2_1. Нормирани и банахови пространства.
Ограничени (непрекъснати) оператори и функционали.
2_2. Хилбертови пространства, теореми на Рис и Хан-Банах.

Нормираните пространства са линейни пространства, на всеки елемент от които е съпоставено неотрицателно реално число, наричано норма. Елементите на линейното пространство обикновено наричаме вектори и нормата на вектор е аналог на понятието дължина на вектор - добре познато от крайномерните двумерни и тримерни векторни пространства.

2_0. Линейни пространства

Едно множество L с елементи $x, y, z, \dots$ наричаме линейно пространство, ако на всеки два елемента $x, y \in L$ е съпоставен трети елемент от L, който означаваме като $x + y$ и наричаме тяхна сума, на всяко реално число $\lambda \in R$ и произволен елемент $x \in L$ е съпоставен елемент $\lambda x \in L$, който наричаме тяхно произведение, за произволни елементи $x, y, z \in L$ и произволни реални числа (скалари) $\lambda, \mu \in R$ изпълнени следните основни свойства (аксиоми):

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (асоциативност).
2. Съществува такъв елемент $0 \in L$ (нулев елемент), че $x + 0 = x$.
3. Всеки елемент $x \in L$ притежава противоположен елемент $-x \in L$, такъв че $x + (-x) = 0$.
4. $x + y = y + x$.
5. $1 \cdot x = x$.
6. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ (асоциативност на умножението със скалар).
7. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ (дистрибутивност).
8. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ (дистрибутивност).

Елементите на линейното пространство наричаме вектори, а числата, с които умножаваме - скалари (аналогията с двумерните и тримерни векторни пространства от евклидовата геометрия е водеща). Ще разглеждаме само умножение със реални числа, т.е. линейни пространства над полето на реалните числа. За нуждите на курса това е напълно достатъчно.

Първите три аксиоми показват, че елементите на линейното пространство образуват група относно операцията събиране (адитивна група). Съгласно четвъртото свойство тази група е комутативна (абелева). Останалите аксиоми показват, че са налице и всички познати свойства на умножението на реално число с реално число, например като следствие получаваме, че $0 \cdot x = 0$. Сега имаме два дистрибутивни закона, тъй като множителите не са равноправни (имат различна природа - скалар и вектор). Въведените операции събиране на вектори и умножение с число (скалар) ще наричаме линейни операции.

Едно подмножество M на линейното пространство L наричаме линейно подпространство, ако е затворено относно линейните операции в обкръжаващото го линейно пространство L. Казано по друг начин, ако сумата на всеки два вектора от подмножеството и произведението на кой да е вектор от подмножеството с произволно число принадлежат на подмножеството, т.е.

$$\forall x, y \in M \subset L, \forall \lambda \in R \Longrightarrow x + y \in M, \lambda x \in M.$$

Ако $y, x_1, x_2, \ldots, x_k$ са елементи от L, а $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ са реални числа и

$$y = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k = \sum_{\nu=1}^{k} \lambda_\nu x_\nu$$

казваме, че y се изразява линейно чрез $x_1, x_2, \ldots, x_k$ или, че векторът y е линейна комбинация на векторите $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Естествено е да кажем, че векторите $y, x_1, x_2, \ldots, x_k$ са линейно зависими. По-общо, краен брой вектори $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ще наричаме линейно зависими, ако поне един от тях се изразява линейно чрез останалите. Еквивалентен начин да се формулира понятието линейна зависимост на вектори се дава в следната формална дефиниция.

Дефиниция. Казваме, че векторите $x_1, x_2, \ldots, x_k$ са линейно зависими, ако съществуват реални числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, поне едно от които е различно от нула (т.е. $|\lambda_1| + |\lambda_2| + \ldots + |\lambda_k| \neq 0$), такива че

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k = 0.$$

Ако k вектора не са линейно зависими, естествено е да ги наречем линейно независими вектори. Това очевидно е вярно тогава и само тогава, когато никой от тях не е линейна комбинация на част от останалите вектори и еквивалентният начин да бъде формулирано това се дава от следната формална дефиниция.

Дефиниция. Казваме, че векторите $x_1, x_2, \ldots, x_k$ са линейно независими, ако от това, че линейната комбинация

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k = 0$$

е равна на нула, следва, че всички коефициенти $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ са равни на нула.

Понятието линейна независимост можем да пренесем и за произволна (безкрайна) съвкупност от вектори.

Дефиниция. Ще казваме, че векторите от едно подмножество на линейното пространство са линейно независими, ако всеки краен!! брой от тях са линейно независими, т.е. ако никой от тях не може да бъде представен като линейна комбинация на краен!! брой от останалите вектори от подмножеството.

Дефиниция. Едно подмножество $B \subset L$ от линейно независими вектори ще наричаме база (базис) на L, ако всеки вектор от линейното пространство L се представя като крайна!! линейна комбинация на вектори от базиса B.

Забележка. Коефициентите в линейната комбинация са еднозначно определени!!

Дефиниция. Едно линейно пространство ще наричаме крайномерно линейно пространство, ако притежава базис от краен брой вектори. Броят на елементите от базиса наричаме размерност на пространството. Линейните пространства, които не са крайномерни, ще наричаме безкрайномерни линейни пространства.

Забележка. Дефиницията на размерност е коректна, защото се доказва, че всеки два базиса в крайномерното пространство имат равен брой елементи.

Очевидно едно пространство е безкрайномерно, тогава и само тогава, когато за всяко естествено число n в него съществуват n линейно независими елемента.

Забележка. Може да се докаже, като се използва аксиомата за избора, че всяко линейно пространство има базис (линеен базис), наричан още базис на Хамел.

Дефиниция. Казваме, че L е директна сума на своите линейни подпространства M и N, ако сечението им съдържа само нулевия елемент, т.е $M \cap N = \{0\}$ и всеки елемент x от L е сума на два елемента y и z от M и N съответно, т.е.

$$x = y + z,\ y \in M,\ z \in N.$$

Размерността на N наричаме коразмерност на M, а размерността на M – коразмерност на N спрямо L.

Елементите x и y са еднозначно определени. Наистина, ако допуснем, че

$$x = y' + z',\ y' \in M,\ z' \in N,$$

то като извадим почленно тези равенства получаваме, че че

$$0 = (y - y') + (z - z'),\ (y - y') \in M,\ (z - z') \in N,$$

т.е. $y - y' = z' - z$ е общ елемент на M и N и следователно е нулевият елемент $0 = y - y' = z' - z$, откъдето имаме $y = y'$, $z = z'$, което искахме да докажем.

Нека L, M и N са линейни пространства.

Дефиниция. Едно изображение $A : L \to M$ ще наричаме "линейно изображение" или "линеен оператор", ако за произволни $x, y \in L$, $\lambda \in R$ има свойствата

$$A(x + y) = Ax + Ay,\ A(\lambda x) = \lambda Ax,$$

т.е. образът на сума от вектори е сума от образите, образът на произведение на число и вектор е произведение на същото число и образа на вектора.

Ясно е, че $A : L \to M$ е линеен оператор тогава и само тогава, когато за произволни $x_1, x_2, \ldots, x_k \in L$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in R$ имаме

$$A(\sum_{\nu=1}^{k} \lambda_\nu x_\nu) = \sum_{\nu=1}^{k} \lambda_\nu A x_\nu,$$

т.е. образът на линейна комбинация от вектори е същата линейна комбинация от образите на векторите.

В специалния случай, когато линейното пространство M е множеството от реалните числа, линейният оператор наричаме линеен функционал. С други думи линейният функционал е линейно изображение от едно линейно пространство в множеството на реалните числа. Названието функционал идва от това, че първите съдържателни примери за такива изображения са били с дефиниционна област множества от функции, така че терминът "функционал" е въведен, за да изрази необходимото ново понятие "функция с аргумент функция".

Образът на нулевия елемент в L е нулевият елемент в M, т.е. $A \cdot 0 = 0$.

Множеството от образите на елементите от L, означавано обикновено с $R(A)$, от Region – област, ($A(L)$ или $Im(A)$, от Image – образ) и наричано област от стойностите на L е линейно подпространство на M.

Ако $B : M \to N$ е друг линеен оператор, то произведението (композицията) $AB : L \to N$ на изображенията A и B се дефинира като $AB(x) = A(B(x))$, $x \in L$ и също е линеен оператор.

От линейността на оператора $A : L \to M$ следва, че множеството от векторите, за които A се анулира (нулите на A), т.е. решенията на хомогенното уравнение $Ax = 0$ образуват линейно пространство. Това линейно пространство наричаме ядро на оператора A и го означаваме с $\ker A$ (от английската дума kernel – ядро).

Операторът A е обратимо изображение (инекция, мономорфизъм), т.е. изобразява различните елементи в различни, тогава и само тогава когато ядрото на оператора A съдържа само нулевия елемент. В такъв случай решението на нехомогенното линейно уравнение $Ax = z$ е единствено (ако съществува). Наистина, ако x_1 и x_2 са две решения на нехомогенното уравнение, то като извадим почленно равенствата

$$Ax_1 = z, \; Ax_2 = z$$

получаваме, че **разликата $x_1 - x_2 = y$ на двете решения на нехомогенното уравнение удовлетворява хомогенното уравнение** $Ay = 0$ и следователно е равна на нула, т.е. $x_1 = x_2$.

От горните разглеждания веднага получаваме следната характеристика на структурата на решенията на произволно нехомогенно уравнение $Ax = z$ с линеен оператор в лявата страна:

$$x = x_1 + y,$$

т.е. произволно решение x на нехомогенното уравнение е сума от едно фиксирано решение x_1 на нехомогенното уравнение, наричано обикновено частно решение и подходящо решение y на хомогенното уравнение.

Дефиниция. Едно линейно изображение (линеен оператор) $A : L \to M$ наричаме изображение "върху" (сюрективно изображение, епиморфизъм), ако всеки елемент (вектор) от M има прообраз в L или казано другояче, нехомогенното линейно уравнение $Ax = z$ има решение за всяка дясна страна z от M.

Ако A е обратим (инективен) линеен оператор, то върху линейното пространство $R(A)$ е добре дефиниран неговият обратен оператор

$$A^{-1} : M \supset R(A) \to L,$$

като по дефиниция $A^{-1}z = x$, ако $Ax = z$. Очевидно обратният оператор на един линеен оператор е също линеен оператор и е сюрективен.

Дефиниция. Казваме, че едно линейно изображение $A : L \to M$ осъществява взаимно-еднозначно съответствие (биекция) между L и M, или че линейните пространства L и M са изоморфни, ако операторът е инективен и сюрективен (мономорфизъм и епиморфизъм, обратим и изображение върху) едновременно.

Забележка. В такъв случай и обратният оператор $A^{-1} : M = R(A) \to L$, е изоморфизъм.

Две изоморфни линейни пространства са "неразличими" по отношение на линейните операции в тях. В частност, ако едното от тях е крайномерно, то и другото е крайномерно и има същата размерност.

Примери на линейни пространства

Основните примери за линейни пространства са двумерните и тримерни векторни пространства E_2 и E_3 от евклидовата геометрия. Събирането на вектори $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ става по правилото на паралелограма (вж. Рис 1), а произведението на вектора $\vec{u}$ с положително (отрицателно) число λ е еднопосочен вектор (вектор с противоположна посока) $\vec{v}$ с дължина $|\vec{v}| = |\lambda||\vec{u}|$ (вж. Рис 2). Два вектора (разбирани като насочени отсечки с начало и край (връх), стрели) считаме за равни, ако са успоредни (имат едно и също направление), имат една и съща посока и дължина. Базис в E_2 образуват два произволни линейно независими вектора (неколинеарни вектора) $\vec{a_1}$ и $\vec{a_2}$. Ако $\vec{x}$ е произволен вектор от E_2 , той се представя като линейната комбинация

$$\vec{x} = x_1\vec{a_1} + x_2\vec{a_2},$$

където коефициентите x_1 и x_2 са еднозначно определени (вж. Рис 3). Наричаме ги координати на вектора $\vec{x}$ спрямо избрания базис и пишем $\vec{x}(x_1, x_2)$.

Векторите, колинеарни с дадена права (вектор) образуват едномерното линейно пространство E_1 с базис кой да е ненулев вектор.

Ако координатите на вектора $\vec{y}$ са $\vec{y}(y_1, y_2)$,

$$\vec{y} = y_1\overrightarrow{a_1} + y_2\overrightarrow{a_2},$$

то очевидно

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1)\overrightarrow{a_1} + (x_2 + y_2)\overrightarrow{a_2},$$

$$\lambda\vec{x} = (\lambda x_1)\overrightarrow{a_1} + (\lambda x_2)\overrightarrow{a_2},$$

и координатите на сумата $\vec{x} + \vec{y}$ са $(x_1 + y_1, x_2 + y_2)$, т.е. получават се с покоординатно събиране, а координатите на произведението $\lambda\vec{x}$ са $(\lambda x_1, \lambda x_2)$, т.е. получават се с покоординатно умножение.

Оттук лесно преминаваме към дефиницията на n-мерното "координатно" линейно пространство R^n. То се състои от наредените n-торки реални числа $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n), \ldots$, които наричаме точки или вектори, като линейните операции събиране и умножение с число определяме покоординатно

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$

$$\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

За разлика от E_2, където векторът $\vec{x}$ има за координати наредената двойка (x_1, x_2), в R^n "векторът" ("точката") x е самата наредена n-торка, т.е. $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Един базис в R^n образуват векторите

$$\{(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)\}.$$

Очевидно $x_1, \ldots, x_n$ са координати на $x = (x_1, \ldots, x_n)$ спрямо този базис.

Друг базис е

$$\{(1, 0, \ldots, 0), (1, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (1, 1, \ldots, 1)\}.$$

$M = \{x : x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), x_1 = 3x_2\}$ е линейно подпространство на R^n. Посочете базис в него и определете размерността на M. Най-лесно си представяме двумерното "координатно" линейно

пространство R^2. Точката $x = (x_1, x_2) \in R^2$ отъждествяваме с точката $P(x_1, x_2)$ от евклидовата равнина с координати x_1 и x_2. Между точките P и техните радиус вектори $\overrightarrow{OP}$ има взаимно еднозначно съответствие (вж. Рис.4). Оттук идва и правилото за покоординатното събиране на точките от R^2 и правилото за покоординатно умножение с число (вж. Рис. 5 и 6).

E_2 и R^2 са очевидно изоморфни. Посочете подходящ изоморфизъм, като посочите кой елемент от базис в E_2 в кой елемент от R^2 се изобразява.

Пространството R^1 отъждествяваме с множеството от реалните числа R.

Да посочим пример на безкрайномерно линейно пространство. По аналогия с R^n разглеждаме множеството R^∞ с елементи редиците от реални числа $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, $y = (y_1, \ldots, y_n, \ldots)$,..., за които въвеждаме покоординатно събиране и умножение

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n, \ldots),$$

$$\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n, \ldots).$$

R^∞ е линейно пространство. То е безкрайномерно, защото елементите ("векторите")

$$(1, 0, \ldots, 0, \ldots), \ldots, (0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots), \ldots$$

са линейно независими, но те не образуват базис в него!! Например векторът $(1, 1, \ldots, 1, \ldots)$ не може да бъде представен като линейна комбинация на краен брой от тях.

Нека $M = \{1, 2, \ldots, n\}$. Точките от R^n можем да разглеждаме като наборът от стойности на функциите $f : M \to R$, $g : M \to R$,..., като очевидно функцията f се определя от n-торката $(f(1), \ldots, f(n))$, в която аргументите играят ролята на индекси. От естественото "поточково" правило за събиране на функции приемащи реални стойности

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),\ x \in M$$

и за умножение на функция с число

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x),\ x \in M$$

отново следват познатите ни покоординатни операции за точките от R^n, като можем да напишем, че

$$R^n = \{f | f : M \to R\} = \{f | f : \{1, 2, \ldots, n\} \to R\}.$$

Ако $M = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$, то по аналогични съображения отново можем да отъждествим R^∞ с множеството от функции, дефинирани в M, т.е.

$$R^\infty = \{f | f : M \to R\} = \{f | f : \{1, 2, \ldots, n, \ldots\} \to R\}.$$

Следвайки тази аналогия, стигаме до линейните функционални пространства, различни случаи от които първоначално са въвеждани и използвани поради редица други важни неформални съображения. Нека M е произволно множество. Въвеждаме множеството R^M от всички функции дефинирани в M, които приемат реални стойности. За елементите му въвеждаме както по-горе операците за поточково събиране на функции и умножение с число

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),\ x \in M,$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x),\ x \in M.$$

Така получаваме линейното пространство

$$R^M = \{f | f : M \to R\},$$

елементите, векторите от което, са функциите дефинирани в M с естествените за тях поточкови линейни операции събиране и умножение с число.

Ако множеството M е безкрайно, то R^M е безкрайномерно линейно пространство.

Нека Δ е интервал върху реалната права, например $\Delta = (\alpha, \beta)$. Множеството $C(\Delta)$ от непрекъснатите в Δ функции е пример за едно важно линейно пространство. Друго често срещано линейно пространство $C^k(\Delta)$ се състои от функциите притежаващи непрекъснати производни до ред k в Δ. Негово линейно подпространство е $C^\infty(\Delta)$ — множеството от функции, притежаващи непрекъснати производни от произволен ред в Δ. Множеството $P(\Delta)$ от полиномите от произволен ред с реални коефициенти, разглеждани като функции, дефинирани в Δ, е линейно пространство. Негово линейно подпространство образуват полиномите $P^n(\Delta)$ от степен не превишаваща n. Очевидно последното пространство е крайномерно и е изоморфно на R^{n+1}. В сила са включванията

$$C(\Delta) \supset C^k(\Delta) \supset C^\infty(\Delta) \supset P(\Delta) \supset P^n(\Delta).$$

Примери за линейни оператори

Примери за линейни функционали

2_1. Нормирани и банахови пространства. Ограничени (непрекъснати) оператори и функционали.

Нормирани и банахови пространства

Дефиниция. Казваме, че линейното пространство X е "линейно нормирано пространство" или просто "нормирано пространство", ако на всеки елемент (вектор) $x \in X$ е съпоставено реално неотрицателно число $\|x\|$, наричано норма на x, като са изпълнени следните свойства (аксиоми):

1. $\|x\| \geq 0$, като $\|x\| = 0$ тогава и само тогава, когато $x = 0$. (позитивност и неизроденост)

2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$. (хомогенност)

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. (неравенство на триъгълника)

Основните примери за нормирани пространства са двумерните и тримерните векторни пространства E_2 и E_3, като нормата на един вектор е неговата дължина. В тези пространства всички свойства на нормата са очевидно изпълнени, като последното свойство 3 изразява известното елементарно неравенство — сумата на две от страните в триъгълника е по-голяма от третата страна (вж. Рис).

В едно нормирана пространство въвеждаме разстояние между между два елемента x и y (метрика) като нормата на тяхната разлика

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

Тук отново ни води аналогията с крайномерния случай (вж. Рис).

Основните свойства на разстоянието очевидно са изпълнени.

1. $\rho(x, y) \geq 0$, като $\rho(x, y) = 0$ тогава и само тогава, когато $x = y$ (позитивност и неизроденост).

2. $\rho(x, y) = \rho(x, y)$ (симетричност).

3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (неравенство на триъгълника).

Наистина, от първото свойство на нормата следва първото свойство на разстоянието. От второто свойство на нормата получаваме $\| - x\| = \|x\|$, откъдето извличаме симетричността на разстоянието

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \| - (y - x)\| = \|y - x\| = \rho(y, x).$$

От третото свойство на нормата следва третото свойство на разстоянието

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

С този стандартен способ за въвеждане на разстояние всяко нормирано пространство се превръща в метрично пространство и можем да използваме всички вече въведени понятия свързани със сходимостта – отворено и затворено кълбо, ограничено, отворено, затворено и компактно множество, сходяща редица, пълно пространство, граница на функция, непрекъсната функция.

Например, отворено кълбо $B_R(x)$ с център x и радиус R е множеството от точки

$$B_R(x) = \{y : \|y - x\| < R\},$$

а затворено кълбо – множеството

$$K_R(x) = \{y : \|y - x\| \leq R\}.$$

Очевидно

$$B_R(x) \subset K_R(x) \subset B_{R+\epsilon}(x), \ \epsilon > 0.$$

Дефиниция. Едно множество е ограничено, ако се съдържа в някое кълбо $B_R(x)$.

Упражнение. Докажете, че:

а) отвореното кълбо е отворено множество, а затвореното кълбо е затворено множество (нормираното пространство е метрично пространство и този резултат е вече доказан за метрични пространства);

б) всяко кълбо (отворено или затворено) е ограничено множество;

в) едно подмножество на ограничено множество, е ограничено множество;

г) едно множество е ограничено, тогава и само тогава, когато се съдържа в някое затворено кълбо.

Ако M е ограничено множество и се съдържа в кълбото $B_R(x_0)$, можем да намерим по-голямо затворено кълбо с център в началото и достатъчно голям радиус $K_N(x)$, например $N = R + \|x_0\|$, което го съдържа. Следователно можем да кажем, че едно множество M е ограничено тогава и само тогава, когато се съдържа в някое затворено кълбо с център в началото, т.е. когато съществува такава константа N, че

$$\|x\| \leq N \ \forall x \in M.$$

По дефиниция една редица $x_1, \ldots, x_\nu, \ldots$ от точки на X е сходяща с граница $x \in X$, ако

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N = N(\epsilon), \text{ такова, че } \|x_\nu - x\| \leq \epsilon \ \forall \nu > N,$$

т.е. ако

$$\|x_\nu - x\| \to 0 \text{ при } \nu \to \infty.$$

Разбира се, използваме и познатите означения $x_\nu \to x$ при $\nu \to \infty$ или $\lim\limits_{\nu \to \infty} x_\nu = x$. И така, една редица $x_1, \ldots, x_\nu, \ldots$ от точки на X е сходяща с граница $x \in X$, ако

$$(x_\nu - x) \to 0 \text{ при } \nu \to \infty.$$

Свойствата на сходящите редици в едно нормирано пространство са аналогични на тези на сходящите редици от реални числа, като нормата на вектор е аналог на модула на реално число. Това ни улеснява при помненето на свойства или извеждането им.

Границата на една сходяща редица е еднозначно определена.

Всяка сходяща редица е ограничена.

Сумата на сходящи редици е сходяща редица с граница сумата от границите, т.е.

$$x_\nu \to x, \ y_\nu \to y \text{ при } \nu \to \infty \Longrightarrow (x_\nu + y_\nu) \to (x + y) \text{ при } \nu \to \infty.$$

Редицата с общ член произведението на общите членове на сходяща числова редица и сходяща редица от вектори е сходяща редица с граница произведението от границите им, т.е.

$$\lambda_\nu \to \lambda,\ x_\nu \to x \text{ при } \nu \to \infty \Longrightarrow \lambda_\nu x_\nu \to \lambda x \text{ при } \nu \to \infty.$$

От неравенството на триъгълника за нормата следва неравенството

$$|\,\|x\| - \|y\|\,| \le \|x - y\|.$$

Наистина

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \le \|x - y\| + \|y\|,$$

т.е.

$$\|x\| - \|y\| \le \|x - y\|.$$

Като сменим местата на x и y оттук получаваме

$$\|y\| - \|x\| \le \|y - x\| = \|x - y\|.$$

От двете последни неравенства следва исканото свойство.

Нека $x_\nu \to x$ при $\nu \to \infty$. От горното неравенство веднага имаме

$$0 \le |\,\|x_\nu\| - \|x\|\,| \le \|x_\nu - x\| \to 0 \text{ при } \nu \to \infty,$$

и получаваме, че и $\|x_\nu\| \to \|x\|$ при $\nu \to \infty$, т.е. свойството

Ако една редица е сходяща, то редицата от нормите също е сходяща и има за граница нормата на границата.

Оттук отново получаваме, че редицата от нормите е ограничена, т.е. сходящата редица е ограничена.

Нека в нормираното пространство $X, \|\cdot\|$ имаме и друга норма $\|\cdot\|'$.

Казваме, че нормите $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|'$ са еквивалентни, ако съществуват две положителни константи C_1, C_2, че са в сила неравенствата

$$C_1\|x\|' \le \|x\| \le C_2\|x\|',\ x \in X.$$

Очевидно, ако една редица е сходяща спрямо първата норма, тя е сходяща и спрямо втората норма, т.е. еквивалентните норми пораждат една и съща сходимост.

Една редица $\{x_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ е фундаментална в X, ако

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N = N(\epsilon),\ \text{такова, че } \|x_\nu - x_\mu\| \le \epsilon\ \forall \nu, \mu > N,$$

т.е. ако

$$\|x_\nu - x_\mu\| \to 0 \text{ при } \nu, \mu \to \infty,$$

или, което е същото

$$(x_\nu - x_\mu) \to 0 \text{ при } \nu, \mu \to \infty.$$

Всяка сходяща редица е фундаментална.

Особено важни са тези нормирани пространства, които са пълни пространства, т.е. тези, в които всяка фундаментална редица е сходяща.

Дефиниция. Едно пълно нормирно пространство наричаме банахово пространство. (По името на полския математик Стефан Банах, един от създателите на функционалния анализ.)

Най-простият, но основен пример за нормирано пространство е множеството от реалните числа R. R е линейно пространство, като нормата на едно реално число $x \in R$ е неговият модул (неговата абсолютна стойност) $|x|$. Всяка фундаментална редица от реални числа е сходяща, така че R е пълно, т.е. банахово пространство.

Да разгледаме линейното пространство R^n с норма, която обикновено означаваме със знака за модул

$$|x| = \left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

R^n с тази норма е пълно, т.е. банахово пространство. В R^n можем да въведем и нормите

$$|x|' = |x_1| + |\cdots + |x_n|,$$
$$|x|'' = \max_{1 \le i \le n} |x_i|.$$

Трите въведени норми са еквивалентни, т.е. определят една и съща сходимост, както се вижда от неравенствата

$$\frac{1}{n}|x|'' \le \frac{1}{n}|x| \le \frac{1}{n}|x|' \le |x|'' \le |x| \le |x|'.$$

R^n с коя да е от тези норми е банахово пространство. Нарисувайте единичните "кълба" спрямо всяка една от въведените в R^2 норми.

Ще отбележим без доказателство, че в едно крайномерно пространство всеки две норми са еквивалентни.

По аналогия с $R^n, |\cdot|$ да разгледаме пространството с елементи редици от реални числа

с норма

Очевидно е подмножество на линейното пространство Докажете, че е линейно, нормирано, банахово пространство, в посочената последователност.

По аналогия с разглеждаме множеството

Докажете, че то е банахово пространство с норма

За упражнение, докажете, че и множеството с норма

е пълно пространство.

Да разгледаме пространството от непрекъснати в функции с норма Получаваме банахово пространство, сходимостта в което е равномерната сходимост в . Забележете аналогията при въвеждането на нормата с предишния случай на банахово пространство.

Пак по аналогия, да разгледаме с норма Свойствата на нормата лесно се проверяват, но полученото пространство не е пълно. Както вече знаем от въвеждането на лебеговия интеграл, попълването на по тази норма ни дава пространството от сумируемите (интегруемите по Лебег) в функции.

е банахово пространство, с норма

разглеждано с нормата не е пълно, и попълването му по тази норма ни дава пространството от функциите със сумируем квадрат в с норма

Основен интерес за нас по-нататък ще представляват функциите дефинирани в област и банаховите пространства

където е ограничена област, с норма

прстранството на сумируемите в функции

с норма

и пространството от функцииите със сумируем квадрат

с норма

, както и техни подпространства, които ще въведем по-късно.

Ограничени (непрекъснати) оператори и функционали

Естествено е да наречем един линеен оператор ограничен, ако изобразява ограничените множества в ограничени. Ще покажем, че един линеен оператор и в частност линеен функционал, е ограничен тогава и само тогава, когато е непрекъснат. Въвеждаме понятието норма на един линеен оператор или функционал и разглеждаме нормираните пространства, образувани от ограничените оператори (функционали), дефинирани в едно нормирано пространство. Даваме примери за непрекъснати линейни оператори и функционали. След това разглеждаме въпроса за продължимост на един ограничен (непрекъснат) линеен оператор (функционал), дефиниран върху навсякъде гъсто линейно подпространство, до ограничен линеен оператор (функционал) в цялото пространство. Накрая привеждаме без доказателство теоремата на Хан-Банах за продължимост на един ограничен линеен функционал, дефиниран върху линейно подпространство, до ограничен линеен функционал със същата норма, дефиниран върху цялото пространство.

*

* *

Ограничен линеен оператор

Напомняме, че едно множество е ограничено, ако се съдържа в някое затворено кълбо $K_R = \{x : \|x\| \leq R\}$ с център в началото и всяко кълбо (отворено или затворено) е ограничено множество.

Нека X, $\|\cdot\|$ и Y, $\|\cdot\|'$ са нормирани пространства.

Дефиниция. Казваме, че линейният оператор $A : X \to Y$ е ограничен, ако изобразява произволно ограничено подмножество на X в ограничено подмножество на Y.

Лема. Нека $A : X \to Y$ е линеен оператор. Следните твърдения са еквивалентни:

а) A е ограничен линеен оператор

б) A е ограничен върху затвореното единично кълбо с център в началото, т.е. съществува такава константа $C > 0$, че

$$\|Ax\|' \leq C \text{ при } \|x\| \leq 1.$$

в) A е ограничен върху всяко затворено кълбо K_R с център в началото, т.е. съществува такава константа $C > 0$, че

$$\|Ax\|' \leq C \text{ при } \|x\| \leq R.$$

Доказателство. Еквивалентността на трите твърдения ще установим, като проверим импликациите

$$\text{а)} \Longrightarrow \text{б)} \Longrightarrow \text{в)} \Longrightarrow \text{а)}$$

Тъй като единичното кълбо $K_1 = \{\|x\| \leq 1\}$ е ограничено множество, то импликацията а) $\Longrightarrow$ б) е вярна по дефиниция.

Нека е вярно свойство а). Да предположим, че $\|x\| \leq R$, но тогава $\|\dfrac{x}{R}\| \leq 1$, и съгласно свойство б) имаме $\|A\dfrac{x}{R}\|' \leq C$, откъдето следва $\|Ax\|' \leq CR$, т.е. и импликацията б) $\Longrightarrow$ в) е вярна. Използвахме за краткост означението $\frac{x}{R} = \frac{1}{R}x$.

Нека е вярно свойство в). Да предположим, че M е ограничено подмножество на X. Тогава съществува затворено кълбо $\{\|x\| \leq R\} \supset M$, което го съдържа и съгласно свойство в) имаме

$$\|Ax\|' \leq C \text{ при } x \in M \subset \{\|x\| \leq R\}.$$

т.е. установихме и последната импликация

Теорема. Един линеен оператор $A : X \to Y$ е ограничен, тогава и само тогава, когато съществува такава положителна константа $C > 0$, че е в сила оценката

$$\|Ax\|' \leq C\|x\|, \; x \in X.$$

Наистина, ако тази оценка е вярна, то очевидно A е ограничен върху единичното кълбо и съгласно свойство б) на лемата той е ограничен линеен оператор.

Да предположим, че A е ограничен и следователно свойство б) е налице. Горната оценка е очевидно вярна при $x = 0$. Нека $x \neq 0$. Тогава $\frac{x}{|x|} \leq 1$ и съгласно б) имаме $\|A\frac{x}{|x|}\|' \leq C$, откъдето следва оценката.

Упражнение. Докажете, че един линеен оператор A е ограничен тогава и само тогава, когато съществува поне едно затворено кълбо

$$K_R(x_0) = \{x : \|x - x_0\| \leq R\}.$$

върху което A е ограничен, т.е. съществува такава константа $C > 0$, че

$$\|Ax\|' \leq C \text{ при } \|x - x_0\| \leq R.$$

Непрекъснат линеен оператор

Тъй като нормираното пространство е метрично пространство, понятието непрекъснатост на един оператор, линеен или нелинеен, можем да дефинираме, чрез сходящи редици.

Дефиниция. Казваме, че операторът $A : X \to Y$ е непрекъснат в точката $x_0 \in X$, ако за всяка сходяща $x_i \to x_0$ при $i \to \infty$ в X (т.е. по норма $\|\cdot\|$) редица с граница x_0, редицата от стойностите на оператора $Ax_i \to Ax_0$ при $i \to \infty$, т.е. е сходяща в Y и има граница Ax_0. Един оператор, непрекъснат във всяка точка от X ще наричаме непрекъснат в X оператор.

Теорема. Един линеен оператор $A : X \to Y$ е непрекъснат в X, ако е непрекъснат в началото.

Наистина, ако A е непрекъснат, той е непрекъснат и в началото $0 \in X$.

Нека A е непрекъснат в началото, т.е.

$$x_i \to 0 \text{ при } i \to 0 \Longrightarrow Ax_i \to 0 \text{ при } i \to \infty,$$

и x_0 е произволна точка от X. Поради линейността на A имаме

$$\|Ax_i - Ax_0\|' = \|A(x_i - x_0)\|' \to 0 \text{ при } i \to \infty$$

съгласно предположението, понеже $(x_i - x_0) \to 0$ при $i \to \infty$ и твърдението е доказано.

Еквивалентност на непрекъснатост и ограниченост

Теорема. Нека $X,\ Y$ са нормирани пространства, а $A : X \to Y$ е линеен оператор. A е непрекъснат линеен оператор, тогава и само тогава, когато е ограничен.

Доказателство. Нека A е ограничен линеен оператор, т.е. съществува такова $C > 0$, че е в сила оценката

$$\|Ax\|' \leq C\|x\|,\ x \in X.$$

От нея веднага следва, че A е непрекъснат в началото и следователно непрекъснат в X. Наистина, ако $x_i \to 0$ при $i \to \infty$ имаме

$$\|Ax_i\|' \leq C\|x_i\| \to 0 \text{ при } i \to \infty,$$

т.е. и $Ax_i \to 0$ при $i \to \infty$.

Нека A е непрекъснат оператор, но не е ограничен, т.е. не е ограничен върху единичното кълбо. Тогава, за всяко естествено число i съществува такъв елемент $x_i \in X$, $\|x_i\| \leq 1$, че $Ax_i \geq i$ и следователно

$$A(\frac{x_i}{i}) \geq 1.$$

Тъй като

$$\|\frac{x_i}{i}\| = \frac{1}{i}\|x_i\| \leq \frac{1}{i} \to 0 \text{ при } i \to \infty,$$

то поради непрекъснатостта на A имаме $A(\frac{x_i}{i}) \to 0$ при $i \to \infty$, което противоречи на горното неравенство. Следователно, допускането, че A не е ограничен е невярно, т.е. A е ограничен оператор.

Норма на ограничен линеен оператор

Един ограничен оператор $A : X \to Y$ е ограничен върху затвореното единично кълбо, т.е. множеството от реални числа

$$\Phi = \{\|Ax\|' : \|x\| \leq 1\}$$

е ограничено.

За неговата точна горна граница въвеждаме означението

$$\|A\| = \sup \Phi = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|'.$$

Нека x е произволен ненулев елемент. Тъй като $\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1$, то $A(\frac{x}{\|x\|}) \leq \|A\|$ и за A получаваме оценката

$$\|Ax\|' \leq \|A\| \cdot \|x\|,$$

която очевидно е вярна и при $x = 0$.

От друга страна, ако с положителна константа C е в сила оценката

$$\|Ax\|' \leq C \cdot \|x\|,$$

то при $\|x\| \leq 1$ от нея следва $\|Ax\|' \leq C$, т.е. C е една горна граница на множеството Φ и следователно $\|A\| \leq C$.

Така доказахме, че нормата на оператора $\|A\|$ е най-малката константа в оценката изразяваща ограничеността на оператора A.

Да означим с $L(X, Y)$ множеството от ограничени линейни оператори, изобразяващи X в Y. Операциите събиране на два оператора и умножение на оператор с число въвеждаме поточково, т.е.

$$(A + B)x = Ax + Bx,$$

$$(\lambda A)x = \lambda Ax.$$

Упражнение 1. Докажете, че $A + B$ и λA са линейни непрекъснати оператори.

Упражнение 2. Докажете, че $L(X, Y)$ е линейно пространство.

Упражнение 3. Докажете, че $L(X, Y)$ с въведената по-горе норма на оператор е линейно нормирано пространство, като проверите, че са изпълнени свойствата на нормата.

Може да бъде доказано, че ако X е нормирано пространство, а Y банахово пространство, то $L(X, Y)$ е пълно нормирано пространство.

Примери за ограничени линейни оператори

Ограничени (непрекъснати) линейни функционали

Линейните оператори, които изобразяват едно линейно пространство в множеството на реалните числа наричаме линейни функционали. Всичко казано по-горе за оператори се пренася автоматично и за функционали.

Нека X е нормирано пространство. Един линеен функционал $l : X \to R$ е непрекъснат, тогава и само тогава, когато е ограничен върху единичното кълбо в X или което е еквивалентно, за него важи оценката

$$|l(x)| \leq C \cdot \|x\|, \ x \in X.$$

Норма на функционала l наричаме числото

$$\|l\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |l(x)|$$

като нормата на l е най-малката константа, за която е в сила оценката изразяваща ограниченост. Снабдено с тази норма множеството от линейните непрекъснати в x функционали е банахово пространство означавано с X', и наричано спрегнато на X пространство.

Примери за ограничени линейни функционали

Продължаване на ограничен линеен оператор по непрекъснатост

Теорема. Нека $X, \|\cdot\|$ е нормирано, а $Y, \|\cdot\|'$ - банахово пространство и $M \subset X$ е линейно подпространство на X, което е навсякъде гъсто по $\|\cdot\|$ в X. Да предположим, че $A : M \to Y$ е ограничен линеен оператор. Съществува ограничен линеен оператор $\tilde{A} : X \to Y$, който е продължение на A върху цялото пространство X, т.е. $Ax = \tilde{A}x,\ x \in M$. Той е еднозначно определен и има същата норма, т.е. $\|A\| = \|\tilde{A}\|$.

Доказателство. Полагаме $\tilde{A}x = Ax,\ x \in M$. Нека $x \in X$. Тъй като M е навсякъде гъсто в X, съществува такава апроксимираща (сходяща към) x редица $x_\nu \in M$, че $\|x - x_\nu\| \to 0$ при $\nu \to \infty$. Тази редица е фундаментална в X и като използваме ограничеността на A имаме

$$0 \le \|Ax_\nu - Ax_\mu\|' = \|A(x_\nu - x_\mu)\|' \le C\|x_\nu - x_\mu\| \to 0 \text{ при } \nu, \mu \to \infty,$$

т.е. и редицата Ax_ν е фундаментална в Y. Но Y е банахово, т.е. пълно пространство и следователно тя има граница $y \in Y$, т.е.

$$\|Ax_\nu - y\|' \to 0 \text{ при } \nu \to \infty.$$

Приемаме по дефиниция, че $\tilde{A}x = y$. Мотивът ни за такава дефиниция е ясен. Операторът $\tilde{A}$ би имал тази стойност, ако е непрекъснат (ограничен).

Сега трябва да се убедим, че дефиницията е коректна, т.е. не зависи от избора на апроксимиращата редица. Нека имаме друга редица със свойството $\|x - x'_\nu\| \to 0$ при $\nu \to \infty$. Както по-горе заключаваме, че съществува такова $y' \in Y$, че

$$\|Ax'_\nu - y'\|' \to 0 \text{ при } \nu \to \infty.$$

Пак от ограничеността на A (оценката) следва, че

$$0 \le \|Ax_\nu - Ax'_\nu\|' = \|A(x_\nu - x'_\nu)\|' \le C\|x_\nu - x'_\nu\| \to 0 \text{ при } \nu \to \infty,$$

и понеже

$$0 \le \|y - y'\|' \le \|y - Ax_\nu\|' + \|Ax_\nu - Ax'_\nu\|' + \|Ax'_\nu - y'\|' \to 0 \text{ при } \nu \to \infty,$$

имаме $\|y - y'\|$ и $y = y'$.

Дотук имаме, че изображението $\tilde{A} : X \to Y$ е продължение на A върху цялото X. Остава да забележим, че $\tilde{A}$ е линеен ограничен оператор със същата норма. Нека $x, y \in X$, $x_\nu, y_\nu \in M$, $x_\nu \to x$, $y_\nu \to y$, $(x_\nu + y_\nu) \to (x + y)$, $\lambda x_\nu \to \lambda x$ по $\|\cdot\|$ при $\nu \to \infty$ и като следствие $Ax_\nu \to \tilde{A}x$, $Ay_\nu \to \tilde{A}y$ $A(x_\nu + y_\nu) \to \tilde{A}(x + y)$, $A(\lambda x_\nu) \to \tilde{A}(\lambda x)$ при $\nu \to \infty$. Тъй като

$$A(x_\nu + y_\nu) = Ax_\nu + Ay_\nu,\ A(\lambda x_\nu) = \lambda Ax_\nu,$$

като устремим $\nu \to \infty$, получаваме

$$A(x+y) = Ax + Ay,\ A(\lambda x) = \lambda Ax$$

и линейността на $\tilde{A}$ е установена.

В ограничеността на A отново се убеждаваме с граничен преход, като в оценката $\|Ax_\nu\|' \leq \|A\|\|x_\nu\|$ устремим $\nu \to \infty$. Получаваме оценката $\|\tilde{A}x\|' \leq \|A\|\|x\|$ за произволно $x \in X$, т.е. A е ограничен линеен оператор с норма $\|\tilde{A}\| \leq \|A\|$. От друга страна, ако разгледаме оценката $\|\tilde{A}x\|' \leq \|\tilde{A}\|\|x\|$ за продължението $\tilde{A}$ само за $x \in M$ имаме $\tilde{A} = A$ и следователно $\|A\| \leq \|\tilde{A}\|$, т.е. (върху по малкото множество нормата на оператора е по-малка). Следователно $\|\tilde{A}\| = \|A\|$ и теоремата е доказана.

Разбира се, описаният способ на продължение по непрекъснатост важи и за ограничени функционали $l : M \to R$, изобразяващи навсякъде гъсто линейно подпространство M на едно нормирано пространство X в R (R е пълно, т.е. банахово).

Струва си да обърнем внимание на аналогията между това абстрактно продължение по непрекъснатост и начина по който въведохме лебеговия интеграл. Най-напред разгледахме линейното пространство на непрекъснатите в R^m функции с компактен носител $C_0(R^m)$ с норма

$$\|f\| = \int\limits_{R^m} |f(x)|dx,$$

където интегрирането се разбира в риманов смисъл. Това пространство не е пълно, но с конструкцията на Кантор може да бъде попълнено по нормата $\|\cdot\|$, до пълното линейно нормирано пространство (банахово пространство) $L_1(R^m)$, в което $C_0(R^m)$ е навсякъде гъсто линейно подпространство. Римановият интеграл

$$I(f) = \int\limits_{R^m} f(x)dx,\ f \in C_0(R^m)$$

е ограничен линеен функционал $I : C_0(R^m) \to R$, поради линейността на интеграла и очевидната оценка

$$|I(f)| \leq \int\limits_{R^m} |f(x)|dx = \|f\|.$$

Продължихме по непрреккъснатост I до ограничен линеен функционал $\tilde{I} : L_1(R^m) \to R$ върху цялото пространство $L_1(R^m)$. При това продължението можахме да извършим по такъв начин, че абстрактните елементи от

$L_1(R^m)$ отъждествихме с измерими функции, които нарекохме интегруеми в лебегов смисъл или сумируеми, а $\tilde{I}(f)$ наричаме лебегов интеграл от сумируемата функция $f \in L_1(R^m)$.

По-нататък ще имаме и други случаи на използване на този елементарен, но важен резултат (теоремите за влагане и теоремата за следата при соболеви пространства).

Теорема на Хан-Банах

Теорема. (Хан-Банах) Нека X е произволно нормирано пространство, а $M \subset X$ е някое негово линейно подпространство. Да предположим, че $l : M \to R$ е ограничен линеен функционал над M. Съществува ограничен линеен функционал $\tilde{l} : X \to R$, който е продължение на l и има същата норма, т.е. $\tilde{l}(x) = l(x),\ x \in M$, $\|\tilde{l}\| = \|l\|$. (без доказателство)

Казано накратко, всеки ограничен върху линейно подпространство функционал може да бъде продължен до ограничен върху цялото нормирано пространство функционал със запазване на нормата.

Ще отбележим само, че от тази теорема веднага следва наличието на нетривиални (ненулеви) непрекъснати линейни функционали над едно нормирано пространство.

Нека X, $\|\cdot\|$ е нормирано пространство и x_0 е произволен ненулев елемент. Да разгледаме едномерното линейно пространство $M = \{x : x = tx_0, t \in R\}$ и в него линейния функционал $l(x) = l(tx_0) = t\|x_0\|$ (линейността е очевидна). Имаме $l(x_0) = \|x_0\| \neq 0$. От равенствата

$$|l(x)| = |l(tx_0)| = |t \cdot \|x_0\|| = |t| \cdot \|x_0\| = \|tx_0\| = \|x\|$$

се вижда, че $l : M \to R$ е ограничен с норма $\|l\| = 1$. Използвайки теоремата на Хан-Банах продължаваме l със запазване на нормата до ограничен линеен функционал $\tilde{l} : X \to R$ върху цялото пространство X.