Функцията z^α. Бином на Нютон

деф $z^\alpha := e^{\alpha \log z} = e^{\alpha(\log_0 z + i2k\pi)} = e^{i2k\alpha\pi} \cdot e^{\alpha \log_0 z}$

Св-ва

1) $z_1^\alpha \cdot z_2^\alpha = (z_1 z_2)^\alpha$

2) $z^\alpha z^\beta \neq z^{\alpha+\beta}$

3) $(z^\alpha)^\beta \neq z^{\alpha\beta}$

4) Всеки еднозначен клон на z^α в $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{z \neq 0\}$ е холоморфна функция

Бином на Нютон

Развитие в ред около 0 на ф-та $(1+z)^\alpha$

$f(z) = e^{\alpha \log_0(1+z)}$, $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$

Нека $f(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n + \dots$, $c_0 = f(0) = 1$

Имаме че $f'(z) = \dfrac{\alpha e^{\alpha \log_0(1+z)}}{1+z} \Leftrightarrow (1+z) f'(z) = \alpha f(z)$

Тогава $(1+z)(c_1 + 2c_2 z + \dots + (n-1)c_{n-1} z^{n-2} + \dots) =$
$\alpha(1 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots)$

$z^0: c_1 = \alpha$

$z^1: 2c_2 + c_1 = \alpha c_1 \Rightarrow c_2 = \dfrac{(\alpha-1)c_1}{2} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}$

$z^2: 3c_3 + 2c_2 = \alpha c_2 \Rightarrow c_3 = \dfrac{(\alpha-2)c_2}{3} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}$

$\vdots$

Д $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{\alpha} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$

Деф Всяко решение на $z \neq 0$, $\operatorname{tg} w = z$, $z \in \mathbb{C}$ се нарича $\operatorname{arctg} z$

$$\operatorname{tg} w = z \iff \frac{\sin w}{\cos w} = z \iff \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{i(e^{iw} + e^{-iw})} = z \iff$$

$$\frac{e^{i2w} - 1}{i(e^{i2w} + 1)} = z \iff e^{i2w}(1 - iz) = 1 + iz \overset{z \neq \pm i}{\iff}$$

$$e^{i2w} = \frac{1 + iz}{1 - iz}, \; z \neq \pm i \Rightarrow i2w = \log \frac{1 + iz}{1 - iz}$$

$$w = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + iz}{1 - iz}, \quad \operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + iz}{1 - iz}$$

Лема $\operatorname{arctg}_0 z$ е холоморфна ф-я в $\mathbb{C} \setminus ((-i\infty, -i] \cup [i, i\infty))$

и $(\operatorname{arctg}_0 z)' = \frac{1}{1 + z^2}$

Свойства на интеграл в/у крива

1) Нека $\gamma_1 : z = \gamma_1(t) : [a,b] \to \mathbb{C}$

$\gamma_2 : z = \gamma_2(\tau) : [c,d] \to \mathbb{C}$ са гладки криви

казваме че двете криви са еквивалентни $\gamma_1 \sim \gamma_2$, ако $\exists$ ф/я $\tau = \lambda(t)$ такава че $\lambda(a) = c$, $\lambda(b) = d$

$\gamma_2(\lambda(t)) = \gamma_1(t)$, $\forall t \in [a,b]$ и $\exists$ непр $\lambda'(t) > 0$, $t \in [a,b]$

1) Ако $\gamma_1 \sim \gamma_2$ са гладки криви то $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$

2) линейност на интеграла $\int_\gamma (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_\gamma f + \beta \int_\gamma g$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

3) адитивност относно γ

Ако $\gamma_1 : z = \gamma_1(t) : [a,b] \to \mathbb{C}$

$\gamma_2 : z = \gamma_2(t) : [b,c] \to \mathbb{C}$ и $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f \text{. Подеф } \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_n} f := \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f$$

4) $$\int_{\gamma^-} f = -\int_\gamma f$$

5) Оценка на модула на интеграла $\left|\int_\gamma f\right|$

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le \int_\gamma |f(z)|\,|dz| = \int_a^b |f(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)|\,dt$$

Док Нека $\lambda = \int_\gamma f(z)\,dz$. Имаме че $\lambda = |\lambda| e^{i\varphi} \Rightarrow |\lambda| = \lambda e^{-i\varphi}$

Тогава $$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| = \operatorname{Re}\left\{\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right|\right\} = \operatorname{Re}\left\{e^{-i\varphi}\int_\gamma f(z)\,dz\right\} =$$

$$\operatorname{Re}\left\{\int_\gamma e^{-i\varphi} \cdot f(z)\,dz\right\} = \operatorname{Re}\left\{\int_a^b e^{-i\varphi} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt\right\} = \int_a^b \operatorname{Re}\left\{e^{-i\varphi} f(\gamma(t))\gamma'(t)\right\}dt \le$$

$$\le \int_a^b \left|e^{-i\varphi} f(\gamma(t))\gamma'(t)\right|dt = \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)|\,dt$$

Примитивна. Th на Лайбниц-Нютон

Деф Нека $D \subseteq \mathbb{C}$ е област и $f: D \to \mathbb{C}$ е непрекъсната ф/я. Казваме че ф/та $F: D \to \mathbb{C}$ е примитивна на f, ако F е холоморфна в D и навсякъде в D $F'(z) = f(z)$, $z \in D$

Ф/ла на Лайбниц-Нютон

Нека $D \subseteq \mathbb{C}$ е област $f: D \to \mathbb{C}$ е непрекъсната ф/я. Ако f има примитивна F в D то за $\forall z_0, z \in D$ и всяка крива (гладка) $\gamma \subset D$, $\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta = F(z) - F(z_0)$

Th (Лайбниц-Нютон)

Нека $D \subseteq \mathbb{C}$ е област и $f: D \to \mathbb{C}$ е непрекъсната функц/я. Следните твърдения са еквивалентни

1) f има примитивна в D
2) $\int_\gamma f = 0$ за $\forall$ затворена крива $\gamma \subset D$
3) $\int_\gamma f$ не зависи от γ, т.е. ако 2 криви γ_1 и γ_2 са криви в D с общо начало и общ край то $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$

Док $1 \Rightarrow 2$) от формулата на Лайбниц-Нютон

$2 \Rightarrow 3$) Нека $\gamma_1 \gamma_2$ в D са криви с общо начало и край. Тогава $\gamma_1 \cup \gamma_2^- \subset D$ е затворена крива и

$$0 = \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2^-} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2^-} f = \int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_2} f \Rightarrow \int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$$

$3 \Rightarrow 1$) Нека $z_0 \in D$ е фикс. и $z \in D$ е произволна

Дефинираме $F(z) := \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta$

Нека $h \in \mathbb{C}$ е т.ч. $z+h \in D$ и отсечката $[z, z+h] \subset D$

Имаме че $\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_{z}^{z+h} f - \int_{z_0}^{z} f\right] =$

$= \frac{1}{h}\left[\int_{\partial[z, z+h]} f - \int_{\gamma} f\right] = \frac{1}{h}\int_{[z, z+h]} f = \frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} f(\xi)\,d\xi$

$f(z) = \frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} f(z)\,d\xi$. Тогава $\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| =$

$\frac{1}{|h|}\left|\int_{z}^{z+h} f(\xi)\,d\xi - \int_{z}^{z+h} f(z)\,d\xi\right| = \frac{1}{h}\left|\int_{z}^{z+h}[f(\xi)-f(z)]\,d\xi\right| \leq$

$\frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} |f(\xi)-f(z)|\,|d\xi|$

Следствие 1. Ако F е холоморфна в област $D \subset \mathbb{C}$ и $F'(z)=0$, $z \in D$ то $F(z) \equiv const$ в D

Следствие 2. Ако F е примитивна на f в D, то всичките примитивни на f в D са $F + const$

Тh (Коши) Тh Коши за сложен контур

Ако $D \subseteq \mathbb{C}$ е едносвързана област, то $\int_{\gamma} f = 0$ за $\forall$ затворена крива $\gamma \subset D$ и за $\forall$ холоморфна в D функция f

Деф. $D \subset \mathbb{C}$ е крайна свързана област, ако $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$ има краен брой свързани компоненти

Тh (Коши за сложен контур)

Ако $D \subset \mathbb{C}$ е ограничена крайносвързана област то $\int_{\partial D} f = 0$ за $\forall$ f холоморфна в $\overline{D}$

Следствие

Ако γ е затворена Жорданова крива и $z_0 \in \operatorname{int} \gamma$ то $\int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$

Ф/ла на Коши

Ако D е ограничена крайносвързана област и f е холоморфна в околност на $\overline{D}$ то

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{за } \forall z \in D$$

Следствие 1

Ако $D \subset \mathbb{C}$ е област и γ е затворена Жорданова крива т.ч. $\gamma \cup \operatorname{int} \gamma \subset D$ и f е холоморфна в D то

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{за } \forall z \in \operatorname{int} \gamma$$

Следствие 2 (Тh за средното

Ако D е област и f е холоморфна в D то

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt, \quad z_0 \in D, \ 0 < r < \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$$

Интеграл от типа на Коши

Деф $F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$, $z \notin \gamma$, където F

наричаме интеграл на Коши

Тм $F(z)$ е безкрайно диференцируема, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$

и $F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta$

Тм на Морера

Ако $D \subset \mathbb{C}$ е област, f е непрекъсната в D и $\int_\gamma f = 0$ за $\forall$ затворена крива $\gamma \subset D$, то f е холоморфна в D

Док: От Тм на Лайбниц-Нютон $\Rightarrow f$ има примитивна

Редици и редове от холоморфни ф-ии

Нека $M \subseteq \mathbb{C}$, $f_n : M \to \mathbb{C}$, $n = 1, 2 \ldots$

Деф $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ (поточково), ако $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \nu = \nu(\varepsilon, z)$ т.ч. $\forall n > \nu \Rightarrow$ $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$

Деф $f_n \underset{M}{\rightrightarrows} f$, ако $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \nu = \nu(\varepsilon)$ т.ч. $\forall n > \nu \Rightarrow$

$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$, $\forall z \in M$

Тh Ако $f_n : M \to \mathbb{C}$, $n = 1, 2 \ldots$ $f_n \in C(M)$ и $f_n \underset{M}{\rightrightarrows} f$ то $f \in C(M)$

Следствие Ако $u_n : M \to \mathbb{C}$, $n = 1, 2 \ldots$ $u_n \in C(M)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ е равномерно сходящ в/у M то $u(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) \in C(M)$

Тh Граничен преход под знака на интеграла

Нека $\gamma \subset \mathbb{C}$ е ректифицируема крива, $f_n \in C(\gamma)$, $n = 1, 2 \ldots$ и f_n е равномерно сходящ в/у γ т.е. $f(\gamma) \underset{M}{\rightrightarrows} f$, тогава

$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z) = \int_\gamma f(z)\,dz$

Тh (Вайерщрас): Нека $D \subseteq \mathbb{C}$ е област в комплексната равнина и $f_n : D \to \mathbb{C}$, $n = 1, 2 \ldots$, холоморфни в D, и $f_n \rightrightarrows f$ в/у компактните подмножества на D. Тогава

1) f е холоморфна в D

2) $f_n^{(k)} \rightrightarrows f^{(k)}$ в/у компактните подмножества

Док 1) от $f_n \rightrightarrows f \Rightarrow f$ е непрекъсната в D. Нека $z_0 \in D$ и $K_0 = K(z_0, r)$ е т.ч. $\overline{K_0} \in D$. Нека $\gamma \subset K_0$ е затворена крива $f_n \underset{\gamma}{\rightrightarrows} f$ (γ^* е компакт). Тогава $\int_\gamma f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)dz = 0$

$\Rightarrow$ от Тh на Морера $\Rightarrow f$ е холоморфна в K_0

Док 2) Тъй като всяко компактно подмножество на D може да се покрие с краен брой кръгове е достатъчно да докажем само за кръг $\subset D$

Нека $K(z_0,2r)\subset D$ и $A(z_0,r)\subset D$. Нека $z_0\in D$, $r: K(z_0,2r)\subset D$

$\gamma=\partial K(z_0,2r)$. От ф-лата на Коши имаме че

$$f_n^{(k)}(z)-f^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_n(\zeta)-f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}\,d\zeta,\ \forall z\in K(z_0,2r)$$

Нека $z\in A(z_0,r)$. Тъй като $f_n \rightrightarrows f$ в компактните подмножества на D, то $f_n \underset{\gamma}{\rightrightarrows} f$. Тогава за $\forall \varepsilon>0$ $\exists \nu=\nu(\varepsilon)$ т.ч. $|f_n(\zeta)-f(\zeta)|<\varepsilon$, $n>\nu$, $\forall \zeta\in\gamma$

Сега от $f_n^{(k)}(z)-f^{(k)}(z) \Rightarrow \left|f_n^{(k)}(z)-f^{(k)}(z)\right|=\left|\frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_n(\zeta)-f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}d\zeta\right|$

$$\le \frac{k!}{2\pi}\int_\gamma \frac{|f_n(\zeta)|-|f(\zeta)|}{|\zeta-z|^{k+1}}\,d\zeta \le \frac{k!}{2\pi}\frac{\varepsilon}{r^{k+1}}\,l(\gamma),\ l(\gamma)\text{-const}$$

$$\Rightarrow f_n^{(k)} \underset{A(z_0,r)}{\rightrightarrows} f^{(k)}$$

Нули на холоморфни функции

Тh за единственост на степенни редове

Нека $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ е степенен ред със $R_{cx} = R > 0$

Ако z_0 е точка на сгъстяване на множеството от нулите $\{z \in K(z_0,R) : f(z)=0\}$ на f, то $f(z) \equiv 0 \Rightarrow$

$a_n = 0, \forall n, z \in K(z_0,R)$

Тh за единственост на холоморфните ф-ии

Ако $f(z)$ е холоморфна в обл $D \subseteq \mathbb{C}$ и мн-вото от нулите $\{z \in D : f(z)=0\}$ има точка на сгъстяване в D, то $f(z) \equiv 0, z \in D$

Заб) Условието нулите на f да имат т. на сгъстяване е съществено

Следствие Ако f е холоморфна в област $D \subseteq \mathbb{C}$ и $f(z) \not\equiv 0, z \in D$, то нулите на f са изолирани точки, т.е. ако $z_0 : f(z_0) = 0$ то $\exists K'(z_0,\delta) = \{0 < |z-z_0| < \delta\}$ т.ч. $f(z) \neq 0, z \in K'(z_0,\delta)$

Тh за идентичност

Ако $f(z), g(z)$ са холоморфни в област $D \subseteq \mathbb{C}$ и мн-вото $\{z \in D : f(z) = g(z)\}$ има точка на сгъстяване в D, то $f(z) \equiv g(z)$ в $D, z \in D$

Изолирани особени точки

Деф $z_0 \in \mathbb{C}$ е изолирана особена точка на f, ако f е холоморфна в пробита околност $\dot{K}(z_0,R) = \{0 < |z-z_0| < R\}$ на z_0.

Тогава $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$

Деф

1) z_0 е отстранима особена точка, ако $a_{-n} = 0$, $\forall n = 1,2..$

2) z_0 е m-кратен полюс на f, ако $a_{-m} \neq 0$, $a_{-n} = 0$, $\forall n > m$

Тогава $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0}$

При $m = 1 \Rightarrow z_0$ е прост полюс

3) z_0 е съществена особена точка на f, ако $a_{-n} \neq 0$ за безброй много n

Тм (Риман) Нека z_0 е отстранима особена точка. Нека f е холоморфна в пробита околност с радиус R т.е. $\{0 < z-z_0 < R\}$. Следните твърдения са еквивалентни

1) z_0 е отстранима особена точка на R

2) $\exists$ ф/я $g(z)$ - холоморфна в $|z-z_0| < R$ т.ч. $f(z) \equiv g(z)$, $0 < |z-z_0| < R$

3) $\exists \lim_{z \to z_0} f(z)$

4) $|f(z)|$ е ограничена в пробитата околност на т. z_0, т.е. $\exists M > 0$, $R_1 \leq R$ т.ч. $|f(z)| < M$, $0 \leq |z-z_0| < R_1$

Док $1 \Rightarrow 2$ по деф $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, $0 < |z-z_0| < R$,
$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ е степенен ред с $R_{cx} \geq R \Rightarrow g(z)$ е холоморфна в $|z-z_0| < R$ и $g(z) \equiv f(z)$, $0 < |z-z_0| < R$, $f(z) = a_0 = g(z_0) \Rightarrow$ f е холоморфна в $|z-z_0| < R$

$2 \Rightarrow 3$ $\lim_{z \to z_0} f(z) = a_0$

$3 \Rightarrow 4$ Граници на функции

$4 \Rightarrow 1$ $|a_{-n}| \le \frac{M}{\rho^{-n}}$ $\forall\, 0 < \rho < R_1$, $\forall n = 1,2 \ldots$ т.е. $|a_{-n}| \le M \rho^{n}$
оттук при $\rho \to 0 \Rightarrow a_{-n} = 0$ за $\forall n$, $n = 1,2 \ldots$ и z_0 е отстранима ос т.

Тh Нека f е холоморфна в $0 < |z - z_0| < R$. Следните твърдения са еквивалентни
1) z_0 е m-кратен полюс на f
2) $\exists$ функция $\varphi(z)$ - холоморфна в $|z - z_0| < R$, $\varphi(z_0) \neq 0$ т.ч.
$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^m}$, $0 < |z - z_0| < R$
3) z_0 е m-кратна нула на $\frac{1}{f(z)}$
Док. $1 \Rightarrow 2$
Разгл. $(z - z_0)^m f(z) = (z - z_0)^m \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} \ldots \frac{a_{-1}}{z - z_0} \right) =$
$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+m} + a_{-m} + a_{-(m-1)} + \ldots + a_{-1}(z - z_0)^{m-1}$
$\varphi(z)$ е холоморфна в $|z - z_0| < R$ и $\varphi(z_0) = a_{-m} \neq 0$
$2 \Rightarrow 3$ $\forall z : 0 < |z - z_0| < R \Rightarrow \frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^m \frac{1}{\varphi(z)}$, $\varphi(z) \neq 0$
от непрекъснатостта $\Rightarrow \exists R_1 < R$ т.ч. $\varphi(z) \neq 0$ за $\forall z$:
$|z - z_0| < R \rightarrow \frac{1}{\varphi(z)}$ е холоморфна в $|z - z_0| < R$

$\frac{1}{f(z)} = (z - z_0) g(z)$, $\left(g(z) = \frac{1}{\varphi(z)} \right)$, $g(z)$ е холоморфна и $\neq 0$ в
околност на $z_0 \Rightarrow z_0$ е m-кратна нула на $\frac{1}{f(z)}$
$3 \Rightarrow 1$ По усл. $\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^m \varphi(z)$ където $\varphi(z)$ е холоморфна и
$\neq 0$ в околност на z_0. Тогава $f(z) = \frac{1/\varphi(z)}{(z - z_0)^m} =$
$= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n}{(z - z_0)^m} = \frac{a_0}{(z - z_0)^m} + \ldots + a_m + \ldots \Rightarrow z_0$ е
m-кратен полюс на f

Th (Сохоцки - Казорати - Вайерщрас)
Нека $f(z)$ е продупчена в $0<|z-z_0|<R$
Следните твърдения са еквивалентни
1) z_0 е съществена особена точка на f
2) за $\forall$ продупчена околност $U=\{0<|z-z_0|<R_1\leq R\}$ $f(U)$ е навсякъде гъсто в $\overline{\mathbb{C}}$ т.е. за $\forall \omega\in\overline{\mathbb{C}}$ $\exists$ $\{z_n\}$, $z_n\to z_0$ т.ч. $\lim\limits_{z_n\to z_0} f(z_n)=\omega$
3) $\nexists \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$

Док

$1\Rightarrow 2$, $\omega=\infty$. Тъй като z_0 не е отстранима особена точка на f, то $|f(z)|$ не е ограничена в никоя продупчена околност на z_0. Това означава че $\exists z_1: 0<|z_1-z_0|<R_1$ т.ч. $|f(z_1)|>1$ $\exists z_2: |z_2-z_0|<R_1/2$ т.ч. $|f(z_2)|>2$ ... $\exists z_n: 0<|z_n-z_0|<R_n$ т.ч. $|f(z_n)|>n$ ... $z_n\to z_0$, $|f(z_n)|\to+\infty$, $\omega\in\mathbb{C}$ - крайно число

Допускаме че $\exists \omega_0\in\mathbb{C}$, $\exists \varepsilon_0>0$, $\exists R_1>1$ т.ч. $|f(z)-\omega|\geq\varepsilon_0$, $\forall z: 0<|z-z_0|<R_1$

Разгл ф/ята $F(z)=\frac{1}{f(z)-\omega_0}$, $0<|z-z_0|<R_1$. Тя е холоморфна в $0<|z-z_0|<R_1$ и
$|F(z)|=\frac{1}{|f(z)-\omega_0|}\leq\frac{1}{\varepsilon_0}$. От Th на Риман $\Rightarrow$ z_0 е отстранима ос. т. на F. Имаме че $f(z)=\frac{1}{F(z)}+\omega_0$ $\Rightarrow$ z_0 е отстранима ос. т. на f или полюс на f $\Rightarrow$ ↯

$2\Rightarrow 3$ очевидно

$3\Rightarrow 1$ Ако $\exists$ lim то или е отстранима ос. т или е полюс

Th за логаритмичният индикатор

Деф Нека $f(z)$ е холоморфна и $\neq 0$ в околност на z_0

$$\frac{d \log f(z)}{dz}\Big|_{z=z_0} := \frac{f'(z_0)}{f(z_0)}$$, $\log f$ – еднозначен клон на $\lg$ в ок. U

св-ва

1) $\frac{(fg)'}{fg} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}$, 2) $\frac{(f/g)'}{fg} = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}$

Лема. Нулите и полюсите на f са прости полюси на логаритмичната производна. При това ако a е n-кратна нула на f, а b е p-кратен полюс на f, то
$Res(f'/f, a) = n$ и $Res(f'/f, b) = -p$

Док

Ако a е n-кратна нула на f, то $\exists\, \varphi(z)$, холоморфна и $\neq 0$ в ок U на a т.ч. $f(z) = (z-a)^n \varphi(z)$, за $\forall z \in U$. Имаме

$$\frac{f'}{f} = \frac{[(z-a)^n]'}{(z-a)^n} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{n}{z-a} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$$, където $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ е холоморфна

в $U \Rightarrow a$ е прост полюс на f'/f и $Res(f'/f, a) = n$

Ако b е p-кратен полюс на f, то $\exists\, \psi(z)$ холоморфна и $\neq 0$ в ок V на b, т.ч. $f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-b)^p}$ за $z \in V$. Имаме

$$\frac{f'}{f} = \frac{\psi'}{\psi} - \frac{[(z-b)^p]'}{(z-b)^p} = -\frac{p}{z-b} + \frac{\psi'}{\psi}$$ – холоморфна в $V \Rightarrow$

b е прост полюс и $Res(f'/f, b) = -p$

Th за логаритмичният индикатор

Нека γ е затворена Жорданова крива и f е холоморфна в ок на $\gamma \cup Int\,\gamma$ с изключение на краен брой полюси в $Int\,\gamma$ и нека $f(z) \neq 0$ за $z \in \gamma$. Тогава

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N_f - P_f$$, където N_f – брой на нулите на f в $Int\,\gamma$, а P_f е броя на полюсите на f в $Int\,\gamma$

Док. Нека $a_1 \dots a_s$ са нулите на f в $\operatorname{Int}\gamma$, съответно от кратност $k_1 \dots k_s$, а $b_1 \dots b_l$ са полюсите на f в $\operatorname{Int}\gamma$ с кратност p_j. От лемата и Т за резидуумите имаме

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{k=1}^{s} \operatorname{Res}(a_k) + \sum_{j=1}^{l} \operatorname{Res}(b_j) = \sum_{k=1}^{s} k_k - \sum_{j=1}^{l} p_j = N_f - P_f$$

Следствие

Ако γ е затворена жорданова крива и f е холоморфна в ок. $\gamma \cup \operatorname{Int}\gamma$, $f(z)\neq 0$, $z\in\gamma$, то $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N_f$

Лема

Ако D е едносвързана област и f е холоморфна и $\neq 0$ в D, то в D може да се отдели еднозначен клон на $\log f(z)$

Док.

По усл. ф/ята f'/f е холоморфна в едносвързана област D. Тогава f'/f има примитивна в D – F т.е. F – холоморфна в D и $F' = f'/f$ в D. Разгл. fe^{-F} – холоморфна в D

$(fe^{-F})' = f'e^{-F} + f(e^{-F})' = f'e^{-F} - f\frac{f'}{f}e^{-F} = 0 \Rightarrow fe^{-F} = const$ в D, при това $\neq 0$ т.е. $f(z)e^{-F(z)} = e^{C}$, $e^{F(z)+C} = f(z)$, $z\in D \Rightarrow F(z)+C = \log f(z)$ т.е. $F(z)+C$ еднозначен клон на $\log f(z)$ в D

Нека $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$, $z\in\gamma(t)$ т.е. $\log f(\gamma(t))$ е непрекъсната в $[a,b]$ $\Rightarrow$ $\arg f(\gamma(t))$ е непрекъсната в $[a,b]$. Тогава $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz =$

$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma d\log f(z) = \frac{1}{2\pi i}\log f(\gamma(t))\Big|_a^b = \frac{1}{2\pi i}[\log|f(\gamma(b))| + i\arg f(\gamma(b)) - \log|f(\gamma(a))| - i\arg f(\gamma(a))] =$

$\Rightarrow \gamma(a)=\gamma(b) \Rightarrow \frac{1}{2\pi}[\arg f(\gamma(b)) - \arg f(\gamma(a))] = \frac{\Delta_\gamma \arg f(z)}{2\pi}$ – увеличение

Принцип на аргумента. Нека γ е затворена жорданова крива, f е холоморфна в ок. $\gamma\cup\operatorname{Int}\gamma$ с изключение на краен брой полюси в $\operatorname{Int}\gamma$ и $f(z)\neq 0$, $z\in\gamma$. Тогава $N_f - P_f = \frac{\Delta_\gamma \arg f(z)}{2\pi}$, където $\Delta_\gamma \arg f(z)$ е увеличението на аргумента $\arg f(z)$, когато z обиколи веднъж γ

Th на Руше

Нека γ е затворена жорданова крива. Функциите f, g са холоморфни в околност $\gamma \cup \operatorname{Int}\gamma$ и $|g(z)| < |f(z)|$, $z \in \gamma$. Тогава $f(z) + g(z)$ има толкова нули в $\operatorname{Int}\gamma$, колкото има $f(z)$

Принцип за запазване на областите

Th Ако $D \subseteq \mathbb{C}$ е област и $f: D \to \mathbb{C}$ е холоморфна, различна от константа в D, то $f(D)$ е област

Док.

1) $f(D)$ е линейно свързано мн-во

Нека $w_1, w_2 \in f(D)$ и $z_1, z_2 \in D$ са т.ч. $f(z_1) = w_1$, $f(z_2) = w_2$

Тъй като D е свързано мн-во, то $\exists\, \gamma \subset D$, която свързва z_1 и z_2

Тогава $f(\gamma)$ е крива в $f(D)$ която свързва w_1 и w_2 т.е. $f(D)$ е линейно свързано

2) $f(D)$ е отворено мн-во

Нека $w_0 \in f(D)$, $z_0 \in D$ е т.ч. $f(z_0) = w_0$

т.к. нулите на холоморфните ф-ии са изолирани точки, то $\exists$ кръг $K(z_0, r)$ т.ч. $f(z) - w_0 \neq 0$ за $\forall z \in K(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. Нека $\gamma = \partial K(z_0, r)$ и $\delta = \min\limits_{\gamma} |f(z) - w_0|$. Ще докажем че $K(w_0, \delta) \subset f(D)$.

Действително. Нека $w_1 \in K(w_0, \delta)$. Имаме че $|w_0 - w_1| < \delta \leq |f(z) - w_0|$, $z \in \gamma$. От Th на Руше $\Rightarrow (f(z) - w_0) + (w_0 - w_1) = (f(z) - w_1)$ има толкова нули в $\operatorname{Int}\gamma = K(z_0, r)$, колкото има $f(z) - w_0$ и значи $f(z) - w_1$ има поне една нула в $K(z_0, r)$, т.е. $\exists\, z_1 \in K(z_0, r)$ т.ч. $f(z_1) = w_1 \iff w_1 \in f(D)$

Сл. $K(w_0, \delta) \subset f(D)$ и $f(D)$ е отворено мн-во

Th Нека $D \subseteq \mathbb{C}$ е област, f е холоморфна и различна от const, $w_0 \in f(D)$ и z_0 е n-кратна нула на $f(z)-w_0$. Тогава $\exists$-т околности U на z_0 и $W \subset f(U)$ на w_0, т.ч. за $\forall w \in W \setminus w_0$ $f(z)-w$ има точно n различни нули в $U \setminus z_0$

Док.

Избираме r, т.ч. $f(z)-w \neq 0$ за $\forall z \in K(z_0,r)\setminus\{z_0\}$ и $f'(z)\neq 0$ за $\forall z \in K(z_0,r)\setminus\{z_0\}$. Това е възможно защото $(f(z)-w_0)' = f'(z)$ е също холоморфна ф/я в D и нейните нули са изолирани

$U \equiv K(z_0,r)$, $\delta = \min |f(z)-w_0|$

$W \equiv K(w_0,\delta)$. Тогава за $w \in W \setminus w_0$ $f(z)-w$ има толкова нули в U, колкото $f(z)-w_0$, т.е. точно n и всичките са прости нули, защото $f'(z)\neq 0$ за $\forall z \in U\setminus\{z_0\}$

Следствие (критерий за локална еднолистност)

Нека $D \subseteq \mathbb{C}$ е област и f е холоморфна ф/я, $f: D \to \mathbb{C}$. Тогава f е локално еднолистна в D

Док $\Leftarrow$

Нека $f'(z)\neq 0$ за $\forall z \in D$. От Th $(n=1) \Rightarrow f$ е локално еднолистна в D

$\Rightarrow$ Нека f е локално еднолистна в D, т.е. за $\forall z_0 \in D$, $\exists$ околност U т.ч. $f(z_1)\neq f(z_2)$, $\forall z_1 \neq z_2 \in U$. Допускаме че $f'(z_0)=0$. Това означава че $f(z)$ е поне двукратна нула на $f(z)-w_0$. От Th $(n\geq 2) \Rightarrow \forall w \in W\setminus w_0$, $f(z)-w$ има поне две различни нули в U т.е. $\exists z_1 \neq z_2$ т.ч. $f(z_1) = w = f(z_2)$ т.е. f е еднолистна $\Rightarrow$ ↯

Принцип на максимума на модула

Тh Ако f е холоморфна и $\neq const$ в област $D \subseteq \mathbb{C}$, то $|f(z)|$ не приема най-голяма стойност в D

Тh Нека D е ограничена област в $\mathbb{C}$ и f е холоморфна в D, и непрекъсната в $\bar{D}$. Тогава $\max_{\bar{D}} |f(z)| = \max_{\partial D} |f(\zeta)|$

Лема (Шварц)

Нека f е холоморфна в $U = \{|z| < 1\}$, $f(0) = 0$, $|f(z)| \leq 1$, $z \in U$. Тогава

1) $|f(z)| \leq |z|$, $z \in U$

2) $|f'(0)| \leq 1$

Док. $(\cdot_0)^U \xrightarrow{w = f(z)} (\cdot_0)^U$ По усл. $f(0) = 0$

$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ (ред на Тейлор), $f(z) = z(a_1 + a_2 z + \dots) = z g(z)$

ф-та $g(z)$ е сума на степенен ред, чийто радиус на сходимост е равен на радиуса на сходимост на тейлоровият ред на f. Поради това $g(z)$ е холоморфна в U. Нека $z \in U$ и $r > 0$ е т.ч. $|z| < r$.

От принципа на максимума имаме че $|g(z)| \leq \max_{|\zeta| = r} |g(\zeta)| \Leftrightarrow$

$\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq \max_{|\zeta| = r} \left|\frac{f(\zeta)}{\zeta}\right| \leq \frac{1}{r} \to 1 \Rightarrow |f(z)| \leq |z|$ за $\forall z \in U$ □

$f'(0) = a_1 = g(0)$ От принципа на максимума $\Rightarrow |g(0)| \leq \max_{|\zeta| = r} |g(\zeta)| \leq$

$\leq \frac{1}{r} \xrightarrow[r \to 1]{} 1 \Rightarrow |g(0)| \leq 1 \Rightarrow |f'(0)| \leq 1$ □

Деф конформен автоморфизъм на $D \subseteq \mathbb{C}$ се нарича всяко взаимно еднозначно конформно изображение в себе си

Тh всички ~~ДЛА~~ ДЛА на единичният кръг U са ДЛА от вида $T(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$, $\theta \in \mathbb{R}$, $z_0 \in U$

Тh $\mathrm{Aut}(U) = \{z \to e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}, \theta \in \mathbb{R}, z_0 \in U\}$

Док.

Нека $f \in Aut(U)$ и $f(0) = \alpha$ ($|f(z)| \le 1$, f е холоморфна в U)

Нека $\lambda(z) = \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha} z}$ и $\varphi(z) = \lambda \circ f(z)$. Тогава φ е холоморфна в U. $|\varphi(z)| \le 1$ и $\varphi(0) = \lambda \circ f(0) = \lambda(\alpha) = 0$. От лемата на Шварц $\Rightarrow$ $|\varphi(z)| \le |z|$, $z \in U$. Ф/ята $z = \varphi^{-1}(w)$ ($w = \varphi(z)$) също е холоморфна в U. $|\varphi^{-1}(w)| \le 1$, $\varphi^{-1}(0) = 0$

Пак от лемата на Шварц $\Rightarrow |z| = |\varphi^{-1}(w)| \le |w| = |\varphi(z)|$

$\Rightarrow |\varphi(z)| = |z|, \forall z \in U \Rightarrow \varphi(z) = e^{i\theta} z \Rightarrow \lambda \circ f(z) = e^{i\theta} z \Rightarrow$

$f(z) = \lambda^{-1}(e^{i\theta} z)$ т.е. $f \in$ ДЛТ и оттук

$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$, $\theta \in \mathbb{R}$, $z_0 \in U$

Степенни редове. Ф/ла на Коши-Адамар

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, М - мн-во от точките на сходимост

Int М - облас на сходимост

Ф-ла на Коши - Адамар

Нека $R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$. Тогава редът $\sum a_n z^n$ е абс. сходящ за $|z| < R$ и разходящ за $|z| > R$

Док Имаме $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|z|}{R}$ и от критерия на Коши, редът $\sum a_n z^n$ е абс сх за $\frac{|z|}{R} < 1$ или $|z| < R$ и разх за $|z| > R$.

Формулата на Коши-Адамар не казва нищо за кръга по границата

Следствие 1 Областта на сходимост на реда $\sum a_n z^n$ е кръгът $K(0,R)$

Следствие 2 (Лема на Абел)

Ако редът $\sum a_n z^n$ е сходящ в z_0 то той е абс сх в кръгът $|z| < |z_0|$

Лема Редовете $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $f_1(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ ...

$f_k(z) = \sum\limits_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k) a_n z^{n-k}$ ... имат един и същи радиус на сходимост

Th за диференциране на степенни редове

$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ с $R_{сх} = R > 0$. Тогава ф/ята $f(z)$ е холомо. ф-ия в кръга на сходимост $K(0,R)$ и $f'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$, $z \in K(0,R)$

Ако нека $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$. От лемата знаем, че $R_{сх}$ на f е R. Имаме $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f(z_0) =$

$$= \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z^n - z_0^n)}{z - z_0} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1} = (z-z_0) \sum_{n=2}^{\infty} a_n \sum_{k=1}^{n-1} k z_0^{k-1} z^{n-k-1}$$

Нека сега $z \to z_0$, $|z| < R_1 < R$. Тогава $\left| \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f(z_0) \right| \le$

$$\le |z-z_0| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| R_1^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{|z-z_0|}{2} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) |a_n| R_1^{n-2} \le \frac{M}{2} |z-z_0|$$

защото редът $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2}$ е абс сх за $|z| < R$

$\Rightarrow f'(z_0) = f(z_0) \Rightarrow \exists f'(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2} \dots$

$\exists f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \dots (n-k-1) a_n z^{n-k}$. Освен това

$f^{(k)}(0) = k! a_n \Rightarrow a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$, $k = 0, 1, 2 \dots$

Th Нека $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ е степенен ред с $R_{сх} = R > 0$

Ако 0 е т. на сгъстяване на нулите $f(z)$, то $f(z) = 0$, $z \in K(0,R)$

т.е. $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2 \dots$

Следствие (Th за идентичност)

Нека $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ и $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ са степенни редове с $R_{сх} = R > 0$. Ако 0 е т. на сг. на множеството $\{z \in K(0,R) : f(z) = g(z)\}$ то $f(z) = g(z)$ в целия кръг $z \in K(0,R)$

т.е. $a_n = b_n$, $n = 0, 1, 2 \dots$

Гранична Th на Абел

Нека $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ е степенен ред с $R_{сх} = R > 0$ и нека $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = S$ за т. $z_0: |z_0| = R$. Тогава $\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in [0, z_0]}} f(z) = S$

когато редът $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ е сходящ в т. z_0

Тh за резидуумите. Представяне на р/та ф-ция като сума на елементарни дроби

Нека $f(z)$ е холоморфна в $0<|z-z_0|<R$ и нека

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^{n+1}}, \quad a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=\rho<R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta$$

Деф $\operatorname{Res}(f,z_0)=a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|} f(\zeta)d\zeta$

Ако z_0 е отстранима особена точка, то $\operatorname{Res}(f,z_0)=0$

Тh за резидуумите

Нека f е холоморфна в околност на ограничена, крайно-свързана област $D\subset\mathbb{C}$, с изключение на краен брой точки $z_1, z_2 \dots z_n \in D$. Тогава

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}(f,z_k)$$

Док Нека $\Delta_k=\{z:|z-z_k|<\delta\}$, $k=1,2$ и $\gamma_k=\partial\Delta_k$ и $D_\delta=D\setminus\bigcup_{k=1}^{n}\Delta_k$

Ясно е че D_δ е ограничена крайносвързана област и f е холоморфна в околност на D_δ

От Тh на Коши за сложен контур имаме $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_\delta} f(z)dz=0$ или предвид $\partial D_\delta=\partial D\cup\gamma_i$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_\delta} f(z)dz-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k} f(z)dz=0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k} f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}(f,z_k)$$

$\cot\pi z=\frac{\cos\pi z}{\sin\pi z}$ особени точки $\sin\pi z=0 \Rightarrow z_n=n$

$n=0, \pm1, \pm2 \dots$

Нека $D_\delta = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \bar{\Delta}_k$, $\Delta_k = \{z : |z-k| < \delta \le \frac{1}{3}\}$

Т.е. $\exists M_\delta > 0$ т.ч. $|\cot \pi z| \le M_\delta$, $z \in D_\delta$

Тв $\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right)$

Док Нека $I_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| = n + \frac{1}{2}} \frac{\pi \cot \pi \zeta}{\zeta^2 - z^2} d\zeta$

$I_n(z) = \operatorname{Res}(z) + \operatorname{Res}(-z) + \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(k)$

$\operatorname{Res}(z) = \frac{\pi \cot \pi \zeta}{2\zeta} \Big|_{\zeta = z} = \frac{\pi \cot \pi z}{2z}$

$\operatorname{Res}(-z) = \frac{\pi \cot \pi \zeta}{2\zeta} \Big|_{\zeta = -z} = \frac{\pi \cot \pi z}{2z}$

$\operatorname{Res}(k) = \frac{\pi \cos \pi \zeta / (\zeta^2 - z^2)}{(\sin \pi \zeta)'} \Big|_{\zeta = k} = \frac{\pi \cos \pi \zeta / (\zeta^2 - z^2)}{\pi \cos \pi \zeta} \Big|_{\zeta = k} = \frac{1}{k^2 - z^2}$, $\forall k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm n$

$I_n(z) = \frac{\pi \cot \pi z}{z} + \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{k^2 - z^2} = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k^2 - z^2} + \frac{\pi \cot \pi z}{z}$

$|I_n(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z| = n + \frac{1}{2}} \frac{\pi \cot \pi \zeta}{\zeta^2 - z^2} d\zeta \right| \le \frac{1}{2\pi} \int_{|z| = n + \frac{1}{2}} \left| \frac{\pi \cot \pi \zeta}{\zeta^2 - z^2} \right| |d\zeta| =$

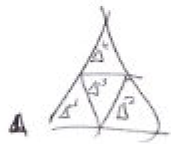
$\frac{1}{2\pi} \frac{\pi M}{(n + \frac{1}{2})^2 - |z|^2} 2\pi \left(n + \frac{1}{2}\right) \sim \frac{M}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 0 \Rightarrow$

$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$

Основна Тh на Коши

Ако $D \subset \mathbb{C}$ е едносвързана област, то $\int f = 0$, за $\forall$ затворена крива $\gamma \subset D$ и $\forall$ холоморфна ф/я в D

док Нека $\Delta \subset D$ е триъгълник, $d(\Delta)$ е диаметъра му, $P(\Delta)$ – периметъра на Δ



Нека $\alpha = \int_{\partial\Delta} f(z)dz$, разделяме Δ на 4-ри триъгълника, през средните отсечки $\Rightarrow \Delta^1, \Delta^2, \Delta^3, \Delta^4 \Rightarrow$

$\alpha = \sum_{k=1}^{4} \int_{\partial\Delta^k} f(z)dz$. От неравенството на триъгълника

$\Rightarrow |\alpha| \leq \sum_{k=1}^{4} \left|\int_{\partial\Delta^k} f(z)dz\right|$. Нека Δ_1 е единият

$\{\Delta^k\}_1^4$ за който $\left|\int_{\partial\Delta_1} f(z)dz\right| \geq \frac{1}{4}|\alpha|$. Разделяме Δ_1 през

средните отсечки и избираме Δ_2 т.ч. $\left|\int_{\partial\Delta_2} f(z)dz\right| \geq \frac{1}{4}\left|\int_{\partial\Delta_1} f(z)dz\right| \geq \frac{1}{4^2}|\alpha|$

$\Delta_1, \dots \Delta_n$, $\Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \dots \supset \Delta_n$. $P_{\Delta_n} = \frac{1}{2^n} P_\Delta$,

$d(\Delta_n) < P_n = \frac{1}{2^n} P_\Delta \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz\right| \geq \frac{1}{4^n}|\alpha|$, $n = 1, 2 \dots$

От Тh на Кантор $\Rightarrow \exists!\, z_0 \in \Delta_n$, $n = 1, 2 \dots$ Т.като $\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz\right|$ е едносвързана крива и $\gamma = \partial\Delta$ е затворена Жорданова крива то $\Delta \subset D \Rightarrow z_0 \in D$. Т.к. f е холоморфна в D, то в околност на z_0 f има представяне

$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0) + (z - z_0)\varepsilon(z, z_0)$, $\varepsilon(z, z_0) \xrightarrow[z\to z_0]{} 0$, това означава че за $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta$ т.ч. $|\varepsilon(z, z_0)| < \varepsilon$, $\forall z \in D$ за което $|z - z_0| < \delta$. Понеже $d(\Delta_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то $\exists n_0$ т.ч. $\exists n > n_0$

$\Rightarrow \Delta_n \subset K(z_0, \delta)$. Имаме че за $\forall n > n_0$

$\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz\right| = \left|\int_{\partial\Delta_n} f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0) + (z - z_0)\varepsilon(z, z_0)\, dz\right| =$

$$= \left| \int_{\partial \Delta_k} f(z_0)\,dz + f'(z_0) \int_{\partial \Delta_k} (z - z_0)\,dz + \int_{\partial \Delta_k} (z - z_0)\,\varepsilon(z, z_0)\,dz \right| =$$

$$= \left| \int_{\partial \Delta_k} (z - z_0)\,\varepsilon(z, z_0)\,dz \right| \le \int_{\partial \Delta_k} |z - z_0|\,|\varepsilon(z, z_0)|\,|dz| < P_{\Delta_k}\,\varepsilon\,P_{\Delta_k} = \varepsilon \left(\frac{P_{\Delta}}{2^k} \right)^2$$

$$\forall k \Rightarrow \frac{1}{4^k} |\alpha| = \varepsilon \left(\frac{P_\Delta}{2^k} \right)^2 \Rightarrow |\alpha| \le \varepsilon P_\Delta^2 \Rightarrow \alpha = 0$$

Развитие в ред на Лоран. Тh на Лоран

Деф. Ред на Лоран

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$$

Тh. Областта на сходимост на редът на Лоран е мн-вото $D = \{z : |z-z_0| < R,\ |z-z_0| > r\}$ където

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}, \quad r = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_{-n}|}$$

Док. От ф-лата на Коши-Адамар $\Rightarrow$ степенния ред $f_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)$ е сходящ за $|z-z_0| < R$, а степенния ред $f_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}$ - разходящ.

Ако $r \geq R$ то $D = \emptyset$. Ако $r < R$, то $D = \{0 \leq r < |z-z_0| < R \leq +\infty\}$. В този случай f_1 е холоморфна в $|z-z_0| < R$, f_2 е холоморфна в $|z-z_0| > r$ и $f = f_1 + f_2$ е холоморфна в D

Тh (Лоран) Ако $f(z)$ е холоморфна във венеца $V = V(z_0, r, R) = \{z : 0 \leq r < |z-z_0| < R \leq +\infty\}$, то

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}, \quad z \in V$$

където коефициентите a_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ са еднозначно определени от формулата

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots, \quad \gamma_\rho = \{|z-z_0| = \rho,\ r < \rho < R\}$$

където теглото е равномерно сходящ в/у компактните подмножества на U

Комплексни числа

Деф $\mathbb{C} = \{z : z = (a,b) \; , a,b \in \mathbb{R}\}$

1) $(a,b) = (c,d) \iff a = c$ и $b = d$

2) $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$

3) $(a,b)(c,d) = (ac - bd, ad + bc)$

Алгебрична структура

Тв $\mathbb{C}, +, \cdot$ е поле с нула $(0,0)$, единица $(1,0)$ обратен елемент на (a,b) относно събиране $(-a,-b)$ и умножение $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$

$$\mathbb{C}_R = \{(a,0), a \in \mathbb{R}\} \iff \mathbb{R}, \; (a,0) \leftrightarrow a$$

Тв $\mathbb{C}$ не наследява наредбата на $\mathbb{R}$. Действително

1) $i > 0 \Rightarrow i.i > i.0 \Rightarrow -1 > 0$ ↯

2) $i < 0 \Rightarrow i.i > i.0 \Rightarrow -1 > 0$ ↯

Алгебричен вид на комплексните числа

Деф

$$i := (0,1) \; , \; i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$$

$$z = (a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (0,1)(b,0) \Rightarrow z = a + ib$$

$$\operatorname{Re} z = a \; , \; \operatorname{Im} z = b$$

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} \; , \; \bar{z} = a - ib, \; z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$$

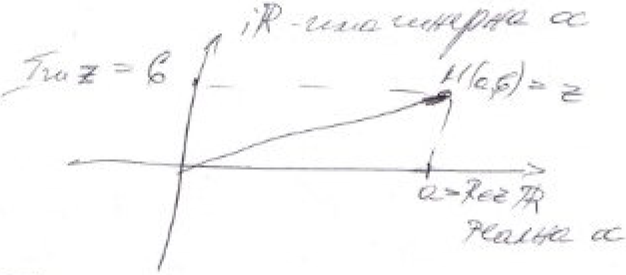
$$z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z \; , \; z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}, \; \overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}, \; \overline{zw} = \bar{z}\bar{w}, \; \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$$

$$|zw| = |z||w| \; , \; \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$$

Геометрично представяне на комплексното число

$z = (a,b) = a + ib$



$|z| = dist(0, z)$

$|z - w| = dist(z, w)$

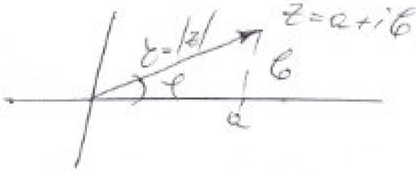
Неравенство на триъгълника

$||z| - |w|| \le |z \pm w| \le |z| + |w|$, $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |z_k|$

Тригонометричен запис

$a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$

$r = |z|$, $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$



Деф $\arg z$ = ъгъла, който вектора z сключва с O_x^+. $\arg z$ не е еднозначно определен

Ако φ е един аргумент на z, то $\varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ също са аргументи на z

Деф $\arg_0 z \in (-\pi, \pi]$ - главен аргумент

определяне на $\arg z$: $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{Re\, z}{|z|} \\ \sin\varphi = \dfrac{Im\, z}{|z|} \end{cases}$

Деф $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$|e^{i\varphi}| = 1$, $\overline{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}$, $e^{i\varphi}e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)}$, $\dfrac{e^{i\varphi}}{e^{i\psi}} = e^{i(\varphi-\psi)}$

$z = re^{i\varphi}$, $r = |z|$, $\varphi = \arg z$

Формули на Моавър

$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}$, $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$

Редици и редове от комплексни числа

Деф Околност на т. $z_0 \in \mathbb{C}$ се нарича всеки кръг
$K(z_0, r) = \{z : |z - z_0| < r\}$

Деф $\{z_n \in \mathbb{C}\}$, $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z_0$ $\quad (\lim_{n\to\infty} z_n = z_0)$

Ако за всяко $\varepsilon > 0$, $\exists \nu = \nu(\varepsilon)$, такова че
$z_n \in K(z_n, \varepsilon)$ за всяко $n > \nu$, т.е. $|z_n - z_0| < \varepsilon$, $\forall n > \nu$

Деф $\{z_n \in \mathbb{C}\}$ се нарича редицата на Коши, ако
за $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \nu = \nu(\varepsilon)$ т.ч. $|z_m - z_n| < \varepsilon$ за $\forall m, n > \nu$

Тн $\{z_n\}$ е сходяща $\Leftrightarrow$ $\{z_n\}$ е редица на Коши

Тв Редицата $\{z_n\}$ е сходяща $\Leftrightarrow$ са сходящи
редиците $\{\operatorname{Re} z_n\}$ и $\{\operatorname{Im} z_n\}$. При това $z_n \to z_0 \Leftrightarrow$
$\operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z_0$ и $\operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z_0$

Тв Ако $\{z_n \in \mathbb{C}\}_1^\infty$ е редица от комплексни числа и
$|z_n| \to |z_0|$, $\arg_0 z_n \to \arg_0 z_0$, то $z_n \to z_0$

Тв Ако $z_n \to z_0 \Rightarrow |z_n| \to |z_0|$

Деф т. z_0 е точка на сгъстяване на $\{z_n \in \mathbb{C}\}_1^\infty$, ако $\exists \varepsilon > 0$
в $K\{z_0, \varepsilon)$ има безкрайно много членове на $\{z_n\}$

Тв т. z_0 е точка на сгъстяване на $\{z_n \in \mathbb{C}\}_1^\infty \Leftrightarrow$
$\exists$ подредица $\{z_{n_k}\}$, $z_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} z_0$

Деф $\{z_n\}_1^\infty$ е ограничена, ако $\exists R>0$, т.ч. $z_n \in K(0,R)$, $\forall n$ т.ч. $|z_n|<R$

Тм на Вайерщрас
Всяка ограничена редица има поне една точка на сгъстяване

Редове от комплексни числа
Деф Редът $\sum_1^\infty z_n$ е сходящ, ако е сходяща редицата $S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$, $n=1,2\ldots$

критерий на Коши
$\sum_{n=1}^\infty z_n$ е сходящ $\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \nu=\nu(\varepsilon)$, т.ч. за $\forall n>m>\nu$
$|z_m + z_{m+1} + \ldots + z_n| < \varepsilon$

Деф $\sum_1^\infty z_n$ е абсолютно сходящ, ако $\sum_1^\infty |z_n| < +\infty$

Тв Ако $\sum_1^\infty z_n$ е абсолютно сходящ, то $\sum_1^\infty z_n$ е сходящ

Тв Ако $a_n \geq 0$, $|z_n| \leq a_n$ за $\forall n$ и $\sum a_n < +\infty$, то $\sum_1^\infty z_n$ е абсолютно сходящ

Деф $\alpha = \limsup \alpha_n$, $(\alpha_n \in \mathbb{R})$ - най-горна точка на сгъстяване
1) α е т. на сгъстяване на $\{\alpha_n\}$ т.е. $\exists$ подредица $\alpha_{n_k} \to \alpha$
2) За $\forall \varepsilon>0$ $\exists \nu=\nu(\varepsilon)$ т.ч. $\alpha_n < \alpha+\varepsilon$ за $\forall n>\nu$

критерий на Коши
Нека $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = \ell$. Тогава ако $\ell<1$, редът $\sum_{n=1}^\infty z_n$ е абсолютно сходящ, а ако $\ell>1$, то редът $\sum_{n=1}^\infty z_n$ е разходящ

Топология в $\mathbb{C}$ и $\overline{\mathbb{C}}$

Нека $M \subseteq \mathbb{C}$

Деф Точката z_0 се нарича вътрешна (външна) за M, ако $\exists$ $K(z_0,\varepsilon) \subset M$ (съответно $K(z_0,\varepsilon) \subset \mathbb{C}\setminus\overline{M}$). Ако във всяка околност на z_0 има точки, както от самото M, така и от $\mathbb{C}\setminus\overline{M}$, z_0 се нарича гранична точка на M

$\mathbb{C} = \mathrm{Int}\, M \cup \mathrm{Ext}\, M \cup \partial M$

Деф Пробита околност на $z_0 \in \mathbb{C}$: $K'(z_0,\varepsilon) = \{z : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$

Деф Точката z_0 е точка на сгъстяване на множеството M ако за $\forall \varepsilon > 0$ в $K'(z_0,\varepsilon)$ има поне една точка на M

Тв Точката z_0 е точка на сгъстяване на M $\Leftrightarrow$ $\exists \{z_n \in M\}_1^\infty$, $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z_0$

Деф $M \subseteq \mathbb{C}$ се нарича отворено, ако то е съставено само от вътрешни т.

Деф $M \subset \mathbb{C}$ е затворено, ако $\mathbb{C}\setminus M$ е отворено множество

Тв $M \subseteq \mathbb{C}$ е затворено мн-во $\Leftrightarrow$ M съдържа границата на всяка сходяща редица от точки на M, т.е. ако $\{z_n \in M\}_1^\infty$, $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z_0$ то $z_0 \in M$

Св-ва

Т1 1) Ако U_λ, $\lambda \in A$ са отворени мн-ва, то $\bigcup_{\lambda\in A} U_\lambda$ е отворено мн-во

2) Ако $U_1 \ldots U_n$ са отворени мн-ва, то $\bigcap_{k=1}^{n} U_k$ е отворено мн-во

Т2 1) Ако V_λ, $\lambda \in A$ са затворени мн-ва, то $\bigcap_{\lambda\in A} V_\lambda$ е затворено мн-во

2) Ако $V_1 \ldots V_n$ са затворени мн-ва, то $\bigcup_{k=1}^{n} V_k$ е затворено мн-во

Деф Нека X е произволно мн-во. Топология в X е нарича системата τ от подмн-ва на X, със следните св-ва

1) $\emptyset, X \in \tau$

2) Ако $U_\lambda = \tau$, $\lambda \in A$ то $\bigcup_{\lambda\in A} U_\lambda \in \tau$

3) Ако $U_1, \ldots U_n$ то $\bigcap_{k=1}^{n} U_k \in \tau$

Елементите на τ се наричат отворени мн-ва.

(X, τ) - топологично пространство

Деф $M \subset \mathbb{C}$ е ограничено множество ако $\exists R > 0$, т.ч. $M \subset K(0,R)$

деф $K \subset \mathbb{C}$ е компакт, ако K е ограничено и затворено мн-во

$K \subset \mathbb{C}$ е компакт $\Leftrightarrow$ $\forall$ редица от точки в K има сх. подредица, чиято граница е в K

деф $\{U_\alpha$ - отв. мн-ва$\}_{\alpha \in A}$ е отворено покритие на M, ако $M \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$

Тм (Хайне-Борел): $K \subset \mathbb{C}$ е компакт $\Leftrightarrow$ от $\forall$ отворено покритие на K може да се избере подпокритие, т.е. ако $M \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, за U_α - отворени $\exists$ $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ т.е. $M \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_{\alpha_k}$

K е ~~[illegible]~~ затворено и ограничено

от $\forall$ редица $\{z_n \in K\}_1^\infty$ може да се избере сходяща подредица $z_{n_k} \to z, z \in K$

от $\forall$ отворено покритие на K може да се избере крайно подпокритие

деф $d(M,N) = \inf\{|z-\zeta|, z \in M, \zeta \in N\}$

$d(M,N) \geq 0$, Ако $M \cap N = \emptyset$ то $d(M,N) = 0$

Тв Ако M, N са затворени множества в $\mathbb{C}$ и поне едно от тях е компакт то $d(M,N) = 0$. Освен това $\exists a \in M, b \in N$ т.ч. $d(M,N) = |a-b|$

деф Околност на безкрайна точка се нарича $\{|z| > R\} \cup \{\infty\}, R > 0$

Тм (Болцано-Вайерщрас в $\mathbb{C}$)

Всяка редица от точки $\{z_n \in \overline{\mathbb{C}}\}$ има точка на сгъстяване

деф Всяко затворено мн-во $F \subset \overline{\mathbb{C}}$ се нарича компакт. В частност $\overline{\mathbb{C}}$ е компакт

Комплексна диференцируемост

Нека $z_0 \in \mathbb{C}$ и f е дефинирана в околност U на z_0

Деф f е комплексно диференцируема в z_0, ако $\exists$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

1) Ако f е $\mathbb{C}$-диференцируема, то f е непрекъсната в z_0
2) обратното не е вярно

Уравнения на Коши-Риман

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

Ако f е $\mathbb{C}$-диференцируема в т. z_0 то $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \iff$ CR $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = 0$

CR: $f_x + i f_y = 0$ за $f = u + iv$, $f_x = u_x + i v_x$, $f_y = u_y + i v_y$, $f_x + i f_y = 0 \iff u_x + i v_x + i(u_y + i v_y) = 0 \iff$ $u_x - v_y + i(u_y + v_x) = 0$ т.е. $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$

Деф Нека $f(z) = f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ и дефинирана в околност U на z_0. Казваме че f е реално-диференцируема ($\mathbb{R}$-диф) в z_0, ако u, v са диференцируеми в $z_0 = (x_0, y_0) \iff \exists$-т константи $a, b \in \mathbb{C}$ и функция $\beta(\Delta z)$ т.ч. $\Delta f = a\Delta x + b\Delta y + \Delta z\, \beta(\Delta z)$, $a = f_x$, $b = f_y$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \beta(\Delta z) = 0$$

Тв. Ако ∃-т f_x, f_y непрекъснати в z_0, то f е $\mathbb{R}$-диференцируема в z_0

Тh f е $\mathbb{C}$-диференцируема в т. $z_0 \Leftrightarrow f$ е $\mathbb{R}$-диференцируема в т. z_0 и удовлетворява Коши-Риман, т.е. $f_x + i f_y = 0$ (в z_0)

Док $\Rightarrow$

Нека f е $\mathbb{C}$-диференцируема в z_0. Тогава

$\Delta f = f'(z_0)\Delta z + \alpha(\Delta z)\Delta z$, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y \Rightarrow$

$f'(z_0)\Delta x + i f'(z_0)\Delta y + \alpha(\Delta z)\Delta z$ за $\alpha(\Delta z)\Delta z \xrightarrow[\Delta z \to 0]{} 0$

т.е. f е $\mathbb{R}$-диференцируема в z_0 и $f_x + i f_y =$

$f'(z_0) + i(i f'(z_0)) = f'(z_0) - f'(z_0) = 0$

$\Leftarrow$

Нека f е $\mathbb{R}$-диференцируема в т. z_0 т.е.

$\Delta f = f_x \Delta x + f_y \Delta y + \Delta z \beta(\Delta z) \xrightarrow[\Delta z \to 0]{} 0$ и $f_x + i f_y = 0 \Leftrightarrow$

$f_y = i f_x$. Тогава $\Delta f = f_x \Delta x + i f_x \Delta y + \Delta z \beta(\Delta z)$ т.е.

$f_x \Delta z + \Delta z \beta(\Delta z)$ и f е $\mathbb{C}$-диференцируема в т. z_0

$f'(z_0) = f_x(z_0) = -i f_y(z_0)$

Следствие. Ако f има непрекъснати частни производни в z_0 и $f_x + i f_y = 0$ в z_0, то f е $\mathbb{C}$-диференцируема

Деф f е холоморфна в т. z_0, ако f е $\mathbb{C}$-диференцируема в околност на z_0.

Ако D е област, $D \subseteq \mathbb{C}$ и f е холоморфна във всяка точка на D, казваме че f е холоморфна в D

Деф Нека $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ е отворено мн-во
Функцията $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ се нарича хармонична, ако
$\varphi \in C^2(\Omega)$, $\Delta\varphi = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0 \quad \forall (x,y) \in \Omega$

Тб Ако $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ е холоморфна в област $D \subseteq \mathbb{C}$ и u и v имат непрекъснати частни производни до втори ред включително, то u и v са хармонични функции

Док
Тъй като f е холоморфна в D, то f удовлетворява Коши-Риман. Оттук диференцирайки двете страни на равенствата, първото по x, а второто по $y \Rightarrow \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0 \Rightarrow u$ е хармонична в D. Получаваме че $\Delta v = 0$ след диференциране на първото по y, а второто по x.

Деф операторите $\partial, \bar{\partial}$

$\partial f = \frac{\partial f}{\partial z}$, $\bar{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$

Конформни изображения

Деф Нека $\gamma : z = \gamma(t) : [a,b] \to \mathbb{C}$ е крива в $\mathbb{C}$. Казваме че γ е гладка, ако $\exists \gamma'(t)$ непрекъсната в $[a,b]$ и $\gamma'(t) \neq 0$ за $\forall t \in [a,b]$. Ако γ е гладка крива, то за $\forall t_0 \in [a,b]$ в т. $z_0 = \gamma(t_0)$ $\exists$ допирателна към γ и тя сключва ъгъл с O_x^+, равен на $\arg \gamma'(t_0)$

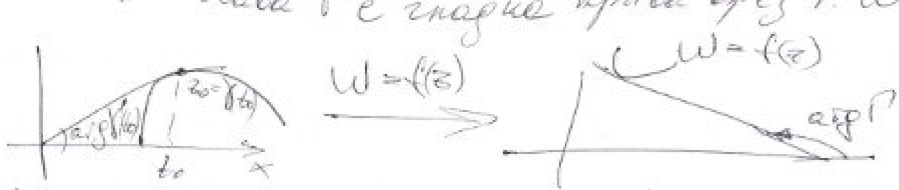
деф Нека $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ и $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{C}$ са гладки криви през т. $z_0 = \gamma_1(t_0) = \gamma_2(\tau_0)$. Под ъгъл между γ_1 и γ_2 в т. z_0 се разбира ъгъла между допирателните към γ_1 и γ_2 в т. z_0, ориентиран от допирателната към γ_2, към допирателната към γ_1

деф Нека f е диференцируема в околност U на z_0. Казваме че изображението $f : U \to \mathbb{C}$ е конформно в т. z_0, ако f запазва ъглите между гладките криви през z_0 $(f \in C^1(U))$

деф Нека f е дефинирана в околност U на т. $z_0 \in \mathbb{C}$ и $f \in C^1(U)$. Казваме че изображението $w = f(z)$ е конформно в т. z_0, ако то запазва ъглите между гладките криви през z_0, по големина и ориентация

Тв Ако f е холоморфна в т. $z_0 \in \mathbb{C}$ и $f'(z_0) \neq 0$, то изображението $w = f(z)$ е конформно в т. z_0

док Нека $\gamma : z = \gamma(t) : [a,b] \to \mathbb{C}$ е гладка крива през т. z_0. Нека $\Gamma = f(\gamma)$. Тогава Γ е гладка крива през т. $w = f(z_0)$



ъгъла който допирателната към γ в т. z_0 сключва с $O_x^+ = \arg \gamma'(t_0)$, а ъгъла който допирателната към Γ, $w_0 = f(z_0)$ сключва с $O_u^+ = \arg \Gamma'(t_0)$. Тъй като $\Gamma'(t_0) = [f(\gamma(t_0))]' = f'(\gamma(t_0)) \gamma'(t_0) = f'(z_0) \cdot \gamma'(t_0)$ то $\arg \Gamma'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg \gamma'(t_0)$

Нека сега γ_1 и γ_2 са гладки криви през т. $z_0 = \gamma_1(t_0) = \gamma_2(\tau_0)$

имаме че $\begin{cases} \Gamma_1 = f(\gamma_1) \\ \Gamma_2 = f(\gamma_2) \end{cases}$ т.е.

$$\left.\begin{array}{l}\arg \Gamma_1'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg \gamma_1'(t_0)\\ \arg \Gamma_2'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg \gamma_2'(t_0)\end{array}\right\} \Rightarrow \angle(\Gamma_1\Gamma_2)_{w_0} =$$

$$= \arg \Gamma_2'(t_0) - \arg \Gamma_1'(t_0) = \arg \gamma_2'(t_0) - \arg \gamma_1'(t_0) = \angle(\gamma_1\gamma_2)_{z_0}$$

деф Нека f е дефинирана в околност $\{|z| > R\}$ на ∞
Казваме че f е холоморфна в ∞ ако $f(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ е холоморфна в 0

деф Нека f е дефинирана в околност на $z_0 \in \mathbb{C}$ и $f(z) = \infty$. Казваме че изображението $w = f(z)$ е конформно в z_0, ако изображението $G(z) = \frac{1}{f(z)}$ е конформно в z_0

Дробно-линейна функция - конформност
Кръгово и кръгово св-во

Деф (трансформация)

$$\omega = T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \Delta = ad - bc \neq 0 \quad \left(\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \Delta \right)$$
$a, b, c, d \in \mathbb{C}$

Деф $T\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$, $T(\infty) = \frac{a}{c}$. Тогава $T: \overline{\mathbb{C}} \xrightarrow{1:1} \overline{\mathbb{C}}$

Тв (Групово св-во на дробно линейните трансформации)
Дробно-линейната трансформация е група относно
суперпозицията $S \cdot T = S(T)(S \circ T)$

$\Delta = id_{\mathbb{C}}$, $T = \frac{az+b}{cz+d}$, $T^{-1} = \frac{-d\omega+b}{c\omega-a}$

Тв

Изображението $\omega = T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ $\overline{\mathbb{C}} \longleftrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ е
конформно за $\forall z \in \overline{\mathbb{C}}$

Док $z \neq -\frac{d}{c}, \infty$

$$T'(z) = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{\Delta}{(cz+d)^2} \neq 0 \text{ за } \forall z \neq -\frac{d}{c}, \infty$$

конформност в ∞

$$F(z) = T\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\frac{a}{z}+b}{\frac{c}{z}+d} = \frac{bz+a}{dz+c}$$

$$F'(z) = \frac{b(dz+c) - d(bz+a)}{(dz+c)^2} = \frac{bc-da}{(dz+c)^2} = \frac{-\Delta}{(dz+c)^2}$$

$$F'(0) = \frac{-\Delta}{c^2} \neq 0$$

конформност в $-\frac{d}{c}$ аналогично

Тв (кръгово св-во)
Дробно линейната трансформация изобразява
окръжност в $\overline{\mathbb{C}}$ в окръжност в $\overline{\mathbb{C}}$

Док.

Разлагаме на общата дробно линейна трансформация

$$\begin{array}{l|l} az+b & cz+d \\ \hline -az + \frac{da}{c} & \frac{a}{c} \\ \hline b - \frac{ad}{c} & \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{-\frac{\Delta}{c}}{cz+d} \Rightarrow$$

Дробно линейната трансформация е суперпозиция на следните трансформации

$z_1 = cz+d$ — цяла линейна трансформация

$z_2 = \frac{1}{z_1}$, $\omega = -\frac{\Delta}{c} \cdot z_2 + \frac{a}{c}$ — цяла линейна трансформация

Нека $\tilde{C}$ е окръжност с декартово уравнение $a(x^2+y^2) + b_1 x + b_2 y + c = 0$. Имаме че $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ а $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$, $x^2+y^2 = |z|^2 = z\bar{z}$

Тогава $\tilde{C}: a|z|^2 + \frac{b_1}{2}(z+\bar{z}) + \frac{b_2(z-\bar{z})}{2i} + c = 0 \Rightarrow$

$a|z|^2 + \frac{b_1 - ib_2}{2} z + \frac{b_1 + ib_2}{2}\bar{z} + c = 0$ Полагаме

$\frac{b_1 - ib_2}{2} = b_3 \rightarrow \frac{b_1 + ib_2}{2} = \bar{b}_3 \Rightarrow$

$a|z|^2 + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0$, $a, c \in \mathbb{R}$, $b_3 \in \mathbb{C}$

Нека $\omega = \frac{1}{z}$ т.е. $z = \frac{1}{\omega}$. Като заместим в горното у-ние

$\frac{a}{|\omega|^2} + \frac{b}{\omega} + \frac{\bar{b}}{\bar{\omega}} + c = 0$, $c|\omega|^2 + \bar{b}\omega + b\bar{\omega} + a = 0$ — окръжност

$\Rightarrow \omega = \frac{1}{z}$. Оттук и $\omega = T(z)$ преобразува окръжност в окръжност.

ДЛТ и двойно отношение на четири точки

Деф Просто отношение на 3 точки $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ наричаме числото $(z_1 z_2 z_3) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$

Деф Двойно отношение на 4-ри точки $z_1 z_2 z_3 z_4 \in \mathbb{C}$ наричаме числото $(z_1 z_2 z_3 z_4) = \left(\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}\right)\left(\frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1}\right)$, $z_k \in \mathbb{C}$, $k = 1,2,3,4$, а

ако някое $z_k = \infty$, то $(z_1 z_2 z_3 z_4) = \lim_{z_k \to \infty} (,,,)$ $1 \le k \le 4$

Ако $z_4 = \infty$ то $(z_1 z_2 z_3 \infty) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = (z_1 z_2 z_3)$

Тв Всяка ДЛТ има ≤ 2 неподвижни точки. z_0 е неподвижна точка от $T(z)$ ако $T(z_0) = z_0$ т.е. ако z_0 е решение на у-то $T(z) = z \Leftrightarrow \frac{az+b}{cz+d} = z \Leftrightarrow cz^2 + (d-a)z - b = 0$

Тв Нека $z_1 \ne z_2 \ne z_3$ и $w_1 \ne w_2 \ne w_3 \in \overline{\mathbb{C}}$. $\exists$ единствена ДЛТ $w = T(z)$ т.ч. $w_k = T(z_k)$, $k = 1,2,3$ и тя се задава с равенство то $(w_1, w_2, w_3) = (z_1, z_2, z, z_3)$

Док Единственост - допускаме че $\exists$ ДЛТ $S(z)$ т.ч. $w_k = S(z_k)$. Тогава $T \circ S^{-1}$ е ДЛТ за която $T \circ S^{-1}(w_k) = T(z_k) = w_k$, $k = 1,2,3$ $\Rightarrow T \circ S^{-1} = id \Rightarrow T = S$

Съществуване $\frac{(w - w_1)(w_3 - w_2)}{(w - w_2)(w_3 - w_1)} = \frac{(z - z_1)(z_3 - z_2)}{(z - z_2)(z_3 - z_1)} \Rightarrow$

$\frac{w - w_1}{w - w_2} = k \frac{z - z_1}{z - z_2}$ - ДЛТ. $z_k \to w_k$, $k = 1,2,3$

Тв ДЛТ е единствената трансформация, която запазва двойното отношение на всеки 4-ри точки в $\overline{\mathbb{C}}$

Док ① Нека $w = T(z)$ е ДЛТ и $z_1 z_2 z_3 z_4$ са 4-ри точки в $\overline{\mathbb{C}}$, а $w_k = T(z_k)$, $k = 1,2,3$, $w = T(z)$. Тогава $T: (w_1 w_2 w w_3) = (z_1 z_2 z z_3)$ и следователно тя запазва двойното отношение

② Нека $w = T(z)$ е трансформация, която запазва двойното отношение на всеки 4-ри точки. Нека $z_1 z_2 z_3 z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$ и $w_k = T(z_k)$, $k = 1,2,3 \Rightarrow w = T(z)$ има, че $(w_1, w_2, w, w_3) = (z_1, z_2, z, z_3)$ което е ДЛТ

Тб Четири точки $z_1 z_2 z_3 z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$ лежат на една окръжност $(\in \overline{\mathbb{C}})$ $\Longleftrightarrow$ $(z_1 z_2 z_3 z_4) \in \mathbb{R}$

Деф z и z^* са инверсни относно окръжността $C(a,R)$ ако
1) $\arg(z^* - a) = \arg(z - a)$
2) $|z^* - a||z - a| = R^2$

Деф $a^* = \infty$. Ясно е че ако $z^* = z$, то $z \in C$ и само тогава. Ако C е права под инверсия относно C разбираме симетрия

Тб Точките z и z^* са инверсни относно окръжността $(\in \overline{\mathbb{C}})$ определена от т-те $z_1 z_2 z_3 \in \overline{\mathbb{C}} \Longleftrightarrow (z^* z_1 z_2 z_3) = \overline{(z z_1 z_2 z_3)}$

Тб ДЛТ запазва инверсията, т.е. ако T е ДЛТ, C е окръжност и z и z^* са инверсни относно C, то $T(z)$ и $T(z^*)$ са инверсни относно окръжността $T(C)$

Док По условие z и z^* са инверсни относно C, т.е. $(z^*, z_1, z_2, z_3) = \overline{(z, z_1, z_2, z_3)}$, $z_k \in C$, $k = 1,2,3,4$

$(T(z^*), T(z_1), T(z_2), T(z_3)) = \overline{(T(z), T(z_1), T(z_2), T(z_3))}$. Следователно $T(z)$ и $T(z^*)$ са инверсни относно $T(C)$

Деф Дробно линеен автоморфизъм на окръжност $D \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ наричаме всяка ДЛТ, $T: D \longleftrightarrow D$

Деф ДЛА на единичния кръг $U = \{|z| < 1\}$ са всички ДЛТ от вида

$$T(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}, \quad z_0 \in U, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

Функциите e^z, $\sin z$, $\cos z$

Деф $e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$

Rсх $\overline{\lim} \sqrt[n]{n!} = +\infty \Rightarrow e^z$ е холоморфна в $\mathbb{C}$ т.е. e^z е цяла ф/ия

Св-ва, 1) $(e^z)' = e^z$, 2) $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$, 3) $e^z \neq 0$, защото

$e^z \cdot e^{-z} = e^0 = 1 \neq 0$, 4) $z = iy$, $e^{iy} = 1 + \frac{iy}{1!} + \dots = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} \dots + i\left(y - \frac{y^3}{3!} \dots\right)$

$= \cos y + i \sin y \Rightarrow$

$e^{iy} = \cos y + i \sin y$ } $\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$

$e^{-iy} = \cos y - i \sin y$ } $\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$ (Ойлер)

5) $z = x + iy$, $e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$

6) $|e^z| = e^x$, $\arg e^z = y + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

7) e^z е периодична ф/я с основен период $2\pi i$

Лема Ако f е холоморфна в област D и $f'(z) = 0$, $z \in D$

тогава $f(z) = const$

Деф $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} \dots$ $z \in \mathbb{C}$

$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \dots$

Rсх $= +\infty \Rightarrow \sin z$ и $\cos z$ са цели ф/ии

$(\sin z)' = \cos z$, $(\cos z)' = -\sin z$

Св-ва

1) $\sin z$ и $\cos z$ са периодични с основен период 2π

$\cos(z + 2k\pi) = \frac{e^{i(z+2k\pi)} + e^{-i(z+2k\pi)}}{2} = \frac{e^{iz+i2k\pi} + e^{-iz-i2k\pi}}{2} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$

2) нулите на $\sin z$ и $\cos z$

$\sin z = 0 \Leftrightarrow e^{z} = -e^{-iz} \Leftrightarrow e^{2z} = 1 \Leftrightarrow 2z = 2k\pi \Leftrightarrow z = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\cos z = 0 \Leftrightarrow e^{iz} = -e^{-iz} = e^{i(\pi - z)} \Leftrightarrow e^{i(z-\pi+z)} = 1 \Leftrightarrow e^{i(2z-\pi)} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2z - \pi = 2k\pi \Rightarrow z = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

3) У-то $\cos z = c$ $(\sin z = c)$, $c \in \mathbb{C}$ имеют бесконечно много решений