

Примерни задачи за междинния изпит по Комплексен анализ

зад.1. Нека неконстантната функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$ е холоморфна в точката z_0 . Вярно ли е, че и функцията $g(z) = u(x, y) - iv(x, y)$ е холоморфна в z_0 ? Обосновете отговора си.

зад.2. Вярно ли е твърдението:

а) Ако $|e^z| = 1$, $z = x + iy$, то $z = iy$; б) $\operatorname{Re} e^z = \cos y$, $z = x + iy$, $x \neq 0$;

в) $|\sin z|^2 + |\cos z|^2 \geq 1$, $\forall z \in \mathbb{C}$; г) $\log(-1)^2 = 2 \log(-1)$?

Обосновете отговорите си.

зад.3. Функцията $f(z) = \frac{1}{z}$ е холоморфна в едносвързаната област $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \cup \infty$. Вярно ли е, че $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$, за всяка затворена крива $\gamma \subset D$? Обосновете отговора си.

зад.4. Нека γ е затворена Жорданова крива и $f(z)$ е функция холоморфна в околност на $\gamma \cup \operatorname{Int} \gamma$. Вярно ли е, че $\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$, за всяко $z_0 \notin \gamma$?

Обосновете отговора си.

зад.5. 26. Нека $f(z)$ и $g(z)$ са функции холоморфни в област $D \subset \mathbb{C}$ и съществува $z_0 \in D$, така че $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$, $n = 0, 1, \dots$. Вярно ли е, че $f(z) = g(z)$, $z \in D$? Обосновете отговора си.

зад.6. Съществува ли функция $f(z)$ холоморфна в $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и такава, че

а) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{i^n}{n}$; б) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2^n}$? Обосновете отговора си.

зад.7. Нека $\Omega \subset \mathbb{C}$ е отворено множество и $f(z)$ и $g(z)$ са холоморфни в Ω . Да се докаже, че Ω е област, тогава и само тогава когато от $f(z)g(z) = 0$, $z \in \Omega$ следва $f(z) \equiv 0$, $z \in \Omega$ или $g(z) \equiv 0$, $z \in \Omega$.

зад.8. Да се намерят всички цели функции $f(z)$, такива че $|f'(z)| \leq K|\sin z|$ за всяко $z \in \mathbb{C}$.

зад.9. Нека $f(z)$ е неконстантна функция, холоморфна в околност на затвореният единичен кръг и $|f(z)|=1$ за $|z|=1$. Да се докаже, че за всяко $w, |w|<1$, уравнението $f(z)=w$ има решение.

зад.10. Нека $D \subset \mathbb{C}$ е ограничена област, $f(z)$ е функция холоморфна в D и непрекъсната върху $\overline{D}$.

а) Вярно ли е, че най-малката стойност на $|f(z)|$ се достига върху границата на D ? Обосновете отговора си.

б) Да се докаже, че ако $|f(z)|=1, z \in \partial D$, то или $f(z)=c, |c|=1, z \in D$ или $f(z)$ има поне една нула в D .

зад.11. Нека z_0 е изолирана особена точка на $f(z)$. Каква е тя за $\frac{1}{f(z)}$, ако z_0 е

а) отстранима особена точка;

б) полюс;

в) съществена особена точка?

Обосновете отговорите си.

зад.12. Чрез теоремата за резидуумите да се пресметне

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta}{5 + 3 \cos \theta} d\theta;$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2 (x^2 + 4)}.$$

① Да докажем, че $f = u + iv$ и $g = u - iv$ са холморфни в $\mathbb{C}$. Тораба f и g са холморфни в околност D на $\mathbb{C}$.
 Сп. и u и v имат непр. мърви частни производни в D
 и $\begin{cases} u_x - v_y = 0 \\ u_y = -v_x \end{cases}$ в D и $\begin{cases} u_x = -v_y \\ u_y = v_x \end{cases}$ в D .

Отук $v_y = -v_y$ и $-v_x = v_x$ в D , т.е. $v_x = v_y = 0$ в D . Тораба
 и $u_x = u_y = 0$ в D . Сп. и $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ в D ,
 откоето и $f = u + iv = \text{const}$ ∇

Отр. $g(z)$ не е холморфна в $\mathbb{C}$.

② а) $|e^z| = 1 \Rightarrow |e^x + iy| = 1 \Rightarrow |e^x \cdot e^{iy}| = 1 \Rightarrow |e^x| |e^{iy}| = 1 \Rightarrow$
 $= e^x = 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow z = iy$

Отр. Бърко е

б) $\text{Re}(e^z) = \text{Re}(e^x \cdot e^{iy}) = \text{Re}[e^x(\cos y + i \sin y)] = e^x \cos y$
 при $x \neq 0$ Отр. не е Бърко.

в) $|\sin z|^2 + |\cos z|^2 = |\sin^2 z| + |\cos^2 z| \leq |\sin^2 z + \cos^2 z| = 1$

Отр. Бърко е

г) $\log(-1)^2 = \log 1 = \ln 1 + i \arg 1 = i 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
 $2 \log(-1) = 2(\ln 1 + i \arg(-1)) = 2(i(\pi + 2\pi k)) =$

$U_x = -V_y$ e $V_x = U_y$ e 0 , f.e. $V_x = V_y \in D$. Portanto
 $U_x = U_y \in D$. Cn. n $U = \text{const}$ e $V = \text{const} \in D$,
 ou seja n $f = U + iV = \text{const}$

Ovr. $g(z)$ he e xonomorpha e $\mathbb{C}$.

$$\textcircled{2} \text{ a) } |e^z| = 1 \Rightarrow |e^x \cdot e^{iy}| = 1 \Rightarrow |e^x \cdot e^{iy}| = 1 \Rightarrow |e^x| |e^{iy}| = 1 \Rightarrow \\
 = e^x = 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow z = iy$$

Ovr. Beplo e

$$\text{b) } \operatorname{Re}(e^z) = \operatorname{Re}(e^x \cdot e^{iy}) = \operatorname{Re}[e^x (\cos y + i \sin y)] = e^x \cos y \neq 0$$

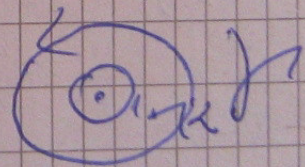
npi $x \neq 0$ Ovr. He e Beplo.

$$\text{c) } |\sin z|^2 + |\cos z|^2 = |\sin^2 z| + |\cos^2 z| \leq |\sin^2 z + \cos^2 z| = 1$$

Ovr. Beplo e

$$\text{d) } \log(-1)^2 = \log 1 = \ln|1| + i \arg 1 = i 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\
 2 \log(-1) = 2(\ln|1| + i \arg(-1)) = 2i(\pi + 2k\pi) = i(2k + 2)\pi$$

Ovr. He e Beplo



$\textcircled{3}$ Ovr. He e Beplo

$$\text{np. } \gamma: z = 2e^{it}, t \in [0, 2\pi]$$

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2e^{it}} d(2e^{it}) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2e^{it}} \cdot 2ie^{it} dt = 2\pi i \neq 0$$

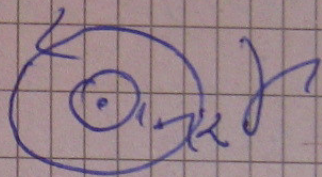
$$\begin{aligned} \text{v) } \log(-1)^2 &= \log 1 = \ln|1| + i \arg 1 = i 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 2 \log(-1) &= 2(\ln|-1| + i \arg(-1)) = 2i(\pi + 2k\pi) = i(2+2k)\pi \end{aligned}$$

Дмр. $\log e$ e $\log 2$

③ Дмр. $\log e$ e $\log 2$

Др. $\gamma: z = 2e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$

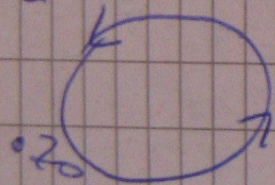
$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2e^{it}} d(2e^{it}) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cancel{2e^{it}}} \cdot \cancel{2e^{it}} i dt = 2\pi i \neq 0$$



④ 1cn. $z_0 \in \text{Ext } \gamma$

Сера по основката γ на K_{ext}

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{z - z_0} dz = 0 = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$$



20. $z_0 \in \text{Int} \gamma$



Сера модорм. на Келч и мо интерпонтате др-м за произвожуе

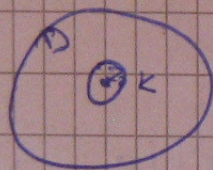
$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f'(z)$$

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz = 2\pi i f'(z) \text{ и сл.}$$

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{z-z_0} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz$$

Отг. Верно е

⑤



Нека K е токова малък отборен круг с център z_0 , че g се съдържа в D .

$D \subset K$ има

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n = g(z)$$

Оказа, се, че $f(z) = g(z)$ в K . По T_h ва уредува $f(z) = g(z)$ в D .

Отг. Верно е.

⑥ а) Да гончелм, че такова др-а $f(z) \exists$. Имаме че $f\left(\frac{1}{4k}\right) = \frac{i^{4k}}{4k} = \frac{1}{4k} \quad k \in \mathbb{N}$

По T_h за уредува $f(z) = z$ в $|z| < 1$. По

$$f\left(\frac{1}{4k+2}\right) = \frac{i^{4k+2}}{4k+2} = -\frac{1}{4k+2}, \quad k \in \mathbb{N}, \text{ т.е.}$$

каза, че, че $f(z) = g(z)$ в K . По Тн за уреденост
 $f(z) = g(z)$ в D . Отт. Верно е.

⑥ а) Да покажем, че такова д-а $f(z)$ $\exists$. Умислим
 че $f\left(\frac{1}{4k}\right) = \frac{1}{4k}$ $k \in \mathbb{N}$

По Тн за уреденост $f(z) = z$ в $|z| < 1$. Но
 $f\left(\frac{1}{4k+2}\right) = \frac{1}{4k+2} = -\frac{1}{4k+2}$, $k \in \mathbb{N}$, т.е.

$f\left(\frac{1}{4k+2}\right) \neq \frac{1}{4k+2}$ $\downarrow$ Отт. ~~не~~ $\nexists$

б) Да покажем, че $\exists$ такова д-а $f(z)$
 от $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2^n}$ при $n \rightarrow \infty \Rightarrow f(0) = 0$

Нека 0 е m -кратна нула на $f(z)$, т.е. $f(z) = z^m \psi(z)$
 където $\psi(z)$ е холоморфна в $|z| < 1$ и $\psi(0) \neq 0$
 $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2^n} \Leftrightarrow \frac{1}{n^m} \psi\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2^n} \Leftrightarrow \psi\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^m}{2^n}$

Оттук при $n \rightarrow \infty \Rightarrow \psi(0) = 0$ $\downarrow$ Отт. $\nexists$

⑦ 1-во: 1) Нека Ω е област. Трябва да док. че от
 $f(z) \cdot g(z) = 0$ в $\Omega \Rightarrow f(z) = 0$ или $g(z) = 0$ в Ω
 Нека $f(z) \cdot g(z) = 0$ в Ω . Ако $f(z) \neq 0$ в Ω , то f $\neq 0$
 тук, че $f(z_0) \neq 0$ и от обратния за непрекъснатост
 $f(z) \neq 0$ в околност $K \subset \Omega$ на z_0 . Тогава $g(z) = 0$ в
 K и по това единственост $g(z) = 0$ в Ω

2) Нека от $f(z) \cdot g(z) = 0$ в Ω следва че $f(z) = 0$ в Ω
 или $g(z) = 0$ в Ω . Трябва да док. че Ω е област. По
 условие Ω е отворено, така че трябва да док. че
 Ω е свързано. Да допуснем, че Ω не е свързано
 нека M е свързан компонент на Ω . Разглеждаме
 $f(z) = \begin{cases} 0 & \text{в } M \\ 1 & \text{в } \Omega \setminus M \end{cases}, g(z) = \begin{cases} 1 & \text{в } M \\ 0 & \text{в } \Omega \setminus M \end{cases}$

$f(z)$ и $g(z)$ са конформни в Ω и $f(z) \cdot g(z) = 0$ в Ω ,
 но $f \neq 0$ в Ω и $g \neq 0$ в Ω . Сл. Ω е свързано.

⑧ Нека $f(z)$ е цяла ϕ -я, за която
 $|f(z)| \leq k |z| \sin z$ в $\mathbb{C}$. Опитък $f(k\pi) = 0, k \in \mathbb{Z}$
 $\frac{f(z)}{\sin z}$ е цяла ϕ -я и $|\frac{f(z)}{\sin z}| \leq k$ в $\mathbb{C}$

т.е. $\frac{f(z)}{\sin z}$ е цяла и ограничена ϕ -я. По т. 4.9
 Либман

$f(z)$ и $g(z)$ са конформни в Ω и $f(z)g(z) \equiv 0$ в Ω ,
но $f \not\equiv 0$ в Ω и $g \not\equiv 0$ в $\Omega \not\subseteq \mathbb{C}$. Ω е свързана.

⑧ Нека $f(z)$ е цяла ф-я, за която
 $|f(z)| \leq k|\sin z|$ в $\mathbb{C}$. Опитък $f(k\pi) = 0, k \in \mathbb{Z}$
 Чн. $\frac{f(z)}{\sin z}$ е цяла ф-я и $\left| \frac{f(z)}{\sin z} \right| \leq k$ в $\mathbb{C}$

т.е. $\frac{f(z)}{\sin z}$ е цяла и ограничена ф-я по Лиувин

$$\frac{f(z)}{\sin z} = C, \text{ т.е. } f(z) = C \sin z \quad C \in \mathbb{C} \quad |C| \leq k$$

$$\text{Отг. } f(z) = C \sin z, \quad C \in \mathbb{C} \quad |C| \leq k$$

⑨ Показател $f(z)$ е неконстантна, от $\log 105 \Rightarrow z \in$
 $f(z)$ има нули в $|z| < 1$

Разглеждаме $f(z)$ и $g(z) = w, w \in \mathbb{C}, |w| < 1$ в $|z| \leq 1$
 При $|z| = 1$ $|f(z)| = 1 > |w| = |g(z)|$. По теорема $f(z)$
 и $f(z) - w$ имат една и съща двой нули в $|z| < 1$.
 Чн. $f(z) - w$ има нули в $|z| < 1$, т.е. ур. $f(z) = w$ има
 корени в $|z| < 1$

⑩ а) не е върхо, пр: $f(z) = z$ в $|z| < 1$

б) нека $f(z) \neq 0$ в D . Ще го х, че тогава $f(z) = c$, $|c| = 1$.
По принципа за максимум $\max_D |f(z)| = 1$. От друга страна
1 е холоморфна в D , и не в $\bar{D}$ и на $\max_D |f(z)| = 1$ то
в $\bar{D}$

т.е. $\min_D |f(z)| = 1$. От $\max_D |f(z)| = \min_D |f(z)| = 1 \Rightarrow$

$|f(z)| \equiv 1$ в $\bar{D}$. Оттук по принципа за запазване на
областта $f(z) = c$ $|c| = 1$.

⑪ а) z_0 е отср. ос. точка $f(z) \Rightarrow \exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$
Ако $A \neq 0$, то $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{A} \Rightarrow z_0$ е отср. ос. точка на $\frac{1}{f(z)}$

Ако $A = 0$, то $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = \infty \Rightarrow z_0$ е полюс на $\frac{1}{f(z)}$

Отт. на а) z_0 е отср. ос. точка или полюс на $\frac{1}{f(z)}$

б) z_0 е полюс на $f(z)$, то $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \Rightarrow$

$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0 \Rightarrow z_0$ е отср. ос. точка на $\frac{1}{f(z)}$

Отт. на б) z_0 е отср. ос. точка на $\frac{1}{f(z)}$

в) 1-а. z_0 е точка на събиране на нули на $f(z)$

Сегга z_0 не е изол. ос. т. на $\frac{1}{f(z)}$

2-а. z_0 не е точка на събиране на нули на $f(z)$.

Сегга то $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \Rightarrow \exists \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} \Rightarrow z_0$ е отср. ос. т.

Отт. в) z_0 е изол. ос. т. или отср. ос. т.