

① Да допуснем, че $f(z) = u + i v$ и $g(z) = u - i v$ са холоморфни в z_0 . Тогава u и v имат непрекъснати първи частни производни в околност $D = K(z_0, R)$ на z_0 и

$$\begin{cases} u_x = v_y & \text{в } D \text{ и} \\ u_y = -v_x \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} u_x = -v_y \\ u_y = v_x \end{cases}$$

Оттук $v_y = u_x = -v_y$ в D и $v_x = u_y = -v_x$ в D , т.е.

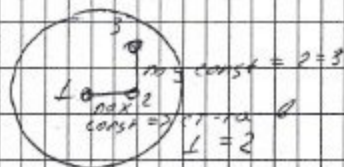
$$v_y = 0 \text{ и } v_x = 0 \text{ в } D \Rightarrow$$

$$u_x = 0 \text{ и } u_y = 0 \text{ в } D$$

Понеже u и v са холоморфни, то $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$.

$\Rightarrow f$ е const-противоречие

$\Rightarrow g$ не е холоморфна в z_0



$$\Rightarrow 1 = 2 - 3 - \dots$$

② а) Ако $|e^z| = 1$ $z = x + iy$, то $z = iy$

$$|e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x| |e^{iy}| = 1 \Rightarrow |e^x| = 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow z = iy$$

Вярно

$$\text{Re } e^z = \cos y \quad z = x + iy \quad x \neq 0$$

$$\text{Re } (e^{x+iy}) = e^x \cos y \quad \text{Понеже } x \neq 0 \Rightarrow e^x \neq 1 \Rightarrow \text{Не е вярно}$$

$$B) |\sin z|^2 + |\cos z|^2 \geq 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$|\sin z|^2 + |\cos z|^2 = |\sin^2 z| + |\cos^2 z| \stackrel{\text{непр } \Delta}{\geq} |\sin^2 z + \cos^2 z| = 1$$

+ тригоном. т-ва
са изр

Вярно е.

$$2) \log(-1)^2 = 2 \log(-1)$$

$$\log(-1)^2 = \log 1 = \ln \frac{1}{0} + i \arg 1 = 0 + i(2k\pi), k \in \mathbb{Z}$$

през 2

$$2 \log(-1) = 2(\ln \frac{1}{0} + i \arg(-1)) = 2i(\pi + 2\ell\pi) = i(4\ell + 2)\pi, \ell \in \mathbb{Z}$$

през 4

$$\Rightarrow 2 \log(-1) \subset \log(-1)^2 \quad \text{и} \quad \neq$$

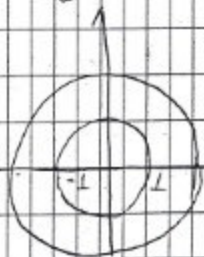
Не е вярно.

③ Понехе D не е област в крайната равнина $\Rightarrow [1]$ Коши не става

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

За контура ориентир в положителна

$$\text{Нека } f: z = 2e^{it} \quad t \in [0; 2\pi]$$



$$\int_C f(z) dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2e^{it}} \cdot 2e^{it} \cdot i dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2e^{it}} \cdot 2e^{it} \cdot i dt = i \cdot 2\pi$$

(Избрахме тази окръжност, защото
оминава нулата)

+ лежи в областта $\Rightarrow$

Не е вярно че $\int_C = 0$

④ $I_{\text{ср.}} z_0 \in \text{Ext } \Gamma$

$$I = \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{z-z_0} dz \quad J = \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}$$

По основната [I] Коши $I=J=0$



II ср.



$I = 2\pi i f'(z_0)$ - от ф-лата на Коши
 f' (общо е холоморфна)

$J = 2\pi i f'(z_0)$ по интегралните
 формули за производните $\Rightarrow$
 $I=J$

$$\left\{ f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \quad n \in \mathbb{N}, z_0 \in \text{Int } \Gamma \right\}$$

$\Rightarrow$ Верно е!

Във 2-та интегрална част
 ще се пресметне и с [I] за резултатите

② II ИДЕНТИЧНОСТЬ

Ако $f(z)$ и $g(z)$ са голоморфни в област $D \subseteq \mathbb{C}$ и $\eta \in D$: $f(z) = g(z)$ $\frac{1}{2}$ или точно $1 + \alpha$ съответствие в D , то $f(z) = g(z)$ в D .



II Нека $r > 0$ е толкова малко, че $K(z_0, r) \subset D$. По I на Тейлър за $z \in K(z_0, r)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = g(z)$$

$$\Rightarrow f(z) = g(z) \text{ в } K$$

По II идентичност $\Rightarrow f(z) = g(z)$ в D

Отт.: Верно е!

⑤ f, g - голоморфны в $D \subset \mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$

$$z_0 \in D \quad f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0) \quad n=0, 1, \dots$$

$$f(z) = g(z) \quad z \in D?$$

Рассуждаем: $P = f - g$, то P голоморфна в D и z_0 — точка

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad z \in K(z_0, R)$$

$0 < R < \text{dist}(z_0, \partial D)$

но зато

$$a_n = \frac{P^{(n)}(z_0)}{n!} = 0$$

$$\Rightarrow P(z) \equiv 0 \quad z \in K(z_0, R)$$

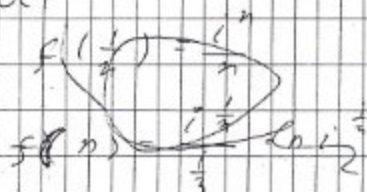
Поскольку $z_0 \in D$ — точка на связной компоненте на пути γ от γ до границы ∂D , то единственность голоморфной функции $P(z) \equiv 0 \quad \forall z \in D$

$$\Rightarrow f(z) - g(z) = 0$$

$$f(z) \equiv g(z) \quad \forall z \in D$$

6) $f(z)$? ^{хорошо рофна} $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

а) $\{$



Да докажем, че $f(z)$ е холоморфна в $|z| < 1$ и е суръективно а)

При $n = 4k$, $k \in \mathbb{N} \Rightarrow f\left(\frac{1}{4k}\right) = \frac{1}{4k} = z$

По $\square$ за идентичност $f(z) \equiv z$ в $|z| < 1$

Но при $n = 4k+2$, $k \in \mathbb{N}$, $f\left(\frac{1}{4k+2}\right) = \frac{-1}{4k+2} \Rightarrow$

Противоречие защото $z|_{k \rightarrow \infty} = \frac{1}{4k+2} \neq \frac{-1}{4k+2}$
 $\Rightarrow$ не съществува

а) Да докажем, че такава ф-я обикновено
 При $n \rightarrow \infty \Rightarrow f(0) = 0$. Нека 0 е m -кратна
 нула на $f(z)$. Тогава $f(z) = z^m \varphi(z)$, където
 $\varphi(z)$ - холоморфна в $|z| < 1$ и $\varphi(0) \neq 0$
 щом, че

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^m} \varphi\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2^n}, \text{ т. е.}$$

$$\varphi\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{n^m}{1} \quad \text{остатък при } n \rightarrow \infty$$

$\Rightarrow \varphi(0) = 0$ - противоречие

$\Rightarrow$ не съществува

1) Не докажем, че ако $\Omega \subset \mathbb{C}$ е област, то от $f(z)g(z) \equiv 0$ в $\Omega \Rightarrow f(z) \equiv 0$ в Ω или $g(z) \equiv 0$ в Ω .



Да допуснем, че $f \not\equiv 0$ в Ω .
Тогави $\exists z_0 \in \Omega$ такава, че $f(z_0) \neq 0$.
От съображения за непрекъснатост $f(z) \neq 0$ в околност $K \subset \Omega$ на z_0 . Но
 $f(z) \cdot g(z) \equiv 0$ в $K \Rightarrow g(z) \equiv 0$ в K . От [1] за
идентичност $\Rightarrow g(z) \equiv 0$ в Ω .

2) Не докажем, че ако от $f \cdot g \equiv 0$ в $\Omega \Rightarrow f \equiv 0$ или $g \equiv 0$ в Ω , то Ω е област.

Да допуснем, че Ω не е област. Тогави Ω не е свързано $\Rightarrow$ има повече от една (1-и път е 2) свързани компоненти.

Нека D_1 е свързана компонента на Ω .
Нека



$$f(z) = \begin{cases} 1 & \text{в } D_1 \\ 0 & \text{в } \Omega \setminus D_1 \end{cases}$$



$$g(z) = \begin{cases} 0 & \text{в } D_1 \\ 1 & \text{в } \Omega \setminus D_1 \end{cases}$$

f и g са холоморфни в Ω , но $f(z) \not\equiv 0$ в Ω и $g(z) \not\equiv 0$ в $\Omega \Rightarrow \nexists$

⑦ $f(z), g(z)$ - холоморфни в Ω

Ω област $\Leftrightarrow f(z)g(z) \equiv 0 \quad z \in \Omega \Rightarrow$
 $f(z) \equiv 0$ или $g(z) \equiv 0$ в Ω

$\Rightarrow \Omega$ област f, g - холоморфни
 $f \cdot g \equiv 0$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n (z-z_0)^n \equiv 0 \quad \forall z_0 \in \Omega$$

холом в обл. $D \subseteq \mathbb{C}$
 Нулите на холоморфна ф-я, която не е
 тождественно 0, са изолирани (особени
 точки), т.е. $\forall z_0 \neq f(z_0) = 0 \quad \exists K(z_0, \delta) \subset D$
 такива, че $f(z) \neq 0, z \in K(z_0, \delta)$

Да предположим, че $f \not\equiv 0$

I Ако f няма нули в $D \Rightarrow g \equiv 0$

II Ако f има нули в $D \Rightarrow \exists K(z_0, \delta) \subset D$
 такива че $f(z) \neq 0$ в $z \in K(z_0, \delta)$
 $0 < |z-z_0| < \delta$

$\Rightarrow \exists$ продулчена околност, в която $g=0$

$\Rightarrow$ в реда на Лоран $\forall$ коэф са 0

$\Rightarrow g \equiv 0$

5 в 4'

т.е. не може

$$\begin{pmatrix} f=1 \\ g=1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow f(z) \cdot g(z) = 0 \Rightarrow f=0 \text{ или } g=0$$

Допускени, не е област
(отворено и свързано)
по уел.

Т.е. допускени, не е свързано



$f(z) \cdot g(z) = 0 \Rightarrow$ трябва можем да видим
кр-я $\begin{cases} 0 & z \in K_1 \\ f(z) \neq 0 & z \in K_2 \end{cases}$

$$g(z) = \begin{cases} 1 & z \in K_1 \\ 0 & z \in K_2 \end{cases}$$

Но при нас е известно, че
за всяко z $f=0$ или $g=0$

$\Rightarrow$ противоречие
т.е. е свързано
+ отворено
област

От принципа за запазване на обема
 (защото не се образува в област Γ)
 $f(z) \equiv c, |c| = 1$

1) Рунге Ако Γ е затворена хорд крива
 $f(z)$ и $g(z)$ са холоморфни в Γ и Γ

и $|f(z)| < |g(z)|, z \in \Gamma$, то $f(z) + g(z) \neq 0$,
 по-голямото

$f(z) + g(z)$ и $g(z)$ имат един и същ
 брой нули в Γ и Γ

От за $\Gamma \cap D \neq \emptyset \Rightarrow$

защото $\neq 0$ не е конст.

$f(z)$ има поне една нула в $K(0,1)$

По 1) рунге за $f(z), g(z) \equiv w$ и $K(0,1)$

(за $|z| = 1, |g(z)| < 1 = |f(z)|$) $f(z)$

и $f(z) - g(z) = f(z) - w$ и $f(z)$ имат един и

один брой нули в $K(0,1)$

$\Rightarrow$ ур. $f(z) = w$ има поне една корен
 в $K(0,1)$

1.1) а) z_0 е отсранична особена точка на $f(z)$

Решение: $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ (фиксирано крайно число) $A \neq \infty$

- Ако $A \neq 0$, то $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{A}$ - крайно число $\Rightarrow$

z_0 е отсранична особена точка за $\frac{1}{f}$

- Ако $A = 0$, то $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = \infty \Rightarrow z_0$ е полюс

б) z_0 е полюс на $f(z) \Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \Rightarrow$

$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0 \Rightarrow z_0$ е отсранична особена точка за $\frac{1}{f}$

в) z_0 е съществена особена точка

- 1-а z_0 е точка на съблизване на нули на $f(z)$, т.е. $\exists \{z_n\}$ такива, че $z_n \rightarrow z_0$ и $f(z_n) = 0$. Ако $\frac{1}{f(z)}$ не е холоморфна в някоя една прободена околност на z_0 (дори не е дефинирана) $\Rightarrow z_0$ не е изолирана особена точка на $f(z)$

- 2-а z_0 не е точка на съблизване на нули на $f(z)$. Безпохват да намерим прободена околност на z_0 , в която f няма нули. $\frac{1}{f(z)}$ е холоморфна в прободена околност на z_0 (т.е. z_0 е изолирана особена точка на $\frac{1}{f(z)}$). z_0 е съществена особена точка на $f(z)$

$\Rightarrow \exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \Rightarrow \nexists \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} \Rightarrow z_0$ е съществена особена точка на $\frac{1}{f(z)}$

$$(12) \quad I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta}{5 + 3 \cos \theta} d\theta \quad \text{Порядок } z = e^{i\theta}$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + 1}{2z}$$

$$d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$I = \int_{(0,1)} \frac{\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)^2}{5 + 3\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)} \cdot \frac{1}{iz} dz = \int_{(0,1)} \frac{\frac{(z^2+1)^2}{4z^2}}{\frac{10z + 3z^2 + 3}{2z}} \cdot \frac{1}{iz} dz =$$

$$= \int_{(0,1)} \frac{1}{2i} \cdot \frac{(z^2+1)^2}{z^2(3z^2+10z+3)} dz$$

Особенности функции на контуре интегрирования образуются в виде 0-двукратной полюса и корней на $3z^2 + 10z + 3 = 0$



$$3z^2 + 9z + z + 3 = 0$$

$$3z(z+3) + (z+3) = 0$$

$$z_1 = -3 \quad z_2 = -\frac{1}{3}$$

В окрестности $z = 0$ и $-\frac{1}{3}$

$$I = \frac{1}{2i} 2\pi i \left(\text{Res} \left(\frac{(z^2+1)^2}{z^2(3z^2+10z+3)}, 0 \right) + \text{Res} \left(\frac{(z^2+1)^2}{z^2(3z^2+10z+3)}, -\frac{1}{3} \right) \right)$$

$$\text{Res}(0) = \text{Res} \left(\frac{(z^2+1)^2}{3z^2+10z+3}, 0 \right) = \text{Res} \left(\frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots}{z^2}, 0 \right) = a_2$$

$$= \frac{1}{1!} \left(\frac{(z^2+1)^2}{3z^2+10z+3} \right)' \Big|_{z=0} = \frac{2(z^2+1)2z(3z^2+10z+3) - (z^2+1)^2(6z+10)}{(3z^2+10z+3)^2} \Big|_{z=0} =$$

$$= -\frac{10}{9}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{3}\right) &= \operatorname{Res}\left(\frac{(z^2+1)^2}{z^2(3z^2+10z+3)}, -\frac{1}{3}\right) = \frac{(z^2+1)^2}{z^2(3z^2+10z+3)} \Big|_{z=-\frac{1}{3}} = \\ &= \frac{\left(\frac{1}{9}+1\right)^2}{\frac{1}{9}} = \frac{\frac{100}{81} \cdot 9}{-2+10} = \frac{100}{9 \cdot 8} = \frac{25}{18} \\ &6\left(-\frac{1}{3}\right)+10 \end{aligned}$$

$$I = \pi \left(\frac{25}{18} - \frac{10}{9} \right) = \pi \cdot \frac{5}{18}$$

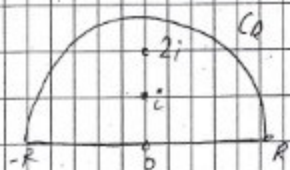
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)}$$

Понехе подинтегралната ф-я е четна $\Rightarrow$

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)}$$

Особените точки на функцията са $\pm i$ - двукратни полюси
 $\pm 2i$ - еднократни полюси

В $\operatorname{Im} z > 0$ лежат $i, 2i$. Знаменателят няма реални нули $\rightarrow$ ~~първата~~ ще интегрираме по контура Γ_R .



$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_R} f(z) dz &= 2\pi i (\operatorname{Res}(f, i) + \operatorname{Res}(f, 2i)) = \\ &= \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\text{arc}} f(z) dz \end{aligned}$$

Ще покажем, че при $R \rightarrow \infty$ $\int_{\text{arc}} f(z) dz = 0$

$$\left| \int_{\text{arc}} f(z) dz \right| \leq \int_{\text{arc}} |f(z)| |dz| \leq \frac{\pi R}{(R^2-1)^2(R^2-4)} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

В знаменателят

$$z^2+1 \geq |z|^2-1 = R^2-1 > 0$$

Ако е от окр.

$$z^2+4 \geq |z|^2-4 = R^2-4$$

$$\Rightarrow \int_C f(z) dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

$$2\pi i = 2\pi i (\operatorname{Res}(f, i) + \operatorname{Res}(f, 2i))$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, i) &= \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z^2+4)(z^2+i)^2}, i\right) = \operatorname{Res}\left(\frac{a_0 + a_1(z-i) + a_2(z-i)^2}{(z-i)^2}, i\right) \\ &= a_2 = \frac{1}{1!} \left(\frac{1}{(z^2+4)(z-i)^3} \right)' \Big|_{z=i} = \frac{-[(2z)(z-i)^2 + (z^2+4)2(z-i)]}{(z^2+4)^2(z-i)^4} \Big|_{z=i} \\ &= \frac{-[2i(-4) + 3 \cdot 2 \cdot 2i]}{9 \cdot 16} = \frac{-4i}{9 \cdot 16} = \frac{-i}{36} \end{aligned}$$

$$\operatorname{Res}(f, 2i) = \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z^2+4)(z^2+i)^2}, 2i\right) = \frac{1}{(2i)^2+4} = \frac{1}{-4} = \frac{-i}{36}$$

$$I = \pi i \left(\frac{-i}{36} - \frac{i}{36} \right) = \frac{\pi}{18}$$