

Примерни задачи за междинния изпит по Комплексен анализ

зад.1. Нека неконстантната функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$ е холоморфна в точката z_0 . Вярно ли е, че и функцията $g(z) = u(x, y) - iv(x, y)$ е холоморфна в z_0 ? Обосновете отговора си.

зад.2. Вярно ли е твърдението:

- а) Ако $|e^z| = 1$, $z = x + iy$, то $z = iy$; б) $\operatorname{Re} e^z = \cos y$, $z = x + iy$, $x \neq 0$;
в) $|\sin z|^2 + |\cos z|^2 \geq 1$, $\forall z \in \mathbb{C}$; г) $\log(-1)^2 = 2 \log(-1)$?

Обосновете отговорите си.

зад.3. Функцията $f(z) = \frac{1}{z}$ е холоморфна в едносвързаната област $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \cup \infty$. Вярно ли е, че $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$, за всяка затворена крива $\gamma \subset D$? Обосновете отговора си.

зад.4. Нека γ е затворена Жорданова крива и $f(z)$ е функция холоморфна в околност на $\gamma \cup \operatorname{Int} \gamma$. Вярно ли е, че $\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$, за всяко $z_0 \notin \gamma$?

Обосновете отговора си.

зад.5. 26. Нека $f(z)$ и $g(z)$ са функции холоморфни в област $D \subset \mathbb{C}$ и съществува $z_0 \in D$, така че $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$, $n = 0, 1, \dots$. Вярно ли е, че $f(z) = g(z)$, $z \in D$? Обосновете отговора си.

зад.6. Съществува ли функция $f(z)$ холоморфна в $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и такава, че

- а) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{i^n}{n}$; б) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2^n}$? Обосновете отговора си.

зад.7. Нека $\Omega \subset \mathbb{C}$ е отворено множество и $f(z)$ и $g(z)$ са холоморфни в Ω . Да се докаже, че Ω е област, тогава и само тогава когато от $f(z)g(z) = 0$, $z \in \Omega$ следва $f(z) = 0$, $z \in \Omega$ или $g(z) = 0$, $z \in \Omega$.

зад.8. Да се намерят всички цели функции $f(z)$, такива че $|f(z)| \leq K|\sin z|$ за всяко $z \in \mathbb{C}$.

зад.9. Нека $f(z)$ е неконстантна функция, холоморфна в околност на затвореният единичен кръг и $|f(z)|=1$ за $|z|=1$. Да се докаже, че за всяко $w, |w|<1$, уравнението $f(z)=w$ има решение.

зад.10. Нека $D \subset \mathbb{C}$ е ограничена област, $f(z)$ е функция холоморфна в D и непрекъсната върху $\overline{D}$.

а) Вярно ли е, че най-малката стойност на $|f(z)|$ се достига върху границата на D ? Обосновете отговора си.

б) Да се докаже, че ако $|f(z)|=1, z \in \partial D$, то или $f(z)=c, |c|=1, z \in D$ или $f(z)$ има поне една нула в D .

зад.11. Нека z_0 е изолирана особена точка на $f(z)$. Каква е тя за $\frac{1}{f(z)}$, ако z_0 е

- а) отстранима особена точка;
- б) полюс;
- в) съществена особена точка?

Обосновете отговорите си.

зад.12. Чрез теоремата за резидуумите да се пресметне

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta}{5 + 3 \cos \theta} d\theta;$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2 (x^2 + 4)}.$$