

КР

18.01.15

1. Коши-Риман функциите u и v са холоморфни
 и $f(z)$ е холоморфна в z_0 . Тогава $f = u + iv$,
 $\bar{f} = u - iv$ и $\bar{f}$ са холоморфни в z_0 тогава
 на z_0 . Тогава $u, v \in C^1(D)$ и са в сила

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \text{ в } D \text{ и } \begin{cases} u_x = -v_y \\ u_y = v_x \end{cases} \text{ в } D. \text{ Оттук } u_x = v_y = -u_x$$

в D , откъдето $u_x = 0$ в D и $v_y = -u_x = -u_y$ в D
 откъдето $u_y = 0$ в D . откъдето

и $u_x = v_y = 0$ в D . Учен u, v са нули в D , то
 и е константа в D . Учен u, v са нули в D , то

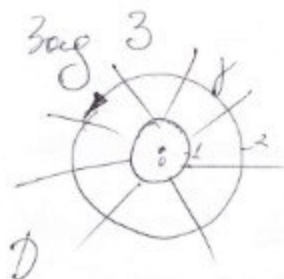
$$v = \text{const в } D \Rightarrow f \text{ също е const в } D \Rightarrow \downarrow$$

Забележка: $|e^z| = 1 \Rightarrow |e^{x+iy}| = 1 \Rightarrow |e^x e^{iy}| = 1 \Rightarrow |e^x| |e^{iy}| = 1$
 $e^x \cdot 1 = 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow z = iy$ Верно

$$\text{Re } e^z = \text{Re}(e^{x+iy}) = \text{Re}(e^x e^{iy}) = \text{Re}(e^x (\cos y + i \sin y)) = e^x \cos y \Rightarrow \text{Неверно}$$

б) $|\sin z|^2 + |\cos z|^2 = |\sin^2 z| + |\cos^2 z| \geq |\sin^2 z + \cos^2 z| = 1$
 Големината на тригонометричните
 Верно

г) $\arg(-1) = \arg 1 = \arg |1| + i \arg 1 = 12\pi$ Неверно
 $2\arg(-1) = 2\arg |1| + 2i \arg 1 = 0 + 2i(\pi + 2\pi) = i(4\pi + 4\pi)$



$$\gamma: z = 2e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2e^{it}} d(2e^{it}) = \int_0^{2\pi} \frac{2ie^{it}}{2e^{it}} dt =$$

$$i \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1} = i2\pi \neq 0 \quad \text{Отг. не е нуло}$$

Зад 4 Да се $z_0 \in \text{Ext } \gamma$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 0 \quad \text{по Тл на Коши}$$

Да се $z_0 \in \text{Int } \gamma$

$f(z)$ - хомоморфна в $\text{Int } \gamma$, Торава по ф/ката на Коши $\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{z-z_0} = f(z_0)$



$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \Rightarrow \text{интерпретация}$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f'(z_0) \text{ по ф. ката на Коши}$$

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz = 2\pi i f'(z_0) \Rightarrow \text{Зад 5}$$

Зад 5



По Тл на Теорема

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n, \quad z \in K$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n, \quad z \in K$$

Използваме Тл за изчисления

Тн за идентичност

Ако $f(z)$ и $g(z)$ са холоморфни в $\text{отн } D \subseteq \mathbb{C}$ и

$A = \{z \in D; f(z) = g(z)\}$ има т. не състоящ се в D

то $f(z) \equiv g(z)$ в D , $\text{Сл } f(z) \equiv g(z)$ в $\mathbb{C}$

По Тн за идентичност $f(z) \equiv g(z)$ в D
Зигмо

Заг 6 а) 함수는 $f(z) = \frac{1}{z}$

Тогава ще имаме $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1/n} = n$ $n \in \mathbb{N}$

и по Тн за идентичност $f(z) \equiv z$ в $|z| < 1$

но $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{1/2} = 2 \neq \frac{1}{2}$. Неверно

6 б) 함수는 $f(z) = \frac{1}{z^2}$

Имаме $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{(1/n)^2} = n^2$. Проверим граничен сред

при $n \rightarrow \infty$, $\Rightarrow f(0) = 0$. Нма 0-кратна

нула на $f(z)$, $m \in \mathbb{N}$. Тогава $f(z) = z^m g(z)$

където $g(z)$ е холоморфна в $|z| < 1$ и $g(0) \neq 0$

Имаме $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \Rightarrow \frac{1}{n^m} g\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \Rightarrow$

$g\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^m}{n^2} = n^{m-2}$ при $n \rightarrow \infty$ $g(0) = 0$ $\nrightarrow$

Неверно

Зад 1) Ако $\Rightarrow$ Нека ω е област



функцията $f(z) \neq 0$ в ω . Тогава

$f(z_0) \neq 0$ за $z_0 \in \omega$. По свойствата на диференцируемост
 $f(z) \neq 0$ в K . Но $f(z)g(z) = 0$ в K и $g(z) = 0$ в K .
 Оттук по Тхз за идентичност $\Rightarrow g(z) \equiv 0$ в ω

← Нека от $f(z)g(z) = 0$ в ω следва че $f(z) = 0$ или
 $g(z) = 0$ в ω . Функцията ω не е свързана $\Rightarrow$
 ω има поне 2 свързани компоненти $D_1, D_2, \dots$

D_1 $\omega \setminus D_1$ Нека $f(z) = \begin{cases} 0 & \text{в } D_1 \\ 1 & \text{в } \omega \setminus D_1 \end{cases}$ $g(z) = \begin{cases} 1 & \text{в } D_1 \\ 0 & \text{в } \omega \setminus D_1 \end{cases}$
 $f(z)g(z) = 0$ в ω , но $f(z) \neq 0$ и $g(z) \neq 0 \Rightarrow$!

$\Rightarrow \omega$ е свързана $\Rightarrow \omega$ е област

Зад 2) Нека функцията $f(z)$ е равна на 1 в D_1
 $f(z)$ $g(z) = \frac{f(z)}{\sin z}$ е холоморфна в $\mathbb{C} \setminus \{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$

и $|g(z)| \leq K$. По Тхз Рунге за отстраняване на
 особености, т.е. че са отстранявани особености.

Тогава $g(z)$ е една $f(z)$ и следователно $|f(z)| \leq K$ в $\mathbb{C}$

По Тхз на Лиувил. Ако една една $f(z)$
 е ограничена, то тя е константа $\Rightarrow$

$g(z) \equiv A$ в $\mathbb{C}$, където $A \in \mathbb{C}$, $|A| \leq K$. Тогава

$f(z) = A \sin z$. Оттук $f(z)$ на задачите са

$f(z) = A \sin z$, където $A \in \mathbb{C}$, $|A| \leq K$

110) а) Невярно пример $f(z) = z$, $D = \{ |z| < 1 \}$

б) функции $f(z)$ няма нула в D

По принципа за минимума
 $\min_{z \in D} |f(z)|$ се достига в $\bar{D}$ ^{границата} на D

По принципа за максимума

$\max_{z \in D} |f(z)|$ също се достига в $\bar{D}$ на D

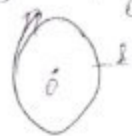
Но по $|f(z)| = 1 \quad \forall z \in D$. Следователно

$|f(z)| = 1 \quad \forall z \in D$. По принципа за запазване на областта

$f(z) \equiv \text{const} \in D$ и при това $|c| = 1$

Ако: няма ноще една нула, тогава
~~е ок~~

г) Отзад $108 \Rightarrow f(z)$ няма нула в $|z| < 1$



Нека $g(z) \equiv w$, $w - \text{const}, |w| < 1$

при $|z| = 1$ имаме $|f(z)| = |w| < 1$

$= |f(z)|$ По Тл на Руше $f(z)$ и $f(z) - g(z) =$

$f(z) - w$ имат един и същ брой нули в $|z| < 1 \Rightarrow$
единственият заборен $\rightarrow$

$f(z) - w$ също няма нула в $|z| < 1$ т.е.

что $f(z) \equiv w$ няма решение в $|z| < 1$

11) a) z_0 е отсрещната ос. т. на $f(z)$ са $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$
 (просто число) Ако $A \neq 0$ то $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{A} \Rightarrow z_0$ е ~~отср~~
 ос. т.

Ако $A = 0$, то $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = \infty$, z_0 е ~~отср~~

б) z_0 ~~е~~ полюс $\Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$

$\Rightarrow$ ~~отср~~ ос. т.

в) Ако z_0 е т. на съвѣ на кудн на $f(z)$, то
 z_0 е ~~не~~ изомерната ос. т. на $\frac{1}{f(z)}$

Ако z_0 не е т. на съвѣ на кудн на $f(z)$, то $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ ~~и тогава~~
 $\Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$
 z_0 е ~~отср~~ ~~съвѣ~~ ~~ос. т.~~ на $\frac{1}{f(z)}$