$$

описва процесите на топлопренасяне в пластината, като по границата на пластината се поддържа предписаната чрез функцията g температура, а чрез функцията φ е зададена началната температура на всяка точка от пластината. С времето в пластината ще се установи стационарно разпределение на температурата, което отново удовлетворява формулираната погоре двумерна задача на Дирихле.

Дадохме примери на няколко различни от физическа гледна точка явления, които се описват с един и същи математически модел – задачата на Дирихле за уравнението на Лаплас.

Обикновено се търсят "класически" решения на разгледаните гранични задачи, т.е. функции притежаващи непрекъснати производни до втори ред, които удовлетворяват уравнението и граничните условия. В някои случаи класически решения просто няма и е уместно да се търсят така наречените обобщени решения. Развитието на числените методи също води до необходимостта от разглеждането на обобщени решения. Вече са развити множество подходи, които позволяват сравнително лесно да се намерят обобщени решения принадлежащи на някое соболево пространство. След това се показва, ако е възможно, че обобщените решения притежават и по-висока гладкост, мерена по скалата на соболевите пространства. Тогава теоремите за влагане на соболевите пространства в пространствата от функции с непрекъснати производни ни позволяват да заключим, че намерените обобщени решения са и класически.

Ще дадем още един извод на уравнението на Лаплас, описващо стационарното положение на закрепена мембрана. Той е повлиял в голяма степен за намирането на естествени обобщени формулировки на граничните задачи.

Потенциалната енергията на опънатата мембрана с точност до постоянен множител се дава с формулата

$$E(u) = \int_D (u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2) dD.$$

Потенциалната енергия $E(u)$ се мени с изменението на формата на мембраната, т.е. на функцията u. Следователно $E(u)$ е функционал (изображение (функция) приемащо реални стойности, с аргумент, който е функция). Ясно е, че мембраната ще бъде в равновесно положение, когато потенциалната енергия е най-малка. Следователно намирането на формата на мембраната в равновесно (стационарно) положение се свежда до намиране на минимума на функционала $E(u)$, разглеждан в множеството от функции $u = u(x)$, $x = (x_1, x_2) \in \overline{D}$, които удовлетворяват граничното условие

$$u|_\gamma = g(x), \ x \in \gamma.$$

Това е типична задача за вариационното смятане, което се знимава с намирането на екстремумуми на функционали. Има стандартен способ за намирането на необходимо условие за екстремум. Да допуснем, че минимума на функционала $E(u)$ се достига за функцията u. Като варираме аргумента на функционала около u (оттук идва и названието вариационно смятане), разглеждайки функционала за еднопараметричната фамилия от функции $u(x) + t\varphi(x)$, $t \in R$, където $\varphi \in C_0^1(D)$ е произволно избрана функция виждаме, че функцията на една променлива

$$h(t) \equiv E(u + t\varphi) = \int_D [(u + t\varphi)_{x_1}^2 + (u + t\varphi)_{x_2}^2)] dD,$$

която е квадратен тричлен на t, достига минимума си при $t = 0$. Оттук веднага заключаваме, че това е възможно само, ако коефициентът пред t е равен на нула, т.е.

$$\int_D (u_{x_1}\varphi_{x_1} + u_{x_2}\varphi_{x_2})dD = 0 \; \forall \varphi \in C_0^1(D). \qquad *$$

Тъй като при дефинирането на $E(u)$ участват само първи частни производни на u, естествено е, под решение на задачата за намиране на равновесното положение на закрепена по краищата еластична мембрана, да разбираме функция $u \in C^1(D) \cap C(\overline{D})$, която удовлетворява граничното условие $u|_\gamma = g(x),\ x \in \gamma$, и за която функционалът $E(u)$ достига минимума си. Необходимо условие за това е, да бъде изпълнено интегралното тъждество $*$ за всички еднократно гладки финитни пробни функции $\varphi \in C_0^1(D)$. Ако допълнително предположим, че функцията $u \in C^2(D)$, то като прехвърлим в тъждеството $*$ диференцирането от пробните функции φ върху u с интегриране по части, тъй като φ е нула в околност на границата, получаваме

$$\int_D \Delta u \varphi dD = \int_D (u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2})\varphi dD = 0 \; \forall \varphi \in C_0^1(D).$$

Оттук следва, че u удовлетворява уравнението на Лаплас

$$\Delta u = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} = 0,\ x \in D.$$

Следователно интегралното тъждество $*$ може да се разглежда като обобщена формулировка на уравнението на Лаплас. Интегралът на енергията $E(u)$ и интегралното тъждество $*$ имат смисъл и за функции, които притежават първи производни със сумируем квадрат. По тази причина такива функции, които удовлетворяват $*$ можем да разглеждаме като обобщени решения на уравнението на Лаплас. Можем да бъдем още по-крайни. Ще разглеждаме $*$ за пробни функции $\varphi \in C_0^2(D)$. Тогава с интегриране по части прехвърляме производните от u върху φ и получаваме интегралното тъждество

$$\int_D u \Delta \varphi dD = \int_D u(\varphi_{x_1x_1} + \varphi_{x_2x_2})dD = 0 \; \forall \varphi \in C_0^2(D). \qquad **$$

То има смисъл за $u \in L^2(D)$ (или $u \in L_1^{loc}(D)$) и такива функции, ако удовлетворяват $**$, ще наричаме слаби решения на уравнението на Лаплас. При тази слаба формулировка действието на диференциалния оператор Δ е прехвърлено върху пробните функции в интегралното тъждество, което трябва да бъде изпълнено за всяка една пробна функция φ от указания клас.

*

* *

След това пространно въведение, да разгледаме следната граничната задача на Дирихле

Задача D_1.

$$-\Delta u + u \equiv -u_{x_1x_1} - u_{x_2x_2} - u_{x_3x_3} + u = f, \ x \in G,$$

$$u(x) = 0 \text{ при } x \in \Gamma,$$

където G е област в R^m с граница Γ.

За методите, с които ще си служим по-нататък, е по удобно да разглеждаме нехомогенно уравнение с хомогенни (нулеви) гранични условия, така че функциите удовлетворяващи граничните условия да образуват линейно пространство. Има стандартен начин за свеждане на гранична задача с нехомогенни гранични условия, към гранична задача с хомогенни гранични условия за нехомогенно уравнение.

Уравнението е специално подбрано, за да можем да видим как ще доказваме съществуване на обобщени решения във възможно най-чист вид, т.е. с най-малко допълнителни технически детайли.

Водени от съображения, подобни на изложените по-горе, даваме следната

Дефиниция. Функцията $u \in \mathring{H}^1(G)$ ще наричаме обобщено решение на граничната задача на Дирихле D_1 с дясна част $f \in L_2(G)$, ако

$$\int\limits_G (u_{x_1}\varphi_{x_1} + u_{x_2}\varphi_{x_2} + u_{x_3}\varphi_{x_3} + u\varphi) dG = \int\limits_G f\varphi, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(G). \tag{1}$$

Забележка. Изискването u да е нула по границата Γ в обобщената формулировка сме отразили, като специално сме поискали не само u да притежава обобщени производни със сумируем квадрат в G, т.е. да принадлежи на соболевия клас $H^1(G)$, но дори да бъде от по-тясното линейно подпространство $\mathring{H}^1(G)$, което се състои от границите на сходящите по нормата $\|\cdot\|_1$ редици от функции принадлежащи на $C_0^\infty(G)$.

Тъй като $\mathring{H}^1(G)$ е хилбертово пространство със скаларно произведение

$$(u, v)_1 \equiv \int\limits_G (u_{x_1}v_{x_1} + u_{x_2}v_{x_2} + u_{x_3}v_{x_3} + uv) dG,$$

виждаме, че по дефиниция $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(G)$ е обобщено решение на горната задача на Дирихле, когато

$$(u, \varphi)_1 = (f, \varphi), \ \forall \varphi \in C_0^\infty(G).$$

За избраното уравнение при обобщената формулировка на граничната задача, отляво на интегралното тъждество стои скаларното произведение в $H^1(G)$, а отдясно – скаларното произведение в $L_2(G)$.

Тъй като скаларните произведения са непрекъснати относно аргументите си, поради неравенството на Коши-Буняковски, а $C_0^\infty(G)$ е навсякъде гъсто подмножество на $\overset{\circ}{H}{}^1(G)$, ще покажем, че в дефиницията за обобщено решение можем да използваме пробни функции $v \in \overset{\circ}{H}{}^1(G)$.

Нека $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(G)$ е обобщено решение, а $v \in \overset{\circ}{H}{}^1(G)$ е произволна функция и $\varphi_j \in C_0^\infty(G)$ е редица от (безкрайно гладки) финитни функции, за които

$$\|v - \varphi_j\| \leq \|v - \varphi_j\|_1 \to 0.$$

Използвайки неравенството на Коши-Буняковски имаме

$$|(u, v)_1 - (u, \varphi_j)_1| = |(u, v - \varphi_j)_1| \leq \|u\|_1 \|v - \varphi_j\|_1 \to 0, \ j \to \infty,$$

т.е. $(u, \varphi_j)_1 \to (u, v)_1$ при $j \to \infty$ и аналогично

$$|(u, v) - (u, \varphi_j)| = |(u, v - \varphi_j)| \leq \|u\| \|v - \varphi_j\| \to 0, \ j \to \infty,$$

т.е. $(u, \varphi_j) \to (u, v)$ при $j \to \infty$.

По предположение

$$(u, \varphi_j)_1 = (f, \varphi_j)$$

и устремявайки $j \to \infty$, с граничен преход получаваме интегралното тъждество

$$(u, v)_1 = (f, v).$$

Така установихме, че можем да дадем следната еквивалентна на горната дефиниция на обобщено решение.

Дефиниция. Функцията $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(G)$ ще наричаме обобщено решение на граничната задача на Дирихле D_1 с дясна част $f \in L_2(G)$, ако

$$(u, v)_1 = (f, v), \ \forall v \in \overset{\circ}{H}{}^1(G). \tag{2}$$

Сега, използвайки теоремата на Рис лесно ще получим съществуване на обобщено решение.

Теорема. За всяка дясна част $f \in L_2(G)$ задачата на Дирихле D_1 притежава единствено обобщено решение $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(G)$.

Доказателство. Най-напред ще получим априорна оценка, от която следва единствеността на обобщеното решение. Нека u е обобщено решение и за него е изпълнено интегралното тъждество (2). Като положим в него $v = u$ имаме

$$\|u\|^2 = (u,u)_1 = (f,u) \leq \|f\|\|u\| \leq \|f\|\|u\|_1,$$

т.е.

$$\|u\|^2 \leq \|f\|\|u\|_1.$$

Оттук при $u \neq 0$ следва неравенството

$$\|u\|_1 \leq \|f\|. \tag{3}$$

То очевидно е изпълнено и при $u = 0$.

От получената априорна оценка (3), и тъй като граничната задача на Дирихле е линейна, следва единствеността на обобщеното решение. Наистина, ако u_1 и u_2 са обобщени решения на граничната задача с дясна страна функцията f, то като извадим интегралните тъждества

$$(u_1, v)_1 = (f,v),\ \forall v \in \mathring{H}^1(G),$$

$$(u_2, v)_1 = (f,v),\ \forall v \in \mathring{H}^1(G),$$

за разликата $u = u_1 - u_2$ на двете решения получаваме

$$(u,v)_1 = 0,\ \forall v \in \mathring{H}^1(G),$$

т.е. u е обобщено решение на задачата D_1 с дясна част нула. От априорната оценка (3) веднага следва, че $\|u\|_1 = 0$, т.е. $u_1 = u_2$.

Преминаваме към доказателството на съществуването на обобщено решение, като се очаква, че по-правило това е по-трудно от доказването на единствеността.

За $f \in L_2(G)$ и $v \in \mathring{H}^1(G)$ разглеждаме линейния функционал

$$l(v) \equiv (f,v).$$

От оценката

$$|l(v)| = |(f,v)| \leq \|f\|\|v\| \leq \|f\|\|v\|_1$$

следва, че той е ограничен (непрекъснат) линеен функционал над $\mathring{H}^1(G)$ с норма, която не надминава $\|f\|$ и по теоремата на Рис съществува такъв елемент $u \in \mathring{H}^1(G)$, че е в сила представянето

$$l(v) = (u,v)_1,\ \forall v \in \mathring{H}^1(G).$$

Като имаме предвид дефиницията на $l(v)$ веднага получаваме, че

$$(u,v)_1 = (f,v),\ \forall v \in \mathring{H}^1(G),$$

т.е. $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(G)$ е търсеното обобщено решение.

Лекотата, с която доказахме съществуването на обобщено решение се дължи на обстоятелството, че хилбертовите пространства на Соболев са извънредно удобни за изследването на елиптични уравнения и можем да се позовем на теоремата на Рис за представянето (общия вид) на непрекъснатите функционали над едно хилбертово пространство. Понеже теоремата на Рис се доказва, като се търси минимума на функционала разстояние от дадена точка до точка от затворено линейно подпространство, когато се позовават на тази теорема понякога говорят, че се използват вариационни методи.

Да преминем към изучаване на задачата на Дирихле за по-общи елиптични линейни частни диференциални уравнения от втори ред.

Нека G е ограничена подобласт на R^m с граница Г. В G разглеждаме диференциалното уравнение от втори ред

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x)u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x)u_{x_i} + a(x)u = f,$$

където $a_{ij}, a_i, a, f \in C(\overline{G})$ $(i, j = 1, \ldots, m)$.

Решение (в класически смисъл) наричаме функция $u \in C^2(G)$, която удовлетворява уравнението. За такива функции имаме равенство на смесените производни и без ограничение на общността можем по-нататък да предполагаме, че

$$a_{ij} = a_{ji}.$$

Ако това не е така, полагаме

$$a_{ij}u_{x_ix_j} + a_{ji}u_{x_jx_i} = \frac{(a_{ij} + a_{ji})}{2}u_{x_ix_j} + \frac{(a_{ij} + a_{ji})}{2}u_{x_jx_i}$$

и за новите коефициенти пред смесените производни горното условие е вече изпълнено.

Изразът в лявата страна на уравнението ни дефинира един линеен диференциален оператор от втори ред

$$L : C^2(G) \to C(G).$$

По-нататък ще предполагаме, че коефициентите на главната част

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x)u_{x_ix_j}$$

на уравнението (оператора), притежават и непрекъснати първи частни производни, т.е. $a_{ij} \in C^1(\overline{G})$. Тогава, като имаме предвид тъждествата

$$a_{ij}(x)u_{x_ix_j} = (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} - a_{ijx_j}(x)u_{x_i},$$

без ограничение на общността можем да предполагаме, че диференциалният оператор от втори ред има вида (главната му част има дивергентна форма)

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{m} (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x)u_{x_i} + a(x)u.$$

Дефиниция. Казваме, че операторът L (уравнението) е елиптично в точка $x \in G$, ако квадратичната форма $\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j$ е знакоопределена, например положително определена, т.е.

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j > 0,\ \forall\xi \in R^m,\ \xi \neq 0.$$

Уравнението (оператора L) наричаме елиптично в G, ако то е елиптично във всяка точка от G.

Ако уравнението е елиптично в $\overline{G}$ е ясно, че тъй като коефициентите a_{ij} са непрекъснати в затворената област $\overline{G}$, то квадратичната форма има еднакъв знак във всяка точка и дори

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta\xi^2,\ \forall\xi \in R^m,\ \forall x \in \overline{G},\ \theta = Const > 0,$$

ако да речем формата е положително определена. Уравненията удовлетворяващи това условие ще наричаме силно елиптични.

В G ще разглеждаме силно елиптичния оператор

$$Au \equiv -\sum_{i,j=1}^{m} (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x)u_{x_i} + a(x)u,$$

където $a_{ij} \in C^1(\overline{G})$, $a_{ij} = a_{ji}$, $a_i, a \in C(\overline{G})$ $(i, j = 1, \dots, m)$. За краткост понататък знакът за сума ще бъде изпускан, като навсякъде ще подразбираме сумиране от 1 до m по повтарящите се индекси. Знакът минус пред главната част е избран от съображения за удобство.

И така операторът

$$Au \equiv -(a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + a_i(x)u_{x_i} + a(x)u,$$

е силно елиптичен, като

$$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta\xi^2,\ \forall\xi \in R^m,\ \forall x \in \overline{G},\ \theta = Const > 0.$$

Задача D.

$$Au \equiv -(a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + a_i(x)u_{x_i} + a(x)u = f,\ x \in G,$$

$$u|_\Gamma = 0.$$

За да стигнем до правилна обобщена формулировка на граничната задача, да умножим скаларно уравнението с произволна пробна функция $v \in C_0^\infty(G)$ т.е. да умножим уравнението по v, след което да интегрираме по областта G. Стигаме до интегралното тъждество

$$(Au, v) = \int\limits_G (Au)vdG = \int\limits_G fvdG = (f, v).$$

Скаларното произведение отляво преобразуваме, като с интегриране по части прехвърляме една производна от u в главната част върху пробната функция v и получаваме

$$(Au, v) = \int\limits_G [-(a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + a_i(x)u_{x_i} + a(x)u]vdG =$$

$$= \int\limits_G [a_{ij}(x)u_{x_i}v_{x_j} + a_i(x)u_{x_i}v + a(x)uv]dG.$$

Граничните интеграли са нула, защото v е равна на нула в околност на границата.

Водени от опита, който имаме с разгледаната по горе задача D_1, въвеждаме за $u, v \in H^1(G)$ билинейната форма

$$B(u, v) = \int\limits_G [a_{ij}(x)u_{x_i}v_{x_j} + a_i(x)u_{x_i}v + a(x)uv]dG$$

и даваме следната дефиниция

Дефиниция. Функцията $u \in \mathring{H}^1(G)$ ще наричаме обобщено решение на граничната задача на Дирихле D с дясна част $f \in L_2(G)$, ако

$$B(u, v) = (f, v),\ \forall v \in \mathring{H}^1(G). \tag{4}$$

Най-напред забелязваме, че при $a_i = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ билинейната форма е симетрична поради симетричността на матрицата от коефициентите в главната част на оператора A, т.е.

$$B(u, v) = B(v, u),$$

и ако допълнително предположим $a \geq d > 0$ в $\overline{G}$, като следствие от елиптичността на оператора A имаме неравенството

$$B(u, u) \geq \theta \sum_{i=1}^m u_{x_i}^2 + du^2 \geq C_1 \|u\|_1^2,$$

където $C_1 = \min(\theta, d) > 0$.

Оттук заключаваме, че $B(u,u) \geq 0$, като равенство на нула се получава само при $u = 0$, т.е. $B(u,v)$ има всички свойства на едно скаларно произведение в $H^1(G)$. Разбира се, новото скаларно произведение $B(u,v)$ поражда нова хилбертова норма $|u|_1^2 \equiv B(u,u)$, която е еквивалентна на старата поради валидността на двойното неравенство

$$C_1\|u\|_1^2 \leq B(u,u) = |u|_1^2 \leq C_2\|u\|_1^2.$$

Дясното неравенство се получава поради ограничеността на коефициентите на уравнението в $\overline{G}$.

Разглеждайки $H^1(G)$ със скаларно произведение $B(u,v)$ и почти дословно повтаряйки доказателството за съществуване на обобщено решение на задача D_1, получаваме

Теорема. Ако $a_i = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$, $a \geq d > 0$ в $\overline{G}$, то задачата на Дирихле D притежава единствено обобщено решение $u \in \mathring{H}^1(G)$ за всяка дясна част $f \in L_2(G)$.

Доказателство. За да докажем единствеността на обобщеното решение, полагаме в (4) $v = u$ и получаваме неравенствата

$$C_1\|u\|_1^2 \leq B(u,u) = (f,u) \leq \|f\|\|u\| \leq \|f\|\|u\|_1,$$

откъдето извличаме априорната оценка

$$C_1\|u\|_1 \leq \|f\|,$$

от която следва единствеността.

Да докажем съществуването на обобщено решение на задачата D. За $f \in L_2(G)$ и $v \in \mathring{H}^1(G)$ разглеждаме линейния функционал

$$l(v) \equiv (f,v).$$

От оценката

$$|l(v)| = |(f,v)| \leq \|f\|\|v\| \leq \|f\|\|v\|_1 \leq \frac{\|f\|}{\sqrt{C_1}}|v|_1$$

следва, че той е ограничен (непрекъснат) линеен функционал над $\mathring{H}^1(G)$ с норма, която не надминава $\frac{\|f\|}{\sqrt{C_1}}$ и по теоремата на Рис съществува такъв елемент $u \in \mathring{H}^1(G)$, че е в сила представянето

$$l(v) = B(u,v), \; \forall v \in \mathring{H}^1(G). \tag{5}$$

Като имаме предвид дефиницията на $l(v)$ веднага получаваме, че

$$B(u,v) = (f,v), \; \forall v \in \mathring{H}^1(G),$$

т.е. $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(G)$ е търсеното обобщено решение.

Ако $a_i \not\equiv 0$, билинейната форма няма да бъде симетрична и не може да послужи като ново скаларно произведение, но ако е положително определена, то за нея отново ще бъде в сила представянето (5) и горното доказателство на съществуването остава валидно. В сила е следната

Лема (Лакс-Милграм). Нека H е хилбертово пространство със скаларно произведение $(\cdot, \cdot)$ и норма $|\cdot|$. Нека изображението $B : H \times H \to R$, ще го записваме и като $B(u, v)$, е линейно по всеки от аргументите си $u, v \in H$, т.е. е билинейна форма. Да предположим, че съществуват такива положителни константи C_1 и C_2, че за всички $u, v \in H$ са изпълнени неравенствата

$$|B(u, v)| \leq C_2 \|u\| \|v\|, \tag{6}$$

$$C_1 \|u\|^2 \leq B(u, u). \tag{7}$$

Тогава, ако $l : H \to R$ е ограничен (непрекъснат) линеен функционал над H, то съществува такъв елемент $w \in H$, че е в сила представянето

$$l(v) = B(w, v), \ \forall v \in H.$$

Доказателство. За фиксирано u формата $B(u, v)$ е линеен функционал с аргумент v. От (6) следва, че той е ограничен, с норма не по-голяма от $C_2 \|u\|$. Тогава по теоремата на Рис съществува еднозначно определен елемент Su, за който е в сила представянето

$$B(u, v) = (Su, v), \ \forall v \in H. \tag{8}$$

Така дефинираме оператор $S : H \to H$, който очевидно е линеен (докажете!). От (8) и неравенството (6) следва, че

$$\|Su\|^2 = (Su, Su) = B(u, Su) \leq C_2 \|u\| \|Su\|,$$

откъдето при $Su \neq 0$ заключаваме, че

$$\|Su\| \leq C_2 \|u\|.$$

Ако $Su = 0$, то това неравенство очевидно отново е вярно.

Като използваме неравенството (7) и (8) последователно получаваме

$$C_1 \|u\|^2 \leq B(u, u) = B(Su, u) \leq \|Su\| \|u\|,$$

т.е.

$$C_1 \|u\| \leq \|Su\|.$$

Последното неравенство показва, че линейният оператор S притежава обратен оператор, който е ограничен. В такъв случай S изобразява H взаимноеднозначно в свое затворено подмножество (Проверете!). Ще докажем, че образът SH на H съвпада с H. Да допуснем, че това не е така. Тогава съществува елемент $f \in H$, $f \neq 0$, който е ортогонален на всички елементи от SH, т.е. $(Su, f) = 0$ за всички $u \in H$. Като изберем $u = f$, с помощта на (8) и (7) имаме

$$0 = (Sf, f) = B(f, f) \geq C_1 \|f\|^2$$

и следователно $f = 0$ – противоречие.

Нека сега $l(v)$ е произволен ограничен линеен функционал над H. Според теоремата на Рис съществува $g \in H$, така че

$$l(v) = (g, v), \ \forall v \in H.$$

По доказаното съществува такъв елемент $w \in H$, че $Sw = g$. Съгласно (8) имаме

$$l(v) = (g, v) = (Sw, v) = B(w, v), \ \forall v \in H$$

и теоремата е доказана.