Петър Попиванов
Недю Попиванов
Йордан Йорданов

Ръководство по частни диференциални уравнения

Трето издание

УНИВЕРСИТЕТСКО ИЗДАТЕЛСТВО КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ

София · 1991

Ръководството разглежда основни задачи по частни диференциални уравнения от елиптичен, хиперболичен и параболичен тип. Подробно са разработени методът на характеристиките, трансформацията на Фурие и методът за разделяне на променливите. Застъпени са елементи от теория на интегралните уравнения и е дадено едно сравнително пълно и затворено изложение на обобщените функции. Предложени са редица задачи от класическата теория на потенциала и е построена функция на Грийн за задачата на Дирихле в многомерни области. Включени са и задачи за изследване на свойствата на хиперболични системи, срещащи се в математическата физика, като системите на Максуел и др. Повечето задачи са снабдени с отговори и упътвания.

Ръководството е предназначено за студентите по математика от СУ "Кл. Охридски", но може да бъде полезно за всички любознателни читатели — физици, инженери и др., интересуващи се от проблеми на математическата физика.

Третото издание е стереотипно.

51

ПРЕДГОВОР КЪМ ВТОРОТО ИЗДАНИЕ

Настоящото второ издание на ръководството следва разпределението на темите от предишното издание през 1981 г. Едновременно с това сме се опитали да го актуализираме и обогатим с нови задачи, по-добре отговарящи на подготовката на студентите по математика през последните 2 – 3 години. По-важните допълнения и преработки обхващат следните въпроси: Към § 7 от първа глава освен трансформацията на Фурие са добавени трансформацията на Лаплас и конкретни гранични задачи, които се решават с нейна помощ. Въведено е понятието вълнов фронт на разпределение и е илюстрирано с някои прости примери. Допълнението на § 7 съдържа една задача на Минковски — ефектно приложение на фуриеровия анализ в теория на числата. Към глави III и IV са включени редица нови задачи върху метода на характеристиките и разделяне на променливите. Допълнението към глава IV съдържа известен минимум от сведения за беселовите функции и задачи за разделяне на променливите в кръгови и цилиндрични области, при които функциите на Бесел възникват съвсем естествено. На преработка беше подложена глава VI, като е включено и подробно изследване на смесената задача за хиперболични системи при дисипативни гранични условия.

Отпадна § 20 от първото издание, поради което § 21 — 25 станаха съответно § 20 — 24.

Разпределението на материала по автори е същото както в първото издание. Освен това в ръководството са включени: задачи 7.49 — 7.57 и допълнението към глава IV от П. Попиванов, а задачи 18.1 (решение I), 18.4, 19.1 — 19.3 — от П. Попиванов и Н. Попиванов.

Изказваме нашата благодарност на доц. В. Петков за обстойната рецензия на второто издание на ръководството. Голяма благодарност дължим и на проф. д-р Т. Генчев за извършената от него прецизна работа при редактирането на тази книга.

Авторите

ПРЕДГОВОР КЪМ ПЪРВОТО ИЗДАНИЕ

Предлаганото ръководство по частни диференциални уравнения обхваща широк кръг от задачи, по-голямата част от които са разглеждани на упражнения със студентите по математика и механика от Софийския университет. В него са засегнати всички елементи на функционалния анализ, необходими за по-нататъшното изложение на теорията на интегралните уравнения на Фредхолм и Волтера и на обобщените функции. Дадено е сравнително пълно изложение на теорията на разпределенията на Л. Шварц в задачи. Доста подробно са изложени методът на Фурие за разделяне на променливите и методът на характеристиките, като навсякъде, където е възможно, е илюстрирана физическата същност на явленията. Задачите, свързани с оператора на Лаплас, субхармоничните функции, потенциала и функцията на Грийн, представляват допълнение към изложението и задачите от съответните раздели на [8]. Изложени са също критерият на Винер за регулярност на контурните точки и принципът за максимума за равномерно елиптични уравнения от втори ред. В шеста глава са разгледани някои въпроси от теорията на хиперболичните системи: постановката на граничните задачи за хиперболични системи, интеграл на енергията, теореми за единственост и априорни оценки.

За да се улеснят студентите при усвояване на техничните и доста абстрактни методи, прилагани при решаване на частни диференциални уравнения, към всички по-нетривиални задачи са дадени упътвания или решения. Задачите с повишена трудност са отбелязани със звездичка. Правилото за номерация на задачите е следното: номер на параграфа и номер на задачата от параграфа.

Задачите в ръководството са разработени от авторите, както следва:

§ 1 — 6 и § 8 — от ст.н.с. к.м.н. П. Попиванов,
§ 7 и § 16 — 22 — от доц. к.м.н. Й. Йорданов,
§ 9 — 15 и § 23 — 25 — от доц. к.м.н. Н. Попиванов.

Задачи 25.6 и 25.7 дължим на н.с. к.м.н. Г. Караджов.

Приятен дълг ни е да изкажем благодарността си на нашия пръв учител по частни диференциални уравнения проф. д-р Т. Генчев и на проф. д-р Р. Денчев — създатели на два различни подхода в изложението на тази дисциплина у нас. За създаването на това ръководство най-съществена роля изигра активната подкрепа на ръководителя на сектор "Диференциални уравнения" проф. д-р Р. Денчев. Изказваме също благодарността си на целия колектив на сектор "Диференциални уравнения" и специално на проф. д-р Г. Каратопраклиев и доц. к.м.н. В. Петков за моралната поддръжка при създаване на ръководството.

Авторите

ОЗНАЧЕНИЯ

1. $\mathbf{R}^n$ — евклидовото n-мерно пространство със скаларно произведение $(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$.

2. $\mathbf{C}^n$ — комплексното n-мерно пространство.

3. Ако $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ е *мултииндекс*, т.е. е вектор, чиито координати α_i, $i = 1, \ldots, n$, са цели неотрицателни числа, тогава $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n}$ при $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и $D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$.

4. С $\overline{L} = [L]$ се отбелязва затворената обвивка на множеството L.

5. Нека Ω е област в $\mathbf{R}^n$. Означаваме с $\overline{\Omega}$ затворената й обвивка, а с $\partial\Omega$ — границата й. Тогава $C^k(\Omega)$ е множеството от k пъти непрекъснато диференцируемите функции в Ω, а $C^k(\overline{\Omega})$ — в $\overline{\Omega}$.

6. $C_0^k(\Omega)$ е съвкупността от k пъти непрекъснато диференцируемите функции с компактен носител в Ω.

7. С $U(x, r)$ бележим отвореното кълбо с център в точката x и с радиус $r > 0$; $U(r) = U(0, r)$.

8. $S(x, r)$ е сферата с център в точката x и с радиус $r > 0$; $S(r) = S(0, r)$.

9. С $f_n \rightrightarrows f$ ще означаваме *равномерната* сходимост на редицата от функции $\{f_n\}$ към функцията f.

Глава I

ЕЛЕМЕНТИ ОТ ТЕОРИЯ НА ИНТЕГРАЛНИТЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Някои сведения за метричните, нормираните, банаховите и хилбертовите пространства

Да напомним, че едно множество от елементи X се нарича *метрично* пространство, ако върху него е дефинирана числова функция $\rho : X \times X \to \mathbf{R}^1_+$, където $\mathbf{R}^1_+ = \{t \in \mathbf{R}^1, t \geq 0\}$, притежаваща следните свойства:

1) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$, $\forall(x,y) \in X \times X$;
2) $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
3) $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$, $\forall(x,y,z) \in X \times X \times X$ (неравенство на триъгълника).

Съществуването на метричен функционал ρ върху X ни дава възможност да дефинираме топология в X по следния начин: *кълбовидна околност* $U(x_0, r)$ на точката x_0 с център в x_0 и радиус $r > 0$ ще наричаме множеството

$$U(x_0, r) = \{y \in X : \rho(x_0, y) < r\}.$$

Тогава по дефиниция едно множество $U \subset X$ е *отворено* точно тогава, когато съдържа всяка своя точка заедно с някоя нейна кълбовидна околност. Допълненията на отворените множества се наричат *затворени*. Затворената обвивка на $L \subset X$ спрямо въведената топология ще бележим $[L]^T$.

Ще казваме, че редицата $\{x_n\} \subset X$ е *фундаментална*, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова число ν, че щом n, $m > \nu$, то $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

По дефиниция метричното пространство X е *пълно* точно когато всяка негова фундаментална редица $\{x_n\}$ е сходяща към елемент $x \in X : \rho(x_n, x) \to 0$.

С оглед целите на този сборник последователно ще дефинираме нормираните, банаховите и хилбертовите пространства.

Нека E е линейно пространство над полето на реалните или комплексните числа. В E се въвежда линейна независимост на система от краен брой елементи по стандартния начин, известен от алгебрата. Дадено подмножество на E, съдържащо безбройно много елементи, ще наричаме *линейно независимо*, ако всяка негова крайна част е линейно независима.

Пространството E наричаме *нормирано*, ако върху него е дефинирана неотрицателна числова функция норма $\|.\| : E \to \mathbf{R}^1_+$, удовлетворяваща следните условия:

1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство на триъгълника);

3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$, $\forall \lambda \in \mathbf{R}^1(\mathbf{C}^1)$ и $\forall x \in E$.

Всяко нормирано пространство се превръща в метрично посредством метриката $\rho(x, y) = \|x - y\|$ и следователно се снабдява с топология. По-специално по дефиниция $\{x_n\} \to x \Leftrightarrow \|x_n - x\| \to 0$.

Пълните нормирани пространства наричаме *банахови*.

Да предположим сега, че върху $E \times E$ е дефинирана числовата функция скаларно произведение $(.,.) : E \times E \to \mathbf{C}^1(\mathbf{R}^1)$, притежаваща свойствата:

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$;

2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$, $\forall (x_1, x_2, y) \in E \times E \times E$;

3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$, $\forall \lambda \in \mathbf{C}^1$ и $\forall (x, y) \in E \times E$;

4) $(x, x) \geq 0$, $\forall x \in E$, като $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Тогава E се нарича *предхилбертово пространство.* В предхилбертовите пространства се въвежда норма по следния начин: $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, $\forall x \in E$ (вж. зад. 1.11). Предхилбертовите пространства, които са пълни спрямо току-що въведената норма, се наричат *хилбертови.*

Система от елементи $\{e_i\} \subset H$ наричаме ортонормирана, ако $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, където δ_{ij} е символът на Кронекер. Ще казваме, че елементът x е ортогонален на y, ако $(x, y) = 0$.

Характерен белег на хилбертовите пространства е възможността ортогонално да проектираме върху затворено подпространство. По-точно, ако $L \subset H$ е затворено линейно подпространство на хилбертовото пространство H, то $H = L_{\oplus} L^{\perp}$, където $L^{\perp} = \{y \in H : (y, x) = 0, \ \forall x \in L\}$, и горното разлагане в директна сума е еднозначно. Доказателството на този факт (теорема за ортогоналната проекция) вж. в [11].

Най-сетне да напомним, че едно подмножество K на произволно нормирано пространство E е компактно, ако всяка редица от елементи на K притежава сходяща подредица. Множеството $N_\varepsilon \subset E$, $\varepsilon > 0$, наричаме ε-мрежа на $L \subset E$, ако за всяка точка $x \in L$ съществува такъв елемент $x_\varepsilon \in N_\varepsilon$, че $\|x - x_\varepsilon\| < \varepsilon$. Доказва се (вж. [13]), че кое да е подмножество на банахово пространство е компактно точно тогава, когато за всяко $\varepsilon > 0$ то притежава ε-мрежа, състояща се от краен брой точки.

1.1. Покажете, че множеството $\mathbf{R}^n$, в което е въведена метриката $\rho(x, y) = \left[\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2\right]^{1/2}$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, е пълно метрично пространство.

1.2. Нека m е множеството на всички числови редици от ограничени елементи, т.е. $x = \{x_n\} \in m \Leftrightarrow \exists c = \text{const} : |x_n| \leq c$. Да дефинираме функцията $\rho(x, y) = \sup\limits_n |x_n - y_n|$.

Докажете, че ρ е метрика и m е пълно метрично пространство. Проверете, че пространството m, снабдено с нормата $\|x\| = \sup_n |x_n|$, е банахово.

1.3. Нека $C[a,b]$ е съвкупността от непрекъснатите функции в крайния интервал $[a,b]$. Да дефинираме функционала

$$\rho(f,g) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|, \qquad f,g \in C[a,b].$$

Проверете, че ρ е метрика. Установете, че $C[a,b]$, снабдено с тази метрика, е пълно метрично пространство. Въведете в $C[a,b]$ нормата $\|f\| = \max|f(x)|$ и покажете, че $C[a,b]$ е банахово пространство.

Упътване. Използвайте критерия за равномерна сходимост на редица от непрекъснати функции.

1.4. Да означим с $C^k[a,b]$, $k \geq 1$, съвкупността от k пъти непрекъснато диференцируемите функции в крайния интервал $[a,b]$. В $C^k[a,b]$ въвеждаме метриката

$$\rho(f,g) = \sum_{j=0}^{k} \max_{[a,b]} |f^{(j)}(x) - g^{(j)}(x)|, \qquad f,g \in C^k[a,b].$$

Докажете, че $C^k[a,b]$ е пълно метрично пространство.

1.5. Нека X е метрично пространство. Едно изображение $T : X \to X$ ще наричаме *свиващо*, ако съществува такова неотрицателно число $\alpha < 1$, че $\rho(Tx,Ty) \leq \alpha\rho(x,y)$, $\forall(x,y) \in X \times X$. Установете, че свиващото изображение T е непрекъснато. (Напомняме, че по дефиниция изображението T е непрекъснато, ако от $x_n \to x$ следва $Tx_n \to Tx$.)

1.6. Всяко свиващо изображение T в пълното метрично пространство X има точно една неподвижна точка, т.е. такава точка x, за която $Tx = x$ (принцип на свиващите изображения на Банах).

Упътване. Съществуването на неподвижната точка покажете така: Нека x_0 е произволна точка в X. Образувайте редицата от последователни итерации: $x_1 = Tx_0$, $x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \ldots$, $x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0$ и т. н. След това докажете, че $\{x_n\}$ е фундаментална редица в X. За тази цел установете, че при $m > n$

$$\begin{aligned}\rho(x_n,x_m) &= \rho(T^n x_0, T^m x_0) \leq \alpha^n \rho(x_0, x_{m-n})\\ &\leq \alpha^n[\rho(x_0,x_1) + \rho(x_1,x_2) + \cdots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n})]\end{aligned}$$

$$\leq \alpha^n \rho(x_0, x_1)(1 + \alpha + \cdots + \alpha^{m-n-1}) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, x_1).$$

Дефинирайте $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} T^n x_0$ и се убедете, че $Tx = x$. Единствеността на елемента x докажете сами!

1.7. Нека $T : X \to X$ е такова непрекъснато изображение на пълното метрично пространство X в себе си, щото някоя негова степен T^r, $r \geq 2$, да е свиващо изображение. Докажете, че операторът T притежава единствена неподвижна точка.

Решение. Нека x е неподвижната точка на T^r, т.е. $T^r x = x$. Тогава за всяко естествено число n имаме $T^{nr} x = x$ и следователно $T^{nr}(Tx) = Tx$. Съгласно предишната задача $T^{nr} z \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ за всеки елемент $z \in X$ и по този начин намираме, че $Tx = x$. Единствеността е очевидна.

1.8. Разгледайте линейното интегрално уравнение

$$u(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,y)u(y)dy + f(x),$$

където $K(x,y) \in C([a,b] \times [a,b])$ и $f(x) \in C[a,b]$, $\lambda \in \mathbf{C}^1$. Покажете, че това уравнение има единствено непрекъснато решение $u \in C[a,b]$ при условие, че $|\lambda| < [\max\limits_{x,y} |K(x,y)|(b-a)]^{-1}$.

Упътване. Разгледайте оператора

$$(\mathbf{K}u)(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,y)u(y)dy + f(x) : C[a,b] \to C[a,b]$$

и проверете, че той е свиващ, когато $|\lambda| < [\max\limits_{x,y} |K|(b-a)]^{-1}$.

Функцията $K(x,y)$ се нарича *ядро на интегралното уравнение.*

1.9. Установете, че функцията $\|\cdot\|$ е непрекъсната, т.е. щом $x_n \to x$ в нормираното пространство E, то $\|x_n\| \to \|x\|$.

1.10. Докажете, че в произволно предхилбертово пространство е валидно следното неравенство на Коши — Буняковски — Шварц:

$$|(x,y) \leq \|x\| \, \|y\|, \forall (x,y) \in E \times E.$$

Упътване. За всяка двойка $x, y \in E$ и за всяко $\lambda \in \mathbf{C}^1$ имаме $(x + \lambda y,\, x + \lambda y) \geq 0$. Развийте това скаларно произведение и положете $\lambda = -(x,y)\|y\|^{-2}$, $y \neq 0$.

1.11. Нека E е предхилбертово пространство и $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$. Установете, че функцията $\|\cdot\|$ е норма в E.

1.12. Проверете, че във всяко предхилбертово пространство е валидно следното тъждество на успоредника:

$$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = \|x-y\|^2 + \|x+y\|^2.$$

1.13. Докажете, че скаларното произведение $(.,.)$: $E \times E \to \mathbf{C}^1$ е непрекъсната функция относно сходимостта по норма, т.е. щом $\|x_n - x_0\| \to 0$ и $\|y_n - y_0\| \to 0$, то $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$.

1.14. Нека $\mathbf{C}^n$ е пространството от наредени n-орки комплексни числа. Да въведем в $\mathbf{C}^n$ скаларно произведение по формулата $(z,w) = \sum\limits_{j=1}^{n} z_j \overline{w}_j$, z, $w \in \mathbf{C}^n$. Покажете, че $\mathbf{C}^n$ е хилбертово пространство ($z = (z_1, \ldots, z_n)$, $w = (w_1, \ldots, w_n)$).

Забележка. Нека Δ е произволен интервал върху числовата ос и $f, g \in L_2(\Delta)$, т.е. f, g са измерими функции по Лебег и $\int\limits_{\Delta} |f|^2 dx < \infty$, $\int\limits_{\Delta} |g|^2 dx < \infty$. В $L_2(\Delta)$ въвеждаме скaларно произведение по формулата $(f,g) = \int\limits_{\Delta} f(x)\overline{g(x)}dx$. Така $L_2(\Delta)$ се превръща в предхилбертово пространство. В курсовете по анализ се доказва, че $L_2(\Delta)$ е хилбертово пространство относно нормата $\|f\|^2_{L_2(\Delta)} = \int\limits_{\Delta} |f|^2 dx$. Дефиницията и свойствата на пространствата $L_p(\Delta)$, $p > 1$, ще считаме известни.

1.15. Да разгледаме ортонормираната система $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ в предхилбертовото пространство E. Докажете, че за всеки елемент $x \in E$

$$\min_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{C}^1} \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |(x, e_i)|^2.$$

Упътване. Използвайте дефиницията на норма в E и тъждеството $|a-b|^2 = |a|^2 - a\overline{b} - \overline{a}b + |b|^2$.

1.16. Ако $U = \{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ е ортонормирана система в предхилбертовото пространство E и $c_i = (x, e_i)$ са т.нар. фуриерови коефициенти на елемента $x \in E$ спрямо U, установете валидността на следното неравенство на Бесел: $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 \leq \|x\|^2$.

1.17. Нека L е линейно подпространство на хилбертовото пространство H. Докажете, че L е навсякъде гъсто в H, т.е. $[L]^T = H$ точно тогава, когато не съществува ненулев елемент, ортогонален на L.

Упътване. Използвайте теоремата за ортогоналната проекция.

По-общо едно подмножество A на метричното пространство X ще наричаме навсякъде гъсто в X, ако неговата затворена обвивка

$$[A]^T = X \ ([A]^T = X \Leftrightarrow \forall x \in X \exists \{x_n\} \subset A, \text{ за която } \rho(x_n, x) \to 0).$$

1.18. Нека $U = \{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ е ортонормирана система в хилбертовото пространство H. Тогава следните условия са еквивалентни:

1) $x \perp U \Rightarrow x = 0$;
2) $[U]^{\Lambda T} = H$;
3) $\|x\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} |(x, e_i)|^2, \ \forall x \in H$.

(По дефиниция $x \in [U]^{\Lambda T} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in C^1$, чийто брой n евентуално зависи от ε, и такива, че $\left\| x - \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \right\| < \varepsilon$.)

Упътване. Предварително докажете, че редът $\sum (x, e_i) e_i$ е сходящ в H, какъвто и да е елементът x. За тази цел установете, че

$$\left\| \sum_{i=n}^{n+p} (x, e_i) e_i \right\|^2 = \sum_{i=n}^{n+p} |(x, e_i)|^2, \ p = 1, 2, \ldots$$

Импликациите 1) ⇒ 2), 1) ⇒ 3) проверете по следния начин: Означете $x' = \sum (x, e_i) e_i$ и покажете, че $x - x' = 0$, $\|x\|^2 = \sum |(x, e_i)|^2$.

Накрая използвайте зад. 1.17.

Ортонормирана система, притежаваща поне едно от свойствата, посочени в зад. 1.18, ще наричаме *ортонормирана база* в H. Релацията 3) носи името *равенство на Парсевал*, а представянето $x = \sum (x, e_i) e_i$ — *фуриерово развитие на елемента x по базата U*. Ще казваме, че едно хилбертово пространство е сепарабелно, ако има ортонормирана база.

1.19. Установете, че системата функции $\{1/\sqrt{2\pi},\ \sin nx/\sqrt{\pi},\ \cos nx/\sqrt{\pi}\}$, $n = 1, \ldots$, образува ортонормирана база в $L_2[0, 2\pi]$.

Упътване. Нека $f \in L_2[0, 2\pi]$. Ако $\varepsilon > 0$, то съгласно теорията на лебеговия интеграл съществува функция $g \in C[0, 2\pi]$, за която $\|f - g\|_{L_2} < \varepsilon$. Постройте след това такава непрекъсната функция h, за която $h(0) = h(2\pi) = 0$ и $\|g - h\|_{L_2} < \varepsilon$. Най-сетне за $h(x)$ приложете теоремата на Вайерщрас за равномерна апроксимация на периодична функция с тригонометричен полином.

1.20. Докажете, че системите функции $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx\right\}_{n=1}^{\infty}$ и $\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}},\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx\right\}_{n=1}^{\infty}$ образуват две ортонормирани бази в $L_2[0, \pi]$.

1.21. Докажете, че линейната обвивка на множеството от функции $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ е разположена навсякъде гъсто в $L_2[a, b]$.

1.22. Нека елементът $f \in L_2[a, b]$ е такъв, че $\int\limits_a^b f(x) x^n dx = 0$, $n = 0, 1, \ldots$ Проверете, че $f = 0$ п. н.

Упътване. Използвайте зад. 1.17 и 1.21.

1.23. Нека системите функции $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ и $\{\psi_j(y)\}_{j=1}^{\infty}$ определят ортонормираните бази съответно в $L_2(G_x)$ и $L_2(D_y)$, а $G_x \subset \mathbf{R}_x^n$, $D_y \subset \mathbf{R}_y^m$ са произволни области. Докажете, че функциите $\{\varphi_j(x)\psi_k(y)\}_{j,k=1}^{\infty}$ дефинират ортонормирана база в хилбертовото пространство $L_2(G_x \times D_y)$.

1.24. Пресметнете сумата $S_k = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$ за $k = 1, 2, 3$.

Отг. $S_1 = \pi^2/6$, $S_2 = \pi^4/90$, $S_3 = \pi^6/945$.

Упътване. За да пресметнете S_1, развийте $f(x) = x$, $x \in [0, \pi]$, в ред на Фурие по базата $\{\sqrt{2/\pi} \sin nx\}$; при S_2 развийте $f(x) = x^2$, $x \in [0, \pi]$, в ред на Фурие по базата $\{1/\sqrt{\pi},\ \cos nx\}$; най-сетне, за да намерите S_3, развийте функцията $x(x - \pi)$ по синусите в $[0, \pi]$ и т.н.

В следващите няколко задачи ще се запознаем с някои свойства на добре известните от анализа (или теорията на функциите) банахови пространства $L_p(\Omega)$, $p \geq 1$, където Ω е отворена област в $\mathbf{R}^n$.

1.25. Покажете, че функцията

$$\psi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{\varepsilon^2}{\varepsilon^{2-|x|^2}}\right), & |x| < \varepsilon \\ 0, & |x| \geq \varepsilon \end{cases}$$

е от клас $C^\infty(\mathbf{R}^n)$. Намерете такава константа $c_\varepsilon > 0$, че

$$c_\varepsilon \int\limits_{\mathbf{R}^n} \psi_\varepsilon(x)dx = 1.$$

Функцията $\varphi_\varepsilon = c_\varepsilon \psi_\varepsilon$ ще бъде често използвана нататък.

1.26. Да предположим, че функциите f, $f_n \in L_p(\Omega) \cap C(K)$, където K е компактно подмножество на Ω. Нека $f_n \rightrightarrows f$ върху K. Установете, че $f_n \to f$ в $L_p(K)$. (Напомняме, че по дефиниция нормата в банаховото пространство $L_p(\Omega)$ се дава от

$$\|f\|^p_{L_p(\Omega)} = \int\limits_\Omega |f(x)|^p dx.$$

1.27. Нека функцията $f(x)$ е локално сумируема в $\mathbf{R}^n$ (т.е. е сумируема върху всяко компактно множество в $\mathbf{R}^n$). Ако функцията φ_ε е дефинирана в зад. 1.25, докажете, че винаги съществува интегралът

$$f_\varepsilon(x) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(y)\varphi_\varepsilon(x-y)dy = \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x-y)\varphi_\varepsilon(y)dy.$$

Функцията $f_\varepsilon(x)$ носи името *регуляризация* на f. Както е общоприето, *носител* $\mathrm{supp} f$ на една функция ще наричаме най-малкото затворено множество, извън което $f = 0$. Разстоянието от точката x до множеството A ще означаваме с $\rho(x, A)$.

1.28. Предполага се, че $f(x)$ е непрекъсната функция в $\mathbf{R}^n$ с компактен носител. Проверете, че дефинираната в предишната задача $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ и още $\mathrm{supp} f_\varepsilon \subset \{x \in \mathbf{R}^n : \rho(x, \mathrm{supp} f) \leq \varepsilon\}$.

Покажете също, че $f_\varepsilon \rightrightarrows f$ при $\varepsilon \to 0$.

Решение. Очевидно $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$. Нека $f_\varepsilon(x) \neq 0$. Тогава съществува точка $y_0 \in \mathrm{supp} f$, за която $x - y_0 \in \mathrm{supp}\varphi_\varepsilon$. Следователно $\rho(x, \mathrm{supp} f) \leq \varepsilon$. Тъй като $\int\limits_{\mathbf{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y)dy = 1$, то

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(x) - f(x) &= \int\limits_{\mathbf{R}^n} [f(y) - f(x)]\varphi_\varepsilon(x-y)dy \\ &= \int\limits_{|x-y|\leq\varepsilon} [f(y) - f(x)]\varphi_\varepsilon(x-y)dy. \end{aligned}$$

Тогава търсената равномерна сходимост незабавно следва от равномерната непрекъснатост на f.

1.29. Нека $f \in L_p(\Omega)$, $p \geq 1$ и $f = 0$ извън компактното подмножество $K \subset \Omega$. Докажете, че щом $0 < \varepsilon < \rho(K, \partial\Omega)$ ($\partial\Omega$ е границата на Ω), то:

1) $f_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$;
2) $\|f_\varepsilon\|_{L_p(\Omega)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega)}$;
3) $\|f_\varepsilon - f\|_{L_p(\Omega)} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Упътване. Твърдение 1) следва от дефиницията на понятието производна, теоремата за крайните нараствания, приложена към функцията $\dfrac{\varphi_\varepsilon(x+h-y) - \varphi_\varepsilon(x-y)}{h}$, от обстоятелството, че $L_p(K) \subset L_1(K)$, и от теоремата на Лебег за граничен преход под знака на интеграла. Ще докажем, че твърдение 2) е валидно дори за всяка функция $f \in L_p(\Omega)$, $f(x) = 0$ при $x \notin \Omega$. Наистина съгласно неравенството на Хьолдер при $p > 1$, $1/p + 1/q = 1$ имаме

$$\begin{aligned} \|f_\varepsilon\|^p_{L_p(\Omega)} &= \int\limits_\Omega |f_\varepsilon(x)|^p dx \leq \int\limits_\Omega \left[\int\limits_{\mathbf{R}^n} |f(y)\varphi_\varepsilon(x-y)|dy\right]^p dx \\ &= \int\limits_\Omega \left[\int\limits_{\mathbf{R}^n} |f(y)|^p [\varphi_\varepsilon(x-y)]^{1/p} [\varphi_\varepsilon(x-y)]^{1/q} dy\right]^p dx \\ &\leq \int\limits_\Omega \left[\int\limits_\Omega |f(y)|^p \varphi_\varepsilon(x-y)dy\right] \left[\int\limits_\Omega \varphi_\varepsilon(x-y)dy\right]^{p/q} dx \\ &\leq \|f\|^p_{L_p} \int\limits_\Omega \varphi_\varepsilon(x-y)dx. \end{aligned}$$

За да докажете твърдение 3), използвайте факта, че непрекъснатите функции с компактен носител са разположени навсякъде гъсто в $L_p(\Omega)$, зад. 1.26, 1.28 и неравенство 2).

1.30. Покажете, че множеството $\mathbf{C_0^\infty(\Omega)}$ е навсякъде гъсто в $L_p(\Omega)$, $p \geq 1$.

Този параграф ще завършим с няколко задачи, изучаващи поведението на линейни оператори в нормирани пространства. Напомняме на читателя, че линейният оператор L, действуващ между нормираните пространства E и F, се нарича *ограничен*, ако съществува такава константа $C > 0$, че $\|Lu\|_F \leq C\|u\|_E$, $\forall u \in E$.

1.31. Установете, че един оператор $L : E \to F$ е непрекъснат точно тогава, когато е ограничен.

Ако L е ограничен линеен оператор $L : E \to F$, да означим $\|L\| = \sup\limits_{\|u\|=1} \|Lu\|$. Числото $\|L\|$ ще наричаме *норма на оператора* L. Очевидно

$$\|Lu\|_F \leq \|L\| \, \|u\|_E.$$

1.32. Докажете, че:

1) множеството от всички ограничени линейни изображения на E в F, което ще означаваме с $\mathcal{L}\ (E, F)$, се превръща в линейно нормирано пространство относно въведената по-горе норма;

2) $\|L\| = \sup\limits_{\|u\|\leq 1} \|Lu\|_F = \sup\limits_{u\neq 0} \dfrac{\|Lu\|_F}{\|u\|_E}$.

1.33. Нека $L : C[a, b] \to C[a, b]$ е интегрален оператор, дефиниран по следния начин: $(Lu)(x) = \int\limits_a^b K(x, y)u(y)dy$, $K \in C([a, b] \times [a, b])$. Покажете, че L е ограничен и $\|L\| \leq (b - a) \max\limits_{[a,b]\times[a,b]} |K(x, y)|$.

1.34. Да предположим, че L, $M \in \mathcal{L}(E, E)$ и E е произволно нормирано пространство. Убедете се, че $\|LM\| \leq \|L\| \, \|M\|$.

1.35. Докажете, че нормираното пространство $\mathcal{L}(E, F)$, въведено в зад. 1.32, е банахово, ако F е банахово пространство.

Доказателство. Нека $\{L_n\} \subset \mathcal{L}(E, F)$ е фундаментална редица, т.е. за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова число ν, щото m, $n > \nu \Rightarrow \|L_m - L_n\| < \varepsilon$. Съгласно дефиницията на норма оттук следва, че $\|L_n u - L_m u\|_F \leq \varepsilon$ при m, $n > \nu$ и $\|u\|_E = 1$. Като използваме пълнотата на F, заключаваме, че съществува изображение L, за което $\|L_n u - Lu\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Незабавно се проверява, че L се дефинира като линеен оператор върху E по формулата $Lu = L\left(\frac{u}{\|u\|}\right)\|u\|$, $u \neq 0$. Понеже $\|L_n - L_m\| \geq \|L_n\| - \|L_m\|$, заключаваме, че $\|L_n\| \leq K = \text{const}$. Следователно $\|Lu\|_F = \lim\limits_{n\to\infty} \|L_n u\|_F \leq K$ при $\|u\|_E = 1$, т.е. $L \in \mathcal{L}(E,F)$. Докажете сами, че $\|L_n - L\| \to 0$.

1.36. Да предположим, че E е банахово пространство и операторът $L \in \mathcal{L}(E,E)$ има норма, по-малка от единица, т. е. $\|L\| < 1$. Докажете тогава, че съществува обратният оператор $(I+L)^{-1} \in \mathcal{L}(E,E)$ (I е единичният оператор в E). Проверете също, че:

1) $(I+L)^{-1} = I - L + L^2 + \cdots + (-1)^n L^n + \cdots$ (ред на Нойман);
2) $\|(I+L)^{-1}\| \leq (1 - \|L\|)^{-1}$.

Упътване. Като използвате зад. 1.34, покажете, че редицата от парциалните суми $S_n = I - L + \cdots + (-1)^n L^n$ е фундаментална и следователно сходяща към някакъв оператор $S \in \mathcal{L}(E,E)$. След това установете, че $S(I+L) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(I+L) = I = \lim\limits_{n\to\infty}(I+L)S_n$.

В специалния случай, когато E е хилбертово пространство дефинираме спрегнат оператор A^* на оператора $A \in \mathcal{L}(E,E)$ чрез формулата $(Au,v) = (u,A^*v)$, $\forall u,\ v \in E$. Очевидно $(A^*)^* = A$. Доказва се (вж. [8]), че $A^* \in \mathcal{L}(E,E)$ и $\|A\| = \|A^*\|$.

§ 2. Интегрални уравнения

2.1. В $\mathbf{C}^n$ разгледайте линейните алгебрични системи $Ty = x$ и $T^*u = v$, където операторът T^* е спрегнат на оператора $T : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ спрямо скаларното произведение в $\mathbf{C}^n$. Покажете, че тогава са изпълнени релациите:

1) $\mathbf{C}^n = \text{Im}T \oplus \text{Ker}T^* (\text{Im}T = \{x : x = Ty$ за някое $y\})$;
2) $\mathbf{C}^n = \text{Im}T^* \oplus \text{Ker}T$;
3) $\dim \text{Ker}T = \dim \text{Ker}T^*$.

Като следствие получете следните условия за разрешимост на линейна алгебрична система в $\mathbf{C}^n$: Уравнението $x = Ty$ притежава решение y точно тогава, когато $x \perp \text{Ker}T^*$. Решението е единствено, когато $\mathrm{Ker}T = 0$. Най-сетне системата $T^*u = v$ притежава единствено решение $\forall v \in \mathbf{C}^n$ точно тогава, когато $\mathrm{Ker}T = \mathrm{Ker}T^* = 0$.

Упътване към т. 1). $\mathbf{C}^n = (\mathrm{Im}T)\oplus(\mathrm{Im}T)^{\perp}$, като по дефиниция $(\mathrm{Im}T)^{\perp} = \{f : f \perp \mathrm{Im}T\}$. Следователно $f \in (\mathrm{Im}T)^{\perp} \Leftrightarrow f \perp Tx$, $\forall x \in \mathbf{C}^n$, т.е. $f \in (\mathrm{Im}T)^{\perp} \Leftrightarrow (f, Tx) = 0$, $\forall x \in \mathbf{C}^n \Leftrightarrow (T^*f, x) = 0$, $\forall x \in \mathbf{C}^n$. Поради произволността на x заключаваме, че $T^*f = 0$ или $(\mathrm{Im}T)^{\perp} = \mathrm{Ker}T^*$.

2.2. Нека в ограничената област G е дефинирана непрекъснатата функция $K(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{N} f_i(x)g_i(y)$, $f_i \in C(\overline{G})$, $g_i \in C(\overline{G})$. Докажете тогава, че съществуват такова число $N_0 \leq N$ и две системи линейно независими в областта $\overline{G}$ функции $\{f_i'\}$, $\{g_i'\} \in C(\overline{G})$, щото

$$K(x,y) = \sum_{i=1}^{N_0} f_i'(x)g_i'(y).$$

2.3. В хилбертовото пространство H разгледайте оператора $Tx = \sum\limits_{i=1}^{N}(x, y_i)x_i$, където x_i, y_i, $1 \leq i \leq N$, са фиксирани елементи на H. Проверете, че

$$T^*y = \sum_{i=1}^{N}(y, x_i)y_i, \qquad \forall y \in H.$$

2.4. В хилбертовото пространство H е зададена следната двойка операторни уравнения:

$$(1)' \qquad x - \lambda Tx = f, \qquad \lambda \in \mathbf{C}^1;$$

$$(1)'' \qquad y - \overline{\lambda}T^*y = g.$$

Операторите T, T^* са дефинирани в предишната задача и освен това е предположено, че както системата $\{x_i\}$, така и системата $\{y_i\}$ се състоят от линейно независими вектори в H. Установете, че за уравненията (1) са валидни следните твърдения на Фредхолм:

1) $\dim \mathrm{Ker}(I - \lambda T) = \dim \mathrm{Ker}(I - \overline{\lambda}T^*) < \infty$;

2) уравнението $(1)'$ е разрешимо точно когато $f \perp \mathrm{Ker}(I - \overline{\lambda}T^*)$;

3) $(1)'$, $(1)''$ са разрешими при произволна дясна страна тогава и само тогава, когато $\mathrm{Ker}(I - \lambda T) = 0$.

Упътване. Щом x, y удовлетворяват съответно $(1)'$, $(1)''$, то

$$(2)' \qquad x = \lambda \sum_{i=1}^{N} c_i x_i + f, \ c_i = (x, y_i);$$

$$(2)'' \qquad y = \overline{\lambda} \sum_{i=1}^{N} d_i y_i + g, \ d_i = (y, x_i).$$

Като заместим израза за x от $(2)'$ в равенството

$$x = \lambda \sum_{i=1}^{N} (x, y_i) x_i + f,$$

намираме

$$\sum_{i=1}^{N} c_i x_i - \sum_{i=1}^{N} \left[\lambda \sum_{j=1}^{N} c_j (x_j, y_i) + (f, y_i) \right] x_i = 0,$$

т. е.

$$(3)' \qquad c_i - \lambda \sum_{j=1}^{N} c_j (x_j, y_i) = (f, y_i), \ 1 \leq i \leq N.$$

По същия начин заключаваме, че

$$(4)' \qquad d_i - \overline{\lambda} \sum_{j=1}^{N} \overline{(x_i, y_j)} d_j = (g, x_i), \ 1 \leq i \leq N.$$

Покажете, че операторното уравнение $(1)'$ и линейната алгебрична система $(3)'$ са еквивалентни. За системите $(3)'$, $(4)'$

приложете резултатите от зад. 2.1, съгласно които $(3)'$ е разрешима точно когато $\sum_{i=1}^{N}(f, y_i)\overline{q}_i = 0$, а $q = (q_1, \dots, q_N)$ е кое да е решение на хомогенната система $(4)'$.

Преформулирайте този резултат за разрешимост чрез разлагане на H в дясна ортогонална сума, както в т. 1), 2), 3) на зад. 2.1. Използвайте факта, че $\mathrm{Im}(I - \lambda T) = \mathrm{Ker}(I - \overline{\lambda}T^*)^{\perp}$.

2.5. Разгледайте уравнението $x - \lambda Tx = f$ в хилбертовото пространство H, където T е операторът, дефиниран в предишната задача. Докажете, че $\mathrm{Ker}(I - \lambda T) \neq 0$ за най-много краен брой стойности на $\lambda \in \mathbf{C}^1$.

Забележка. Числата λ, за които операторното уравнение $x = \lambda Tx$ има нетривиално решение, наричаме *характеристични стойности* на T, а съответните ненулеви решения — *собствени функции*.

2.6. В ограничената област G е зададено интегралното уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_G K(x, y)\varphi(y)dy + f(x),\ \lambda \in \mathbf{C}^1,$$

където $K(x, y) = \sum_{i=1}^{N} f_i(x)g_i(y)$; $f,\ f_i,\ g_i \in C(\overline{G})$ и системите реални функции $\{f_i\}$, $\{g_i\}$ са линейно независими. Намерете всички решения на уравнението в класа на непрекъснатите функции $C(\overline{G})$. Докажете, че твърденията на Фредхолм са валидни и в този случай. Формулирайте условията за разрешимост в зависимост от поведението на детерминантата

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \dots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1 - \lambda a_{22} & \dots & -\lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \dots & 1 - \lambda a_{nn} \end{vmatrix},$$

където $a_{ij} = \int_G g_i(x)f_j(x)dx$.

Упътване. Понеже $C(\overline{G})$ не е хилбертово пространство, потопете $C(\overline{G})$ в хилбертовото пространство $L_2(G)$ със скаларно произведение $(f, g) = \int_G f(x)\overline{g(x)}dx$. След това използвайте зад. 2.4 и обстоятелството, че решенията на уравненията (1)′ и (1)″ (ако съществуват, разбира се) са от класа $C(\overline{G})$, щом f, f_i, $g_i \in C(\overline{G})$.

Функцията $K(x,y)$ от зад. 2.6 се нарича *изродено ядро*.

2.7. Решете уравнението

$$\varphi(x) = -\lambda \int_0^1 (x^2y + xy^2)\varphi(y)dy + f(x), \; f \in C[0,1].$$

Решение. Означаваме $C_2 = \int_0^1 y^2\varphi(y)dy$, $C_1 = \int_0^1 y\varphi(y)dy$ и намираме $\varphi(x) = -\lambda C_1 x^2 - \lambda C_2 x + f(x)$.

Съгласно начина, описан при решението на зад. 2.4, заместваме израза за φ в уравнението и въз основа на линейната независимост на функциите x и x^2 получаваме

$$C_1 = -\frac{\lambda}{4}C_1 - \frac{\lambda}{3}C_2 + d_1, \; d_1 = \int_0^1 yf(y)dy,$$

$$C_2 = -\frac{\lambda}{5}C_1 - \frac{\lambda}{4}C_2 + d_2, \; d_2 = \int_0^1 y^2 f(y)dy,$$

т. е.

$$(5) \qquad \left| \begin{array}{l} C_1\left(1 + \frac{\lambda}{4}\right) + \frac{\lambda}{3}C_2 = d_1 \\ \frac{\lambda}{5}C_1 + \left(1 + \frac{\lambda}{4}\right)C_2 = d_2. \end{array} \right.$$

Понеже

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\lambda}{4} & \frac{\lambda}{3} \\ \frac{\lambda}{5} & 1 + \frac{\lambda}{4} \end{vmatrix}$$

се анулира при $\lambda_{1,2} = 60 \pm 16\sqrt{15}$, то линейната система (5) има единствено решение точно когато $\lambda \neq \lambda_{1,2}$. Следователно при $\lambda \neq \lambda_{1,2}$ интегралното уравнение е разрешимо за всяко f и неговото решение се дава от $\varphi(x) = -\lambda C_1 x^2 - \lambda C_2 x + f(x)$, като числата C_1, C_2 удовлетворяват (5). Нека сега $\lambda = \lambda_1$, т.е. $\Delta(\lambda_1) = 0$. В този случай системата (5) е разрешима тогава и само тогава, когато

$$\frac{1+\frac{\lambda_1}{4}}{\frac{\lambda_1}{5}} = \frac{\frac{\lambda_1}{3}}{1+\frac{\lambda_1}{4}} = \frac{d_1}{d_2}.$$

Така заключаваме, че разглежданото интегрално уравнение има решение точно за онези непрекъснати функции f, за които

$$\int_0^1 yf(y)dy = \frac{5}{\sqrt{15}} \int_0^1 y^2 f(y)dy.$$

Да забележим, че при $\lambda = \lambda_1$ хомогенното интегрално уравнение има решение $\varphi_0(x) = C\left[\left(1+\frac{\lambda_1}{4}\right)x^2 - \frac{\lambda_1}{5}x\right] = \mathrm{const}\left(x - \frac{5}{\sqrt{15}}x^2\right)$. Тъй като съгласно зад. 2.3 спрегнатият оператор T^* на оператора $T\varphi = \int_0^1 (x^2y + xy^2)\varphi(y)dy$ съвпада с T, то $x - \frac{5}{\sqrt{15}}x^2 \in \mathrm{Ker}(I + \lambda_1 T^*)$. Тогава условието 2) на Фредхолм за разрешимост от зад. 2.4 добива вида

$$\int_0^1 \left(y - \frac{5}{\sqrt{15}}y^2\right) f(y)dy = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 yf(y)dy = \frac{5}{\sqrt{15}} \int_0^1 y^2 f(y)dy.$$

Този резултат изцяло се съгласува с вече получения от нас.

2.8. Решете следните интегрални уравнения:

1. $\varphi(x) = x + \lambda \int_0^1 (x-1)\varphi(y)dy.$
2. $\varphi(x) = x + \lambda \int_0^1 (x-y)\varphi(y)dy.$
3. $\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \sin x \sin y \varphi(y)dy + f(x),\ f \in C[0,2\pi].$
4. $\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \cos(x-y)\varphi(y)dy + \cos 3x.$
5. $\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x\sin y + y^2 \sin x + \cos x \sin y)\ \varphi(y)dy + x,\ \lambda \in \mathbf{R}^1.$

Отг. 1. $\varphi(x) = \dfrac{2x(1+\lambda)-\lambda}{\lambda+2}$ при $\lambda \neq -2$; при $\lambda = -2$ няма решение.

3. $\varphi(x) = f(x) + \dfrac{\lambda \sin x}{1-\lambda\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(y) \sin y dy$ при $\lambda \neq \frac{1}{\pi}$; при $\lambda = \frac{1}{\pi}$ и $\int\limits_0^{2\pi} f(y) \sin y dy \neq 0$ няма решения; при $\lambda = \frac{1}{\pi}$ и $\int\limits_0^{2\pi} f(y) \sin y dy = 0$ има безбройно много решения: $\varphi(x) = f(x) + C \sin x$, $C = \text{const}$.

4. Упътване. $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$. Тогава $\varphi(x) = \cos 3x$ при $\lambda \neq \frac{1}{\pi}$; $\varphi(x) = \cos 3x + C_1 \cos x + C_2 \sin x$, където C_1 и C_2 са произволни константи, ако $\lambda = \frac{1}{\pi}$.

5. $\varphi(x) = \dfrac{2\lambda\pi}{1+2\lambda^2\pi^2}(\lambda\pi x - 4\lambda\pi \sin x + \cos x) + x$.

2.9. Намерете решенията на интегралното уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^{\pi} K(x,y)\varphi(y)dy + f(x)$$

в следните случаи:

1. $K(x,y) = \sin(2x+y)$, $f(x) = \pi - 2x$.
2. $K(x,y) = \cos^2(x-y)$, $f(x) = 1 + \cos 4x$.
3. $K(x,y) = \sin x + x \cos y$, $f(x) = \sin x$.

Отг. 1. $\varphi(x) = \dfrac{12\lambda \sin 2x}{3-4\lambda} + \pi - 2x$ при $\lambda \neq \frac{3}{4}$, $\lambda \neq -\frac{3}{2}$; $\varphi = \pi - 2x - 2\sin 2x + C \cos 2x$, C — произволна константа при $\lambda = -\frac{3}{2}$; при $\lambda = \frac{3}{4}$ няма решение.

2. Упътване. $\cos^2(x-y) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x \cos 2y + \sin 2x \sin 2y)$.

2.10. Решете уравнението

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} K(x,y)\varphi(y)dy + f(x)$$

за следните стойности на f и K:

1. $K = xy + x^2y^2$, $f = x^2 + x^4$;
2. $K = x^2 - xy$, $f = x + x^2$;
3. $K = x^{2/3} + y^{2/3}$, $f = 1 - x^2$.

Отг. 1. $\varphi(x) = \frac{5(7+2\lambda)}{7(5-2\lambda)}x^2 + x^4$ при $\lambda \neq \frac{3}{2}$, $\lambda \neq \frac{5}{2}$; $\varphi(x) = Cx + \frac{25}{7}x^2 + x^4$, където C е произволна константа при $\lambda = \frac{3}{2}$; при $\lambda = \frac{5}{2}$ няма решение.

2.11. Намерете за кои стойности на параметъра λ интегралното уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{0}^{2\pi} \cos(2x - y)\varphi(y)dy + f(x)$$

е разрешимо за всяка функция $f \in C[0, 2\pi]$.

Решение. Съгласно зад. 2.5 — 2.6 разглежданото уравнение има решение за всяко f точно когато

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11} & -\lambda a_{12} \\ -\lambda a_{21} & 1 - \lambda a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

където $a_{11} = \int_{0}^{2\pi} \cos 2x \cos x dx = 0$, $a_{12} = \int_{0}^{2\pi} \sin 2x \cos x dx = 0$,

$$a_{21} = \int_{0}^{2\pi} \cos 2x \sin x dx = 0 \text{ и } a_{22} = \int_{0}^{2\pi} \sin 2x \sin x dx = 0.$$

Следователно $\Delta(\lambda) = 1$ и уравнението е разрешимо за всяко f.

Забележка. Горният резултат показва, че операторът от зад. 2.11 няма характеристични стойности и собствени функции.

Въпрос. Притежава ли операторът $T\varphi = \int\limits_0^1 (3x-2)\varphi(y)dy$ характеристични стойности?

2.12. Определете характеристичните стойности и собствените функции на интегралното уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^\pi K(x,y)\varphi(y)dy,$$

където

1. $K(x,y) = \cos^2 x \cos 2y + \cos 3x \cos^3 y;$
2. $K(x,y) = \cos(x+y);$
3. $K(x,y) = \sin(4x+y).$

Отг. 1. $\lambda_1 = \frac{4}{\pi}$, $\varphi_1 = \cos^2 x$; $\lambda_2 = \frac{8}{\pi}$, $\varphi_2 = \cos 3x$;

2. $\lambda_1 = -\frac{2}{\pi}$, $\varphi_1 = \sin x$; $\lambda_2 = \frac{2}{\pi}$, $\varphi_2 = \cos x$.

2.13. Намерете собствените функции и характеристичните числа на уравнението

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_{-1}^1 K(x,y)\varphi(y)dy$$

при условие, че:

1) $K = 3x + xy - 5x^2y^2;$
2) $K = 3xy + 5x^2y^2;$
3) $K = 1 + xy;$
4) $K = 5xy^3 + 4x^2y.$

Отг. 1) $\lambda_1 = 3/2$, $\varphi_1 = x$; $\lambda_2 = -1/2$, $\varphi_2 = 3x - 4x^2$;

4) $\lambda = 1/2$, $\varphi = x + 4/3x^2$.

2.14. Определете онези стойности на параметрите a, b, за които е разрешимо уравнението

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^1 xy^2\varphi(y)dy + ax + b.$$

Решение. Ако означим $T\varphi = \int\limits_0^1 xy^2\varphi(y)dy$, то съгласно зад. 2.3 $T^*\psi = \int\limits_0^1 x^2y\psi(y)dy$. Понеже $\lambda = 4$ е единствената характеристична стойност на оператора T^* (проверете!) и $\psi_0(x) = x^2$ е съответната му собствена функция, то условието на Фредхолм за разрешимост 2) от зад. 2.4 $(ax+b)\perp\mathrm{Ker}(I - 4T^*)$ добива вида $\int\limits_0^1(ax+b)x^2dx = 0 \Leftrightarrow 3a + 4b = 0$. И тъй при $\lambda = 4$ разглежданото уравнение е разрешимо точно когато $3a + 4b = 0$. При $\lambda \neq 4$ уравнението има решение за произволни a и b.

2.15. При кои стойности на параметрите a, b уравнението

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^1 K(x,y)\varphi(y)dy + ax^2 + bx - 2$$

притежава решение? Разгледайте случаите, когато:

1) $K(x,y) = xy - \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{3}$, $\lambda = 12$;
2) $K(x,y) = xy$, $\forall\lambda$;
3) $K(x,y) = x + y$, $\forall\lambda$.

2.16. Намерете всички стойности на реалния параметър a, за които уравнението

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^1 (ax - y)\varphi(y)dy$$

не притежава реални характеристични стойности.

Упътване. $\Delta(\lambda) = \frac{1}{12}\lambda^2 a + (1-a)\frac{\lambda}{2} + 1$.

Отг. $\frac{1}{3} < a < 3$.

В следващите няколко задачи ще потърсим характеристичните стойности и собствените функции на някои интегрални уравнения с неизродено ядро K.

2.17. Определете характеристичните стойности и собствените функции на интегралните оператори

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 K(x,y)\varphi(y)dy, \ \ \varphi \in C[0,1],$$

когато:

$$1)\ K(x,y) = \begin{cases} x, \ 0 \le x \le y \le 1, \\ y, \ 0 \le y \le x \le 1. \end{cases}$$

$$2)\ K(x,y) = \begin{cases} x(1-y), \ 0 \le x \le y \le 1, \\ y(1-x), \ 0 \le y \le x \le 1. \end{cases}$$

$$3)\ K(x,y) = \begin{cases} (x+1)y, \ 0 \le x \le y \le 1, \\ x(1+y), \ 0 \le y \le x \le 1. \end{cases}$$

Решение на 1). Очевидно

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x y\varphi(y)dy + \lambda x \int_x^1 \varphi(y)dy$$

и следователно $\varphi(0) = 0$, $\varphi \in C^1[0,1]$. Като диференцираме, получаваме

$$\varphi'(x) = \lambda \int_x^1 \varphi(y)dy, \qquad \text{т.е. } \varphi' \in C^1[0,1] \qquad \text{и } \varphi'(1) = 0.$$

И така

$$(6) \qquad \varphi''(x) = -\lambda\varphi(x), \ \varphi(0) = \varphi'(1) = 0.$$

Както знаем от теорията на обикновените диференциални уравнения, задачата (6) има нетривиални решения φ_n точно тогава, когато

$$\lambda_n = \frac{\pi^2}{4}(2n+1)^2, \ n = 0, 1, 2 \dots.$$

В този случай $\varphi_n = \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi x\right)$.

Проверете, че φ_n са собствени функции на изходното уравнение.

Отг. 2) $\lambda_n = n^2\pi^2$, $\varphi_n = \sin n\pi x$, $n = 1, \ldots$

Упътване за 3). Покажете, че $\varphi'' - \lambda\varphi = 0$, $\varphi(0) = \varphi'(0)$, $\varphi(1) = \varphi'(1)$. Тогава $\lambda_0 = 1$, $\varphi_0 = e^x$; $\lambda_n = -n^2\pi^2$, $n = 1, \ldots$, и $\varphi_n = \sin n\pi x + n\pi \cos n\pi x$.

2.18. Намерете характеристичните числа и собствените функции на уравнението

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^\pi K(x,y)\varphi(y)dy,$$

където

$$K = \begin{cases} \cos x \sin y, & 0 \leq x \leq y, \\ \cos y \sin x, & y \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Отг. $\lambda_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2$, $\varphi_n = \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x$, $n = 0, 1, \ldots$.

2.19. Да разгледаме функцията $g(x)$, $x \in \mathbf{R}^1$, която е дефинирана като $|x|$ при $|x| \leq \pi$ и продължена периодично с период 2π върху числовата ос. Установете, че $\varphi_0 \equiv 1$, $\lambda_0 = \frac{1}{\pi^2}$, $\varphi_n^{(1)}(x) = \cos nx$, $\varphi_n^{(2)}(x) = \sin nx$ и $\lambda_n = (\pi a_n)^{-1}$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx dx$, $n = 1, \ldots$, са съответно собствените функции и характеристичните числа на оператора

$$T\varphi = \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(x-y)\varphi(y)dy.$$

Въпрос: Защо не могат да бъдат изродени ядрата на уравненията от зад. 2.17 — т. 1), 2), 3)?

2.20. Нека $K : H \to H$ е ограничен линеен оператор в хилбертовото пространство H. При предположение, че K е самоспрегнат, т.е. $K = K^*$, установете, че:

1. Характеристичните стойности на K са реални.

2. Собствените функции, съответстващи на различни характеристични стойности, са ортогонални, т.е. ако $\varphi_1 = \lambda_1 K\varphi_1$, $\varphi_1 \neq 0$, $\varphi_2 = \lambda_2 K\varphi_2$, $\varphi_2 \neq 0$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $(\varphi_1, \varphi_2) = 0$.

Упътване. $\lambda K x = x \Rightarrow \lambda(Kx, x) = \|x\|^2$.

Да напомним, че един линеен оператор $K : H \to H$ се нарича компактен, ако преобразува ограничените множества в компактни. Лесно се проверява, че всеки компактен оператор е ограничен. Числото λ ще наричаме *собствена стойност* на K, ако $\mathrm{Ker}(K - \lambda I) \neq 0$. Елементите на ядрото ще наричаме пак собствени функции (вектори). В [8] е доказано, че ако K е компактен оператор, той притежава изброимо множество от собствени стойности (което не е изключено да бъде празно), чиято единствена точка на сгъстяване (ако съществува) е нулата и $\dim \mathrm{Ker}(K - \lambda I) < \infty$, $\lambda \neq 0$. Най-сетне в [11] е показано, че всеки компактен самоспрегнат оператор има поне една собствена стойност.

2.21. Проверете, че линейната обвивка на множеството от собствените вектори на компактен самоспрегнат оператор $K : H \to H$ е навсякъде гъсто в хилбертовото пространство H. Установете също, че $\mathrm{Ker}(K - \lambda_1 I) \perp \mathrm{Ker}(K - \lambda_2 I)$ при $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Упътване. Означете с $M = \{x \in H,\ x \neq 0,\ \lambda \in \mathbf{R}^1 : Kx = \lambda x\}$ и с U затворената линейна обвивка на M, т.е. $U = [M]^{\wedge T}$. Съгласно теоремата за ортогоналната проекция $H = U \oplus U^\perp$. Убедете се, че $K(U) \subset U$ и $K(U^\perp) \subset U^\perp$. След това разгледайте рестрикцията на оператора K върху хилбертовото пространство $U^\perp$ и се възползвайте от факта, че $K|_{U^\perp}$ е компактен самоспрегнат оператор.

2.22.* Нека $K : H \to H$ е компактен самоспрегнат оператор в сепарабелното хилбертово пространство H. Докажете, че H притежава ортонормирана база, която се състои от собствени функции, отговарящи на собствените стойности на K.

Упътване. Ако $\lambda \neq 0$ е собствена стойност на K, то $\dim \mathrm{Ker}(K - \lambda I) < \infty$ и следователно можем да ортонормираме линейното подпространство $\mathrm{Ker}(K - \lambda I)$.

2.23.* Намерете необходимо и достатъчно условие за разрешимост на операторното уравнение $\varphi = \lambda K \varphi + f$ в сепарабелното хилбертово пространство H, където $K : H \to H$ е компактен самоспрегнат оператор.

Решение. Без ограничение на общността ще считаме, че $\lambda \neq 0$. Следователно $\left(\frac{1}{\lambda} I - K\right) = \frac{f}{\lambda}$. Означавайки $\mu = \frac{1}{\lambda}$, виждаме, че са възможни два случая: 1) $\mu = \frac{1}{\lambda}$ е собствена стойност на K; 2) μ не е собствена стойност на K. Въз основа на зад. 2.22* заключаваме, че съществуват такива числа $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n = \left(\frac{f}{\lambda}, \psi_n\right)$, че $f/\lambda = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n + \psi_0$. (В последното равенство $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\lambda_n \neq 0$, са собствените стойности, а $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — съответните собствени функции на K, $(\psi_i, \psi_j) = \delta_{ij}$ и $\psi_0 \in \mathrm{Ker}K$, $(\psi_0, \psi_i) = 0$, $i \geq 1$.) Да отбележим, че на собствената стойност $\lambda_n \neq 0$ може да отговарят повече от една, но най-много краен брой собствени функции от редицата $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Неизвестната φ ще потърсим от вида $\varphi = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \psi_n + \varphi_0$, $\varphi_0 \in \mathrm{Ker}K$. Понеже съгласно зад. 2.21 $\mathrm{Ker}K \perp \mathrm{Ker}(\lambda I - K)$, $\lambda \neq 0$, то $x_n = (\varphi, \psi_n)$. Така намираме

$$\varphi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \psi_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} x_n K \psi_n + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n + \lambda \psi_0$$

$$= \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n (\lambda_n x_n + a_n) + \lambda \psi_0.$$

Двете развития по базата от собствени функции са идентични точно когато $x_n \left(\frac{1}{\lambda} - \lambda_n \right) = a_n$, $n \geq 1$; $\varphi_0 = \lambda \psi_0$. Нека $\mu = \frac{1}{\lambda}$ не е собствена стойност на K. Тогава $x_n = \frac{a_n}{\mu - \lambda_n}$, $n \geq 1$. Когато пък $\mu = \frac{1}{\lambda}$ е собствена стойност на K, т.е. $\mu = \lambda_{n_0}$, нашето уравнение има решение тогава и само тогава, когато f е ортогонална на собствените функции, отговарящи на собствената стойност $\mu = \lambda_{n_0}$ (те са краен брой). В последния случай φ е определена с точност до $\mathrm{Ker}(\lambda_{n_0} I - K)$. Специално, ако $\mu \neq \lambda_n$, имаме

$$\varphi = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, \psi_n)}{\mu_n - \lambda} \psi_n + f, \tag{7}$$

където $\mu_n = \frac{1}{\lambda_n}$ и μ_n описва множеството от характеристичните стойности на K, а ψ_n са съответните ортонормирани собствени функции: $K\psi_n = \lambda_n \psi_n \Leftrightarrow \psi_n = \mu_n K \psi_n$. Представянето (7) се нарича ***формула на Шмит***.

Забележка. Да разгледаме интегралното уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy + f(x), \tag{8}$$

в което $f \in C[a,b]$, $K \in C([a,b]\times[a,b])$ и $K(x,y)=\overline{K(y,x)}$. При предположение, че λ не е характеристична стойност на оператора K, в [5] се доказва, че (8) притежава единствено непрекъснато решение φ, като φ се представя чрез равномерно сходящия в $[a,b]$ ред (7). (Ако K или f бяха от $L_2[a,b]$, редът щеше да бъде сходящ само в L_2.)

2.24. В $C[a,b]$ решете следните интегрални уравнения:

1. $\varphi(x)=\lambda\int\limits_0^1 K(x,y)\varphi(y)dy+x,$

$$K(x,y)=\begin{cases} x(y-1), & 0\le x\le y,\\ y(x-1), & y\le x\le 1.\end{cases}$$

2. $\varphi(x)=\lambda\int\limits_0^1 K(x,y)\varphi(y)dy+f(x),$

$$K(x,y)=\begin{cases} x, & 0\le x\le y,\\ y, & 0\le y\le x\le 1.\end{cases}$$

3. $\varphi(x)=\lambda\int\limits_0^1 K(x,y)\varphi(y)dy+\cos\pi x,$

$$K(x,y)=\begin{cases} (x+1)y, & 0\le x\le y,\\ (y+1)x, & y\le x\le 1.\end{cases}$$

4. $\varphi(x)=\lambda\int\limits_0^\pi K(x,y)\varphi(y)dy+1,$

$$K(x,y)=\begin{cases} \cos x\sin y, & 0\le x\le y,\\ \cos y\sin x, & y\le x\le \pi.\end{cases}$$

Решение на т. 1. Съгласно т. 2) от зад. 2.17 характеристичните стойности на уравнението са $\mu_n=-n^2\pi^2$, а ортонормираните собствени функции са $\psi_n=1/\sqrt{0,5}\cdot\sin n\pi x$, $n=1,2,\ldots$. Да допуснем, че $\lambda\neq\mu_n$, $\forall n$. Понеже

$$(x,\psi_n)=\frac{1}{\sqrt{0,5}}\int\limits_0^1 x\sin n\pi x dx=\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi\sqrt{0,5}},$$

то по формула (7)

$$\varphi(x) = x + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n \sin n\pi x}{n\pi(\lambda + n^2\pi^2)}.$$

Да предположим, че $\lambda = -n_0^2\pi^2$, $n_0 \geq 1$. Зад. 2.23* ни учи, че условието за разрешимост има вида $(x, \psi_{n_0}) = 0$. Понеже $(x, \psi_{n_0}) = (-1)^{n_0+1}/(\pi\sqrt{0,5}n_0) \neq 0$, интегралното уравнение не притежава решение в този случай.

За да се запознаем с някои методи за решаване на интегрални уравнения в L_2, които не са задължени да бъдат самоспрегнати, ще приведем няколко спомагателни задачи от анализа.

2.25. Нека G е някаква област в $\mathbf{R}^n$ и $K(x,y) \in L_2(G \times G)$. Докажете, че интегралният оператор $(Ku)(x) = \int\limits_G K(x,y)u(y)dy$ е непрекъснат от $L_2(G) \to L_2(G)$. Покажете, че

$$\|K\|^2 \leq \int\limits_G \int\limits_G |K(x,y)|^2 dxdy.$$

Решение. Съгласно неравенството на Коши — Шварц

$$|(Ku)(x)|^2 \leq \int\limits_G |K(x,y)|^2 dy \cdot \int\limits_G |u(y)|^2 dy,$$

което ни учи, че

$$\|Ku\|_{L_2}^2 \leq \int\limits_G \int\limits_G |K(x,y)|^2 dxdy \cdot \|u\|_{L_2}^2 \left(\|u\|_{L_2}^2 = \int\limits_G |u|^2 dx \right).$$

2.26. Да предположим, че G е ограничена област в $\mathbf{R}^n$ и $K(x,y) \in C(\overline{G} \times \overline{G})$. Покажете, че интегралният оператор K, дефиниран в зад. 2.25, е непрекъснат от $L_2(G) \to C(\overline{G})$ (нормата в $C(\overline{G})$ е: $\|u\|_C = \max\limits_{\overline{G}} |u(x)|$). Убедете се, че

$$\|K\| \leq \max_{\overline{G}\times\overline{G}} |K(x,y)| (\text{mes } G)^{1/2}.$$

Упътване. Непрекъснатостта на $(Ku)(x)$ докажете така: $Ku(x+h) = \int\limits_G K(x+h,y)u(y)dy$. Понеже $L_2(G) \subset L_1(G)$ (G е ограничена!), $K(x+h,y)u(y) \to K(x,y)$ и $|K(x+h,y)|\,|u(y)| \leq \text{const}|u(y)|$, то за интеграла може да бъде приложена теоремата на Лебег за граничен преход.

2.27. Намерете спрегнатия оператор на интегралния оператор, определен в зад. 2.25.

Решение. Нека $v, u \in L_2(G)$. След неколкократно прилагане на теоремата на Фубини намираме

$$(Ku, v) = \int\limits_G \left[\int\limits_G K(x,y)u(y)dy \right] \overline{v(x)}dx$$

$$= \int\limits_G \int\limits_G K(x,y)u(y)\overline{v(x)}dxdy = \int\limits_G u(y) \left[\int\limits_G K(x,y)\overline{v(x)}dx \right] dy$$

$$= \int\limits_G u(y) \left[\overline{\int\limits_G \overline{K(x,y)}v(x)dx} \right] dy = (u, K^* v).$$

Следователно $(K^*v)(x) = \int\limits_G \overline{K(y,x)}v(y)dy$, т.е. операторът K^* има за ядро функцията $\overline{K(y,x)}$.

Читателят, който е недостатъчно фамилиарен с лебеговата теория, може да счита, че ядрото K и функциите u, v са непрекъснати.

2.28. Нека K е операторът, дефиниран в зад. 2.25. Установете, че степените на $K : K^2 = K \circ K, \ldots, K^p = K \circ K^{p-1}$ са интегрални оператори с ядра $K_p(x,y) \in L_2(G \times G)$, които се дават от следната рекурентна формула:

$$K_p(x,y) = \int\limits_G K(x,z)K_{p-1}(z,y)dz, \;\; p = 2, 3, \ldots. \tag{9}$$

Упътване. Послужете си с теоремата на Фубини и неравенството на Коши — Шварц при изследването на

$$(K^2u)(x) = K(Ku)(x) = \int\limits_G K(x,z)(Ku)(z)dz$$

$$= \int\limits_G K(x,z)\left[\int\limits_G K(z,y)u(y)dy\right]dz = \int\limits_G \int\limits_G K(x,z)K(z,y)u(y)dydz$$

$$= \int\limits_G \left[\int\limits_G K(x,z)K(z,y)dz\right]u(y)dy,$$

$$K_2 \in L_2(G \times G) \text{ (защо?)}.$$

След това разсъждавайте индуктивно.

Забележка. Ако ядрото $K(x,y)$ е непрекъснато, операторът $K : C(\overline{G}) \to C(\overline{G})$ е също непрекъснат. Тогава K^p е интегрален оператор, чието непрекъснато ядро се дава от (9).

2.29. С помощта на реда на Нойман (вж. зад. 1.36) решете следните интегрални уравнения в L_2 или C:

1. $\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^1 e^{x-y}\varphi(y)dy + f(x)$.
2. $\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^1 \frac{\cos x}{cos y}\varphi(y)dy + f(x)$.
3. $\varphi(x) = \lambda \int\limits_a^b \frac{K(x)}{K(y)}\varphi(y)dy + f(x)$, $K \in C[a,b]$, $K \neq 0$.

Решение на т. 1. Запишете уравнението в операторния вид $(I - \lambda K)\varphi = f$, $K : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ или $K : C[0,1] \to C[0,1]$. Съгласно зад. 1.36 за всички достатъчно малки $|\lambda|$ съществува ограниченият обратен оператор $(I - \lambda K)^{-1} = I + \lambda K + \lambda^2 K^2 + \cdots$. Зад. 2.28 ни учи, че K^2 е интегрален оператор с ядро e^{x-y}, откъдето следва, че K^p, $p \geq 2$, е интегрален оператор със същото ядро. Следователно $K^p \equiv K$ и $(I - \lambda K)^{-1} = I + \frac{\lambda}{1-\lambda}K$ при $|\lambda| < 1$. Оттук

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{\lambda}{1-\lambda}\int\limits_0^1 e^{x-y}f(y)dy.$$

2.30. Като използвате реда на Нойман, решете в L_2 интегралните уравнения:

1. $\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^{2\pi} \sin(x - 2y)\varphi(y)dy + f(x).$

2. $\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^{2\pi} (\sin x \cos y + \cos 2x \sin 2y)\varphi(y)dy + f(x).$

3. $\varphi(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,y)\varphi(y)dy + f(x)$, където $K \in L_2$

   и $\int\limits_a^b K(x,z)K(z,y)dz = 0.$

4. $\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^1 xy\varphi(y)dy + f(x).$

5. $\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^1 (x - y)\varphi(y)dy + f(x).$

6. $\varphi(x) = \lambda \int\limits_{-1}^1 x^2y^2\varphi(y)dy + f(x).$

Отг. 1. $\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_0^{2\pi} \sin(x - 2y)f(y)dy, \ \forall\lambda.$

4. $\varphi = f + \frac{\lambda}{3-\lambda} \int\limits_0^1 3xyf(y)dy, \ |\lambda| < 3.$

5. Установете индуктивно, че $K_{2n-1}(x,y) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{12^{n-1}}(x - y),$

$$K_{2n}(x,y) = \frac{(-1)^{n-1}}{12^{n-1}} \left(\frac{x+y}{2} - xy - 1/3 \right), \ n \geq 1.$$

6. $\varphi = f + \dfrac{5\lambda}{5 - 2\lambda} \int\limits_{-1}^1 x^2y^2f(y)dy, \ |\lambda| < 5/2.$

Един клас интегрални уравнения, които намират широко приложение не само в математиката, но и във физиката и техниката, са т. нар. *уравнения на Волтера*. По-нататък ще бъдат изложени елементи от тяхната теория, а също и редица задачи.

2.31. Нека функцията $K(x,y)$ е непрекъсната в квадрата $0 \leq x, \ y \leq a, \ a > 0$. Докажете, че асоциираният с нея интегрален оператор на Волтера

$$(K\boldsymbol{u})(\boldsymbol{x}) = \int_0^{x} K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{u}(y)dy$$

е непрекъснат както от $L_2[0,a] \to L_2[0,a]$, така също и от $C[0,a] \to C[0,a]$.

2.32. Намерете спрегнатия оператор на оператора на Волтера $K : L_2[0,a] \to L_2[0,a]$, ако ядрото $K(x,y)$ е непрекъснато.

Решение. Според дефиницията на спрегнат оператор в L_2 имаме, че за всяка двойка функции u, $v \in L_2[0,a]$

$$(Ku,v) = \int_0^a \left[\int_0^x K(x,y)u(y)dy\right]\overline{v(x)}dx$$

$$= \int\int_{\Delta} K(x,y)u(y)\overline{v(x)}dxdy,$$

където $\Delta = \{(x,y) : 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq x\}$. Понеже триъгълникът Δ може да се представи още като $\Delta = \{(x,y) : 0 \leq y \leq a, y \leq x \leq a\}$, то

$$(Ku,v) = \int_0^a u(y)\left[\int_y^a K(x,y)\overline{v(x)}dx\right]dy$$

$$= \overline{\int_0^a u\left[\int_y^a \overline{K(x,y)}v(x)dx\right]}dy = (u,K^*v).$$

Следователно

$$(K^*v)(x) = \int_x^a \overline{K(y,x)}v(y)dy.$$

Обосновете въз основа на теоремата на Фубини законността на извършените пресмятания!

2.33. Да предположим, че K е интегрален оператор на Волтера с непрекъснато ядро, който изобразява $C[0,a]$ в себе си. Установете, че K^p, $p \geq 2$ (т.е. произволна степен на оператора K), е пак интегрален оператор на Волтера, чието ядро $K_p(x,y)$ се задава с рекурентната формула

$$K_p(x,y) = \int\limits_y^x K(x,z)K_{p-1}(z,y)dz,\ p = 2,3,\ldots \tag{10}$$

Упътване. Използвайте решението на предишната задача.

2.34. Нека K е операторът на Волтера от зад. 2.33. Докажете, че съществува такова естествено число p, че K^p да бъде свиващ оператор от $C[0,a] \to C[0,a]$. Като следствие покажете, че уравнението $(I - \lambda K)\varphi = f$, т. е.

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^x K(x,y)\varphi(y)dy + f(x), \tag{11}$$

е еднозначно разрешимо в $C[0,a]$ за всяко λ.

Упътване. Означете $M = \max|K(x,y)|$, $(x,y) \in [0,a] \times [0,a]$. Тогава $|(Ku)(x)| \le |\lambda|Mx\|u\|_C$. Следователно $|K^2u(x)| \le |\lambda|^2\ M^2\frac{x^2}{2!}\|u\|_C(K^2u = K(Ku))$. По индуктивен път се убедете, че $|K^pu(x)| = |K(K^{p-1}u)(x)| \le |\lambda|^p\ M^p\frac{x^p}{p!}\|u\|_C$. И така $\|K^pu\|_C = \max\limits_{[0,a]}|K^pu(x)| \le |\lambda|^p\ M^p\frac{a^p}{p!}\|u\|_C$, $p = 1,2,\ldots$ Сега използвайте зад. 1.7.

2.35.* Ако K е оператор на Волтера с ядро $K(x,y) \in C([0,a] \times [0,a])$ и $K : L_2[0,a] \to L_2[0,a]$, проверете, че $\mathrm{Ker}(I - \lambda K) = 0$ в $L_2[0,a]$, $\forall\lambda \in \mathbf{C}^1$.

2.36. Да разгледаме в $C[0,a]$ интегралното уравнение (11) с непрекъснато ядро $K(x,y)$, $\lambda \in \mathbf{C}^1$ и да дефинираме рекурентно следната редица от последователни приближения:

$$\varphi_0 = f(x),$$

$$\varphi_1(x) = \lambda \int\limits_0^x K(x,y)\varphi_0(y)dy + f(x),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_n(x) = \lambda \int_0^x K(x,y)\varphi_{n-1}(y)dy + f(x),$$

. . . .

Докажете, че редицата $\{\varphi_n\} \rightrightarrows \varphi(x)$ в $[0,a]$, където φ е единственото непрекъснато решение на (11).

С оглед на приложенията към конкретни задачи ще модифицираме по подходящ начин функциите φ_n. И така да означим: $\psi_0 = \varphi_0 = f$, $\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x) = \lambda^n \psi_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ Следователно

$$\varphi_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \lambda^\nu \psi_\nu(x)$$

и освен това

$$\psi_1(x) = \int_0^x K(x,y)\psi_0(y)dy, \qquad \text{т.е. } \psi_1 = K\psi_0,$$

$$\psi_2(x) = \int_0^x K(x,y)\psi_1(y)dy, \qquad \text{т.е. } \psi_2 = K^2\psi_0,$$

. . . .

$$\psi_n(x) = \int_0^x K(x,y)\psi_{n-1}(y)dy, \qquad \text{т.е. } \psi_n = K^n\psi_0,$$

. . . . ,

където K^n са интегрални оператори на Волтера с ядра $K_n(x,y)$ от вида (10). По този начин намираме, че

$$\varphi_n(x) = f(x) + \sum_{\nu=1}^{n} \lambda^\nu \int_0^x K_\nu(x,y)f(y)dy \text{ и } \varphi = \lim_{n\to\infty} \varphi_n$$

$\left(\text{в операторен вид } \varphi = \left(I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda^\nu K^\nu\right) f\right).$

2.37. Решете в $C[0,1]$ с метода на последователните приближения уравнението

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,y)\varphi(y)dy$$

в следните случаи:

1. $f(x) = e^{x^2}$, $K = e^{x^2-y^2}$.
2. $f(x) = \sin x$, $K = \dfrac{2+\cos x}{2+\cos y}$.
3. $K(x,y) = \dfrac{K(x)}{K(y)}$, $K \in C[0,1]$, $K(x) \neq 0$, $\forall x \in [0,1]$.
4. $K = x - y$, $\lambda > 0$.

Решение на т. 1. Понеже $K_1 = e^{x^2-y^2}$, то от (10) намираме, че

$$K_2(x,y) = \int\limits_y^x K_1(x,z)K_1(z,y)dz = \int\limits_y^x e^{x^2-y^2}dz = (x-y)e^{x^2-y^2}.$$

Аналогично

$$K_3(x,y) = \int\limits_y^x e^{x^2-z^2}(x-z)e^{z^2-y^2}dz = e^{x^2-y^2}\frac{(x-y)^2}{2!}.$$

Индуктивно виждаме, че $K_n(x,y) = e^{x^2-y^2}\ \dfrac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!}$. И така

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda^\nu \int\limits_0^x \frac{(x-y)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}e^{x^2-y^2}f(y)dy$$

$$= f + \lambda\int\limits_0^x e^{\lambda(x-y)+x^2-y^2}f(y)dy.$$

Отг. на т. 3. $\varphi(x) = f(x) + \lambda\int\limits_0^x e^{\lambda(x-y)}\dfrac{K(x)}{K(y)}f(y)dy.$

Отг. на т. 4. $\varphi = f + \sqrt{\lambda}\int\limits_0^x \operatorname{sh}\sqrt{\lambda}(x-y)f(y)dy.$

2.38. Чрез неколкократно диференциране решете в $C[0,a]$ уравнението на Волтера

$$\varphi(x) = \lambda\int\limits_0^x K(x,y)\varphi(y)dy + f(x),$$

когато:

1) $f(x) = x$, $K = xy$, $\lambda = 1$;

2) $f(x) = e^x$, $K = 1$;

3) $f(x) = x^2$, $K = x - y$, $\lambda > 0$;

4) $f \in C^2[0,a]$, $K = \dfrac{K(x)}{K(y)}$, $K(x) \neq 0$ в $[0,a]$;

5) $f = 1$, $K = \dfrac{2y+1}{(2x+1)^2}$, $\lambda = 2$.

Решение на т. 1). $\varphi(x) = x(1 + \int\limits_0^x y\varphi(y)dy)$. Означаваме $\psi(x) = 1 + \int\limits_0^x y\varphi(y)dy$. Имаме $\psi(0) = 1$ и $\psi' = x\varphi$, т.е. $\psi' = x^2\psi$. Така намираме, че $\psi(x) = e^{x^3/3} \Rightarrow \varphi(x) = xe^{x^3/3}$.

Упътване към т. 4). Въведете спомагателните функции $\psi(y) = \dfrac{\varphi(y)}{K(y)}$ и $f_1(x) = \dfrac{f(x)}{K(x)}$. Тогава $\psi(x) = \lambda \int\limits_0^x \psi(y)dy + f_1(x)$, $\psi(0) = \dfrac{\varphi(0)}{K(0)}$ и т. н.

Отг. на т. 5. $\varphi = \dfrac{4x+1}{2x+1}$.

2.39. Решете интегралното уравнение на Волтера от I род в $C[0,a]$

$$\int\limits_0^x K(x,y)\varphi(y)dy = f(x)$$

за следните стойности на K и f:

1) $K(x,y) = e^{x+y}$, $f(x) = x$;

2) $K(x,y) = e^{x-y}$, $f \in C^1[0,a]$, $f(0) = 0$;

3) $K = \dfrac{K(x)}{K(y)}$, $K \in C^1[0,a]$, $K \neq 0$ и $f \in C^1[0,a]$, $f(0) = 0$.

Решение на т. 2). $\int\limits_0^x e^{-y}\varphi(y)dy = e^{-x}f(x)$, т. е. $[e^{-x}f(x)]' = e^{-x}\varphi(x) \Rightarrow \varphi = e^x[e^{-x}f(x)]'$. Къде се използва условието $f(0) = 0$?

Отг. на т. 3. $\varphi(x) = K(x)\left[\dfrac{f(x)}{K(x)}\right]'$.

2.40. Решете следното уравнение на Н. Х. Абел в класа $C[0,1]$:

$$(K\varphi)(x) = \int\limits_0^x \frac{\varphi(y)dy}{\sqrt{x-y}} = f(x), \text{ ако } f \in C^1[0,a],\ f(0) = 0.$$

Решение. В операторен вид имаме $K\varphi = f \Rightarrow K^2\varphi = Kf$. И тъй

$$(K^2\varphi)(x) = \int\limits_0^x \int\limits_0^z \frac{\varphi(y)dydz}{\sqrt{x-z}\sqrt{z-y}} = \int\int\limits_\Delta \frac{\varphi(y)dydz}{\sqrt{x-z}\sqrt{z-y}},$$

където $\Delta = \{(y,z) : 0 \leq y \leq z,\ 0 \leq z \leq x\}$. Понеже триъгълникът Δ може да се запише още като $\Delta = \{(y,z) : 0 \leq y \leq x,\ y \leq z \leq x\}$, то $(K^2\varphi)(x) = \int\limits_0^x \varphi(y) \left[\int\limits_y^x \frac{dz}{\sqrt{x-z}\sqrt{z-y}}\right] dy$. Предоставяме на читателя да се убеди, че интегралът в средните скоби е равен на π. За тази цел е достатъчно да се направи смяната $z = y + (x-y)t$, $0 \leq t \leq 1$, и да се пресметне възникналият диференциален бином. Следователно

$$\pi \int\limits_0^x \varphi(y)dy = (Kf)(x) = \int\limits_0^x \frac{f(y)}{\sqrt{x-y}}dy,$$

т. е.

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\left(\int\limits_0^x \frac{f(y)dy}{\sqrt{x-y}}\right).$$

Чрез едно интегриране по части виждаме, че

$$\int\limits_0^x \frac{f(y)dy}{\sqrt{x-y}} = -2\int\limits_0^x f(y)d_y\sqrt{x-y} = 2f(0)\sqrt{x} + 2\int\limits_0^x f'(y)\sqrt{x-y}dy.$$

Така получаваме

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^x \frac{f'(y)}{\sqrt{x-y}}dy. \tag{12}$$

Ако в последния интеграл направим смяната $y = \lambda x$, добиваме $\varphi(x) = \sqrt{x}\int\limits_0^1 \frac{f'(\lambda x)}{\sqrt{1-\lambda}}d\lambda$. Веднага се вижда, че несобственият интеграл зависи непрекъснато от x.

По този начин при $f(0) = 0$ доказахме теоремата за единственост в класа $C[0,1]$. Теоремата за съществуване се доказва чрез непосредствено заместване на предполагаемия вид (12) на $\varphi(x)$ в уравнението.

2.41. Намерете решението на уравнението на Абел

$$\int\limits_0^x \frac{\varphi(y)dy}{\sqrt{x-y}} = f(x) \text{ в класа } C[0,1],$$

когато 1) $f(x) = x$; 2) $f(x) = \sin x$.
Отг. на т. 1). $2/\pi\sqrt{x}$.

Важен метод за решаване на интегрални уравнения в безкраен интервал е т. нар. *метод на интегралните трансформации*. По-нататък предлагаме няколко задачи, които се решават с преобразованието на Фурие.

2.42. Разгледайте интегралното уравнение

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-y)\varphi(y)dy, \tag{13}$$

където $f(x)$, $\varphi(x) \in L_2(\mathbf{R}^1)$ и $K \in L_1(\mathbf{R}^1)$. Докажете, че (13) има единствено решение $u \in L_2(\mathbf{R}^1)$, ако непрекъснатата функция $1 - \lambda\widehat{K}(\xi) \neq 0$, $\forall\xi \in \mathbf{R}^1$. Постройте решението в явен вид. (Както обикновено, $\widehat{K}(\xi)$ е фуриеровият образ на $K(x)$, т. е. $\widehat{K} = F(K)$ и $K = F^{-1}(\widehat{K})$.)

Упътване. Използвайте свойставата на конволюцията — зад. 7.25 и 7.1.

Отг. $\varphi(x) = F^{-1}\left(\frac{\widehat{f}(\xi)}{1-\lambda\widehat{K}(\xi)}\right)$, $\frac{\widehat{f}(\xi)}{1-\lambda\widehat{K}(\xi)} \in L_2(\mathbf{R}^1)$.

2.43. Решете в $L_2(\mathbf{R}^1)$ уравнението

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|}\varphi(y)dy + f(x)$$

при условие, че $\lambda < 1/2$.

Упътване. $F(e^{-a|x|}) = \dfrac{2a}{a^2+\xi^2}$, $a > 0$.

Отг. $\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)\dfrac{e^{-\sqrt{1-2\lambda}|x-y|}}{\sqrt{1-2\lambda}}dy$.

2.44. Решете уравнението от зад. 2.43 при следните стойности на f:

1. $f = e^{-|x|}$.
2. $f = \theta(x)e^{-x}$, където $\theta(x) = 1$ при $x > 0$, $\theta(x) = 0$ при $x < 0$.
3. $f = (1 - \mathrm{sgn} x)e^{x}$.

Отг. на т. 2. $\varphi(x) = 1/2e^{-|x|\sqrt{1-2\lambda}}(1-2\lambda)^{-1/2}[1+\mathrm{sgn} x\sqrt{1-2\lambda}]$.

2.45. Установете, че функциите $e^{i\alpha x}$ удовлетворяват уравнението $\varphi(x) = \dfrac{1+\alpha^2}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|}\varphi(y)dy$ за всяко $\alpha \in \mathbf{R}^1$.

Обръщаме внимание, че $e^{-|x-y|} \notin L_2(\mathbf{R}^2) \cup L_1(\mathbf{R}^2)$.

2.46.* Докажете, че при $\lambda < 1/2$ уравнението

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|}\varphi(y)dy + f(x) \tag{14}$$

притежава единствено решение в класа на ограничените непрекъснати функции ($f \in C(\mathbf{R}^1)$, $|f| \leq \mathrm{const}$).

Упътване. Понеже

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|}\varphi(y)dy = e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^{y}\varphi(y)dy + e^{x}\int_{x}^{\infty} e^{-y}\varphi(y)dy,$$

то очевидно $\psi(x) \in C(\mathbf{R}^1)$. Убедете се чрез двукратно диференциране, че $\varphi \in C^2(\mathbf{R}^1)$. Покажете след това, че всяко решение φ на хомогенното уравнение (14) удовлетворява $\varphi'' + (2\lambda - 1)\varphi = 0$. С това ще бъде установена единствеността. За съществуването използвайте отговора на зад. 2.43.

2.47. Проверете, че хомогенното уравнение (14), разглеждано в класа на непрекъснатите ограничени върху числовата ос функции, притежава едномерно пространство от решения, ако $\lambda = 1/2$. ($1 \in \mathrm{Ker}(I - 1/2K)$.)

2.48. Разгледайте уравнението

$$(15) \qquad \varphi(x) = \lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|}\varphi(y)dy + f(x), \ f \in S(\mathbf{R}^1), \ \lambda = 1/2,$$

където $S(\mathbf{R}^1)$ е класът на Шварц, въведен в § 3. Докажете, че (15) има единствено решение в $L_2(\mathbf{R}^1)$ точно тогава, когато

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = 0.$$

Упътване. Според зад. 2.42, ако φ съществува, то $\widehat{\varphi}$ се задава с формулата $\widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{f}(\xi) + \frac{\widehat{f}}{\xi^2}$. Следователно

$$\varphi \in L_2(\mathbf{R}^1) \Leftrightarrow \widehat{\varphi} \in L_2(\mathbf{R}^1) \Leftrightarrow \frac{\widehat{f}}{\xi^2} \in L_2(\mathbf{R}^1) \Leftrightarrow \int\limits_{-1}^{1} |\widehat{f}(\xi)|^2\xi^{-4} \ d\xi < \infty.$$

Съгласно формулата на Тейлор $\widehat{f}(\xi) = \widehat{f}(0) + \xi\widehat{f}'(0) + \xi^2 \Leftrightarrow Q(\xi)$. Убедете се сами, че

$$\int\limits_{-1}^{1} |\widehat{f}|^2\xi^{-4}d\xi < \infty \Leftrightarrow \widehat{f}(0) = \widehat{f}'(0) = 0.$$

2.49. Покажете, че интегралното уравнение

$$\varphi(x) = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} \sin(xy)\varphi(y)dy$$

се удовлетворява от безбройно много линейно независими елементи на $L_2(0, +\infty)$.

Упътване. Докажете, че

$$\varphi_a(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-ax} \pm x(x^2 + a^2)^{-1} \in \operatorname{Ker}\left(I \mp \sqrt{\frac{2}{\pi}}K\right), \ \forall a > 0.$$

2.50. Докажете, че ако $f \in C^1$, $f(0) = 0$ и $0 < \alpha < 1$, функцията $\varphi(x) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\alpha} \int\limits_0^x \frac{f'(y)dy}{(x-y)^{1-\alpha}}$ е решение на $\int\limits_0^x (x-y)^{-\alpha}\varphi(y)dy = f(x)$.

Упътване. $\sin(\pi\alpha) \int\limits_0^1 y^{-\alpha}(1-y)^{\alpha-1}dy = \pi$.

Глава II

ТЕОРИЯ НА РАЗПРЕДЕЛЕНИЯТА

§ 3. Сведения за пространствата $D(\mathbf{R}^n)$ и $S(\mathbf{R}^n)$

Означаваме с $D(\mathbf{R}^n)$ съвкупността на всички безкрайно диференцируеми функции с компактен носител, т.е. $\varphi \in D(\mathbf{R}^n) \Leftrightarrow \varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, и съществува такова число $A > 0$, $A = A(\varphi)$, че $\varphi(x) = 0$ при $|x| \geq A$.

$S(\mathbf{R}^n)$ е множеството на всички безкрайно гладки функции в $\mathbf{R}^n$, които заедно с производните си от произволен ред намаляват при $|x| \to \infty$ по-бързо от всяка степен $|x|^{-m}$, $m \geq 0$. Следователно

$$S(\mathbf{R}^n) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^n) : \sup_{\mathbf{R}^n} |p(x)D^\alpha\varphi(x)| \leq C_{\alpha,p} < \infty, \qquad C_{\alpha,p} = \text{const}$$

за всеки полином $p(x)$ и всеки мултииндекс $\alpha\}$.

В линейното пространство $D(\mathbf{R}^n)$ въвеждаме сходимост по следния начин: Ще казваме, че редицата $\{\varphi_\nu\} \to \varphi$ в $D(\mathbf{R}^n)$ точно тогава, когато:

1. Съществува число $A > 0$, което не зависи от ν, такова, че $\varphi_\nu(x) = 0$ при $|x| \geq A$.
2. $D^\alpha\varphi_\nu \rightrightarrows D^\alpha\varphi$ за всеки мултииндекс α.

Сходимостта в $S(\mathbf{R}^n)$ се дефинира по аналогичен начин, а именно: $\{\varphi_\nu\} \to \varphi$ в $S(\mathbf{R}^n)$ тогава и само тогава, когато за всяка двойка мултииндекси α, β

$$x^\beta D^\alpha\varphi_\nu \rightrightarrows x^\beta D^\alpha\varphi.$$

Най-сетне да напомним, че $U(x,\delta)$ е отворено кълбо в $\mathbf{R}^n$ с център в т. x и радиус $\delta > 0$.

3.1. Нека Ω е ограничена област в $\mathbf{R}^n$ и $\Omega_\delta = \bigcup_{x\in\Omega} U(x,\delta)$, $\delta > 0$. С $\chi(x)$ означаваме характеристичната функция на множеството $\Omega_{2\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. Докажете, че функцията

$$g_\varepsilon(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \chi(y)\varphi_\varepsilon(x-y)dy$$

е от класа $D(\mathbf{R}^n)$, ако φ_ε е функцията, дефинирана в зад. 1.25. Покажете също, че $0 \le g_\varepsilon(x) \le 1$, $g_\varepsilon|\Omega_\varepsilon = 1$, $g_\varepsilon(x) = 0$, когато $x \notin \Omega_{3_\varepsilon}$.

Упътване.

$$g_\varepsilon(x) = \int\limits_{U(x,\varepsilon)\cap\Omega_{2\varepsilon}} \varphi_\varepsilon(x-y)dy.$$

3.2. Да предположим, че $\varphi \in D(\mathbf{R}^n)$ и $\operatorname{supp}\varphi \subset \bigcup\limits_{j=1}^{N} U(x_j, r_j)$. Установете, че съществуват $h_j \in D(\mathbf{R}^n)$, за които:

$$1)\ \varphi(x) = \sum_{j=1}^{N} \varphi h_j; \qquad 2)\ \operatorname{supp} h_j \subset U(x_j, r_j).$$

Решение. Веднага се вижда, че могат да бъдат намерени такива числа $r'_j < r_j$, щото $\operatorname{supp}\varphi \subset \bigcup U(x_j, r'_j)$. Въз основа на предишната задача строим функции $g_j \in D(\mathbf{R}^n)$, които притежават следните свойства: $g_j(x) = 1$ върху $U(x_j, r'_j)$ и $0 \le g_j(x) \le 1$. Да дефинираме сега $h'_j(x) = g_j(x)\left[\sum\limits_{j=1}^{N} g_j(x)\right]^{-1}$ за $x \in \bigcup U(x_j, r'_j)$. Отбелязваме, че съществуват достатъчно малки околности V_1, V_2 на $\operatorname{supp}\varphi$, $[V_1]^T \subset V_2$, за които $\sum\limits_{j=1}^{N} g_j(x) \ge 1$, $x \in V_2$. Нека $\eta \in D(\mathbf{R}^n)$, $\eta|_{V_1} = 1$ и $\eta(x) = 0$ при $x \notin V_2$. Незабавно се проверява, че функциите $h_j = \eta h'_j$ удовлетворяват изискванията 1) и 2), ако $[V_2]^T \subset \bigcup U(x_j, r'_j)$.

3.3. Нека $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ и $\varphi(x) = 1$ при $|x| \le 1$, $0 \le \varphi(x) \le 1$, $\varphi(x) = 0$ при $|x| \ge 2$. Покажете, че за всяко $\varepsilon > 0$ функцията $g_\varepsilon(x) = \varphi(\varepsilon x)$ е от класа $D(\mathbf{R}^n)$, $g_\varepsilon(x) = 1$ при $|x| \le 1/\varepsilon$ и $g_\varepsilon(x) = 0$, когато $|x| \ge 2/\varepsilon$. Убедете се, че за всеки мултииндекс α може да се намери независеща от $0 < \varepsilon < M$ константа C_α, за която $|D^\alpha g_\varepsilon(x)| \le C_\alpha$.

3.4. Да предположим, че функциите η, $\varphi \in D(\mathbf{R}^1)$ и $\eta \equiv 1$ в някоя околност на нулата. Докажете, че за всяко естествено $N \ge 1$ функцията

$$\psi(x) = \frac{1}{x^N}\left[\varphi(x) - \eta(x)\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!}x^j\right]$$

е от класа $D(\mathbf{R}^1)$.

3.5. Покажете, че уравнението $\varphi'(x) = \psi(x)$, $\psi \in D(\mathbf{R}^1)$, е разрешимо в $D(\mathbf{R}^1)$ точно когато $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(x)dx = 0$.

Упътване. Ако $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(x)dx = 0$, дефинирайте φ чрез формулата $\varphi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \psi(t)dt$ и проверете, че φ е финитна функция.

3.6. Докажете, че $D(\mathbf{R}^n) \subsetneqq S(\mathbf{R}^n)$. Посочете, че от сходимостта на една редица е $D(\mathbf{R}^n)$ следва нейната сходимост в $S(\mathbf{R}^n)$.

3.7. Докажете, че пространството $D(\mathbf{R}^n)$ е навсякъде гъсто в $S(\mathbf{R}^n)$ в смисъл на сходимостта в S.

Упътване. Ако $\psi \in S(\mathbf{R}^n)$, разгледайте $\psi(x)g_\varepsilon(x)$, $0 < \varepsilon < 1$, където $g_\varepsilon(x)$ е дефинирана в зад. 3.3. За да установите, че $g_\varepsilon(x)\psi(x) \to \psi$ в $S(\mathbf{R}^n)$, най-напред покажете, че $|g_\varepsilon(x) - 1| = |\varphi(\varepsilon x) - \varphi(0)| \leq C\ |x|\varepsilon$ и константата C не зависи от ε.

3.8. Лема на Дюбоа – Раймон. Нека $f(x) \in C[a,b]$ и $\int\limits_{a}^{b} f(x)\varphi'(x)dx = 0$ за всяка функция $\varphi \in D(\mathbf{R}^1)$, supp $\varphi \subset [a,b]$. Покажете тогава, че $f(x) \equiv \text{const}$.

Решение. Да предположим, че има точки x_1, $x_2 \in (a,b)$, за които $f(x_1) < A < f(x_2)$. Следователно могат да се намерят непресичащи се околности $\Delta_1 \ni x_1$, $\Delta_2 \ni x_2$ със свойството $f|_{\Delta_1} < A < f|_{\Delta_2}$. За $\varphi'(x)$ вземаме такава функция от класа D, щото $\varphi'(x_1) > 0$, $\varphi'(x_2) < 0$, $\varphi'(x) = 0$ при $x \notin \Delta_1 \bigcup \Delta_2$, φ' запазва знака си в Δ_1 и в Δ_2 и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x)dx = 0$. Ако $\varphi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi'(t)dt$, то очевидно $\varphi \in D$ и supp $\varphi \subset [a,b]$. Неравенството $\int\limits_{-\infty}^{\infty} (f(x) - A)\varphi'(x)dx < 0$ противоречи на началното допускане.

3.9. Да предположим, че функцията f е локално сумируема и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx = 0$ за всеки елемент $\varphi \in D(\mathbf{R}^1)$. Докажете, че $f = 0$ п. н.

Упътване. Фиксирайте един краен интервал $[a,b]$ и означете $F(x) = \int\limits_{a}^{x} f(t)dt$. Интегрирайте по части в равенството $\int\limits_{a}^{b} f(x)\varphi(x)dx = 0$, когато supp $\varphi \subset [a,b]$.

§ 4. Пространства $D'(\mathbf{R}^n)$ и $S'(\mathbf{R}^n)$

С $D'(\mathbf{R}^n)$ $(S'(\mathbf{R}^n))$ ще бележим множеството от всички линейни непрекъснати функционали над $D(\mathbf{R}^n)$ $(S(\mathbf{R}^n))$. С други думи, $u \in D'(\mathbf{R}^n)$ означава, че:

1. $u : D(\mathbf{R}^n) \to C^1$ е линейно изображение.
2. Шом $\varphi_\nu \to \varphi$ в $D(\mathbf{R}^n)$, то числовата редица $< u, \varphi_\nu > \to$ $< u, \varphi >$.

Елементите на D' и S' ще наричаме разпределения (обобщени функции). Понякога действието на функционала u върху функцията φ се означава $u(\varphi)$. В линейното пространство $D'(S')$ ще въведем сходимост по следния начин. Ще казваме, че редицата $u_\nu \in D'(S')$ клони към някакъв елемент $u \in D'(S')$ точно когато за всяка функция $\varphi \in D(S)$ числовата редица $< u_\nu, \varphi > \to < u, \varphi >$.

Да предположим, че Ω е подобласт на $\mathbf{R}^n$. По дефиниция разпределението $u|_\Omega = 0$, ако за всеки елемент $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ е изпълнена релацията $< u, \varphi >= 0$. Две обобщени функции u_1, u_2 съвпадат върху Ω, ако $(u_1 - u_2)|_\Omega = 0$.

Произведение на функция $u \in D'$ с елемент $a \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ ще дефинираме с формулата

$$(1) \qquad < au, \varphi >=< u, a\varphi >, \ \forall \varphi \in D(\mathbf{R}^n).$$

Да означим с $\theta_M = \{a \in C^\infty(\mathbf{R}^n)\colon \ |D^\alpha a(x)| \le C_\alpha(1 + |x|)^{m_\alpha}$, C_α, $m_\alpha = \text{const}$, за всеки мултииндекс $\alpha\}$. Тогава с формулата (1) дефинираме операция умножение на $u \in S'(\mathbf{R}^n)$ с $a \in \theta_M$. Най-сетне ще определим разпределението $u(Ay + b)$, $\det A \neq 0$, $b \in \mathbf{R}^n$, чрез равенството $< u(Ay + b), \varphi >= \left\langle u, \dfrac{\varphi[A^{-1}(y - b)]}{|\det A|} \right\rangle$, $\forall \varphi \in D(\mathbf{R}^n)$. Специално $< u(x + a), \varphi >=< u, \varphi(x - a) >, < u(-x), \varphi >=$ $< u(x), \varphi(-x >$.

4.1. Нека функцията $u(x)$ е локално сумируема в $\mathbf{R}^1$. Докажете, че:

1. Равенството

$$(2) \qquad < u, \varphi >= \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x)\varphi(x)dx, \ \forall \varphi \in D(\mathbf{R}^1),$$

дефинира обобщена функция от $D'(\mathbf{R}^1)$.

2. Ако съществува число $m \geq 0$ и такова, че функцията $(1+|x|)^{-m}u(x)$ е сумируема, то за всяко $\varphi \in S(\mathbf{R}^1)$ равенството (2) определя разпределение $u \in S'$.
3. Разпределенията от вида (2) ще наричаме регулярни. Един елемент $u \in D'$ носи името сингулярен, ако не е регулярен.

4.2. Докажете, че умножението с фиксиран елемент от θ_M е добре дефинирана и непрекъсната операция в $S'(\mathbf{R}^n)$. Установете също, че умножението с произволна функция $a \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ е непрекъсната операция в $D'(\mathbf{R}^n)$.

4.3. Зададена е редица от отворени кълба U_ν и $U = \bigcup\limits_\nu U_\nu$. Да предположим, че обобщената функция $v|_{U_\nu} = 0$. Установете, че $v|_U = 0$.

Упътване. Нека $\varphi \in D(\mathbf{R}^n)$ и $\operatorname{supp} \varphi \subset U$. Тогава съществуват краен брой кълба, покриващи $\operatorname{supp} \varphi$: $\operatorname{supp}\varphi \subset \bigcup\limits_{\nu=1}^{N} U_\nu$. След това използвайте зад. 3.2.

4.4. Носител $\operatorname{supp} u$ на разпределението $u \in D'(\mathbf{R}^n)$ ще наричаме множеството от онези точки $x \in \mathbf{R}^n$, във всяка околност на които $u \neq 0$. Докажете, че $\operatorname{supp} u$ е най-малкото затворено множество, извън което u е равно на 0.

Упътване. Използвайте зад. 4.3.

Забележка. Сингулярният носител singsupp на $u \in D'(\mathbf{R}^n)$ се определя като множеството от всички точки в $\mathbf{R}^n$, непритежаващи околност, в която $u \in C^\infty$. Каква еквивалентна форма бихте дали на тази дефиниция, като имате предвид зад. 4.4?

4.5. Покажете,че $S'(\mathbf{R}^1) \subsetneqq D'(\mathbf{R}^1)$, и от сходимостта на една редица в S' следва нейната сходимост в D'.

Упътване. $e^x \notin S'(\mathbf{R}^1)$, но $e^x \in D'(\mathbf{R}^1)$, За да установите това, разгледайте редицата $e^{-\nu}\varphi_1(x-\nu) \in D(\mathbf{R}^1)$, където φ_1 е дефинирана в зад. 1.25. Проверете, че $\{e^{-\nu}\varphi_1(x-\nu)\} \underset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} 0$ в $S(\mathbf{R}^1)$. Предположението, че $e^x \in S'$, ни дава $(e^x, e^{-\nu}\varphi_1(x-\nu)) \underset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Понеже

$$< e^x, e^{-\nu}\varphi_1(x-\nu) >= \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{x-\nu}\varphi_1(x-\nu)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^x\varphi_1(x)dx = C \neq 0,$$

стигаме до противоречие.

4.6. Да определим обобщената функция δ с помощта на формулата $<\delta, \varphi>= \varphi(0)$, $\forall\varphi \in D(\mathbf{R}^n)$. Докажете, че δ е сингулярно разпределение и supp $\delta = \text{sing supp}\delta = \{0\}$. Изучете сингулярния носител на функцията на Хевисайд θ, $\theta(x) = 1$ при $x > 0$ и $\theta(x) = 0$, $x < 0$.

Упътване. Сингулярността на δ докажете от противното, т. е. допуснете, че съществува такава локално сумируема функция $u(x)$, за която

$$\varphi(0) =< \delta, \varphi >= \int\limits_{\mathbf{R}^n} u(x)\varphi(x)dx, \ \forall\varphi \in D(\mathbf{R}^n).$$

Използвайте след това редицата $\{\psi_{1/\nu}\}$ от зад. 1.25 при $\nu \to \infty$. Тогава $\psi_{1/\nu}(0) = e^{-1} = \int\limits_{\mathbf{R}^n} u(x)\psi_{1/\nu}(x)dx$. Последният интеграл обаче клони към нула, защото $\psi_{1/\nu}(x) \to 0$ п.н., $|\psi_{1/\nu}| \leq 1$, supp $\psi_{1/\nu} \subset [-1/\nu, 1/\nu]$.

4.7. Покажете, че функционалът $P\left(\frac{1}{x}\right)$, дефиниран с равенството

$$\left\langle P\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx, \ \forall\varphi \in D(\mathbf{R}^1),$$

е сингулярен елемент на $D'(\mathbf{R}^1)$.

Упътване. Нека supp $\varphi \subset [-a, a]$, $a > 0$. Тогава $\left\langle P\left(\frac{1}{x}\right), \ \varphi\right\rangle = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{a\geq|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}dx + \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{a\geq|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(0)}{x}dx$ $= \int\limits_{-a}^{a} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}dx$ и следователно $\left|\left\langle P\left(\frac{1}{x}\right), \ \varphi\right\rangle\right| \leq 2a \max\limits_{[-a,a]} |\varphi'|$. От последната оценка следва, че $P\left(\frac{1}{x}\right) \in D'$ (защо?). За да докажете сингулярността, разсъждавайте от противното. И тъй нека f е такава локално сумируема функция, щото $\left\langle P\left(\frac{1}{x}\right), \ \varphi\right\rangle$ $= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx$, $\forall\varphi \in D(\mathbf{R}^1)$. Щом $0 \notin$ supp φ, от дефиницията на $P\left(\frac{1}{x}\right)$ следва, че $\left\langle P\left(\frac{1}{x}\right), \ \varphi\right\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx$, т. е. $f(x) = \frac{1}{x}$ при $x \neq 0$.

4.8. Разгледайте редицата от обобщени функции $\left\{\frac{1}{x \pm i\varepsilon}\right\}$, $\varepsilon > 0$, $\frac{1}{x \pm i\varepsilon} \in D'(\mathbf{R}^1)$. Установете, че тя е сходяща в D' при $\varepsilon \to 0$ към някакво разпределение $\frac{1}{x \pm i0}$. Докажете, че са валидни следните формули на Сохоцки:

1. $\frac{1}{x + i0} = -i\pi\delta(x) + P\left(\frac{1}{x}\right)$.
2. $\frac{1}{x - i0} = i\pi\delta(x) + P\left(\frac{1}{x}\right)$.

Упътване. За да покажете, че $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x + i\varepsilon} dx = -i\pi\delta(0)$ $+ \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$, използвайте тъждеството

$$\frac{\varphi(x)}{x + i\varepsilon} = \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}\varphi(0) + \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}[\varphi(x) - \varphi(0)].$$

4.9. Установете, че формулата

$$\left\langle P\left(\frac{e^{ikx}}{x}\right), \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|x|\geq\varepsilon} \frac{e^{ikx}}{x}\varphi(x)dx, \ \forall\varphi \in D(\mathbf{R}^1),$$

определя сингулярен елемент на $D'(\mathbf{R}^1)$ за всяко естествено число k. В D' намерете $\lim\limits_{k\to\infty} P\left(\frac{e^{ikx}}{x}\right)$.

Упътване. Ако $\operatorname{supp}\varphi \subset [-a, a]$, то

$$\left\langle P\left(\frac{e^{ikx}}{x}\right), \varphi \right\rangle = \int\limits_{-a}^{a} e^{ikx}\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx$$

$$+ i\varphi(0)\int\limits_{-a}^{a} \frac{\sin kx}{x} dx = I_{1k} + I_{2k}.$$

Съгласно зад. 7.2 $I_{1k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

Отг. $\lim\limits_{k} P\left(\frac{e^{ikx}}{x}\right) = i\pi\delta(x)$.

4.10. Докажете, че в $D'(\mathbf{R}^1)$ са в сила релациите:

1. $\dfrac{e^{ikx}}{x-i0}\xrightarrow[k\to\infty]{} 2\pi i\delta(x)$.
2. $\dfrac{e^{-ikx}}{x-i0}\xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.
3. $\dfrac{e^{ikx}}{x+i0}\xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.
4. $\dfrac{e^{-ikx}}{x+i0}\xrightarrow[k\to\infty]{} -2\pi i\delta(x)$.
5. $\varphi_\varepsilon(x)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}\delta(x)$, където φ_ε е дефинирана в зад. 1.25.

4.11. Зададена е редицата от локално сумируеми функции $\{f_\nu\}$ и $f_\nu \rightrightarrows 0$ върху всяко компактно множество. Установете, че $f_\nu \to 0$ в $D'(\mathbf{R}^n)$.

4.12. Нека $a\in C^\infty(\mathbf{R}^1)$. Пресметнете:

1) $a(x)\delta(x)$; 3) $x^k P\left(\frac{e^{ikx}}{x}\right)$;

2) $xP\left(\frac{1}{x}\right)$; 4) $x^k P\left(\frac{1}{x}\right)$, $k\geq 2$.

Отг. 1) $a(0)\delta(x)$; 2) 1; 3) $x^{k-1}e^{ikx}$; 4) x^{k-1}.

4.13. Посочете достатъчни условия, за да бъде сходящ редът

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\delta(x-k) \text{ в } D'(\mathbf{R}^1) \text{ и } S'(\mathbf{R}^1), \text{ ако } a_k=\text{const}.$$

Отг. a_k — произволни в D'; $|a_k|\leq C(1+|k|)^m$, C, $m=\text{const}$ в S'.

4.14. (Задача за регуляризацията на функция с полярна особеност.) Да предположим, че измеримата функция $f(x)$ е локално сумируема при $|x|\geq a$, $a>0$, и $|f(x)|\leq C|x|^{-m}$ при $|x|\leq a$; $C=\text{const}$, $m\geq 0$. Докажете, че съществува разпределение $u\in D'(\mathbf{R}^1)$, такова, че $u(x)=f(x)$ за $x\neq 0$. Проверете, че ако $f(x)=x^{-m}$, то $u(x)$ може да бъде избрано по такъв начин, че $x^m u(x)=1$.

Упътване. Нека $g\in C^\infty(\mathbf{R}^1)$, $g(x)=1$ при $|x|\leq\frac{a}{2}$ и $g(x)=0$, когато $|x|\geq a$. Разгледайте тогава обобщената функция u:

$$<u,\varphi>=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left[\varphi(x)-\sum_{\nu=0}^{m-1}\frac{\varphi^{(\nu)}(0)}{\nu!}x^\nu g(x)\right]dx,\ \forall\varphi\in D(\mathbf{R}^1).$$

4.15. Нека измеримата функция $f(x)$ е локално сумируема при $|x| \geq a$, $\forall a > 0$, и в някакъв интервал от вида $(0, b)$ удовлетворява неравенството $f(x) \geq F(x) > 0$, $F(x) \in C(0, b)$, където $F(x)$ расте при $x \to +0$ по-бързо от всяка степен x^{-m}, $m > 0$. Установете тогава, че не съществува елемент $u \in D'(\mathbf{R}^1)$, за който $u = f$ при $x \neq 0$.

Решение. Считаме, че функцията ψ_1 е дефинирана в зад. 1.25. Да разгледаме редицата ε_ν, $\psi_1\left(\nu\left(x - \frac{2}{\nu}\right)\right)$, където числата $\varepsilon_\nu \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$ по подходящ начин, който ще бъде уточнен по-долу. Очевидно supp $\psi_1 \subset [1/\nu, 3/\nu]$. Да предположим, че съществува такова $u \in D'(\mathbf{R}^1)$, че $u = f$ при $x \neq 0$. Следователно

$$\left\langle u, \varepsilon_\nu, \psi_1\left(\nu\left(x - \frac{2}{\nu}\right)\right)\right\rangle = \varepsilon_\nu \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi_1\left(\nu\left(x - \frac{2}{\nu}\right)\right)dx$$

$$\geq \varepsilon_\nu \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x)\psi_1\left(\nu\left(x - \frac{2}{\nu}\right)\right)dx = 1/\nu\varepsilon_\nu \int\limits_{-\infty}^{\infty} F\left(\frac{x+2}{\nu}\right)\psi_1(x)dx$$

$$\geq 1/\nu\varepsilon_\nu e^{-4/3} \int\limits_{|x|\leq 1/2} F\left(\frac{x+2}{\nu}\right)dx = e^{-4/3}\frac{\varepsilon_\nu}{\nu}F\left(\frac{x_\nu+2}{\nu}\right),$$

$x_\nu \in [-1/2, 1/2]$. Да положим сега $\varepsilon_\nu = \dfrac{\nu}{F\left(\frac{x_\nu+2}{\nu}\right)}$, което ни дава, че $\varepsilon_\nu \to 0$ по-бързо от всяка степен на $1/\nu$ и значи

$$\left\{\varepsilon_\nu\psi_1\left(\nu\left(x - \frac{2}{\nu}\right)\right)\right\} \to 0$$

в D. Така стигаме до противоречие с неравенството

$$\left\langle u, \varepsilon_\nu\psi_1\left(\nu\left(x - \frac{2}{\nu}\right)\right)\right\rangle \geq e^{-4/3}.$$

4.16. Докажете, че $e^{1/x}$, $e^{1/x^2} \notin D'$.

4.17. Да предположим, че S е частично гладка повърхнина в $\mathbf{R}^n$ и μ е частично непрекъсната функция върху S. Покажете, че равенството

$$< \mu\delta_S, \varphi >= \int\limits_S \mu(x)\varphi(x)dx, \ \forall\varphi \in D(\mathbf{R}^n)$$

дефинира елемент на D'. Докажете, че $\mathrm{supp}(\mu\delta_S) \subset S$ и sing $\mathrm{supp}(\mu\delta_S) \subset S$. В специалния случай $\mu \equiv 1$ е валидна релацията $\mathrm{supp}\ \delta_S = \mathrm{sing\ supp}\ \delta_S = S$.

Забележка. Разпределението $\mu\delta_S$ ще наричаме *потенциал от прост слой върху S с плътност μ.*

4.18. Нека $u \in D'(\mathbf{R}^n)$ притежава компактен носител. Докажете, че u притежава единствено продължение върху $S(\mathbf{R}^n)$ като елемент на $S'(\mathbf{R}^n)$, което се дефинира така: $< u, \varphi >=< u, \eta\varphi >$, $\forall\varphi \in S(\mathbf{R}^n)$; $\eta \in D(\mathbf{R}^n)$ и $\eta \equiv 1$ в околност на supp u.

Упътване. Използвайте зад. 3.7 и дефиницията на supp u.

4.19. Установете, че в $D'(\mathbf{R}^1)$ не може да бъде дефинирана операция умножение, която да бъде комутативна и асоциативна.

Упътване. Разгледайте разпределенията x, $\delta(x)$ и $P\left(\frac{1}{x}\right)$.

§ 5. Диференциране на разпределение

Нека $u \in D'(\mathbf{R}^n)$ $(S'(\mathbf{R}^n))$. За произволен мултииндекс α обобщената производна $D^\alpha u$ се дефинира чрез равенството

$$< D^\alpha u, \varphi >= (-1)^{|\alpha|} < u, D^\alpha\varphi >, \ \forall\varphi \in D(S).$$

5.1. Да предположим, че $u \in C^p(\mathbf{R}^n)$. Проверете, че за всеки мултииндекс α, $|\alpha| \leq p$, класическите и обобщените производни съвпадат.

5.2. Докажете следните свойства на обобщените производни на елемента $u \in D'(\mathbf{R}^n)$:

1. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$, $i, j = 1, \ldots, n$.
2. Ако $a \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, то $\frac{\partial}{\partial x_j}(au) = a\frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial a}{\partial x_j}u$ (формула на Лайбниц).

3. supp $u \subset \Omega \Longrightarrow$ supp $D^{\alpha}u \subset \Omega$ за всяко α.

4. Шом $u_{\nu} \to u$ в D', то $D^{\alpha}u_{\nu} \to D^{\alpha}u$ в D' за всеки мултииндекс α.

5.3. В $\mathbf{R}^n$ е зададена редицата от ликално сумируеми функции u_{ν} и е известно, че редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} u_{\nu}(x)$ е равномерно сходящ върху всяко компактно множество. Означете с $S(x) \in D'(\mathbf{R}^n)$ сумата на този ред и установете, че той е диференцируем почленно безбройно много пъти в D' и

$$D^{\alpha}S(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} D^{\alpha}u_{\nu}(x), \ \forall\alpha.$$

5.4. В $D'(\mathbf{R}^1)$ пресметнете: 1. $x^m\delta^{(k)}(x)$; 2. $|x|^{(m)}$, $m \geq 2$; 3. $(\text{sign } x)^{(m)}$; 4. $\theta^{(m)}(x)$, където $\theta(x)$ е функцията на Хевисайд; 5. $(|x|\sin x)''$.

Отг. $x^m\delta^{(k)}(x) = 0$ при $k = 0, 1, \ldots, m-1$ и

$$x^m\delta^{(k)}(x) = (-1)^m m! \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} \delta^{(k-m)}(x)$$

при $k \geq m$; 2. $2\delta^{(m-2)}(x)$; 5. приложете правилото на Лайбниц към $(x\sin x)$sign x.

5.5. Нека $P\left(\frac{1}{x}\right)$ е разпределението, дефинирано в зад. 4.7. Докажете, че $\ln|x|$ е регулярна обобщена функция и $(\ln|x|)' = P\left(\frac{1}{x}\right)$.

Упътване. $< (\ln|x|)', \varphi > = - < \ln|x|, \varphi' > = - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ln|x|\varphi(x)dx$ $= - \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|x|\geq\varepsilon} \ln|x|\varphi'(x)dx$, $\forall\varphi \in D(\mathbf{R}^1)$. Последния интеграл интегрирайте по части поотделно в интервалите $(-\infty, -\varepsilon)$ и $(\varepsilon, +\infty)$.

5.6. Покажете, че формулата

$$\left\langle P\left(\frac{1}{x^2}\right), \varphi\right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2}dx, \ \forall\varphi \in D(\mathbf{R}^1),$$

определя сингулярна обобщена функция от $D'(\mathbf{R}^1)$. След това установете, че $\left[P\left(\frac{1}{x}\right)\right]' = -P\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Упътване. Ако supp $\varphi \subset [-a,a]$, то $\left\langle P\left(\frac{1}{x^2}\right), \varphi\right\rangle = \int\limits_{-a}^{a} \frac{\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0)}{x^2} dx$. После вземете предвид равенствата

$$\left\langle \left[P\left(\frac{1}{x}\right)\right]', \varphi \right\rangle = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{\varphi(\varepsilon) + \varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} - \int\limits_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx \right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{\varphi(\varepsilon) + \varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} - \left\langle P\left(\frac{1}{x^2}\right), \varphi \right\rangle - \varphi(0) \int\limits_{|x| \geq \varepsilon} \frac{dx}{x^2} \right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)}{\varepsilon} - \frac{\varphi(-\varepsilon) - \varphi(0)}{-\varepsilon} \right) - \left\langle P\left(\frac{1}{x^2}\right), \varphi \right\rangle.$$

5.7. Докажете, че редът $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}$ е сходящ в $D'(\mathbf{R}^1)$, ако $|a_k| \leq A|k|^m$, $m = \text{const} > 0$. , $k \neq 0$.

Упътване. Разгледайте реда $a_0 x^{m+2}/(m+2)!$

$$+ \sum_{-\infty, k \neq 0}^{\infty} a_k e^{ikx}/(ik)^{m+2} \text{ в } C(\mathbf{R}^1).$$

5.8. (Формула за скока.) Нека функцията $f \in C^1(\mathbf{R}^1 \setminus \{x_0\})$ и съществуват $\lim\limits_{x \to x_0 \pm 0} f(x) = f(x_0 \pm 0) \neq \infty$. Да означим с $[f]_{x_0} = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$, а с $\{f'(x)\}$ — регулярното разпределение, породено от $f'(x)$, $x \neq x_0$. Покажете, че ако f' е обобщената производна на f, то $f' = \{f'\} + [f]_{x_0} \delta(x - x_0)$.

5.9. Разгледайте 2π-периодичната функция $f(x)$, дефинирана като $x/2 - x^2/4\pi$ в интервала $[0, 2\pi]$. Пресметнете f' и f'' в смисъл на $D'(\mathbf{R}^1)$.

Отг. $f' = 1/2 - x/2\pi$, $f'' = -1/2\pi + \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi)$.

5.10. Докажете, че $\frac{1}{2\pi} \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx} = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi)$.

Упътване. Дефинираната в зад. 5.9 функция f е частично гладка и следователно може да бъде развита в равномерно сходящ ред на Фурие: $f(x) = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2\pi} \sum\limits_{k \neq 0} \frac{1}{k^2} e^{ikx}$. След това използвайте зад. 5.3 и 5.9.

5.11. Нека $f(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^1 \backslash \{x_0\})$ и за всяко естествено $k \geq 0$ съществуват $\lim\limits_{x \to x_0 \pm 0} f^{(k)}(x) = f^{(k)}(x_0 \pm 0) \neq \infty$. Да означим $[f^{(k)}]_{x_0} = f^{(k)}(x_0 + 0) - f^{(k)}(x_0 - 0)$, с $\{f^{(k)}\}$ — регулярната обобщена функция, породена от $f^{(k)}(x)$, $x \neq x_0$, и с $f^{(k)}$ — k-тата обобщена производна на $f \in D'(\mathbf{R}^1)$. Тогава е валидна формулата

$$f^{(k)}(x) = \{f^{(k)}(x)\} + \sum_{j=0}^{k-1} [f^{(j)}]_{x_0} \delta^{(k-j-1)}(x - x_0).$$

Упътване.

$$< f^{(k)}, \varphi >= (-1)^k < f, \varphi^{(k)} >= (-1)^k \left[\int\limits_{-\infty}^{x_0} f \varphi^{(k)} dx + \int\limits_{x_0}^{\infty} f \varphi^{(k)} dx \right].$$

Двата последни интеграла обработете чрез k-кратно интегриране по части, имайки предвид, че $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^1)$.

Въпрос. Как ще изглежда горният резултат, ако функцията $f(x)$ притежава изброимо много *изолирани* точки на прекъсване $\{x_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$, т.е. такива точки, за които $|x_\nu - x_\mu| \geq a > 0$ при $\nu \neq \mu$?

5.12. Пресметнете:

1) $(\theta(x) x^{m-k})^{(m)}$, $k = 1, \ldots, m$; 2) $(\theta(x) \sin x)^{(m)}$;
3) $(\theta(x) \cos x)^{(m)}$; 4) $|\sin x|''$; 5) $|\cos x|''$.

Отг. 1) $(m - k)!\ \delta^{(k-1)}(x)$; 4) $-\{|\sin x|\} + 2 \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k\pi)$.

5.13. Установете, че уравнението $u' = 0$, $u \in D'(\mathbf{R}^1)$, притежава само решения от вида $u = C$, където $C = \text{const}$ е регулярната обобщена функция $< C, \varphi >= C \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx$.

Упътване. $u' = 0$ означава, че $< u, \varphi' >= 0$, $\forall \varphi \in D(\mathbf{R}^1)$. Нека $g \in D(\mathbf{R}^1)$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 1$. Разгледайте след това функцията $\varphi(x) - g(x) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = \varphi_0(x)$ (при g фиксирано) и за $\varphi_0(x)$ приложете зад. 3.5, т.е. убедете се, че $\varphi_0 = \psi'$, $\psi \in D(\mathbf{R}^1)$.

5.14. В $D'(\mathbf{R}^1)$ намерете общото решение на уравнението $u^{(m)} = 0$, $m \geq 2$.

5.15. В $D'(\mathbf{R}^1)$ решете уравнението $x^m u(x) = 0$, $m \geq 1$.

Упътване. Нека u удовлетворява $x^m u = 0$ и $\varphi \in D(\mathbf{R}^1)$. Въз основа на зад. 3.4

$$< u, \varphi >=< u, x^m \psi > + \sum_{k=0}^{m-1} < u, \eta x^k > \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!},$$

където $\psi \in D(\mathbf{R}^1)$, $\eta \in D(\mathbf{R}^1)$ и $\eta \equiv 1$ в някоя околност на 0. Следователно

$$< u, \varphi >= \sum_{k=0}^{m-1} c_k \delta^{(k)}(x), \ c_k = (-1)^k \frac{(u, \eta x^k)}{k!}.$$

Отг. $u = \sum\limits_{k=0}^{m-1} c_k \delta^{(k)}(x)$, където c_k са произволни константи.

5.16. В $D'(\mathbf{R}^1)$ намерете всичките решения на уравненията:

1) $\alpha(x)u = 0$, където $\alpha \in C^\infty(\mathbf{R}^1)$, $\alpha(0) = \cdots = \alpha^{(m-1)}(0) = 0$, $\alpha^{(m)}(0) \neq 0$ и $\alpha(x) \neq 0$ за $x \neq 0$;

2) $x^n u^{(m)} = 0$ при $n > m$.

Отг. 2) $u = \sum\limits_{k=0}^{m-1} a_k \theta(x) x^{m-k-1} + \sum\limits_{k=m}^{n-1} b_k \delta^{(k-m)}(x) + \sum\limits_{k=0}^{m-1} c_k x^k$,

a_k, b_k, c_k са произволни константи.

5.17. Решете следните нехомогенни уравнения в класа $D'(\mathbf{R}^1)$:

1) $xu' = 1$; 2) $xu' = P\left(\frac{1}{x}\right)$;

3) $u'' = \delta(x)$; 4) $x^2u = 1$.

Отг. Общите решения се задават от:

1) $\ln|x| + c_1 + c_2\theta(x)$;

2) $u = c_1 + c_2\theta(x) - P\left(\frac{1}{x}\right)$;

3) $x\theta(x) + c_1x + c_2$;

4) $P\left(\frac{1}{x^2}\right) + c_1\delta(x) + c_2\delta'(x)$, където c_1 и c_2 са произволни константи.

5.18. Установете, че уравнението $2x^3u' + u = 0$ не притежава нетривиално решение в D'.

Упътване. Използвайте зад. 4.15 и 4.16.

С оглед по-нататъшните цели ще въведем едно специално разпределение. И така нека S е частично гладка повърхнина в $\mathbf{R}^n$, заграждаща някаква област $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, а $\nu(x)$ е частично гладка функция върху S. Да означим, както е общоприето, с $n(x)$ единичната външна нормала към S в т. $x \in S$. Обобщената функция *потенциал от двоен слой* върху S: $-\frac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_S)$ с плътност ν се дефинира чрез формулата

$$-\left\langle \frac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_S), \varphi \right\rangle = \int\limits_S \nu(x)\frac{\partial\varphi}{\partial n_x}dS, \ \forall\varphi \in D(\mathbf{R}^n).$$

5.19. (Формула за скока в многомерния случай.) Да предположим, че ограничената област $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ е заградена с частично гладка повърхнина S и функцията $f \in C^1(\overline{\Omega}) \bigcap C^1(\overline{\Omega}_1)$, където $\Omega_1 = \mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. Нека $[f]_S(x) = \lim\limits_{x' \to x, x' \in \Omega_1} f(x') - \lim\limits_{x'' \to x, x'' \in \Omega} f(x'')$ е скокът на f върху S в точката $x \in S$, а $\left\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\}$ е регулярното разпределение, породено от $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ при $x \notin S$. Докажете тогава, че ако $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ е обобщената производна на $f \in D'(\mathbf{R}^n)$, то

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} + [f]_S \cos(n, x_i)\delta_S, \ 1 \le i \le n.$$

Упътване. $\left\langle \dfrac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = -\left\langle f, \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = -\int\limits_{\Omega} f(x) \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \int\limits_{\Omega_1} f(x) \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}$, $\forall \varphi \in D$. Двата последни интеграла обработете с формулата на Гаус — Остроградски, като имате предвид, че външните нормали към S, разглеждани като граници съответно на Ω и Ω_1, са противопосочни във всяка точка $x \in S$, т. е.

$$\int\limits_{\Omega} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int\limits_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi + \int\limits_{S} f|_i \varphi \cos(n, x_i) dS, f|_i(x) = \lim_{x'' \to x, x'' \in \Omega} f(x'');$$

$$\int\limits_{\Omega_1} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int\limits_{\Omega_1} \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi + \int\limits_{S} f|_e \varphi \cos(n, x_i) dS, f|_e(x) = \lim_{x' \to x, x' \in \Omega_1} f(x').$$

5.20. Ще считаме, че функцията $f \in C^2(\overline{\Omega}_1) \bigcap C^2(\overline{\Omega})$ и Δ_n е операторът на Лаплас: $\Delta_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. Покажете, че

$$\Delta f = \{\Delta f\} + \left[\frac{\partial f}{\partial n} \right]_S \delta_S + \frac{\partial}{\partial n}([f]_S \delta_S).$$

Упътване. Използвайте предишната задача и следните тъждества в D':

1) $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i}([f]_S \cos(n, x_i)\delta_S) = \dfrac{\partial}{\partial n}([f]_S \delta_S)$;

2) $\sum\limits_{i=1}^{n} \left[\left\{ \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \right\} \right]_S \cos(n, x_i)\delta_S) = \left[\dfrac{\partial f}{\partial n} \right]_S \delta_S$,

които установете сами.

5.21. Нека $\mathbf{R}^4 = \{(x, t), \ x \in \mathbf{R}^3\}$. Да допуснем, че функцията $u(x, t) \in C^2(t \ge 0)$ и $u = 0$ при $t < 0$. Ако $\Box u = u_{tt} - \Delta_3 u$ е вълновият оператор, а $Lu = u_t - \Delta_3 u$ — параболичният оператор в $\mathbf{R}^4$, покажете, че:

1) $\square u = \{\square u\} + u_t(x,0)\delta_{t=0} + \frac{\partial}{\partial t}[u(x,0)\delta_{t=0}]$;

2) $Lu = \{Lu\} + u(x,0)\delta_{t=0}$.

5.22. Проверете, че регулярното разпределение $|x|^{2-n}$, $n \geq 3$, удовлетворява в $D'(\mathbf{R}^n)$ уравнението $\Delta_n u = -c_n\delta(x)$, където $c_n = (n-2)\text{mes}\{x \in \mathbf{R}^n : |x| = 1\}$.

Решение. Веднага се проверява, че при $|x| > 0$ $\Delta_n(|x|^{2-n}) = 0$ в класически смисъл. По-нататък според определението на обобщена производна за всяко $\varphi \in D(\mathbf{R}^n)$ имаме

$$< \Delta_n(|x|^{2-n}), \varphi > = < |x|^{2-n}, \Delta_n\varphi >$$

$$= \int\limits_{\mathbf{R}^n} |x|^{2-n}\Delta_n\varphi dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|x|\geq\varepsilon} |x|^{2-n}\Delta_n\varphi dx.$$

Понеже $\varphi \in D$, то съществува такова число $R > 0$, че supp $\varphi \subset \{x : |x| \leq R\}$. За кълбовидния венец $0 < \varepsilon \leq |x| \leq R$ можем да приложим зад. 5.20 (защо?) и да заключим, че

$$\int\limits_{\varepsilon\leq|x|\leq R} |x|^{2-n}\Delta_n\varphi dx$$

$$= \int\limits_{\varepsilon\leq|x|\leq R} \varphi\Delta_n(|x|^{2-n})dx + \int\limits_{|x|=\varepsilon} \left[|x|^{2-n}\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial}{\partial n}(|x|^{2-n})\right] dx.$$

Тъй като външната нормала n към венеца в коя да е точка на сферата $|x| = \varepsilon$ е противопосочна с радиус-вектора r на същата точка, то $\partial/\partial n[|x|^{2-n}] = -(2-n)|x|^{1-n}$ при $|x| = \varepsilon$. Оттук заключаваме, че

$$\int\limits_{\varepsilon\leq|x|\leq R} |x|^{2-n}\Delta_n\varphi dx = \varepsilon^{2-n}\int\limits_{|x|=\varepsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS + (2-n)\varepsilon^{1-n}\int\limits_{|x|=\varepsilon}\varphi dS.$$

Лицето на n-мерната сфера $S(\varepsilon) = \{|x| = \varepsilon\}$ е равно на $\varepsilon^{n-1}c_n/(n-2)$ и следователно $\left|\varepsilon^{2-n}\int\limits_{|x|=\varepsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS\right| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$. Съгласно теоремата за средните стойности $\int\limits_{S(\varepsilon)} \varphi dS = \text{mes } S(\varepsilon)\cdot\varphi(x_\varepsilon) = \varepsilon^{n-1}\text{mes } S(1)\varphi(x_\varepsilon)$, където $x_\varepsilon \in S(\varepsilon)$. Така при $\varepsilon \to 0$ намираме, че

$$< \Delta_n(|x|^{2-n}), \varphi >= -\varphi(0)(n-2)\text{mes } S(1) = -c_n < \delta, \varphi > .$$

5.23. Установете, че $\Delta_2 \ln|x| = 2\pi\delta(x)$ в $D'(\mathbf{R}^2)$.

5.24. Докажете, че локално сумируемите функции $\mathcal{E} = -\dfrac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}$, $\overline{\mathcal{E}} = -\dfrac{e^{-ik|x|}}{4\pi|x|}$, $x \in \mathbf{R}^3$, са решения на уравнението $\Delta_3\mathcal{E} + k^2\mathcal{E} = \delta$, където $k \in \mathbf{R}^1$, $k = \text{const}$.

Упътване. Понеже $e^{ik|x|}/|x| = \cos k|x|/|x| + i\sin k|x|/|x|$ и $\cos k|x| \in C^\infty(\mathbf{R}^3)$, $|x|^{-1}\sin k|x| \in C^\infty(\mathbf{R}^3)$, при пресмятането на $\Delta_3(\cos k|x|\cdot|x|^{-1})$ в D' е приложимо правилото на Лайбниц. Използвайте освен това равенствата $\Delta_3(|x|^{-1}) = -4\pi\delta(x)$ в D' и $(\Delta_3 + k^2)(|x|^{-1}\sin k|x|) = 0$ в $C^\infty(\mathbf{R}^3)$.

5.25. Да разгледаме в $\mathbf{R}^2 = \{(x,t),\ x \in \mathbf{R}^1\}$ оператора $\Box_1 = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$, $a = \text{const} > 0$. Покажете, че регулярното разпределение $\mathcal{E}_1(x,t) = \frac{1}{2a}\theta(t)\theta(at-|x|)$ удовлетворява уравнението $\Box\mathcal{E}_1 = \delta(x,t)$.

Решение. Според определението на втора обобщена производна, за всяко $\varphi \in D(\mathbf{R}^2)$ имаме, че

$$< \Box_1\mathcal{E}_1, \varphi >=< \mathcal{E}_1, \Box_1\varphi >= \frac{1}{2a}\int\limits_{\mathbf{R}^2} \theta(t)\theta(at-|x|)\Box_1\varphi dx\ dt$$

$$= \frac{1}{2a}\int\limits_{\Delta} \Box_1\varphi dxdt,$$

където $\Delta = \{(x,t) : t \geq 0,\ |x| \leq at\}$. Да забележим, че триъгълникът Δ може да се представи още като: $\Delta = \{(x,t) : -\infty < x < \infty,\ t \geq |x|/a\}$. Следователно

$$< \Box_1\mathcal{E}_1, \varphi >= \frac{1}{2a}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\int\limits_{|x|/a}^{\infty}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}dt\right]dx - \frac{a}{2}\int\limits_{0}^{\infty}\left[\int\limits_{-at}^{at}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}dx\right]dt$$

$$= -\frac{1}{2a}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\left(x,\frac{|x|}{a}\right)dx - \frac{a}{2}\int\limits_{0}^{\infty}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}(at,t) - \frac{\partial\varphi}{\partial x}(-at,t)\right]dt.$$

В интегралите $\int\limits_{-\infty}^{0}\varphi'_t\left(x,\frac{|x|}{a}\right)dx$, $\int\limits_{0}^{\infty}\varphi'_t\left(x,\frac{|x|}{a}\right)dx$ правим смените $x = -at$, $t \geq 0$, и съответно $x = at$, $t \geq 0$. Така намираме

$$\begin{aligned}
< \Box_1\mathcal{E}_1,\varphi > &= \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty}\left[-\frac{\partial\varphi}{\partial t}(-at,t) + a\frac{\partial\varphi}{\partial x}(-at,t)\right]dt \\
&- \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}(at,t) + a\frac{\partial\varphi}{\partial x}(at,t)\right]dt \\
&= -\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{d}{dt}[\varphi(-at,t)]dt - \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{d}{dt}[\varphi(at,t)]dt \\
&= \varphi(0,0) =< \delta,\varphi > .
\end{aligned}$$

5.26. Да дефинираме последователно в $D'(\mathbf{R}^2)$ следните обобщени функции: $< \theta(t)\delta(at \pm x),\varphi > = \int\limits_{0}^{\infty}\varphi(\mp at,t)dt$, $\forall\varphi \in D$,

$$\delta(at - |x|) = \theta(t)\delta(at + x) + \theta(t)\delta(at - x).$$

Пресметнете:

1) $\frac{\partial}{\partial t}\theta(at - |x|)$; 2) $\frac{\partial}{\partial x}\theta(at - |x|)$.

Отг. 1) $a\delta(at - |x|)$; 2) $\theta(t)\delta(at + x) - \theta(t)\delta(at - x)$.

5.27. В равнината $\mathbf{R}^2$ въвеждаме комплексна структура с формулата $z = x + iy$, линейната диференциална форма $dz = dx + idy$ и оператора на Коши — Риман $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$. Нека Ω е ограничена област в $\mathbf{R}^2$, заградена от частично гладката крива S. Да предположим, че функцията $f \in C^1(\overline{\Omega})$ и $f = 0$ в $\mathbf{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$. Докажете, че ако $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$ е обобщената производна на f и $\left\{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right\}$ е регулярното разпределение, породено от $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$ при $\overline{z} \notin S$, то:

1) $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \left\{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right\} - \frac{f}{2}[\cos(n,x) + i\cos(n,y)]\delta_S;$

2) $\int\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \overline{z}}(f\varphi)dxdy = -\frac{i}{2}\int\limits_{S} f\varphi dz,\ \forall\varphi \in D(\mathbf{R}^2).$

В първото равенство n е външната нормала към S.

Упътване към т. 2). Съгласно т.1) $\left\langle\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}, \varphi\right\rangle = \int\limits_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\varphi dxdy - \int\limits_{S} f/2[\cos(n,x) + i\cos(n,y)]dS$ и по дефиницията на $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \in D'$ имаме, че

$$\left\langle\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}, \varphi\right\rangle = -\left\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}}\right\rangle = -\int\limits_{\Omega} f\frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}}dxdy.$$

За да преработите интеграла върху кривата S, разгледайте такова нейно параметрично представяне $S : x = x(t),\ y = y(t)$, за което точката $(x(t),\ y(t))$ описва S в положителна посока. Понеже единичната външна нормала n към кривата S е с координати $n = (x'^2 + y'^2)^{-1/2}(y', -x')$ и $dS = \sqrt{x'^2 + y'^2}dt$, то $dy = y'dt = \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}dt = \cos(n,x)dS$; $\cos(n,y)dS = -dx$.

5.28. Установете, че регулярната обобщена функция $\frac{1}{z}$ удовлетворява уравнението $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{1}{z}\right) = \pi\delta(x,y)$.

Упътване. Приложете начина, използван при решаване на зад. 5.22, т. 2 от зад. 5.27 и равенството $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{1}{z}\right) = 0,\ z \neq 0$.

5.29. Да разгледаме обикновения линеен диференциален оператор с C^∞ коефициенти $Lu = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu(x)u^{(n-\nu)}(x),\ a_0 \equiv 1,\ u \in D'(\mathbf{R}^1)$. Нека $z(x)$ е решение на следната задача на Коши: $Lz = 0$, $z(0) = \cdots = z^{(n-2)}(0) = 0,\ z^{(n-1)}(0) = 1$. Проверете, че регулярното разпределение $\mathcal{E}(x) = \theta(x)z(x)$ е решение на уравнението $L\mathcal{E} = \delta(x)$.

5.30. (Задача за δ-подобните редици.) Нека е зададена следната редица от локално сумируеми функции в $\mathbf{R}^n : \{f_\nu\}$. Да предположим, че за всеки затворен паралелепипед $K_0 \subset \mathbf{R}^n$ съществува число $C(K_0)$ и такова, че щом затвореният паралелепипед $K \subset K_0$ са изпълненеи следните условия:

1) $\left|\int\limits_K f_\nu(x)dx\right| \leq C(K_0)$;

2) $\lim\limits_{\nu\to\infty} \int\limits_K f_\nu(x)dx = \begin{cases} 0, \text{ т. } 0 \notin K (0 \text{ е началото}), \\ 1, \text{ т. } 0 \text{ лежи във вътрешността на } K. \end{cases}$

Докажете, че $\lim\limits_{\nu\to\infty} f_\nu(x) = \delta(x)$ в $D'(\mathbf{R}^n)$.

Упътване. Разгледайте редицата $F_\nu(x) = \int\limits_{-1}^{x_1} \cdots \int\limits_{-1}^{x_n} f_\nu(\xi)d\xi$ и покажете, че $F_\nu(x) \xrightarrow[\nu\to\infty]{} \theta(x_1)\dots\theta(x_n)$ в D'. След това се възползвайте от равенствата $\frac{\partial}{\partial x_j}\theta(x_j) = \delta(x_j)$.

5.31. Установете, че $f_\nu(x) \to \delta(x)$, $x \in \mathbf{R}^1$, когато:

1) $f_\nu(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\nu}{\nu^2x^2+1}$; 2) $f_\nu(x) = \begin{cases} \nu/2, & |x| \leq 1/\nu, \\ 0, & |x| > 1/\nu; \end{cases}$

3) $f_\nu(x) = \sqrt{\frac{\nu}{\pi}}e^{-x^2\nu}$; 4) $f_\nu(x) = \frac{1}{\pi x}\sin \nu x$.

§ 6. Тензорно произведение и конволюция на разпределения. Потенциали

Тензорно произведение на разпределенията $f(x) \in D'(\mathbf{R}^n_x)$, $g(y) \in D'(\mathbf{R}^m_y)$ ще наричаме разпределението $f(x) \otimes g(y) \in D'(\mathbf{R}^{m+n})$, дефинирано с формулата

$$(1) \qquad \langle f \otimes g, \varphi(x,y)\rangle = \langle f(x), \langle g(y), \varphi(x,y)\rangle\rangle, \ \forall\varphi \in D(\mathbf{R}^{m+n}).$$

Току-що въведената операция притежава редица важни свойства, които последователно ще изброим. Любознателният читател може да намери доказателствата им например в [5], [6] или [8a]. Ние ще използваме всички тези резултати наготово. Да отбележим първо, че дефиницията (1) е коректна, защото, ако $\varphi(x,y) \in D(\mathbf{R}^{m+n})$, $f \in D'(\mathbf{R}^n_x)$ и $g \in D'(\mathbf{R}^m_y)$, то

1. Съществува функцията $\psi(x) = \langle g(y), \varphi(x,y)\rangle$ и $\psi(x) \in D(\mathbf{R}^n_x)$.

2. За всеки мултииндекс α е валидна релацията

$$D^\alpha\psi(x) = \langle g(y), D^\alpha_x \ \varphi(x,y)\rangle.$$

3. Щом редицата $\varphi_\nu \overset{\cdot}{\rightarrow} 0$ в $D(\mathbf{R}^{m+n})$, то $\psi_\nu(x) \to 0$ в $D(\mathbf{R}^n_x)$.

Да приведем сега основните свойства на тензорното произведение, валидни за всяка тройка обобщени функции $f \in D'(\mathbf{R}^n_x)$, $g \in D'(\mathbf{R}^m_y)$, $h \in D'(\mathbf{R}^p_z)$.

4. $f \otimes g = g \otimes f$ (комутативност).

5. $(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$ (асоциативност).

6. Ако редицата $f_\nu \to f$ в $D'(\mathbf{R}_x^n)$ и g е кой да е елемент на $D'(\mathbf{R}_y^m)$, то $f_\nu \otimes g \to f \otimes g$ (разделна непрекъснатост) в $D'(\mathbf{R}^{m+n})$.

7. За всеки мултииндекс $\alpha : D_x^\alpha(f(x) \otimes g(y)) = (D^\alpha f) \otimes g$.

8. $\mathrm{supp}(f \otimes g) = \mathrm{supp}\, f \times \mathrm{supp}\, g$, където със знака "$\times$" сме означили декартовото произведение на множествата $\mathrm{supp}\, f \subset \mathbf{R}_x^n$ и $\mathrm{supp}\, g \subset \mathbf{R}_y^m$.

9. Щом функцията $a \in C^\infty(\mathbf{R}_x^n)$, то $a(x)(f \otimes g) = (a(x)f(x)) \otimes g$.

За да можем в следващите задачи да обхванем и пространството S', ще отбележим, че за коя да е двойка $f \in S'(\mathbf{R}_x^n)$, $g \in S'(\mathbf{R}_y^m)$ тензорното произведение $f \otimes g \in S'(\mathbf{R}^{m+n})$ се дефинира с формулата (1), разглеждана за всяко $\varphi \in S(\mathbf{R}^{m+n})$. Така дефинираната операция в S' притежава свойствата 1. – 8., като навсякъде вместо D стои S, респективно вместо D' — S'. Например свойство 1. добива вида:

Ако $\varphi(x, y) \in S(\mathbf{R}^{m+n})$ и $g \in S'(\mathbf{R}_y^m)$, то съществува функцията $\psi(x) = \langle g(y), \varphi(x, y)\rangle$ и $\psi \in S(\mathbf{R}_x^n)$.

6.1. Ако h е фиксиран вектор в $\mathbf{R}_x^n$, покажете, че

$$(f \otimes g)(x + h, y) = f(x + h) \otimes g(y).$$

6.2. Нека $f \in D'(\mathbf{R}_x^n)$ $(S'(\mathbf{R}_x^n))$. Докажете, че

$$\langle f(x), \int\limits_{\mathbf{R}_y^m} \varphi(x, y)dy\rangle$$

$$= \int\limits_{\mathbf{R}_y^m} \langle f(x), \varphi(x, y)\rangle dy, \forall\varphi \in D(\mathbf{R}^{m+n})(S(\mathbf{R}^{m+n}))$$

Упътване. Използвайте комутативността на тензорното произведение на обобщените функции $f(x)$ и $1(y) \in D'(\mathbf{R}_y^m)$ $(S'(\mathbf{R}_y^m))$.

6.3. Пресметнете:

1. $\dfrac{\partial^n \theta(x)}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}$, където $\theta(x) = \theta(x_1) \ldots \theta(x_n)$;
2. $\delta(x_1) \otimes \ldots \otimes \delta(x_n)$;

3. $\frac{\partial}{\partial t}\theta(x,t)$, където $(x,t) \in \mathbf{R}^n_x \otimes \mathbf{R}^1_t$ и $\theta(x,t) = \theta(x)\theta(t)$;

4. $-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\theta(x,t)$, ако $\theta(x,t)$ е функцията, определена в т. 3;

5. $\nu(x) \otimes \delta(t)$, $\nu \in C(\mathbf{R}^n_x)$;

6. $-\nu(x) \otimes \delta'(t)$, ако $\nu \in C(\mathbf{R}^n_x)$ и $t \in \mathbf{R}^1$.

Отг. 1. $\delta(x)$; 2. $\delta(x)$;

3. потенциал от прост слой върху хиперравнината $t = 0$ в $\mathbf{R}^{n+1}$ с плътност $\theta(x)$;

4. потенциал от двоен слой върху хиперравнината $t = 0$ с плътност $\theta(x)$;

5. потенциал от прост слой върху $t = 0$ с плътност $\nu(x)$;

6. потенциал от двоен слой върху хиперравнината $t = 0$ с плътност $\nu(x)$.

6.4. Да предположим, че $f(x) \in D'(\mathbf{R}^n_x)$ и мултииндексът $\alpha \neq 0$. Установете, че $D^\alpha_y(f(x) \otimes 1(y)) = 0$.

6.5.* В $\mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}^1_t$ е дефинирана обобщената функция u, за която $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$. Докажете, че съществува разпределение $f(x) \in D'(\mathbf{R}^n_x)$, такова, че $u(x,t) = f(x) \otimes 1(t)$.

Упътване. Използвайте зад. 5.13.

6.6. Нека функциите f, g и $\int\limits_{\mathbf{R}^n} |f(x-y)g(y)|dy$ са локално сумируеми в $\mathbf{R}^n$. Интеграла

$$(f * g)(x) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

ще наричаме конволюция на функциите f и g. Покажете, че конволюцията съществува, ако е изпълнено поне едно от следните условия:

1) f или g е функция с компактен носител;

2) f, $g \in L_1(\mathbf{R}^n)$;

3) при $n = 1$ функциите f и g са локално сумируеми в $\mathbf{R}^1$ и $f(x) = g(x) = 0$ при $x < 0$.

Решение на т. 2). Понеже съществува повторният интеграл $\int\limits_{\mathbf{R}^n} |g(y)| \left[\int\limits_{\mathbf{R}^n} |f(x-y)|dx\right] dy = \int\limits_{\mathbf{R}^n} |g(y)|dy \cdot \int\limits_{\mathbf{R}^n} |f(x)|dx$, то съгласно обратната теорема на Фубини $f(x-y)g(y) \in L_1(\mathbf{R}^{2n})$ и следователно $(f * g)(x) \in L_1(\mathbf{R}^n)$.

Упътване към т. 3). Разгледайте функцията $\int\limits_0^x f(x-y)g(y)dy$ и използвайте решението на т. 2).

6.7. Нека f, g, $h \in L^1(\mathbf{R}^n)$. Докажете, че $f * g = g * f$ и $(f * g) * h = f * (g * h)$.

6.8. Да предположим, че функциите f, g и $f * g$ са локално сумируеми в $\mathbf{R}^n$. Проверете, че

$$\operatorname{supp}(f * g) \subset [\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g]^T .$$

(Напомняме, че ако A и B са подмножества на $\mathbf{R}^n$, то $A + B = \{x + y : x \in A,\, y \in B\}$.)

Упътване. Нека $(f * g)(x_0) \neq 0$. Тогава $\operatorname{supp} f(x_0 - y) \bigcap \operatorname{supp} g(y) \neq \emptyset$. Значи съществува точка $y_0 \in \operatorname{supp} g \cap \operatorname{supp} f(x_0 - y) = \operatorname{supp} g \cap [x_0 - \operatorname{supp} f]$.

6.9. Дадени са локално сумируемите функции f, g, $f(x) = g(x) = 0$ при $x < 0$. Пресметнете:

$$1)\ f * g;\ \ 2)\ \theta * \theta;\ \ 3)\ \theta * (\theta x^2);\ \ 4)\ \theta * (\theta x^n).$$

Отг. 1) $\theta(x) \int\limits_0^x f(y)g(x-y)dy$; 2) θx; 3) $\theta x^3/3$.

6.10. В $\mathbf{R}^1$ пресметнете: $e^{-|x|} * e^{-|x|}$ и $\theta(a - |x|) * \theta(a - |x|)$, $a > 0$.

Отг. $e^{-|x|}(1 + |x|)$, $\theta(2a - |x|)(2a - |x|)$.

Една редица $\{\eta_\nu\} \subset D(\mathbf{R}^n)$ ще наричаме сходяща към единица в $\mathbf{R}^n$, ако: 1) за всяко $R > 0$ съществува такова число $N(R)$, че щом $\nu > N$, то $\eta_\nu(x) \equiv 1$ за всяко x, $|x| \leq R$; 2) за кой да е мултииндекс α съществува такава константа $C_\alpha \rangle 0$, щото $|D^\alpha \eta_\nu(x)| \leq C_\alpha$, $\forall x \in \mathbf{R}^n$. Съгласно зад. 3.3 такива редици съществуват.

6.11. В $\mathbf{R}^n$ са зададени сумируемите функции f и g. Установете, че:

1) $\langle f * g, \varphi \rangle = \int\limits_{\mathbf{R}^{2n}} f(x)g(y)\varphi(x+y)dxdy, \ \forall \varphi \in D(\mathbf{R}^n)$;

2) $\langle f * g, \varphi \rangle = \lim\limits_{\nu \to \infty} \langle f(x)g(y), \eta_\nu(x,y)\varphi(x+y) \rangle, \ \forall \varphi \in D(\mathbf{R}^n)$, където $\{\eta_\nu\} \subset D(\mathbf{R}^{2n})$ е сходяща към единица.

Решение на т. 2). Понеже $f(x)g(y)\varphi(x+y) \in L_1(\mathbf{R}^{2n})$, $|f(x)g(y)\eta_\nu(x,y)\varphi(x+y)| \leq c_0|f(x)g(y)\varphi(x+y)|$ и $f(x)g(y)\eta_\nu\varphi(x+y) \underset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} f(x)g(y)\varphi(x+y)$, твърдението в т. 2) е следствие от теоремата на Лебег за граничен преход.

Централно място в този параграф заема следната дефиниция. Нека разпределенията f, $g \in D'(\mathbf{R}_x^n)$ са такива, че за всяка редица $\{\eta_\nu(x,y)\} \subset D(\mathbf{R}^{2n})$, която клони към единица в $\mathbf{R}^{2n}$, съществува и не зависи от специалния избор на $\{\eta_\nu\}$ следната граница:

$$\lim_{\nu \to \infty} \langle f(x) \otimes g(y), \ \eta_\nu(x,y)\varphi(x+y) \rangle, \ \forall \varphi \in D(\mathbf{R}^n).$$

Тогава конволюция $f * g$ на обобщените функции f и g ще наричаме линейния функционал

$$(2) \qquad \langle f * g, \varphi \rangle = \lim_{\nu \to \infty} \langle f(x) \otimes g(y), \eta_\nu(x,y)\varphi(x+y) \rangle, \forall \varphi \in D(\mathbf{R}^n),$$

ако той принадлежи на $D'(\mathbf{R}^n)$.

Въпрос. Какво можете да кажете за носителя на $\varphi(x+y)$ в $\mathbf{R}^{2n}$?

6.12. Нека съществува конволюцията $f * g$ на разпределенията f, $g \in D'(\mathbf{R}^n)$. Докажете, че тогава съществува конволюцията $g * f$ и $f * g = g * f$.

6.13. Да предположим, че $f \in D'(\mathbf{R}^n)$. Установете, че винаги съществуват конволюциите $f * \delta$ и $f * \delta = f$.

6.14. Ще считаме, че съществува конволюцията $f * g$ на обобщените функции f и $g \in D'(\mathbf{R}^n)$. Покажете, че за всеки мултииндекс α съществуват конволюциите $(D^\alpha f) * g$, $f * D^\alpha g$, като при това $D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g = f * D^\alpha g$.

Упътване. Изходете от определението (2) и проверете, че ако редицата $\{\eta_\nu\}$ клони към 1 в $\mathbf{R}^{2n}$, същото свойство притежава и редицата $\left\{\eta_\nu + \dfrac{\partial \eta_\nu}{\partial x_j}\right\}$. След това използвайте дефиницията на обобщената производна $\frac{\partial}{\partial x_j}(f * g)$ и тъждеството

$$\eta_\nu \frac{\partial \varphi(x+y)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}[\eta_\nu \varphi(x+y)] - \left(\eta_\nu + \frac{\partial \eta_\nu}{\partial x_j}\right) \varphi(x+y) + \eta_\nu \varphi(x+y),$$

за да докажете, че $\frac{\partial}{\partial x_j}(f * g) = \frac{\partial f}{\partial x_j} * g$.

6.15. Проверете, че за всяко $f \in D'(\mathbf{R}^n)$ и за всеки мултииндекс α съществува конволюцията $D^\alpha f * \delta$. Пресметнете $f * D^\alpha \delta$.

Въпрос. Какъв извод можете да направите от равенствата $\theta' * 1 = \delta$ и $\theta * 1' = 0$?

Отг. От съществуването на $D^\alpha f * g$ и $f * D^\alpha g$ при някое $\alpha \neq 0$

не следва, въобще казано, съществуването на $f * g$.

6.16. Да означим с E множеството на онези обобщени функции, за които съществува конволюцията с разпределението 1. Очевидно E е линейно подпространство на D'. Убедете се, че операцията $f \rightarrow f * 1$ не е непрекъсната от E в $D'(\mathbf{R}^1)$.

Упътване. Разгледайте редицата $\{\delta(x - \nu)\} \subset E$.

6.17. Предполага се, че съществува конволюцията $f * g$. Установете, че $\operatorname{supp}(f * g) \subset [\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g]^T$.

Решение. Нека $\varphi \in D(\mathbf{R}^n)$ и $\operatorname{supp} \varphi \cap [\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g]^T = \emptyset$. Тогава съгласно свойство 8 на тензорното произведение

$$\operatorname{supp}(f \otimes g) \cap \operatorname{supp}(\eta_\nu \varphi(x+y)) \subset (\operatorname{supp} f \times \operatorname{supp} g) \cap \{(x,y) : x+y \in \operatorname{supp} \varphi\}.$$

По допускане последното множество е празно, т.е. $\langle f \otimes g, \eta_\nu \varphi(x + y)\rangle = 0$. Следователно $\langle f * g, \varphi \rangle = 0$.

6.18. Нека $u(x,t) \in D'(\mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}^1_t)$. Пресметнете:

1) $[D^\alpha \delta(x) \otimes \delta^{(\beta)}(t)] * u(x,t)$;
2) $[\delta(x - a) \otimes \delta^{(m)}(t)] * u(x,t)$.

Отг. 1) $D^\alpha_x D^\beta_t u(x,t)$; 2) $D^m_t u(x - a, t)$.

6.19.* Зададено е разпределението $u \in D'(\mathbf{R}^n)$. Да разгледаме линейния оператор T_u, дефиниран в $D(\mathbf{R}^n)$ с формулата $T_u(\varphi)(x) = \langle u(y), \varphi(x - y)\rangle$, $\varphi \in D(\mathbf{R}^n)$. Докажете, че операторът T_u притежава следните свойства:

1) $T_u(\varphi) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ за всяко $\varphi \in D(\mathbf{R}^n)$;

2) $D_x^\alpha(T_u(\varphi)) = T_u(D^\alpha\varphi)$;

3) $\operatorname{supp} T_u(\varphi) \subset [\operatorname{supp}\varphi + \operatorname{supp} u]^T$;

4) ако $T_u(\varphi) \in D(\mathbf{R}^n)$ за всяко $\varphi \in D(\mathbf{R}^n)$, то u притежава компактен носител.

Упътване към т. 2). За икономия на място при доказателството ще считаме, че $n = 1$. Фиксирайте функцията $\varphi \in D(\mathbf{R}^1)$ и разгледайте диференчното частно $\frac{1}{h}[(T_u\varphi)(x_0 + h) - (T_u\varphi)(x_0)]$ $= \frac{1}{h}\langle u(y),\ \varphi(x_0 + h - y) - \varphi(x_0 - y)\rangle$. След това покажете, че редицата $\{h^{-1}[\varphi(x_0 + h - y) - \varphi(x_0 - y)]\}$ клони към $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0 - y)$ в пространството $D(\mathbf{R}^1)$, когато $h \to 0$.

Упътване към т. 3). Щом $T_u(\varphi)(x) \neq 0 \Rightarrow \operatorname{supp} u \cap [x - \operatorname{supp}\varphi] \neq \emptyset$.

Решение на т. 4). Да допуснем противното. Ясно е, че може да се намери функция $\varphi_1 = \psi_1 \in D(\mathbf{R}^n)$, $\operatorname{supp}\varphi_1 \subset \{|x| \leq 1\}$, такава, че $T_u(\varphi_1)(x_1) \neq 0$ за някое x_1 и освен това $\operatorname{supp} T_u(\varphi_1) \subset \{|x| \leq r_1$ за някое подходящо $r_1 > 0\}$. След това строим функция $\varphi_2 \in D(\mathbf{R}^n)$, за която съществува точка x_2, притежаваща следните свойства: $T_u(\varphi_2)(x_2) \neq 0$, $|x_2| \geq r_1 + 1$, $\operatorname{supp}\varphi_2 \subset \{|x| \leq 1\}$. Впоследствие намираме функция $\psi_2 \in D(\mathbf{R}^n)$ от вида $\psi_2 = \varphi_2 - \lambda\varphi_1$, за която $T_u(\psi_2)(x_1) = 0$ и $T_u(\psi_2)(x_2) \neq 0$ ($\lambda = \text{const}$). По индуктивен път построяваме редиците $\{x_\nu\}$, $|x_\nu| \to \infty$ и $\{\psi_\nu\} \subset D(\mathbf{R}^n)$, удовлетворяващи следните изисквания: $\operatorname{supp}\psi_\nu \subset \{|x| \leq 1\}$ и $T_u(\psi_\nu)(x_\mu) = \delta_{\mu\nu}a_{\nu\mu}$, $a_{\nu\nu} \neq 0$ ($\delta_{\nu\nu} = 1$; $\delta_{\nu\mu} = 0$, $\nu \neq \mu$). Най-сетне разглеждаме реда

$$g(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \psi_\nu(x),$$

където константите c_ν са така подбрани, че

$$0 < c_\nu \operatorname*{supp}_{\mathbf{R}^n}\left(\sum_{|\alpha|\leq\nu} |D^\alpha\psi_\nu(x)|\right) \leq 2^{-\nu}.$$

Без труд се вижда, че $g(x) \in D(\mathbf{R}^n)$, защото редът е почленно диференцируем. Тогава $T_u(g)(x_\mu) = c_\mu a_{\mu\mu} \neq 0$. Търсеното противоречие следва от факта, че $|x_\mu| \to \infty$.

Въпрос. На какво основание е възможен в т. 4) изборът на функциите $\{\varphi_\nu\} \subset D(\mathbf{R}^n)$ и точките $\{x_\mu\}$, $|x_\mu| \to \infty$, за които $\operatorname{supp} \varphi_\nu \subset \{|x| \leq 1\}$ и $T_u(\varphi_\mu)(x_\mu) \neq 0$?

6.20. (Достатъчно условие за съществуване на конволюция.) Нека разпределенията $f, g \in D'(\mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}^1_t|$ и $\operatorname{supp} f \subset \{(x,t) : t \geq 0\}$, а $\operatorname{supp} g \subset \{(x,t) : at - |x| \geq 0,\ a = \text{const} > 0\}$. Покажете, че тогава съществува конволюцията $f * g$ и

$$(3)\quad \langle f * g, \varphi\rangle = \langle f(y,\tau) \otimes g(\xi,t), \eta(t)\eta(\tau)\eta(a^2t^2 - |\xi|^2)\varphi(\xi + y, t + \tau)\rangle,$$

$$\forall \varphi \in D(\mathbf{R}^{n+1}).$$

В горното представяне $\eta \in C^\infty(\mathbf{R}^1)$ е коя да е функция със свойствата: $\eta(t) = 0$ при $t < -\delta$, $\eta(t) = 1$ при $t > -\varepsilon$ и числата $0 < \varepsilon < \delta$ са произволни. След това проверете, че $\operatorname{supp}(f*g) \subset \{(x,t) : t \geq 0\}$. Най-сетне установете, че конволюцията $f*g$ е разделно непрекъсната, т. е.

1) щом $f_\nu \to f$ в $D'(\mathbf{R}^{n+1})$ и $\operatorname{supp} f_\nu \subset \{(x,t) : t \geq 0\}$, то $f_\nu * g \to f * g$ в $D'(\mathbf{R}^{n+1})$;

2) ако $g_\nu \to g$ в $D'(\mathbf{R}^{n+1})$ и $\operatorname{supp} g_\nu \subset \{(x,t) : at - |x| \geq 0\}$, то $f * g_\nu \to f * g$.

Решение. Фиксираме функцията $\varphi \in D(\mathbf{R}^{n+1})$ и следователно можем да намерим число $R\rangle 0$, за което $\operatorname{supp} \varphi \subset \{|x|^2 + t^2 \leq R^2\}$. Разглеждаме след това редицата $\{\eta_\nu(\xi, y, t, \tau)\} \subset D(\mathbf{R}^{2n+2})$, клоняща към 1 в $\mathbf{R}^{2n+2}$. Твърдим, че за всички достатъчно големи значения на ν е валидно равенството

$$\eta(t)\eta(\tau)\eta(a^2t^2 - |\xi|^2)\eta_\nu(\xi, y, t, \tau)\varphi(\xi + y, t + \tau)$$

$$\equiv \eta(t)\eta(\tau)\eta(a^2t^2 - |\xi|^2)\varphi(\xi + y, t + \tau) \equiv \psi.$$

За да установим този факт, ще покажем, че функцията $\psi \in D(\mathbf{R}^{2n+2})$. Наистина нека $(\xi, y, t, \tau) \in \operatorname{supp} \psi$. Тогава $t > -\delta$, $\tau > -\delta$, $a^2t^2 - |\xi|^2 \geq -\delta$ и $|y + \xi|^2 + |t + \tau|^2 \leq R^2$. Понеже $|t + \tau| \leq R$, то $\tau \leq R - t \leq R + \delta$. Следователно $-\delta \leq \tau \leq R + \delta$ и $-\delta \leq t \leq R + \delta$. Оттук пък виждаме, че $|\xi|^2 \leq a^2t^2 + \delta \leq \delta + a^2(R + \delta)^2$. Тъй като $|y + \xi| \leq R$, то $|y| \leq R + |\xi| \leq R + \sqrt{\delta} + a(R + \delta)$. С това желаното тъждество е установено. Както знаем от дефиницията на supp

f и supp g, $\eta(\tau)f(y,\tau) = f(y,\tau)$ и $\eta(t)\eta(a^2t^2 - |\xi|^2)g(\xi,t) = g(\xi,t)$. Следователно

$$\langle f(y,\tau)\otimes g(\xi,t), \eta_\nu\varphi(\xi+y,t+\tau)\rangle = \langle \eta(\tau)f(y,\tau)$$

$$\otimes\eta(t)\eta(a^2t^2 - |\xi|^2)g(\xi,t), \eta_\nu\varphi(\xi+y,t+\tau)\rangle$$

$$= \langle f(y,\tau)\otimes g(\xi,t), \eta(t)\eta(\tau)\eta(a^2t^2 - |\xi|^2)\varphi(\xi+y,t+\tau)\rangle$$

за всички достатъчно големи ν. И така доказахме съществуването на $f * g$. Да предположим, че $\{\varphi_\nu\} \to \varphi$ в $D(\mathbf{R}^{n+1})$. Веднага се съобразява, че $\eta(t)\eta(\tau)\eta(a^2t^2 - |\xi|^2)\varphi_\nu(\xi+y,t+\tau) \xrightarrow[\nu\to\infty]{} \psi$ в $D(\mathbf{R}^{2n+2})$. Понеже $f\otimes g \in D'(\mathbf{R}^{2n+2})$, то $f * g \in D'(\mathbf{R}^{n+1})$. Ние знаем, че $\mathrm{supp}(f*g) \subset [\mathrm{supp}\ f + \mathrm{supp}\ g]^T$, което ни учи, че $\mathrm{supp}(f*g) \subset \{t \geq 0\}$. Останалата част от доказателството довършете сами!

6.21. Нека f, $g \in D'(\mathbf{R}^n)$ и g е обобщена функция с компактен носител. Тогава в $D'(\mathbf{R}^n)$ съществува конволюцията $f * g$, която допуска следното представяне:

$$\langle f * g, \varphi\rangle = \langle f(x)\otimes g(y), \eta(y)\varphi(x+y)\rangle, \forall\varphi \in D(\mathbf{R}^n).$$

Тук $\eta \in D(\mathbf{R}^n)$ е коя да е функция със свойството $\eta \equiv 1$ в околност на supp g. Установете, че $f * g$ е разделно непрекъсната, т.е.

1) щом $f_\nu \to f$ в $D'(\mathbf{R}^n)$, то $f_\nu * g \to f * g$ в $D'(\mathbf{R}^n)$;
2) ако носителите на разпределенията g_ν се съдържат във фиксираното компактно множество K и $g_\nu \to g$ в D', то $f * g_\nu \to f * g$.

Упътване. Нека $\eta \in D(\mathbf{R}^n)$, $\eta \equiv 1$ в околност на supp g и редицата $\{\eta_\nu\} \subset D(\mathbf{R}^{2n})$ клони към 1 в $\mathbf{R}^{2n}$. Разгледайте функцията $\varphi \in D(\mathbf{R}^n)$ и установете, че за всички достатъчно големи значения на ν е изпълнено равенството $\eta_\nu(x,y)\eta(y)\varphi(x+y) = \eta(y)\varphi(x+y)$. За да докажете това тъждество, убедете се, че $\eta(y)\varphi(x+y) \in D(\mathbf{R}^{2n})$.

6.22. Да предположим, че $u \in D'(\mathbf{R}^n)$ и $\varphi \in D(\mathbf{R}^n)$. Съгласно зад. 6.21 съществува конволюцията $u * \varphi$. Докажете, че $(u * \varphi)(x) = \langle u(y),\ \varphi(x-y)\rangle$ и освен това $u * \varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Упътване. Нека $\psi \in D(\mathbf{R}^n)$ и $g \equiv 1$ в околност на supp φ. Тогава от зад. 6.21 и 6.2 имаме, че

$$\langle u * \varphi, \psi\rangle = \langle u(y) \otimes \varphi(\xi)g(\xi)\psi(\xi + y)\rangle = \langle u(y), \int\limits_{\mathbf{R}^n} \varphi(\xi)g(\xi)\psi(\xi + y)d\xi\rangle$$

$$= \langle u(y), \int\limits_{\mathbf{R}^n} \psi(x)\varphi(x - y)dx\rangle = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \psi(x)\langle u(y), \varphi(x - y)\rangle dx.$$

Въпрос. Защо $\varphi(\xi)\psi(\xi + y) \in D(\mathbf{R}^{2n})$?

Забележка. Зад. 6.19 ни учи, че $T_u(\varphi) = u * \varphi$.

6.23. Зададена е функцията $f \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ и g е разпределение с компактен носител. Проверете, че конволюцията $f * g$ може да се представи като $(f * g)(x) = \langle \eta(y)g(y),\ f(x - y)\rangle$, където $\eta \in D(\mathbf{R}^n)$ и $\eta \equiv 1$ в околност на supp g. Докажете, че $f * g \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$.

6.24. Да предположим, че $f \in D'(\mathbf{R}^n)$. Разгледайте редицата $f_\varepsilon = f * \varphi_\varepsilon$, където φ_ε е дефинирана в зад. 1.25, и покажете, че $f_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} f$ в $D'(\mathbf{R}^n)$.

6.25. (Задача за регуляризацията.) Нека g_ε е функцията, дефинирана в зад. 3.3. Установете, че за всяко $\varepsilon > 0$ функцията $g_\varepsilon f_\varepsilon = g_\varepsilon(f * \varphi_\varepsilon) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ и освен това $g_\varepsilon f_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} f$ в $D'(\mathbf{R}^n)$.

Забележка. Зад. 6.25 ни учи, че всяко разпределение може да се представи като граница на редица от функции от $D(\mathbf{R}^n)$ в пространството D'.

6.26. Пресметнете $\delta(x - \nu) * \delta(x + \nu)$ и $\lim\limits_{\nu \to \infty} \delta(x \pm \nu)$.

6.27. Да предположим, че $-\dfrac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_S) \in D'(\mathbf{R}^n)$ е потенциал от двоен слой върху гладката повърхнина S с частично непрекъсната плътност ν и S загражда някаква ограничена област Ω. При условие, че $f \in C^1(\mathbf{R}^n)$, пресметнете $f * \dfrac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_S)$.

Решение. Понеже supp $\left(\dfrac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_S)\right) \subset S$, търсената конволюция съществува и се представя във вида (4), за някое η, $\eta \equiv 1$, в околност S. И така

$$\begin{aligned}
\langle f * \frac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_S), \varphi\rangle &= \langle f(y) \otimes \frac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_S)(x), \eta(x)\varphi(x+y)\rangle \\
&= \langle f(y), \langle \frac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_S)(x), \eta(x)\varphi(x+y)\rangle\rangle \\
&= -\int\limits_{\mathbf{R}^n} f(y)\left[\int\limits_S \nu(x)\frac{\partial}{\partial n_x}(\eta\varphi)dS_x\right]dy \\
&= -\int\limits_{\mathbf{R}^n} f(y)\left[\int\limits_S \nu(x)\frac{\partial}{\partial n_x}\varphi(x+y)dS_x\right]dy \\
&= -\int\limits_S \nu(x)\frac{\partial}{\partial n_x}\left[\int\limits_{\mathbf{R}^n} f(y)\varphi(x+y)dy\right]dS_x \\
&= -\int\limits_S \nu(x)\left[\frac{\partial}{\partial n_x}\int\limits_{\mathbf{R}^n} f(y-x)\varphi(y)dy\right]dS_x \\
&= -\int\limits_S \nu(x)\left[\int\limits_{\mathbf{R}^n} \frac{\partial}{\partial n_x} f(y-x)\varphi(y)dy\right]dS_x.
\end{aligned}$$

Следователно $\left(f * \frac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_S)\right)(y) = -\int\limits_S \nu(x)\frac{\partial f(y-x)}{\partial n_x}dS_x$.

Обръщаме внимание, че горните повторни интеграли са в крайни граници, защото щом $x \in S$ и $x + y \in \operatorname{supp} \varphi$, то y описва някакво компактно множество. Значи са приложими както теоремата на Фубини, така и правилото на Лайбниц за диференциране под знака на интеграла.

6.28. Нека функцията $f \in C(\mathbf{R}^n)$, $\mu\delta_S$ е потенциал от прост слой върху частично гладката ограничена повърхнина S с частично гладка плътност μ и S загражда някаква област Ω. Намерете $f * \mu\delta_S$.

Отг. $(f * \mu\delta_S)(y) = \int\limits_S \mu(x)f(y-x)dS_x$.

6.29. Предполага се, че $\mu \in C(\mathbf{R}^n)$ и S е частично гладка повърхнина, заграждаща ограничената област Ω. Пресметнете конволюциите:

1) $|x|^{2-n} * \mu\delta_S$, $n \geq 3$; 2) $-\ln|x| * \mu\delta_S$, $n = 2$.

Отг. 1) $\int\limits_S |x-y|^{2-n}\mu(y)dS_y$; 2) $-\int\limits_S \ln|x-y|\mu(y)dS_y$.

Упътване. Функцията $|x|^{2-n}$ е локално сумируема в $\mathbf{R}^n$, $n \geq 3$, а $\ln|x|$ — в $\mathbf{R}^2$ и следователно конволюциите с финитното разпределение $\mu\delta_S$ сигурно съществуват.

Забележка. Току-що въведените конволюции се наричат *повърхнинни потенциали от прост слой* с плътност μ.

6.30. Дадена е локално сумируемата функция $\mathcal{E}_n(x) = |x|^{2-n}$, $n \geq 3$. Ако g е сумируема функция с компактен носител в $\mathbf{R}^n$, намерете

1) $V_n = \mathcal{E}_n * g$; 2) $\Delta_n(\mathcal{E}_n * g)$.

Упътване. Използвайте зад. 6.6 и 5.22.

Отг. 1) $V_n(x) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} |x-y|^{2-n}g(y)dy$, $n \geq 3$;

2) $-c_n g$, $c_n = (n-2)\text{mes}\{x : |x| = 1\ x \in \mathbf{R}^n\}$.

Забележка. Локално сумируемата в $\mathbf{R}^n$, $n \geq 3$, функция $V_n(x)$ носи името *обемен потенциал* или още *нютонов потенциал* с плътност g.

6.31. Пресметнете следните конволюции в $\mathbf{R}^3$:

1) $|x|^2 * \delta_{S(R)}$, където $S(R) = \{x \in \mathbf{R}^3 : |x| = \mathbf{R}\}$;

2) $\sin|x|^2 * \delta_{S(R)}$; 3) $e^{|x|^2} * \delta_{S(R)}$; 4) $|x| * \delta_{S(R)}$;

5) $f(|x|) * \delta_{S(R)}$, ако $f(\lambda)$ е дефинирана и непрекъсната функция върху числовата полуос $\lambda \geq 0$.

Отг. 1) $4\pi R^2(|x|^2 + R^2)$;

3) $|x|^{-1}\pi R[e^{(R+|x|)^3} - e^{(R-|x|)^2}]$;

4) $4/3\pi R(3R^2 + |x|^2)$;

5) $|x|^{-1}\pi R[\Phi((R+|x|)^2) - \Phi((R-|x|)^2)]$, където $\Phi(\lambda)$ е някоя примитивна на $f(\sqrt{\lambda})$ при $\lambda \geq 0$.

Упътване към т. 5). Съгласно зад. 6.28 $f(|x|) * \delta_{S(R)} = \int\limits_{S(R)} f(|x-y|)dS_y$. За да пресметнете този интеграл, въведете правоъгълна координатна система с начало в точката 0, чиято трета ос е колинеарна с $\overrightarrow{Ox}$. След това извършете такава сферична смяна, че $\theta = \sphericalangle(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ и $0 \leq \theta \leq \pi$. Така ще получите

$$f(|x|) * \delta_{S(R)} = \int\limits_0^{2\pi} \left[\int\limits_0^{\pi} f(\sqrt{R^2 + |x|^2 - 2R|x|\cos\theta}) R^2 \sin\theta d\theta \right] d\varphi,$$

защото $|x-y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2|x||y| \cos \sphericalangle(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$.

6.32.* Пресметнете $-f(|x|) * \frac{\partial}{\partial n}\delta_{S(R)}$, ако $f(\lambda) \in C^1$ $(\lambda \geq 0)$, $f'(0) = 0$ и $\delta_{S(R)}$ е същата, както в зад. 6.31.

Отг. $\frac{\pi}{2|x|} \int\limits_{(R-|x|)^2}^{(R+|x|)^2} \frac{f'(\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}}(R^2 - |x|^2 + \lambda)d\lambda$.

Въпрос. $-|x|^2 * \frac{\partial}{\partial n}\delta_{S(R)} = ?$

6.33. Нека $f(x,t) \in D'(\mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}^1_t)$, supp $f \subset \{(x,t) : at \geq |x|\}$ и разпределението $u(x) \in D'(\mathbf{R}^n)$. Тогава съществува конволюцията $f * (u(x) \otimes \delta(t))$ (защо?). Убедете се, че $f * (u \otimes \delta) = f * u$, като обобщената функция $f * u$ действа по формулата

$$\text{(5)} \qquad \langle f * u, \varphi \rangle$$

$$= \langle f(x,t) \otimes u(y), \eta(a^2t^2 - |x|^2)\varphi(x+y,t)\rangle, \forall \varphi \in D(\mathbf{R}^{n+1}).$$

В представянето (5) $\eta \in C^\infty(\mathbf{R}^1)$, $\eta \equiv 0$ при $t < -\delta$, $\eta(t) \equiv 1$ при $t > -\varepsilon$, $\delta > \varepsilon > 0$ са произволни числа, $a = \mathrm{const} > 0$.

Упътване. Използвайте формула (3) от зад. 6.20 и факта, че $f(x,t) = \eta(t)f(x,t)$, $\eta(a^2t^2 - |x|^2)\varphi(x+y,t) \in D(\mathbf{R}^{2n+1})$.

6.34. Да допуснем, че $f(x,t) \in D'(\mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}^1_t)$, supp $f \subset \{(x,t) : at \geq |x|, a > 0\}$ и $u(t) \in D'(\mathbf{R}^1_t)$, supp $u \subset \{t \geq 0\}$. Докажете, че винаги съществува конволюцията $f * (u(t) \otimes \delta(x))$, която се задава с формулата $f * (u(t) \otimes \delta(x)) = f * u(t)$ и

(6)
$$\langle f * u, \varphi\rangle$$
$$= \langle f(x,t) \otimes u(\tau), \eta(t)\eta(\tau)\varphi(x, t+\tau)\rangle, \forall \varphi \in D(\mathbf{R}^{n+1}).$$

Функцията η е дефинирана в зад. 6.33.

6.35. При предположенията на зад. 6.33 установете, че

$$f * (u(x) \otimes \delta^{(k)}(t)) = \frac{\partial^k f}{\partial t^k} * u.$$

6.36. В $D'(\mathbf{R}^2)$ пресметнете конволюциите:

1) $\theta(at - |x|) * [\theta(t) \otimes \delta(x)]$, $a > 0$;
2) $\theta(at - |x|) * [\delta(t) \otimes \delta(x)]$;
3) $\theta(at - |x|) * [\theta(t) \sin t \otimes \delta(x)]$;
4) $\theta(at - |x|) * [f(t) \otimes \delta(x)]$, ако $f \in C(t \geq 0)$ и $f = 0$ при $t < 0$.

Отг. 1) $\theta(at - |x|)\left(t - \frac{|x|}{a}\right)$; 2) $\theta(at - |x|)$;

3) $\theta(at - |x|) \int\limits_0^{t - \frac{|x|}{a}} f(\tau) d\tau$.

Решение на 3). Въз основа на (6) имаме, че

$$\langle \theta(at - |x|) * \theta(t) \sin t, \varphi\rangle = \langle \theta(at - |x|) \otimes \theta(\tau) \sin \tau, \eta(t)\eta(\tau)\varphi(x, t+\tau)\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \langle \theta(\tau)\eta(\tau) \sin \tau, \langle \eta(t)\theta(at - |x|), \varphi(x, t+\tau)\rangle\rangle \\
&= \int\limits_{\mathbf{R}^1} \theta(\tau) \sin \tau \eta(\tau) \left[\int\limits_{\mathbf{R}^2} \theta(at - |x|)\varphi(x, t+\tau) dx dt\right] d\tau \\
&= \int\limits_{\mathbf{R}^1} \theta(\tau) \sin \tau \left[\int\limits_{\mathbf{R}^2} \theta(a(t - \tau) - |x|)\varphi(x, t) dx dt\right] d\tau
\end{aligned}$$

$$= \int\limits_{\mathbf{R}^2} \varphi(x,t) \left[\int\limits_{\mathbf{R}^1} \theta(\tau) \sin\tau\theta(a(t-\tau)-|x|)d\tau \right] dxdt$$

$$= \int\limits_{\mathbf{R}^2} \varphi(x,t) \left[\int\limits_{0}^{t-\frac{|x|}{a}} \theta(at-|x|)\sin\tau d\tau \right] dxdt$$

$$= \left\langle \theta(at-|x|)\left[1-\cos\left(t-\frac{|x|}{a}\right)\right], \varphi \right\rangle \Rightarrow \theta(at-|x|) * \theta(t)\sin t$$

$$= 2\theta(at-|x|)\sin^2\left(\frac{t}{2}-\frac{|x|}{2a}\right).$$

За да опростим означенията, с $S(x_0, r)$ ще бележим сферата в $\mathbf{R}^n$ с център в точката x_0 и радиус $r : S(x_0,r) = \{y \in \mathbf{R}^n : |x_0 - y| = r\}$, а с $S(r)$ — сферата $S(0,r)$. Да напомним също, че $U(x_0,r)$ беше кълбо с център в точката x_0 и радиус $r > 0$. В нашето понататъшно изложение нееднократно ще се срещаме с обобщената функция $\mathcal{E}_3(x,t) = \frac{\theta(t)}{4\pi t}\delta_{S(t)}(x) \in D'(\mathbf{R}^3_x \times \mathbf{R}^1_t)$. Ако $\varphi(x,t) \in D(\mathbf{R}^4)$, то

$$\langle \mathcal{E}_3(x,t), \varphi(x,t) \rangle = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^\infty \frac{1}{t}\langle \delta_{S(t)}, \varphi \rangle dt$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^\infty \frac{1}{t}\left[\int\limits_{S(t)} \varphi(x,t)dx\right] dt = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbf{R}^3} \frac{\varphi(x,|x|)}{|x|}dx.$$

Последният интеграл съществува, защото $|x|^{-1}$ е локално сумируема в $\mathbf{R}^3$.

6.37.* Да предположим, че $f(x,t) \in D'(\mathbf{R}^i_x \times \mathbf{R}^1_t)$ е разпределение, чийто носител supp f се съдържа в $\{(x,t) : t \geq 0\}$. Със символа $\mathcal{E}_i(x,t) \in D'(\mathbf{R}^i_x \times \mathbf{R}^1_t)$, $i = 1,2,3$, ще означаваме следните обобщени функции:

$$1)\ \mathcal{E}_1 = 1/2\theta(t-|x|);\ \ 2)\ \mathcal{E}_2 = \frac{\theta(t-|x|)}{2\pi\sqrt{t^2-|x|^2}};\ \ 3)\ \mathcal{E}_3 = \frac{\theta(t)}{4\pi t}\delta_{S(t)}(x).$$

Покажете, че съществува конволюцията $V_i = \mathcal{E}_i * f \in D'(\mathbf{R}^i_x \times \mathbf{R}^1_t)$ и supp $V_i \subset \{(x,t) : t \geq 0\}$. При условие, че $f(x,t)$ е непрекъсната функция при $t \geq 0$, докажете, че $V_i(x,t)$ са също непрекъснати за $t \geq 0$ и се задават с формулите

$$V_1(x,t) = 1/2 \int\limits_0^t \int\limits_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi d\tau;$$

$$V_2(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^t \int\limits_{U(x,t-\tau)} \frac{f(\xi,\tau)d\xi d\tau}{\sqrt{(t-\tau)^2 - |x-\xi|^2}};$$

$$V_3(x,t) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{U(x,t)} \frac{f(\xi, t-|x-\xi|)}{|x-\xi|}.$$

Решение за $\mathcal{E}_3$. Понеже supp $\mathcal{E}_3 \subset \{(x,t) : t \geq 0, |x| = t\}$, можем да се позовем на зад. 6.20. Считайки, че $f(x,t)$ е непрекъсната при $t \geq 0$ и supp $f \subset \{(x,t) : t \geq 0\}$, намираме съгласно (3), че за всяко $\varphi \in D(\mathbf{R}^4)$ е валидно равенството

$$\langle V_3, \varphi\rangle = \langle \mathcal{E}_3(y,\tau) \otimes f(\xi,\tau'), \eta(\tau)\eta(\tau')\eta(\tau^2 - |y|^2)\varphi(\xi + y, \tau + \tau')\rangle$$

$$= \left\langle \mathcal{E}_3(y,\tau), \eta(\tau)\eta(\tau^2 - |y|^2) \int\limits_{\mathbf{R}^4} f(\xi,\tau')\eta(\tau')\varphi(\xi + y, \tau + \tau')d\xi d\tau' \right\rangle$$

$$= \left\langle \mathcal{E}_3(y,\tau), \eta(\tau)\eta(\tau^2 - |y|^2) \int\limits_{\mathbf{R}^4} f(x-y, t-\tau)\varphi(x,t)dxdt \right\rangle.$$

Оттук съгласно определението на $\mathcal{E}_3$ получаваме

$$\langle V_3, \varphi\rangle = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathbf{R}^3} \frac{\eta(|y|)\eta(0)}{|y|} \left[\int\limits_{\mathbf{R}^4} f(x-y, t-|y|)\varphi(x,t)dxdt \right] dy$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathbf{R}^4} \varphi(x,t) \left[\int\limits_{\mathbf{R}^3} \frac{f(x-y, t-|y|)}{|y|} dy \right] dxdt$$

$$= \left\langle \frac{1}{4\pi} \int\limits_{U(0,t)} \frac{f(x-y,t-|y|)}{|y|} dy, \varphi \right\rangle,$$

защото $f(x-y,t-|y|) = 0$ при $|y| > t$. Прилагането на теоремата на Фубини по-горе е възможно, тъй като $\varphi \in D(\mathbf{R}^4)$ и

$$\int\limits_{U(0,t)} \frac{f(x-y,t-|y|)}{|y|} dy = \int\limits_0^t \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} \rho f(x-\rho l, t-\rho) \sin\theta d\rho d\theta d\gamma,$$

$$l = (\sin\theta\cos\gamma,\ \sin\theta\sin\gamma,\ \cos\theta).$$

Забележка. Разпределенията $V_i(x,t)$, дефинирани в зад. 6.37*, се наричат *закъсняващи потенциали* с плътност f.

6.38.* Ако $\mathcal{E}_i(x,t)$ са разпределенията от зад. 6.37* и $\widetilde{u}(x) \in C(\mathbf{R}^i)$, да разгледаме въведената в зад. 6.33 конволюция $V_i^0 = \mathcal{E}_i(x,t) * \widetilde{u}(x)$. Покажете, че $V_i^0(x,t)$ са непрекъснати функции при $t \geq 0$, които притежават следните интегрални представяния:

1. $V_1^0(x,t) = \frac{\theta(t)}{2} \int\limits_{x-t}^{x+t} \widetilde{u}(\xi) d\xi \ (x \in \mathbf{R}^1)$.

2. $V_2^0(x,t) = \frac{\theta(t)}{2\pi} \int\limits_{U(x,t)} \frac{\widetilde{u}(\xi) d\xi}{\sqrt{t^2 - |x-\xi|^2}} \ (x \in \mathbf{R}^2)$.

3. $V_3^0(x,t) = \frac{\theta(t)}{4\pi t} \int\limits_{S(x,t)} \widetilde{u}(\xi) dS_\xi \ (x \in \mathbf{R}^3)$.

Решение на т. 3. Въз основа на (5) имаме, че за всяко $\varphi \in D(\mathbf{R}^4)$

$$\langle V_3^0, \varphi \rangle = \langle \mathcal{E}_3(y,t) \otimes \widetilde{u}(x),\ \eta(t^2 - |y|^2)\varphi(x+y),t) \rangle$$

$$= \left\langle \mathcal{E}_3(y,t), \eta(t^2 - |y|^2) \int\limits_{\mathbf{R}^3} \widetilde{u}(x)\varphi(x+y,t) dx \right\rangle$$

$$= \left\langle \mathcal{E}_3(y,t), \eta(t^2 - |y|^2) \int\limits_{\mathbf{R}^3} \widetilde{u}(x-y)\varphi(x,t) dx \right\rangle$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^\infty \frac{\eta(0)}{t} \left[\int\limits_{S(t)} \int\limits_{\mathbf{R}^3} \widetilde{u}(x-y)\varphi(x,t)dx dS_y \right] dt$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbf{R}^3} \frac{\varphi(x,t)}{t} \left[\int\limits_{S(t)} \widetilde{u}(x-y)dS_y \right] dx dt$$

$$= \left\langle \frac{\theta(t)}{4\pi t} \int\limits_{S(t)} \widetilde{u}(x-y)dS_y, \varphi \right\rangle .$$

Прилагането на теоремата на Фубини по-горе и непрекъснатостта на $V_3^0(x,t)$ се доказват с помощта на сферична смяна. Наистина

$$\frac{\theta(t)}{4\pi t} \int\limits_{|y|=t} \widetilde{u}(x-y)dS_y = \frac{t\theta(t)}{4\pi} \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} \widetilde{u}(x-tl) \sin\widetilde{\theta} d\widetilde{\theta} d\gamma,$$

$$l = (\sin\widetilde{\theta}\cos\gamma,\ \sin\widetilde{\theta}\sin\gamma,\ \cos\widetilde{\theta}).$$

Забележка. Функциите $V_i^0(x,t)$ се наричат *повърхнинни закъсняващи потенциали от прост слой с плътност* $\widetilde{u}$. От своя страна техните обобщени производни $V_i^1 = \frac{\partial V_i}{\partial t}$ носят името *повърхнинни закъсняващи потенциалц от двоен слой.*

6.39. Нека $\omega(t)$ е нерекъсната функция върху числовата полуос $t \geq 0$ и $\omega(t) = 0$ при $t < 0$. Пресметнете $\mathcal{E}_3(x,t) * \omega(t)$.
Отг. $\frac{\omega(t-|x|)}{4\pi|x|}$.

§ 7. Интегрални трансформации

Нека $f \in L_1(\mathbf{R}^1)$. Функцията

$$F(f)(\sigma) \equiv \widehat{f}(\sigma) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\sigma x} dx$$

се нарича трансформация на Фурие (или фуриеров образ) на функцията f.

7.1. Докажете, че $\widehat{f}(\sigma)$ е ограничена, равномерно непрекъснатата функция върху цялата числова ос, за която

$$\lim_{|\sigma|\to\infty} \widehat{f}(\sigma) = 0.$$

Установете същия резултат и за функциите

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\sigma x}\,dx, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\sigma x dx, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\sigma x dx.$$

Упътване. Апроксимирайте функцията f със стъпаловидни функции и използвайте, че съответствието

$$L_1(\mathbf{R}^1) \in f \mapsto \widehat{f} \in C(\mathbf{R}^1)$$

е непрекъснато в смисъл, че

$$\sup_{\sigma\in\mathbf{R}^1} |\widehat{f}(\sigma)| \leq ||f||_{L_1(\mathbf{R}^1)}.$$

7.2. Докажете, че ако $f \in L_1(a,b), a, b$ — крайни числа, то функциите

$$\int\limits_a^b f(x)\sin\sigma x dx, \quad \int\limits_a^b f(x)\cos\sigma x dx$$

клонят към нула при $|\sigma| \to +\infty$ (Лема на Риман — Лебег).

Упътване. Твърдението следва от предишната задача, но може да се докаже директно за $f \in C^1[a,b]$, след което да се използва, че последното множество е навсякъде гъсто в $L_1(a,b)$.

7.3. Покажете, че функцията

$$Q(\sigma) = \begin{cases} (\ln\sigma)^{-1}, & \sigma \geq e, \\ \frac{\sigma}{e}, & 0 \leq \sigma \leq e, \\ -Q(-\sigma), & \sigma < 0, \end{cases}$$

е непрекъсната, ограничена върху $\mathbf{R}^1$ и $\lim\limits_{|\sigma|\to\infty} Q(\sigma) = 0$, но не съществува функция $q \in L_1(\mathbf{R}^1)$, за която $\widehat{q}(\sigma) = Q(\sigma)$.

Решение. Интегралът $\int\limits_e^\infty Q(\sigma)\sigma^{-1}d\sigma$ е разходящ. Ако допуснем, че съществува такава функция $q \in L_1(\mathbf{R}^1)$, предвид нечетността на $Q(\sigma)$ имаме

$$Q(\sigma) = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma x} q(x)dx,$$

откъдето

$$2Q(\sigma) = -2i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} q(x)\sin\sigma x dx.$$

Очевидно $q_0(x) \equiv i[q(-x) - q(x)] \in L_1(0, \infty)$ и

$$Q(\sigma) = \int\limits_0^\infty q_0(x)\sin\sigma x dx.$$

Сега лесно се проверява, че

$$\int\limits_e^N Q(\sigma)\cdot\sigma^{-1}d\sigma = \int\limits_0^\infty q_0(x)\left[\int\limits_e^N \frac{\sin\sigma x}{\sigma}d\sigma\right]dx.$$

Вътрешният интеграл има граница при $N \to \infty$ и следователно, като приложим теоремата на Лебег, намираме, че последният интаграл е сходящ. Полученото противоречие доказва твърдението.

7.4. Покажете, че трансформацията на Фурие на

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

не принадлежи на $L_1(\mathbf{R}^1)$.

Дефиниция. Казваме, че функцията f удовлетворява условието на *Дини* в точката x_0, ако съществува число $\delta > 0$, за което $\varphi(t) \equiv [f(x_0 + t) - f(x_0)]t^{-1} \in L_1(-\delta, \delta)$.

Забележка. Ясно е, че условието на Дини е изпълнено например за функциите, удовлетворяващи условието на Хьолдер

$$\sup_{t,s} |f(s) - f(t)||s - t|^{-\alpha} < +\infty,$$

където $\alpha \in (0,1]$. (При $\alpha = 1$ се получава т.нар. условие на Липшиц.)

7.5. (Формула за обръщането.) Нека $f \in L_1(\mathbf{R}^1)$ и в точката x функцията f да удовлетворява условието на Дини. Тогава

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} v \cdot p \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\sigma) e^{i\sigma x} \, d\sigma.$$

Упътване. След смяна на интегрирането намираме

$$f_N(x) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^{N} \widehat{f}(\sigma) e^{i\sigma x} \, d\sigma = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x + t) \frac{\sin Nt}{t} dt.$$

С помощта на твърдението от зад. 7.2 и предвид равенството

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin Nt}{t} dt = 1$$

лесно се проверява, че

$$\lim_{N \to \infty} f_N(x) = f(x)$$

във всяка точка x, в която е изпълнено условието на Дини.

7.6. Нека $f \in L_1(\mathbf{R}^1)$, $\widehat{f} \in L_1(\mathbf{R}^1)$ и

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\sigma) e^{+i\sigma x} \cdot d\sigma.$$

Тогава $f(x) = F(x)$ за почти всички $x \in \mathbf{R}^1$.

Упътване. Твърдението се получава лесно с помощта на формулата за обръщане на трансформацията на Фурие в пространството $S(\mathbf{R}^1)$. Нека $\varphi \in D(\mathbf{R}^1)$ е произволна функция и $g \in S(\mathbf{R}^1)$ е такава, че $\widehat{g} = \varphi$. Тогава $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f} g dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f \widehat{g} dx$ и тъй като $g(x) = \frac{1}{2\pi} \int \varphi(\xi) e^{ix\xi} d\xi$, прилагайки теоремата на Фубини, намираме

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} [F(x) - f(x)] \varphi(x) dx = 0.$$

7.7. Изразете чрез трансформацията на Фурие $\widehat{f}(\sigma)$ на $f(x)$ фуриеровите образи на функциите (a, b, c, d — константи):

а) $f(-x)$; б) $f(ax+b)$; в) $e^{ibx} f(x)$; г) $\cos ax \cdot f(x)$;
д) $\sin^2 bx \cdot f(x)$; е) $e^{iax} \cos^2 bx f(cx+d)$.

7.8. Докажете, че фуриеровият образ на функцията $2a(x^2 + a^2)^{-1}$ е $\widehat{f}(\sigma) = 2\pi e^{-a|\sigma|}$, $a > 0$, и намерете трансформацията на Фурие на функцията $\cos^2 x (x^2 + a^2)^{-1}$.

7.9. Пресметнете фуриеровата трансформация на $f(x) = e^{-ax^2}$, $a > 0$.

Отг. $\sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{4a}\right)$.

Упътване. I. Интегрирайте цялата функция $\varphi(z) = e^{-az^2 - i\sigma z}$ върху контура на правоъгълника с основа интервала $(-R, R)$ и височина $h = -\frac{\sigma}{2a}$ и оставете R да клони към $+\infty$. Използвайте, че

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{I^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

(Пресмятането на I^2 се свежда до пресмятане на двоен интеграл, в който е удобно да се въведат полярни координати.)

II. Покажете, че интегралът

$$F(\sigma) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \cdot e^{i\sigma x} dx$$

може да се диференцира по параметъра σ. С интегриране по части установете, че $F'(\sigma) = -\frac{\sigma}{2a}F(\sigma)$, т.е.

$$F(\sigma) = c \cdot \exp\left(-\frac{\sigma^2}{4a}\right), \; c = F(0) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

III. (Вж. зад. 7.28 и 7.30.) Очевидно

$$f'(x) + 2ax \cdot f(x) = 0,$$

откъдето след прилагане на трансформацията на Фурие следва, че

$$\widehat{f'}(\xi) + \frac{\xi}{2a}\widehat{f}(\xi) = 0.$$

Оттук $\widehat{f}(\xi) = k \cdot e^{-\xi^2/4a}$, $k = \widehat{f}(0) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

7.10. Покажете, че

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \cos \sigma x dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\sigma^2}{4a}}.$$

7.11. Докажете, че за т.нар. синус- и косинус-трансформации на Фурие:

$$S(f)(\sigma) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} f(x) \sin \sigma x dx,$$

$$C(f)(\sigma) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} f(x) \cos \sigma x dx,$$

получаващи се естествено от трансформацията на Фурие с ядро $e^{-i\sigma x}$ за нечетна или четна функция f, при условията от зад. 7.5 са валидни следните формули за обръщане:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} S(f)(\sigma) \sin \sigma x d\sigma,$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} C(f)(\sigma) \cos \sigma x d\sigma.$$

7.12. Пресметнете интегралите

$$\text{а)} \int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2} dx; \quad \text{б)} \int_0^\infty \frac{x \cdot \sin x}{1+x^2} dx.$$

Упътване. Пресметнете косинус- и синус-трансформациите на функцията e^{-x} и използвайте формулата за обръщане. *Отг.* а) $\frac{\pi}{2e}$; б) $\frac{\pi}{2e}$.

7.13. Решете интегралното уравнение за $F(\sigma)$:

$$\int_0^\infty F(\sigma) \sin \sigma x d\sigma = f(x),$$

където:

$$\text{а)}\ f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \sin x, & 0 \le x \le \pi, \\ 0, & x > \pi; \end{cases}$$

$$\text{б)}\ f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \cos x, & 0 \le x \le \pi, \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

Отг. а) $\frac{\sin \pi\sigma}{1-\sigma^2}$; б) $\frac{\sigma + \sigma \cos \pi\sigma}{\sigma^2 - 1}$.

7.14. Решете интегралното уравнение

$$\int_0^\infty F(\sigma) \cos \sigma x d\sigma = f(x),$$

където:

$$\text{а)}\ f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & x > 1; \end{cases}$$

$$\text{б)}\ f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Отг. а) $\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin\sigma}{\sigma}-\frac{1-\cos\sigma}{\sigma^2}\right]$; б) $\frac{2\sin\sigma}{\pi\sigma}$.

7.15. Покажете, че функцията $x^{-\frac{1}{2}}$, $x>0$, съвпада със своите синус- и косинус-трансформации.

7.16. (Формула на Парсевал.) Нека f, g, $\widehat{g}\in L_1(\mathbf{R}^1)$. Покажете, че

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(\sigma)\overline{\widehat{g}(\sigma)}d\sigma.$$

7.17. Нека $f\in L_1(\mathbf{R}^1)$ и $\widehat{f}\in L_1(\mathbf{R}^1)$. Покажете, че

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2dx=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\widehat{f}(\sigma)|^2d\sigma.$$

Упътване. Използвайте зад. 7.16. Вземете предвид, че от $\widehat{f}\in L_1(\mathbf{R}^1)$ следва ограниченост на $f(x)$, откъдето $|f|^2=f\cdot\overline{f}\in L_1(\mathbf{R}^1)$.

7.18. Нека f е финитна функция с непрекъсната втора производна. Покажете, че $\widehat{f}\in L_1(\mathbf{R}^1)$.

Упътване. Проверете, че фуриеровият образ на f'' (ограничена функция!) е $-\sigma^2\cdot\widehat{f}(\sigma)$.

7.19. (Теорема на順Планшерел.) Докажете, че за произволна функция $f\in L_2(\mathbf{R}^1)$ интегралът

$$g_N(\sigma)=\int\limits_{-N}^{N}f(x)e^{-i\sigma x}dx$$

за всяко $N>0$ е функция от $L_2(\mathbf{R}^1)$ и при $N\to\infty$ функциите g_N клонят в L_2 към функция $g\in L_2$, за която

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|g(\sigma)|^2d\sigma=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2dx. \tag{1}$$

Упътване. Нека най-напред $\operatorname{supp} f\subset(-a,a)$ и $\{f_n\}$ е редица от функции от $C_0^\infty(-2a,2a)$, която апроксимира f в L_2, а g_n са фуриеровите им образи. От зад. 7.16 — 7.18 следват равенствата

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|g_n-g_m|^2d\sigma=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f_n-f_m|^2dx$$

и

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|g_n|^2d\sigma=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f_n|^2dx,$$

откъдето установяваме наличието на $g=\underset{n\to\infty}{l.i.m.}g_n$ и равенството (1) в този случай. Сега лесно се третира и общият случай посредством функциите

$$f_N(x)=\begin{cases} f(x), & |x|\le N,\\ 0, & |x|>N.\end{cases}$$

Дефиниция. Функцията $g=\underset{N\to\infty}{l.i.m.}g_N$ се нарича трансформация на Фурие на функцията $f\in L_2(\mathbf{R}^1)$.

7.20. Покажете, че ако $f\in L_2\bigcap L_1$, тогава функцията g от зад. 7.19 съвпада с обичайния фуриеров образ на $f\in L_1$.

Упътване. Ако $\widetilde{g}$ е трансформацията на Фурие на $f\in L_1$, то функциите $g_N(\sigma)=F(f_N)(\sigma)$ клонят равномерно към $\widetilde{g}$ (вж. упътването към зад. 7.1). Понеже $g=\underset{N\to\infty}{l.i.m.}g_N$, следва, че $g=\widetilde{g}$.

7.21. Нека f, $g\in L_2(\mathbf{R}^1)$. Покажете, че

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\overline{g(x)}dx=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(\sigma)\overline{\widehat{g}(\sigma)}d\sigma.$$

Упътване. Приложете формулата на Парсевал (зад. 7.19) към функциите $f+\lambda g$, $\lambda=1,\ i$.

7.22. С помощта на равенството на Парсевал пресметнете следните интеграли:

$$\text{а)}\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(a^2+x^2)^2};\quad \text{б)}\ \int\limits_{0}^{\infty}\frac{\sin^2 ax}{x^2}dx;\quad \text{в)}\ \int\limits_{0}^{\infty}\frac{\sin^4 x}{x^4}dx.$$

Отг. а) $\frac{\pi}{2|a|^3}$; б) $\frac{\pi|a|}{2}$; в) $\frac{\pi}{3}$.

7.23. С помощта на зад. 7.21 пресметнете интегралите:

а) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)(b^2+x^2)}$; б) $\int\limits_0^\infty \frac{\sin ax\cdot\sin bx}{x^2}dx$;

в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3}dx$; г) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x(a^2+x^2)}dx$; д) $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 x}{1+x^2}dx$.

Отг. а) $\frac{\pi}{2|a|\cdot|b|(|a|+|b|)}(|a|\neq|b|)$; б) $\frac{\pi}{2}\min\{|a|,|b|\}\cdot\mathrm{sign}(ab)$;

в) $\frac{3\pi}{4}$; г) $\frac{\pi(e^2-1)}{a^2e^2}\mathrm{sign}a$; д) $\frac{\pi(e^2-1)}{4e^2}$.

7.24. Докажете, че трансформацията на Фурие на конволюцията

$$(f*g)(x)\equiv\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt, f,g\in L_1(\mathbf{R}^1)$$

е $\widehat{f}(\sigma)\cdot\widehat{g}(\sigma)$.

7.25. Нека $f\in L_2(\mathbf{R}^1)$, $g\in L_1(\mathbf{R}^1)$. Покажете, че $f*g\in L_2(\mathbf{R}^1)$ и е валидно равенството

$$F(f*g)=\widehat{f}\cdot\widehat{g}.$$

Упътване. Първото твърдение следва от неравенството

$$|(f*g)(x)|^2\leq\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2\cdot|g(x-t)|dt\cdot\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|g(x-t)|dt,$$

което ни дава $||f*g||^2_{L_2}\leq||f||^2_{L_2}\leq\cdot||g||^2_{L_1}$. Доказателството на формулата се получава с помощта на зад. 7.24 и последното неравенство, като се апроксимира f чрез функциите f_N (зад. 7.19).

7.26. а) Използвайте конволюцията на функциите

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|\geq1,\end{cases}\quad\text{и}\quad g(x)=\begin{cases}1-\frac{1}{2}|x|, & |x|<2,\\ 0, & |x|>2,\end{cases}$$

за да пресметнете интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}dx$;

б) аналогично чрез конволюцията на $g(x)$ с $g(x)$ пресметнете $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} dx$.

Отг. а) $\frac{3\pi}{4}$; б) $\frac{2\pi}{3}$.

7.27. Нека функцията $f \in L_1(\mathbf{R}^1)$ е такава, че $\widehat{f}(\sigma) = 0$ при $|\sigma| > a$. Установете формулата

$$f(x) * \frac{\sin ax}{\pi x} = f(x).$$

7.28. Покажете, че ако за функцията $f \in L_1$ е изпълнено $f' \in L_1$ и f е абсолютно непрекъсната, т.е.

$$f(x) = f(0) + \int\limits_0^x f'(t)dt,$$

тогава $F(f')(\sigma) = i\sigma \cdot \widehat{f}(\sigma)$.

Упътване. Границите $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$ съществуват и са равни на нула, тъй като $f \in L_1$.

7.29. Покажете, че ако $f, \dots, f^{(k)} \in L_1$ и $f^{(k-1)}$ е абсолютно непрекъсната, тогава

$$F(f^{(k)})(\sigma) = (i\sigma)^k \cdot \widehat{f}(\sigma).$$

Покажете,че $\widehat{f}(\sigma)$ клони към нула при $|\sigma| \to \infty$ по-бързо от σ^{-k}, т.е. $\lim\limits_{|\sigma| \to \infty} \widehat{f}(\sigma) \cdot \sigma^{+k} = 0$.

7.30. Нека f, $x \cdot f \in L_1$. Покажете, че функцията $g = \widehat{f}$ е диференцируема и $g'(\sigma) = F[-ix \cdot f(x)](\sigma)$. Покажете, че ако f, $xf, \dots, x^p f \in L_1$, тогава $\widehat{f}(\sigma) \in C^p(\mathbf{R}^1)$.

Забележка. В следващата задача се илюстрира приложението на трансформацията на Фурие и на синус- и косинус-трансформациите за решаване на гранични задачи за частни диференциални уравнения с две променливи. Формулирайте система от достатъчни условия, при които са валидни получените резултати.

7.31. а) $u_t = a^2 u_{xx}, 0 < x, t < +\infty,$
$u(x,0) = f(x), 0 < x < +\infty,$
$u(0,t) = 0, 0 < t < +\infty;$

б) $u_t = a^2 u_{xx}, 0 < x, t < +\infty,$
$u_x(0,t) = 0, 0 < t < \infty,$
$u(x,0) = f(x), 0 < x < +\infty;$

в) $u_t = a^2 u_{xx}, 0 < x, t < +\infty,$
$u_x(0,t) = \varphi(t), 0 < t < +\infty,$
$u(x,0) = 0, 0 < x < +\infty;$

г) $u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), 0 < x, t < +\infty,$
$u(0,t) = 0, 0 < t < +\infty,$
$u(x,0) = 0, 0 < x < +\infty;$

д) $u_{tt} = a^2 u_{xx}, 0 < x, t < +\infty,$
$u(0,t) = 0, 0 < t < +\infty,$
$u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = \psi(x), 0 < x < +\infty;$

е) $u_{tt} = a^2 u_{xx}, 0 < x, t < +\infty,$
$u_x(0,t) = 0, 0 < t < +\infty,$
$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x);$

ж) $u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = 0, -\infty < x < +\infty, 0 < t < +\infty,$
$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = a\psi''(x), -\infty < x < +\infty.$
Разгледайте също частния случай
$\varphi(x) = A\exp(-\frac{x^2}{4k^2}), \psi(x) \equiv 0, -\infty < x < +\infty.$

з) $u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = 0, 0 < x, t < +\infty,$
$u(0,t) = \mu(t), u_{xx}(0,t) = 0, 0 < t < +\infty,$
$u(x,0) = u_t(x,0) = 0, 0 < x < +\infty.$

Решение. а) Нека $u(x,t)$ е решение и

$$v(\sigma,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty u(x,t) \sin \sigma x dx,$$

като ще считаме, че t е параметър. При предположенията от зад. 7.28 за $g(x) = u(x,t)$ и първата ѝ производна получаваме

$$v_t(\sigma,t) + a^2\sigma^2 v(\sigma,t) = 0, \ 0 < t < +\infty,$$

$$v(\sigma,0) = S(f)(\sigma).$$

Следователно $v(\sigma,t) = S(f)(\sigma)e^{-a^2\sigma^2 t}$. Чрез формулата за обръщане и като вземем предвид зад. 7.10, намираме

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} f(\xi) \left[\int\limits_0^{+\infty} e^{-a^2\sigma^2 t} \sin\sigma\xi \sin\sigma x d\sigma \right] d\xi$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{-\infty} f(\xi) \left[\int\limits_0^{+\infty} e^{-a^2\sigma^2 t} [\cos\sigma(x-\xi) - \cos\sigma(x+\xi)] d\sigma \right] d\xi$$

$$= -\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^{+\infty} f(\xi) \left[\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t} \right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t} \right) \right] d\xi.$$

Упътване. б) Приложете косинус-трансформация. Сравнете граничните условия при $x = 0$ в примери а) и б) и формулирайте практическо правило, определящо вида на трансформацията, която е удобно да се използва.

в) Както в зад. 7.31.а), но прилагайки този път косинус-трансформация, намираме

$$v(\sigma,t) = -a^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^t e^{-a^2\sigma^2(t-\tau)} \varphi(\tau) d\tau,$$

откъдето

$$u(x,t) = -\frac{a}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)} \right) d\tau.$$

д) След прилагане на синус-трансформация се получава

$$v(\sigma,t) = S(f)(\sigma) \cos a\sigma t + S(\psi)(\sigma) \frac{\sin a\sigma t}{a\sigma}.$$

Оттук

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} S(f)(\sigma) [\sin\sigma(x+at) + \sin\sigma|x-at|] d\sigma$$

$$+\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} S(\psi)(\sigma)\frac{\cos\sigma|x-at|-\cos\sigma(x+at)}{\sigma}d\sigma.$$

Нека $x > at$. При пресмятането на втория интеграл вземете предвид, че

$$\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} S(\psi)(\sigma)\left[\int\limits_{x-at}^{x+at}\sin\sigma s ds\right]d\sigma$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} S(\psi)(\sigma)\left[\frac{\cos\sigma(x-at)-\cos\sigma(x+at)}{\sigma}\right]d\sigma.$$

е) Използвайте косинус-трансформация.

ж) Използвайте релациите

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos(\alpha\xi)^2 e^{-i\xi x}d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}\left(\cos\frac{x^2}{4\alpha}+\sin\frac{x^2}{4\alpha}\right),$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin(\alpha\xi)^2 e^{-i\xi x}d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}\left(\cos\frac{x^2}{4\alpha}-\sin\frac{x^2}{4\alpha}\right).$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos(at\xi)^2\widehat{\varphi}(\xi)e^{i\xi x}d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{2at}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x-s)\left(\cos\frac{s^2}{4at}+\sin\frac{s^2}{4at}\right)ds,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin(at\xi)^2\widehat{\psi}(\xi)e^{i\xi x}d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{2at}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi(x-s)\left(\cos\frac{s^2}{4at}-\sin\frac{s^2}{4at}\right)ds.$$

Последните две се получават от първите и от формулата

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(\lambda)\widehat{g}(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda = 2\pi\int\limits_{-\infty}^{+\infty}g(s)f(x-s)ds.$$

Първите две равенства са следствие от известните съотношения

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos x^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

(вж. [1], зад. 361, стр. 132).

Наистина с помощта на смяната $x = y - l$ представяме $\cos x^2$ и $\sin x^2$ чрез синуси и косинуси от y^2, l^2, $2ly$. Така се получават уравнения за намиране на $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos y^2 \cdot \cos 2lydy$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin y^2 \cos 2lydy$. Трябва да се вземат предвид и равенствата

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos y^2 \sin lydy = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin y^2 \sin 2lydy = 0.$$

Отг. б) $u(x,t)$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{0}^{+\infty} f(\xi) \left[\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right) + \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}\right)\right] d\xi;$$

г) $u(x,t)$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_{0}^{t} \left[\int_{0}^{+\infty} f(\xi,\tau) \left\{\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\right\} d\xi\right] d\tau;$$

д) $u(x,t) = \dfrac{\varphi(x+at) + \varphi(|x-at|)\operatorname{sign}(x-at)}{2} + \dfrac{1}{2a} \displaystyle\int_{|x-at|}^{x+at} \psi(z)dz;$

е) $u(x,t) = \dfrac{\varphi(x+at) + \varphi(|x-at|)}{2}$

$$+\frac{1}{2a} \left\{ \int_{0}^{x+at} \psi(z)dz - \operatorname{sign}(x-at) \int_{0}^{|x-at|} \psi(z)dz \right\};$$

ж) $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x - 2\lambda\sqrt{at})(\sin\lambda^2 + \cos\lambda^2)d\lambda$

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(x - 2\lambda\sqrt{at})(\sin\lambda^2 - \cos\lambda^2)d\lambda;$$

з) $u(x,t) = \int\limits_{x/\sqrt{2at}}^{+\infty} \mu\left(\frac{t - x^2}{2a\lambda^2}\right)\left[\sin\frac{\lambda^2}{2} + \cos\frac{\lambda^2}{2}\right]d\lambda.$

В зад. 7.32 – 7.48 се разглеждат някои примери и свойства на трансформацията на Фурие в класовете $S(\mathbf{R}^n)$ и $S'(\mathbf{R}^n)$. В класа $S(\mathbf{R}^n)$ са валидни формулите

$$F(f)(\xi) \equiv \widehat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x)e^{-i\langle x,\xi\rangle}dx, \langle x,\xi\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\xi_i;$$

$f(x) \equiv F^{-1}(\widehat{f})(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbf{R}^n} \widehat{f}(\xi)e^{i<x,\xi>}d\xi$ (формула за обръщането);

$$F(f * g) = \widehat{f} \cdot \widehat{g};\ F(fg) = (2\pi)^{-n} \cdot \widehat{f} * \widehat{g}$$

(вж. напр. [8а], гл. II, § 3).

7.32. Покажете, че ако $f = f_1 \otimes \ldots \otimes f_n$, където $f_i \in L_1(\mathbf{R}^1)$, $i = 1, \ldots, n$, то $\widehat{f} = \widehat{f_1} \otimes \ldots \otimes \widehat{f_n}$.

7.33. Пресметнете фуриеровия образ на функцията $\exp(-a|x|^2)$, $a > 0$.

Упътване. Вж. зад. 7.9 и 7.32.

Дефиниция. Означаваме с $O_M(\mathbf{R}^n)$ класа на всички функции $f \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, такива, че изображението $\varphi \mapsto f\varphi$ е непрекъснато от $S(\mathbf{R}^n)$ в $S(\mathbf{R}^n)$. Означаваме с $O'_C(\mathbf{R}^n)$ класа на разпределенията $u \in S'(\mathbf{R}^n)$, за които изображението $\varphi \mapsto u * \varphi$ от $S(\mathbf{R}^n)$ в $S(\mathbf{R}^n)$ е непрекъснато.

7.34. (Структура на $O_M(\mathbf{R}^n)$.) Докажете, че ако $f \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, то следните три твърдения са еквивалентни:

а) при всеки мултииндекс α за функцията $D^\alpha f$ съществуват константи k и C, зависещи от α и такива, че $|D^\alpha f(x)| \leq C(1 + |x|^2)^k$;

б) $f \in O_M(\mathbf{R}^n)$;

в) за всяко $\varphi \in S(\mathbf{R}^n)$ функцията $f\varphi \in S(\mathbf{R}^n)$.

Упътване. За да докажете, че в) $\Rightarrow$ а), допуснете противното. Следователно съществува редица $\{a_k\} \subset \mathbf{R}^n$ със свойствата

$$|a_k| + 2 \leq |a_{k+1}|$$

и

$$|f(a_k)| \geq (1 + |a_k|^2)^k, \ k = 1, 2, \ldots$$

Ако $\varphi \in D(\mathbf{R}^n)$ е носител в единичното кълбо и $\varphi \equiv 1$ около началото, тогава

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi(x - a_k)}{(1 + |a_k|^2)^k} \in S(\mathbf{R}^n).$$

Обаче

$$|(f\psi)(a_k)| = \varphi(0) f(a_k)(1 + |a_k|^2)^{-k} \geq \varphi(0),$$

т.е. $f\psi\overline{\in}S(\mathbf{R}^n)$, защото $f\psi$ не клони към нула при $|x| \to +\infty$.

7.35. Нека $f \in O_M(\mathbf{R}^n)$, $u \in O'_C(\mathbf{R}^n)$ и $v \in S'(\mathbf{R}^n)$. Докажете, че:

а) $\widehat{u} \in O_M(\mathbf{R}^n)$; б) $\widehat{f} \in O'_C(\mathbf{R}^n)$; в) $F(u * v) = F(u) \cdot F(v)$;

г) $F(fv) = (2\pi)^{-n} \cdot F(f) * F(v)$.

Решение. а) Нека $g = F(u)$. За $\psi \in S(\mathbf{R}^n)$ имаме

$$\psi g = F(F^{-1}\psi) \cdot F(u) = (2\pi)^{-n} F[f^{-1}\psi * u],$$

откъдето е очевидно, че изображението $\psi \mapsto \psi g$ е непрекъснато, т.е. $g \in O_M(\mathbf{R}^n)$.

б) Нека $w = F(f)$. Тогава

$$\psi * w = F(F^{-1}(\psi)) * F(f) = (2\pi)^n F(F^{-1}(\psi) \cdot f),$$

откъдето следва непрекъснатостта на изображението

$$\psi \mapsto \psi * w, \text{ т.е. } \widehat{f} \in O'_C(\mathbf{R}^n).$$

7.36. (Структура на $O'_C(\mathbf{R}^n)$.) Докажете, че са еквивалентни твърденията:

а) u е фуриеров образ на $f \in O_M(\mathbf{R}^n)$; б) $u \in O'_C(\mathbf{R}^n)$;

в) за всяко естествено число m съществува крайна фамилия от непрекъснати функции $\{f_\alpha\}$, α-мултииндекс $|\alpha| \leq k(m)$, такава, че $u = \sum\limits_{|\alpha| \leq k(m)} D^\alpha f_\alpha$, където

$$(1 + |x|^2)^m f_\alpha(x) \in L_1(\mathbf{R}^n), \ \forall \alpha, |\alpha| \leq k(m).$$

Решение. 1) а) $\Rightarrow$ в): Съгласно зад. 7.34 за всяко естествено число m съществува число $l = l(m)$, такова, че

$$\forall \alpha : |\alpha| \leq 2m \Rightarrow \frac{D^\alpha f}{(1 + |x|^2)^{l(m)}} \in L_1(\mathbf{R}^n).$$

Следователно, ако $g(x) \equiv f(1 + |x|^2)^{-l}$, то функцията $\xi^\alpha \widehat{g}(\xi)$ е непрекъсната и ограничена за $\forall \alpha$, $|\alpha| \leq k$. Обаче $u = F(f)$ се изразява чрез $(1 - \Delta)^l \widehat{g}$, с което в) е доказано.

2) в) $\Rightarrow$ а): Ще докажем, че $\widehat{u} \in O_M(\mathbf{R}^n)$. От $(1 + |x|^2)^m f_\alpha \in L_1(\mathbf{R}^n)$ следва, че $\widehat{f_\alpha} \in C^{2m}(\mathbf{R}^n)$ и $D^\beta \widehat{f_\alpha} \in L_\infty(\mathbf{R}^n)$ за $|\beta| \leq 2m$. Сега лесно се проверява, че при $|\beta| \leq 2m$: $|D^\beta \widehat{u}| \leq \mathrm{const}(1 + |\xi|^2)^{k(m)}$, т.е. $\widehat{u} \in O_M(\mathbf{R}^n)$ (вж. зад. 7.34).

7.37. Нека $x \in \mathbf{R}^n$, $y \in \mathbf{R}^m$ и $\varphi \in S(\mathbf{R}^{n+m})$. Покажете, че:

а) изображението (частична трансформация на Фурие по променливите x)

$$\varphi(x, y) \mapsto F_{x \to \xi}(\varphi)(\xi, y)$$

е линеен изоморфизъм на $S(\mathbf{R}^{n+m})$ върху $S(\mathbf{R}^{n+m})$;

б) съответната операция $u \mapsto F_{x \to \xi}(u)$ в $S'(\mathbf{R}^{n+m})$, дефинирана чрез релацията

$$\langle F_{x \to \xi}(u), \varphi \rangle = \langle u, F_{x \to \xi}(\psi) \rangle, \ \forall \psi \in S(\mathbf{R}^{n+m}),$$

е линеен изоморфизъм на $S'(\mathbf{R}^{n+m})$ върху $S'(\mathbf{R}^{n+m})$;

в) за всяко $u \in S'(\mathbf{R}^{n+m})$ са валидни формулите

$$D_x^\alpha D_y^\beta F_{x\to\xi}[u(x,y)] = F_{x\to\xi}[(-ix)^\alpha D_y^\beta u],$$

$$F_{x\to\xi}[D_x^\alpha D_y^\beta u] = (i\xi)^\alpha F_{x\to\xi}[D_y^\beta u].$$

7.38. Проверете, че за $u \in S'(\mathbf{R}_x^n)$ и $v \in S'(\mathbf{R}_y^m)$ са в сила равенствата

$$F_{(x,y)\to(\xi,\eta)}(u \otimes v) = F_{x\to\xi}[u(x) \otimes F_{y\to\eta}(v)(\eta)]$$

$$= F_{y\to\eta}[F(u)(\xi) \otimes g(y)] = F_{x\to\xi}(u) \otimes F_{y\to\eta}(v).$$

7.39. Нека f е бавно растяща функция в $\mathbf{R}^n$, т.е. съществува $m \geq 0$, за което

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} |f(x)|(1+|x|)^{-m} dx < +\infty.$$

Докажете, че $f \in S'(\mathbf{R}^n)$ и че $\widehat{f}$ е граница в $S'(\mathbf{R}^n)$ на $F(f_R)(\xi)$, където

$$f_R(x) = \begin{cases} f(x), & |x| < R, \\ 0, & |x| \geq R. \end{cases}$$

Упътване. Използвайте, че $f_R \to f$ при $R \to \infty$ в $S'(\mathbf{R}^n)$, и непрекъснатостта на трансформацията на Фурие.

7.40. Като използвате предишната задача, докажете теоремата на Планшерел: Ако $f \in L_2(\mathbf{R}^n)$, тогава

$$F(f)(\xi) = \underset{R\to\infty}{l.i.m.} \int\limits_{|x|<R} f(x) e^{-ix\xi} dx$$

и освен това $(2\pi)^{-n/2}||\widehat{f}||_{L_2} = ||f||_{L_2(\mathbf{R}^n)}$.

Упътване. Вж. зад. 7.19 – 7.20.

7.41. Покажете, че:

а) $F(\delta(x-x_0))(\xi) = e^{-i\xi x_0}$; б) $F(\delta)(\xi) = 1$;

в) $F(1)(\xi) = (2\pi)^n \cdot \delta(\xi)$;

г) $F\left[\frac{\delta(x-x_0)+\delta(x+x_0)}{2}\right] = \cos\xi x_0$;

д) $F(D^\alpha\delta)(\xi) = (i\xi)^\alpha$; е) $F(x^\alpha)(\xi) = (2\pi)^n(-i)^{|\alpha|}D^\alpha\delta(\xi)$.

Упътване. в) $n = 1$. От очевидното равенство $0 = \frac{d}{dx}1$ следва, че $\xi F(1)(\xi) = 0$, т.е. $F(1) = C\cdot\delta$. Константата C се определя от съотношенията

$$C = \left\langle \widehat{1}, e^{-\frac{x^2}{2}} \right\rangle = \left\langle 1, \sqrt{2\pi}e^{-\frac{\xi^2}{2}} \right\rangle = 2\pi.$$

Дайте и директно доказателство!

7.42. Нека $n = 1$. Пресметнете фуриеровия образ на функциите:

а) $f(x) = \theta(x)e^{-ax}\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$, $\alpha > 0$, $a > 0$;

б) $g(x) = e^{-a|x|}\frac{|x|^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$;

в) $P\frac{1}{x}$; г) $P\frac{1}{x^2}$; д) $h(x) = e^{ix^2}$.

Решение. а) Означете

$$F_\alpha(\xi) = \int\limits_0^\infty e^{-ax-ix\xi}\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}dx.$$

Преобразувайте израза $F_\alpha(\xi)F_\beta(\xi)$, като го запишете във вид на двоен интеграл, и извършете смяна на променливите

$$x = u^2,\ y = v^2.$$

След това въведете полярни координати и с помощта на равенството

$$2\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{2\alpha-1}\varphi\cdot\sin^{2\beta-1}.\varphi\cdot d\varphi = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

проверете, че $F_\alpha(\xi)F_\beta(\xi) = F_{\alpha+\beta}(\xi)$. Тъй като $F_\alpha(\xi)$ е непрекъсната като функция на α, а оттук следва, че $F_\alpha(\xi) = [F_1(\xi)]^\alpha$. Сега лесно се пресмята, че

$$F_1(\xi) = \frac{1}{a+i\xi}, \text{ т.е. } \widehat{f}(\xi) = \left(\frac{1}{a+i\xi}\right)^\alpha.$$

Упътване. б) От а) $F(\check{f})(\xi) = \left(\frac{1}{a-i\xi}\right)^\alpha$. Обаче $f(x) + \check{f}(x) \equiv f(x) + f(-x) = g(x)$.

в) От равенството $x \cdot P\frac{1}{x} = 1$ следва, че $\frac{1}{2\pi}F(x) * F\left(P\frac{1}{x}\right) = 2\pi\delta(\xi)$. Но $F(x)(\xi) = -i \cdot 2\pi \cdot \delta'(\xi)$. Следователно $\frac{d}{d\xi}F\left(P\frac{1}{x}\right) = i2\pi\delta(\xi)$, откъдето $F\left(P\frac{1}{x}\right)(\xi) = i \cdot 2\pi \cdot \theta(\xi) + C$. Константата C се определя лесно, понеже от нечетността на $P\frac{1}{x}$ следва, че и фуриеровият му образ е нечетен, т.е. $C = -i\pi$. Окончателно $F\left(P\frac{1}{x}\right) = i\pi \cdot \text{sign}\xi$.

г) Използвайте, че $P\frac{1}{x^2} = (-1)\frac{d}{dx}P\frac{1}{x}$.

д) Използвайте, че от сходимостта на интеграла на Френел

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ix^2}dx = \sqrt{\pi}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

следва равномерна относно ξ сходимост на

$$\widehat{h}_N(\xi) = F(\theta(N-|x|)e^{ix^2})(\xi) = e^{-\frac{i}{4}\xi^2}\int\limits_{-N+\frac{\xi}{2}}^{N+\frac{\xi}{2}} e^{iy^2}dy$$

при $N \to \infty$ към функцията $h_0(\xi) = \sqrt{\pi}\exp\left(-\frac{i}{4}(\xi^2-\pi)\right)$. Сега за $\varphi \in D(\mathbf{R}^1)$ проверете, че $\langle\widehat{h},\varphi\rangle = \langle h_0,\varphi\rangle$ и използвайте, че $D(\mathbf{R}^1)$ е навсякъде гъсто в $S(\mathbf{R}^1)$.

7.43. Намерете фуриеровия образ на $q(x) = \sum\limits_{-\infty<k<+\infty} \delta(x-k)$.

7.44. Нека квадратичната форма $(\mathbf{A}x, x) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j, \mathbf{A} = ||a_{ij}||$, е положително дефинитна, т.е.

$$(\mathbf{A}x, x) \geq a|x|^2, \ a = \mathrm{const} > 0.$$

Докажете формулите:

а) $F(e^{-(\mathbf{A}x,x)})(\xi) = \sqrt{\frac{\pi^n}{\det \mathbf{A}}} \cdot e^{-\frac{1}{4}(\xi, \mathbf{A}^{-1}\xi)}$;

б) $F(e^{i(\mathbf{A}x,x)})(\xi) = \sqrt{\frac{\pi^n}{\det \mathbf{A}}} \cdot e^{i\frac{\pi n}{4}} \cdot e^{-\frac{i}{4}(\xi, \mathbf{A}^{-1}\xi)}$.

Упътване. Нека $x = \mathbf{B}y$ е трансформацията, която канонизира квадратичната форма, т.е. $(\mathbf{A}x, x) = |y|$. Използвайте, че $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}\mathbf{B}^t$ и следователно $(\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B})^2 = 1$, а също така и зад. 7.9 и 7.42 д)

7.45. Намерете фуриеровите образи на функциите

$$f_k(x) = |x|^{-k}, \ x \in \mathbf{R}^n, \ 0 < k < n.$$

Упътване. Очевидно f_k са локално интегруеми и понеже са ограничени извън единичното кълбо, принадлежат на $S'(\mathbf{R}^n)$. Лесно се вижда, че $\widehat{f}_k(\xi)$ зависи само от $|\xi|$.

Нека най-напред $k > \frac{n}{2}$. Сега в същност $\widehat{f}_k(\xi)$ е функция, която принадлежи локално на L_2. (Наистина, ако $\chi(x) = \theta(1 - |x|)$, можем да представим f_k като сума от функцията с компактен носител χf_k и функцията $(1 - \chi)f_k \in L_2(\mathbf{R}^n)$, откъдето последното твърдение следва веднага.) Понеже f_k е хомогенна от степен $-k$ относно $|x|$, то $\widehat{f}_k$ е хомогенна от степен $k - n$ относно $|\xi|$, т.е. $\widehat{f}_k(\xi) = C_k \cdot |\xi|^{k-n}$, откъдето константата C_k зависи от k и n. Нека в равенството

$$\langle \widehat{f}_k, \varphi \rangle = \langle f_k, \widehat{\varphi} \rangle$$

поставим $\varphi(x) = \exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right)$. Следователно

$$C_k \int\limits_{\mathbf{R}^n} \frac{\exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right)}{|x|^{n-k}} dx = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbf{R}^n} \frac{\exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right)}{|x|^k} dx,$$

откъдето

$$C_k = \frac{\Gamma\left(\frac{n-k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} 2^{n-k} \cdot \pi^{\frac{n}{2}}.$$

Нека $0 < 2k < n$. Като означим $l = n - k$, имаме $\frac{n}{2} < l$. От $\widehat{f_l} = C_l \cdot f_{n-l}$, т.е. от $F(f_{n-k}) = C_l \cdot f_k$ следва $f_{n-k} = C_l(f_k)$. Остава да отбележим, че $C_l C_k = (2\pi)^n$.

Разгледайте случая $k = \frac{n}{2}$ чрез граничен преход. (Вж. [8a], с. 391 – 393.)

7.46. Намерете фуриеровия образ на $\delta_{S(R)}$ — прост слой върху сферата $S(R) \subset \mathbf{R}^3$, т.е. разпределение, действащо по формулата

$$\langle \delta_{S(R)}, \varphi \rangle = \int\limits_{S(R)} \varphi(x) dx.$$

Решение. Понеже трансформацията на Фурие на $u \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ е функцията

$$\widehat{u}(\xi) = (u_x, e^{-ix\xi}),$$

намираме

$$F(\delta_{S(R)})(\xi) = \langle \delta_{S(R)})(x), e^{-i\xi x} \rangle = R^2 \int\limits_{S(1)} e^{iR\langle \xi\omega \rangle} d\omega$$

$$= R^2 \int\limits_0^{2\pi} \left[\int\limits_0^{\pi} e^{-iR|\xi| \cos\theta} \sin\theta d\theta \right] d\varphi = 4\varphi R \frac{\sin R|\xi|}{|\xi|}.$$

7.47. Намерете фуриеровия образ на разпределението $\delta(x_1 - x_2)$, дефинирано с равенството

$$\langle \delta(x_1 - x_2), \varphi \rangle = \int\limits_{x_1 = x_2} \varphi(x_1, x_2) dl, \varphi \in S(\mathbf{R}^2),$$

където dl е елемент на дължината на правата $x_1 = x_2$.

7.48. Докажете, че фуриеровият прообраз на функцията $\frac{\sin t|\xi|}{|\xi|}$, $\xi \in \mathbf{R}^n$, t — параметър, е равен на

$$C\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}\begin{cases} r^{-1}(1-t^2r^{-2})^{\frac{n-3}{2}}, & t < r = |x|, \\ 0, & t > r = |x|. \end{cases}$$

Определете константата C.

Упътване. Тъй като направо не може да се приложи формулата за обръщане при частична трансформация на Фурие ($x \mapsto \xi$), разгледайте някоя примитивна по t от ред $n-2$ (т.е. с точност до константа една от функциите $\frac{\cos t|\xi|}{|\xi|^{n-1}}$ или $\frac{\sin t|\xi|}{|\xi|^{n-1}}$ в зависимост от стойността на n). С въвеждане на полярни координати лесно се проверява:

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} \frac{\cos t|\xi|}{|\xi|^{n-1}} e^{i\xi x}\, d\xi = \lim_{N\to\infty} \int\limits_0^N \frac{\cos t\rho}{\rho^{n-1}} \left[\int\limits_{S(1)} e^{i<\omega,x>\varrho} d\omega \right] \rho^{n-1} d\rho$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int\limits_0^N \cos t\rho \left[\frac{\omega_{n-1}}{r^{n-2}} \int\limits_{-r}^{r} e^{i\varrho\sigma}(r^2-\sigma^2)^{\frac{n-3}{2}} d\sigma \right] d\rho,$$

където ω_{n-1} е мярката на единичната сфера в $\mathbf{R}^{n-1}$ и $r = |x|$. След преработване на интеграла

$$I_N = \int\limits_0^N \cos t\rho \left[\int\limits_{-r}^{r} e^{i\rho\sigma}(r^2-\sigma^2)^{\frac{n-3}{2}} d\sigma \right] d\rho$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{-r}^{r} (r^2-\sigma^2)^{\frac{n-3}{2}} \left[\int\limits_0^N (e^{it\varrho} + e^{-it\varrho}) e^{i\varrho\sigma} d\rho \right] d\sigma$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{-r}^{r} (r^2-\sigma^2)^{\frac{n-3}{2}} \left[\frac{\sin N(t+\sigma)}{t+\sigma} + \frac{\sin N(t-\sigma)}{t-\sigma} \right] d\sigma$$

$$+\frac{i}{2}\int_{-r}^{r}(r^2-\sigma^2)^{\frac{n-3}{2}}\left[\frac{1-\cos N(t+\sigma)}{t+\sigma}+\frac{1-\cos N(t-\sigma)}{t-\sigma}\right]d\sigma,$$

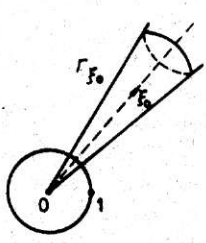
като вземете предвид, че съгласно зад. 7.2 вторият интеграл клони към нула при $N \to \infty$, се получава

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}I_N=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-r}^{r}(r^2-\sigma^2)^{\frac{n-3}{2}}\frac{\sin N(t+\sigma)}{t+\sigma}d\sigma$$

$$=\frac{(2\pi)^{\frac{2-n}{2}}\omega_{n-1}}{r^{n-2}}\begin{cases}(r^2-t^2)^{\frac{n-3}{2}}, & 0<t<r,\\ 0, & t<r,\end{cases}$$

което е следствие от формулата за обръщане.

Да предположим, че разпределението u съвпада с някоя безкрайно гладка функция в околност на точката x_0. Тогава съществува такава функция $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $0 \le \varphi \le 1$, $\varphi \equiv 1$, около точката x_0, че $\varphi u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Читателят вече знае, че за всяко $N > 0$ е изпълнено неравенството $|\widehat{\varphi u}(\xi)| \le C_N(1+|\xi|)^{-N}$, $\forall \xi \in \mathbf{R}^n$, когато константата $C_N > 0$ е достатъчно голяма. Ако u не е гладка в околност на x_0, не е изключено да се намерят направления в $\mathbf{R}^n_\xi$, около които $\widehat{\varphi u}(\xi)$ намалява по-бързо от всяка степен на $(1+|\xi|)^{-1}$. Нещо повече, естествено е да се предположи, че именно направленията в $\mathbf{R}^n_\xi$, които нямат това свойство, ще дават информация за поведението на u в точката x_0. Последното обстоятелство ни подсеща да дадем следната дефиниция на Хьормандер.



Черт. 7.1

Дефиниция. Ще казваме, че точката (x_0,ξ_0), $\xi_0 \ne 0$, не принадлежи на вълновия фронт на разпределението u и ще пишем $(x_0,\xi_0) \notin WF(u)$, ако съществуват околност $\omega \ni x_0$, конус $\Gamma_{\xi_0} = \left\{\xi \in \mathbf{R}^n : \left|\frac{\xi}{|\xi|}-\frac{\xi_0}{|\xi_0|}\right| < \varepsilon\right\}$ и функция $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $0 \le \varphi(x) \le 1$, $\varphi \equiv 1$, около x_0 такава, че

$$|\widehat{\varphi u}(\xi)| \le C_N(1+|\xi|)^{-N},\ \forall\xi \in \Gamma_{\xi_0}, \forall N = 0,1,\ldots;$$

$$C_N = \text{const} \qquad \text{(вж. черт. 7.1).}$$

Ясно е, че вълновият фронт $WF(u)$ е затворено множество.

По-долу предлагаме няколко прости задачи за пресмятане на $WF(u)$ в конкретни случаи. Едно по-подробно изучаване на понятието вълнов фронт, а също две важни негови приложения в теория на разпределенията читателят може да намери в [8a].

7.49. Пресметнете $WF(\delta)$.

Отг. $WF(\delta) = \{(0, \xi) : \forall \xi \in \mathbf{R}^n \setminus 0\}$.

7.50. Намерете $WF(\delta(x_1 - x_2))$, където $\delta(x_1 - x_2) \in D'(\mathbf{R}^2)$ действа по формулата

$$\langle \delta(x_1 - x_2), \varphi \rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, x_1) dx_1.$$

Решение. Нека $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$. Тогава

$$\overline{\varphi \delta(x_1 - x_2)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_1(\xi_1+\xi_2)} \varphi(x_1, x_1) dx_1$$

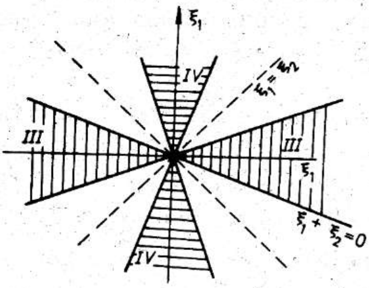
(защо?), $\varphi(x_1, x_1) \in D(\mathbf{R}^1)$.

Предполагаме, че $x_{10} \neq x_{20}$ и строим функция $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$, $0 \leq \varphi_0 \leq 1$, със следните свойства: $\varphi_0 \equiv 1$ около т. $x_0 = (x_{10}, x_{20})$, $\varphi_0(x_1, x_1) = 0$, $\forall x_1 \in \mathbf{R}^1$. Понеже $\overline{\varphi_0 \delta(x_1 - x_2)} = 0$, то $WF(\delta(x_1 - x_2)) \subset \{(x_1, x_1, \xi_1, \xi_2), \ \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbf{R}^2 \setminus 0\}$.

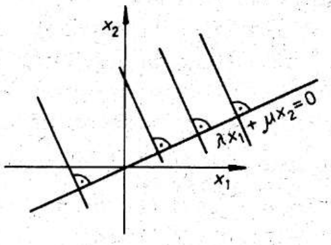
Означаваме $g(x_1) = \varphi(x_1, x_1) \in D(\mathbf{R}^1)$ и заключаваме, че $\overline{\varphi \delta(x_1 - x_2)} = \widehat{g}(\xi_1 + \xi_2)$, $|\widehat{g}(\xi_1 + \xi_2)| \leq C_N(1 + |\xi_1 + \xi_2|)^{-N}$, $N = 0, 1, \ldots$, $C_N = \mathrm{const}$. Чертеж 7.2 ни навежда на мисълта да направим полярната смяна $\xi_1 = \rho \cos\theta$, $\xi_2 = \rho \sin\theta$, $\rho = |\xi|$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Очевидно $|\xi_1 + \xi_2| = |\xi| \ |\cos\theta + \sin\theta|$, $\sin\theta + \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{7}{4}\pi$, $\frac{3\pi}{4}$. Следователно $WF(\delta(x_1 - x_2)) \subset \{(x_1, x_1, \xi_1, \ -\xi_1), \ \xi_1 \neq 0\}$. Нека $x_{10} = x_{20}$ и $\varphi_1 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$, $\varphi_1 \equiv 1$ около $x_0 = (x_{10}, x_{20})$, $0 \leq \varphi$. Имаме, че $\overline{\varphi_1 \delta(x_1 - x_2)}(\xi_1, -\xi_1) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x_1, x_1) dx_1$, т.е. $WF(\delta(x_1 - x_2)) = \{(x_1, x_1, \xi_1, -\xi_1), \ x_1 \in \mathbf{R}^1, \ \xi_1 \in \mathbf{R}^1 \setminus 0\}$.

7.51. Пресметнете $WF(\delta(\lambda x_1 + \mu x_2))$, $\lambda^2 + \mu^2 > 0$, $\mu = \mathrm{const}$.

Отг. $WF(\delta(\lambda x_1 + \mu x_2)) = \{(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) : \lambda x_1 + \mu x_2 = 0, \ -\mu\xi_1 + \lambda\xi_2 = \mathrm{const}\}$.



Черт. 7.2



Черт. 7.3

Геометричната интерпретация е дадена на черт. 7.3.

7.52. Ако θ е функцията на Хевисайд, намерете $WF(\theta(x_1 - x_2))$, $\theta(x_1 - x_2) \in D'(\mathbf{R}^2)$.

Упътване. Без ограничение на общността считаме, че $|\xi| \geq 1$. Освен това е ясно, че всеки вектор $\xi \in \mathbf{R}^2$ лежи в някой ъгъл от вида $|\xi_1| \leq c|\xi_2|$, $c = \text{const} > 0$, или от вида $|\xi_2| \leq d|\xi_1|$, $d = \text{const} > 0$. Тогава имаме, че $|\xi| \leq \sqrt{1+c^2}|\xi_2|$ или $|\xi| \leq \sqrt{1+d^2}|\xi_1|$. Ние ще изучим само случая $|\xi_1| \leq c|\xi_2|$. И така

$$\overline{\varphi\theta(x_1 - x_2)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_1\xi_1} \left[\int\limits_{-\infty}^{x_1} e^{-ix_2\xi_2} \varphi(x_1, x_2) dx_2 \right] dx_1$$

$$= \frac{i}{\xi_2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_1(\xi_1+\xi_2)} \varphi(x_1, x_1) dx_1 - \frac{i}{\xi_2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_1\xi_1} \left[\int\limits_{-\infty}^{x_1} e^{-ix_2\xi_2} \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} dx_2 \right] dx_1$$

$$= \frac{i}{\xi_2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_1(\xi_1+\xi_2)} \varphi(x_1, x_1) dx_1 + \frac{1}{\xi_2^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_1(\xi_1+\xi_2)} \frac{\partial}{\partial x_2} \varphi(x_1, x_1) dx_1$$

$$-\frac{1}{\xi_2^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_1\xi_1} \left[\int\limits_{-\infty}^{x_1} e^{-ix_2\xi_2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} dx_2 \right] dx_1.$$

Прилагайки неколкократно интегриране по части, неравенството $|\xi_2| \leq \sqrt{1+c^2}|\xi|^{-1}$ и решението на предната задача, се убеждаваме, че $WF(\theta(x_1 - x_2)) = \{(x_1, x_1, \xi_1, -\xi_1),\ \xi_1 \neq 0\}$ (вж. черт. 7.2, където IV : $|\xi_1| \leq c|\xi_2|$).

7.53.* Нека $\varphi(x) \in D(\mathbf{R}^n)$ и функцията $S(x) \in C^\infty$ в околност на supp φ. Означаваме с $\eta = (\xi,\ \xi_{n+1})$, $\xi \in \mathbf{R}^n$, $\xi_{n+1} \in \mathbf{R}^1$, кой да е вектор, принадлежащ на единичната сфера S^n в $\mathbf{R}^{n+1}$. Предполагаме, че $\inf\limits_{\operatorname{supp}\varphi\times(\Gamma_{\eta_0}\cap S^n)} |\xi + \operatorname{grad}_x S(x)\xi_{n+1}| \geq c_0$, $c_0 = \text{const} > 0$, където $x \in$ supp φ и η и описва сечението на S^n със зададения конус $\Gamma_{\eta_0} \ni \eta_0$, $\eta_0 \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus 0$.

Докажете, че за всяко естествено N съществува такава константа $C_N > 0$, че

$$\left|\int\limits_{\mathbf{R}^n} \varphi(x) e^{-i(x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n + S(x)\xi_{n+1})} dx\right| \leq \frac{C_N}{(1+|\eta|)^N}, \forall \eta \in \Gamma_{\eta_0}.$$

Упътване. Понеже $\xi + \operatorname{grad}_x S\xi_{n+1}$ е хомогенна относно $\eta = (\xi, \xi_{n+1})$ от 1-ва степен, намираме, че $|\xi + \operatorname{grad}_x S\xi_{n+1}|^2 \geq C_0|\eta|^2$, $x \in$ supp $\varphi, \eta \in \Gamma_{\eta_0}$. По-нататък разглеждаме линейния диференциален оператор

$$L = \frac{1}{|\xi + \operatorname{grad}_x S\xi_{n+1}|^2} \sum_{j=1}^{n} \left(\xi_j + \frac{\partial S}{\partial x_j}\xi_{n+1}\right)^2 \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Ясно е, че $L(e^{-i\Phi}) = -ie^{-i\Phi}$, $\Phi = \langle x, \xi\rangle + S(x)\xi_{n+1}$, т.е.

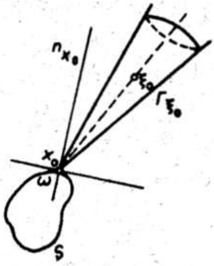
$$\left|\int\limits_{\mathbf{R}^n} e^{-i\Phi}\varphi(x)dx\right| = \left|\int\limits_{\mathbf{R}^n} L(e^{-i\Phi})\varphi dx\right| = \cdots = \left|\int\limits_{\mathbf{R}^n} L^k(e^{-i\Phi})\varphi dx\right|,$$

$k = 1, 2, \ldots$. Към току-що получения интеграл приложете формулата на Гаус — Остроградски.

7.54.* Оценете отгоре $WF(\delta_S)$, където S е безкрайно гладка затворена повърхнина в $\mathbf{R}^n$.

Отг. $WF(\delta_S) \subset \{(x, n_x) : x \in S,\ n_x \neq 0\}$ и n_x е нормалата към S в точката x.

Упътване. Съгласно определението на повърхнинен интеграл задачата се свежда към предишната. Наистина, ако векторът $\xi_0 = (\xi_{10}, \ldots, \xi_{n0})$, $\xi_0 \neq 0$, не е нормален към S в точката x_0, съществуват околност $\omega \ni x_0$, $\omega \subset S$, и конус Γ_{ξ_0} такива, че нито един вектор $\xi \in \Gamma_{\xi_0} \setminus 0$ не е нормален към S в някоя точка от ω. Следователно, ако в локалните координати x около точката x_0, S се задава с равенството $x_n = T(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in C^\infty(\overline{D})$, D — ограничено, $(x_1, \ldots, x_{n-1}, T) \in \omega$, то векторът $\left(-\dfrac{\partial T}{\partial x_1}, \cdots, -\dfrac{\partial T}{\partial x_{n-1}}, 1\right)$ е нормален към S, но не е колинеарен с ξ, т.е. $P = \sum\limits_1^{n-1} \left(\xi_j + \dfrac{\partial T}{\partial x_j}\xi_n\right)^2 > 0$, $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \overline{D}$, $\xi \in \Gamma_{\xi_0} \setminus 0$. Така намираме, че $\inf P$ върху $D \times (\Gamma_{\xi_0} \cap S^{n-1})$ е > 0, което приключва доказателството (вж. черт. 7.4).



Черт. 7.4

7.55. Пресметнете $WF\left(\pi\delta(x) + iP\left(\frac{1}{x}\right)\right)$, $\delta \in D'(\mathbf{R}^1)$, $P\left(\frac{1}{x}\right)$ е дефинирано в зад. 4.7.

Отг. $WF(u) = \{(0,\xi),\ \xi < 0\}$.

Упътване. Нека $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^1)$. Тогава

$$\overline{\varphi\pi\delta(x) + i\varphi P\left(\frac{1}{x}\right)} = \varphi(0)\pi + \frac{i}{2\pi}\widehat{\varphi} * \overline{P\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(\xi)d\xi + \frac{i^2}{2}\widehat{\varphi} * \text{sign}\xi$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(\xi)d\xi - \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(\eta - \xi)\text{sign}\xi d\xi$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(\eta - \xi)d\xi - \int\limits_{0}^{\infty} \widehat{\varphi}(\eta - \xi)d\xi\right] = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{0} \widehat{\varphi}(\eta - \xi)d\xi.$$

Нека $\eta > 0$, т.е. $\eta - \xi > 0$. Ясно е, че $|\widehat{\varphi}(\eta - \xi)| \le \frac{C_N}{(1+|\xi-\eta|)^N}$ $\le C_N\left(\frac{1}{2}+\eta\right)^{-\frac{N}{2}}\left(\frac{1}{2}-\xi\right)^{-\frac{N}{2}}$, защото $1+\eta-\xi = \left(\frac{1}{2}+\eta\right)+\left(\frac{1}{2}-\xi\right)$ $\ge \sqrt{\frac{1}{2}+\eta}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}-\xi}$. И така $\left|\overline{\varphi\pi\delta(x)+i\varphi P\left(\frac{1}{x}\right)}\right| \le \frac{C'_N}{|1+\eta|^N}$, $\eta > 0$, $N = 1, 2, \dots$.

7.56. Пресметнете $WF(\mathcal{E}_1)$, където $\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2}\theta(t)\theta(t-|x|)$ е фундаменталното решение на вълновото уравнение $u_{tt} = u_{xx}$.
Отг. $WF(\mathcal{E}_1) \subset \{(x,|x|,\, x,-|x|),\ x \neq 0\} \cup \{(0,0,\xi_1,\xi_2)\}$.

Вярваме, че приведените примери са убедили читателя в необходимостта от пресмятане при $\lambda \to \infty$ на асимптотиката на интеграли, съдържащи експоненциалното ядро $e^{i\lambda x}$. Наистина по този начин сме в състояние да намерим вълновите фронтове на разпределенията от зад. 7.50 – 7.52, 7.54. За онези, които имат вкус към по-теоретични разглеждания, ще приведем някои естествени обобщения на методите, използвани при решаването на горните задачи. Надяваме се, че те могат да бъдат използвани и при други случаи.

1. Да разгледаме интеграла $F(\lambda) = \int\limits_a^\infty e^{i\lambda S(x)}\varphi(x)dx$, където $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^1)$, $S(x)$ е реална функция, $S \in C^\infty[a,+\infty)$, $S'(x) \neq 0$ при $x \ge a$, и λ е голям параметър. Тогава твърдим, че

$$F(\lambda) = -\frac{\varphi(a)}{i\lambda S'(a)}e^{i\lambda S(a)} + O(\lambda^{-2}), \lambda \to +\infty.$$

Доказателство. Интегрираме по части интеграла, задаващ функцията $F(\lambda)$, и намираме

$$F(\lambda) = \frac{1}{i\lambda}\int\limits_a^\infty \frac{\varphi(x)}{S'(x)}d(e^{i\lambda S(x)})$$

$$= -\frac{\varphi(a)}{i\lambda S'(a)}e^{i\lambda S(a)} - \frac{1}{i\lambda}\int\limits_a^\infty e^{i\lambda S(x)}\frac{d}{dx}\left(\frac{\varphi(x)}{S'(x)}\right)dx.$$

Ако означим $F_1(\lambda) = \int\limits_a^\infty e^{i\lambda S(x)}\varphi_1(x)dx$, $\varphi_1(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\varphi(x)}{S'(x)}\right)$, то $\varphi_1 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^1)$ и следователно едно ново интегриране по части в $F_1(\lambda)$ ни дава

$$F_1(\lambda) = -\frac{\varphi_1(a)}{i\lambda S'(a)}e^{i\lambda S(a)} + 0\left(\frac{1}{\lambda}\right), \lambda \to \infty.$$

С това търсената асимптотика е намерена.

От току-що извършените пресмятания незабавно следва още един интересен резултат.

2. Разглеждаме $G(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda S(x)}\varphi(x)dx$, където $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^1)$, S е реална функция, $S \in C^\infty$, $S'(x) \neq 0$ за всяко $x \in \operatorname{supp} \varphi$, и λ е голям параметър.Тогава за всяко естествено число N съществува такава константа $C_N > 0$, че

$$|G(\lambda)| \leq C_N\lambda^{-N}, \lambda \geq 1.$$

Аналогичен резултат е валиден и в многомерния случай.

3. Въвеждаме

$$H(\lambda) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} e^{i\lambda S(x)}\varphi(x)dx,$$

$$\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n), \qquad S(x) \in C^\infty(\Omega), \qquad \operatorname{supp} \varphi \subset \Omega,$$

е реална функция и grad $S \neq 0$ върху supp φ. Твърдим, че за всяко естествено N може да се намери константа C_N със свойството

$$|H(\lambda)| \leq C_N\lambda^{-N}, \lambda \geq 1.$$

За да установите този факт, дефинирайте оператора

$$L = \frac{1}{|\mathrm{grad} S|^2}\sum_{j=1}^n \frac{\partial S}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}$$

и се убедете, че

$$L(e^{i\lambda S}) = i\lambda e^{i\lambda S}.$$

След това използвайте упътването към зад. 7.53*.

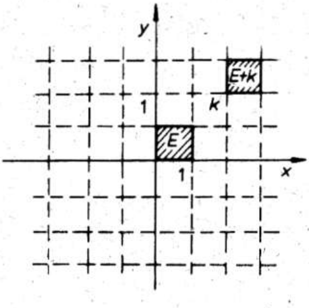
За да формулираме следващата задача, която представлява едно елегантно приложение на фуриеровия анализ в теория на числата, ще напомним няколко известни факта. Множеството $G \subset \mathbf{R}^n$ наричаме изпъкнало, ако щом x, $y \in G$, то $\lambda x + \mu y \in G$ за всички $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$, за които $\lambda + \mu = 1$. G е симетрично относно началото, ако от $x \in G$ следва, че $-x \in G$. Ако $\mathbf{Z}$ е множеството от целите числа, то елементите на $\mathbf{Z}^n$ се наричат целочислени точки. Ясно е, че $0 \in G$, щом G е изпъкнало симетрично множество.

7.57. (Минковски). Нека G е ограничено измеримо изпъкнало симетрично множество и мярката му удовлетворява неравенството mes $G > 2^n$. Тогава G съдържа поне една целочислена точка, различна от 0.

Решение (Зигел). Нека $\varphi(x)$ е характеристичната функция на G, т.е. $\varphi|_G = 1$, $\varphi = 0$ при $x \notin G$. Също както в задача 1.19, се убеждаваме, че функциите $\{e^{-2\pi i<k,x>}\}_{k\in Z^n}$ образуват ортонормирана система в $L_2(E)$, където E е единичният куб $E = \{x|0 \leq x_i \leq 1\}$. Сега да разгледаме функцията

$$f(x) = \sum_{k\in Z^n} \varphi(2x - 2k), x \in \mathbf{R}^n.$$

Отбелязваме, че ако x описва компактно множество в $\mathbf{R}^n$, то горният ред представлява крайна сума. Наистина $|2x - 2k| \geq 2|k| - 2|x| \to \infty$ при $|k| \to \infty$. Ясно е, че $f(x)$ е периодична с период 1 по отношение на всеки аргумент. Неравенството на Бесел (вж. зад. 1.16) ни учи, че



Черт. 7.5

$$(1) \qquad \int_E |f(x)|^2 dx \geq |a_0|^2, a_0 = \int_E f(x)dx.$$

Обаче

$$a_0 = \int_E \sum_k \varphi(2x - 2k)dx = \sum_k \int_E \varphi(2x - 2k)dx,$$

защото сумата по k е крайна. Да направим сега смяната $x-k=t$. Тогава

$$a_0 = \sum_k \int\limits_{E-k} \varphi(2t)dt = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \varphi(2t)dt = 2^{-n} \int\limits_{\mathbf{R}^n} \varphi(t)dt = 2^{-n}\mathrm{mes}(G)$$

(черт. 7.5), като $E-k$ е транслацията на куба E на вектор $-k$. От друга страна, $\int_E |f(x)|^2dx = \int_E \sum_k \sum_{k'} \varphi(2x-2k)\ \varphi(2x-2k')dx$ и горната двойна сума е пак крайна. Значи

$$\int\limits_E |f(x)|^2dx = \sum_k \sum_{k'} \int\limits_{E-k'} \varphi(2t-2(k-k'))\varphi(2t)dt$$

$$= \sum_{k'} \int\limits_{E-k'} \sum_k \varphi(2t-2(k-k'))\varphi(2t)dt = \sum_{k'} \int\limits_{E-k'} f(t)\varphi(2t)dt.$$

Действително за всяко фиксирано $k' \in \mathbf{Z}^n$ точката $k-k'$ описва $\mathbf{Z}^n$. Така добиваме

$$\int\limits_E |f(x)|^2dx = \int\limits_{R^2} f(x)\varphi(2x)dx = \sum_k \int\limits_{\mathbf{R}^n} \varphi(2x-2k)\varphi(2x)dx$$

$$= 2^{-n} \sum_k \int\limits_G \varphi(x-2k)\varphi(x)dx.$$

Да предположим, че $\varphi(x-2k)\varphi(x) \neq 0$. Имаме, че

$$\pm(x-2k) \in G, x \in G \Rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(2k-x) \in G \Rightarrow k \in G.$$

Да допуснем, че G не съдържа точки от $\mathbf{Z}^n \setminus 0$. Тогава $\varphi(x-2k)\varphi(x) = 0$, $\forall k \in \mathbf{Z}^n \setminus 0$ и следователно $\int_E |f(x)|^2dx = 2^{-n}\mathrm{mes}\,G$. Сега вече (1) ни дава, че $\mathrm{mes}\,G \leq 2^{-n}$, и полученото противоречие доказва твърдението.

Въпрос: Вярна ли е теоремата за $\mathrm{mes}\,G = 2^{-n}$?

Задачите до края на § 7 са посветени на трансформацията на Лаплас, която е тясно свързана с трансформацията на Фурие. Нека $f(t)$ е локално интегруема функция, за която

$$|f(t)| \leq \text{const } e^{\gamma_0 t} \text{ при } t > 0. \tag{2}$$

Ако $a > \gamma_0$, съществува трансформацията на Фурие на функцията

$$\theta(t)f(t)e^{-at},$$

а именно

$$g(b) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \theta(t)f(t)e^{-at}e^{-ibt}dt.$$

Означавайки $p = a + ib$, получаваме т.нар. трансформация на Лаплас на функцията $f(t)$:

$$L(f)(p) = \int\limits_{0}^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt, \tag{3}$$

която при горните условия за $f(t)$ е дефинирана в полуравнината $\operatorname{Re} p > \gamma_0$.

7.58. Намерете трансформациите на Лаплас $L(f)(p)$, ако:

а) $f(t) = e^{\alpha t}$, $\alpha \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha$; б) $f(t) = \sin at$, $a \in \mathbf{R}^1$;
в) $f(t) = \cos at, a \in \mathbf{R}^1$; г) $f(t) = \operatorname{sh} at$, $a \in \mathbf{R}^1$;
д) $f(t) = \operatorname{ch} at$, $a \in \mathbf{R}^1$.

Отг. а) $\frac{1}{p-\alpha}$; б) $\frac{a}{p^2+a^2}$; в) $\frac{p}{p^2+a^2}$; г) $\frac{a}{p^2-a^2}$; д) $\frac{p}{p^2-a^2}$.

7.59. Докажете, че при условието (2):

а) $L(f)(p)$ е холоморфна функция при $\operatorname{Re} p > \gamma_0$;

б) в сила е релацията $\frac{d^m}{dp^m}L(f(t))(p) = L((-t)^m f(t))(p)$ (m — естествено число);

в) намерете праобразите при трансформацията на Лаплас на функциите:

1) $\dfrac{1}{(p-\alpha)^m}$, m — естествено число, $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha$,

2) $\dfrac{p}{(p^2+a^2)^2}$, $a \neq 0$, 3) $\dfrac{1}{(p^2+a^2)^2}$, $a \neq 0$.

Упътване. в) Използвайте резултатите от зад. 7.58 а)–в) и зад. 7.59 б).

Отг. в) 1) $e^{\alpha t}\dfrac{t^{m-1}}{(m-1)!}$, 2) $\dfrac{t}{2a}\sin at$, 3) $\dfrac{1}{2a^3}(\sin at - at\cos at)$.

7.60. а) Нека $f(t)$ е диференцируема и $f'(t)$ удовлетворява условие, аналогично на (2) с число γ_1. Покажете, че при $\operatorname{Re} p > \max(\gamma_0, \gamma_1)$:

$$L(f'(t))(p) = pL(f(t))(p) - f(+0).$$

б) Формулирайте условия за функцията f, при които може да се докаже формулата (m — естествено число):

$$L(f^{(m)}(t))(p) = p^m L(f(t))(p)$$

$$-p^{m-1} f(+0) - p^{m-2} f'(+0) - \cdots - f^{(m-1)}(+0).$$

в) Покажете, че

$$L(e^{ct} f(t))(p) = L(f(t))(p-c), c = \text{const}.$$

г) Намерете праобраза на функцията $\dfrac{a}{(p-c)^2+a^2}$ при трансформацията на Лаплас.

7.61. Нека $f(t)$ и $g(t)$ са локално интегруеми функции, удовлетворяващи условието (2). Докажете, че трансформацията на Лаплас на конволюцията на функциите $\theta(t)f(t)$ и $\theta(t)g(t)$, т.е. на функцията $\int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$, е дефинирана при $\operatorname{Re} p > \gamma_0$ и е равна на $L(f)(p) \cdot L(g)(p)$.

7.62. С помощта на трансформацията на Лаплас решете задачите:

а) $y'' + 3y' + 2y = 0, \ t > 0,$
$y(0) = y_0, \ y(0) = y_1;$

б) $y''' + y = \frac{1}{2}t^2e^t, \; t > 0,$
$y''(0) = y'(0) = y(0) = 0.$

Решение. а) Предвид резултата от зад. 7.60 б)

$$(p^2 + 3p + 2)L(y)(p) = (py_0 + y_1) + 3y_0,$$

откъдето

$$L(y)(p) = \frac{py_0 + (y_1 + 3y_0)}{(p+1)(p+2)} = \frac{2y_0 + y_1}{p+1} - \frac{y_0 + y_1}{p+2}.$$

При предположение, че прообразът се определя еднозначно от трансформацията на Лаплас, зад. 7.58 а) ни дава

$$y(t) = (2y_0 + y_1)e^{-t} - (y_0 + y_1)e^{-2t}.$$

б) Както в примера а), намираме

$$(p^3 + 1)L(y)(p) = \frac{1}{(p-1)^3} \text{ (вж. зад. 7.59 в), 1)).}$$

Следователно

$$L(y)(p) = \frac{1}{(p-1)^3(p^3+1)} = \frac{1}{2(p-1)^3} - \frac{3}{4(p-1)^2}$$

$$+\frac{3}{8(p-1)} - \frac{1}{24(p+1)} - \frac{p-2}{3\left[\left(p-\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{3}{4}\right]},$$

откъдето

$$y(t) = \frac{1}{4}\left(t^2 - 3t + \frac{3}{2}\right)e^t - \frac{1}{24}e^{-t}$$

$$-\frac{1}{3}\left\{\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right\}e^{\frac{t}{2}}.$$

7.63. Като използвате трансформацията на Лаплас, решете задачата

$$y''(t) + k^2y(t) = f(t), k = \text{const},$$

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0,$$

където $f(t)$ удовлетворява условието (2). Какво явление настъпва при $f(t) = b\sin kt$?

Решение. С помощта на зад. 7.60 б) веднага се вижда, че

$$L(y(t))(p) = \frac{1}{p^2+k^2}L(f(t))(p).$$

Сега зад. 7.61 и 7.58 б) ни дават

$$y(t) = \frac{1}{k}\int\limits_0^t f(\tau)\sin k(t-\tau)d\tau.$$

В споменатия частен случай

$$y(t) \equiv -\frac{bt}{2k}\left(\cos kt + \frac{1}{2}\sin kt\right),$$

т.е. амплитудата на трептенията може да нараства неограничено с нарастване на времето t — настъпва явлението резонанс.

7.64. Намерете решението на системата от обикновени диференциални уравнения

$$\begin{aligned} 3x' + 2x + y' &= 1, \\ x + 4y' + 3y &= 0,\ t > 0, \end{aligned}$$

при условие, че $x(0) = y(0) = 0$.

Решение. За трансформациите на Лаплас на неизвестните функции получаваме системата

$$(3p+2)L(x)(p) + pL(y)(p) = \frac{1}{p},$$

$$pL(x)(p) + (4p+3)L(y)(p) = 0,$$

откъдето

$$L(x)(p) = \frac{4p+3}{p(p+1)(11p+6)} = \frac{1}{2p} - \frac{1}{5(p+1)} - \frac{33}{10(11p+6)},$$

$$L(y)(p) = \frac{1}{(p+1)(11p+6)} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{p+1} - \frac{11}{11p+6}\right).$$

Следователно

$$x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5}e^{-t} - \frac{3}{10}e^{-6t/11},$$

$$y(t) = \frac{1}{5}\left(e^{-t} - e^{-6t/11}\right).$$

Забележка. Резултатът от следващата задача прави трансформацията на Лаплас удобна за прилагане. Изхождайки от формулата преди (3) и формулата за обръщане за трансформацията на Фурие, очакваме (при известни условия) да бъде изпълнена релацията

$$\theta(t)f(t)e^{-at} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(b)e^{ibt}\,db,$$

т.е.

$$\theta(t)f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} L(f)(p)e^{pt}\,dp,$$

тъй като $g(b)$ означихме с $L(f)(p)$, $p = a + ib$.

7.65. (*формула за обръщане*). Покажете, че ако функцията $\Phi(p)$:

1) е аналитична в полуравнината $\operatorname{Re} p > \gamma_0$,

2) удовлетворява оценката

$$|\Phi(a+ib)| \leq B(b), \text{ където } \int_{-\infty}^{+\infty} B(b)\,db = B_0 < +\infty,$$

тогава съществува функция $f(t)$, за която

1) $f(t)| \leq Ce^{\gamma_0 t}$, $t > 0$, $C = \text{const}$, 2) $f(t) = 0$, $t < 0$,

3) $L(f(t))(p) = \Phi(p)$.

Решение. Дефинираме

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \Phi(p)e^{pt}\,dp, \tag{4}$$

където $\gamma > \gamma_0$ е произволно число. Веднага се вижда, че този интеграл е сходящ и не зависи от γ. Последното се установява с помощта на теоремата на Коши и предвид $\lim\limits_{|b|\to\infty} B(b) = 0$, което веднага следва от предположенията. От оценката

$$|f(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(\gamma + ib)| e^{\gamma t} db \leq \frac{B_0}{2\pi} e^{\gamma t}$$

получаваме първите две твърдения съответно при $t > 0$, $\gamma \to \gamma_0$, и при $t < 0$, $\gamma \to +\infty$.

От (4) със смяната $p = \gamma + ib$ получаваме

$$f(t) = \frac{e^{\gamma^t}}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ibt} \Phi(\gamma + ib) db,$$

т.е. $2\pi \cdot e^{\gamma t} f(-t)$ е трансформация на Фурие на абсолютно интегруемата функция $\Phi(\gamma + ib)$, която очевидно удовлетворява условието на Дини (вж. дефиницията преди зад. 7.5). Формулата за обръщане показва, че

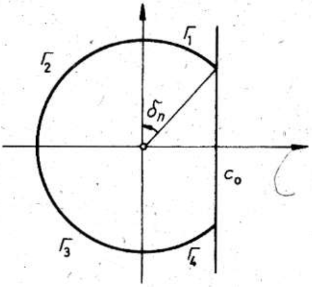
$$\Phi(\gamma + ib) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} 2\pi \cdot e^{\gamma t} f(-t) e^{ibt} dt$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t(\gamma + ib)} f(t) dt,$$

с което и последното твърдение е установено.

Забележка. Пресмятането на интеграла от формулата за обръщане за трансформацията на Лаплас обикновено се извършва с помощта на теоремата за резидуумите след предварително свеждане до интеграл по затворен контур. В много случаи резултатът от следващата задача е достатъчен за подобна редукция.

7.66. Нека функцията $f(t)$ е дефинирана в полуравнината



Черт. 7.6

$\operatorname{Re} p \leq c_0$ $(c_0 > 0)$, Γ_{R_n} е частта в същата полуравнина от окръжност с център в началото и радиус R_n, като редицата $\{R_n\}$ расте неограничено. Покажете, че ако

$$\max_{p \in \Gamma_{R_n}} |f(p)| = M_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,$$

тогава

$$\int\limits_{\Gamma_{R_n}} f(p) e^{pt} dp \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Решение. Най-напред ще отбележим, че тъй като $t > 0$, функцията e^{pt} е ограничена в избраната полуравнина. Нека Γ_i, $i = 1, 2, 3, 4$, са частите от Γ_{R_n}, разположени съответно в първи и т.н. квадрант, а δ_n е централният ъгъл, опиращ се на дъгата Γ_1 (черт. 7.6). Абсолютната стойност на интеграла върху Γ_1 не надминава

$$R_n \delta_n e^{c_0 t} \cdot M_n = e^{c_0 t} \cdot R_n \arcsin \frac{c_0}{R_n} \cdot M_n,$$

което при $n \to \infty$ клони към нула.

Интегралът върху Γ_2 не надминава

$$R_n \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{R_n \cdot t \cdot \cos\varphi} \cdot M_n d\varphi = R_n M_n \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-R_n t \sin\psi} d\psi,$$

като се има предвид неравенството $\sin\psi \geq \frac{2}{\pi}\psi$ за $\psi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ се мажорира от

$$R_n M_n \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \exp\left(-\frac{2R_n}{\pi}\psi t\right) d\psi = \frac{\pi}{2t} M_n (1 - e^{-R_n t}) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Интегралът върху Γ_3 се оценява с помощта на неравенството $\cos\psi \geq 1 - \frac{2}{\pi}\psi$ за $\psi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

7.67. Намерете решение на смесената задача

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx},\ 0 < x,\ t < +\infty, \\ u(0,t) &= u_0 \neq 0,\ t > 0, \\ u(x,0) &= 0,\ x > 0, \end{aligned}$$

в класа на ограничените функции.

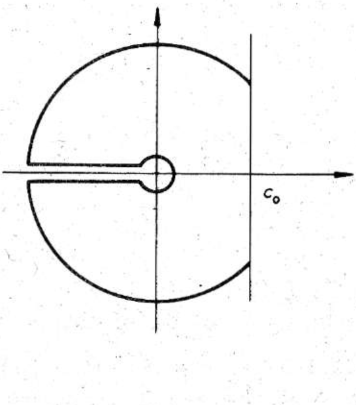
Упътване. Ако $u(x,t)$ е решение, то функцията

$$v(x,p) = \int_0^\infty u(x,t)e^{-pt}dt$$

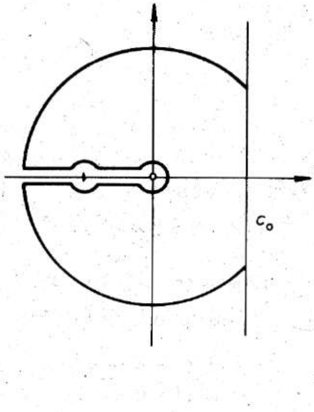
удовлетворява условията

$$v_{xx}(x,p) = pv(x,p), v(0,p) = \frac{u_0}{p},$$

откъдето $v(x,p) = \frac{u_0}{p}e^{-\sqrt{p}x}$. След избиране на еднозначен клон на $\sqrt{p}$ в равнината, разрязана по отрицателната част на абсцисната ос, за да извършите обръщането, използвайте контура от черт. 7.7.



Черт. 7.7



Черт. 7.8

Отг. $u(x,t) = u_0 - \frac{u_0}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\sin(\sqrt{\sigma}\cdot x)}{\sigma}e^{-\sigma t}d\sigma.$

7.68. Намерете ограничено решение на задачата

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx},\ x>0,\ t>0,\\ u(x,0) &= 0,\ u_t(x,0)=0,\ x>0,\\ u(0,t) &= e^{-t},\ t>0. \end{aligned}$$

Упътване. При обръщането използвайте контура на черт. 7.8.

7.69. Решете задачата

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx},\ 0<x<l,\ 0<t,\\ u_x(0,t) &= 0,\ u(l,t)=u_1,\ t>0,\\ u(x,0) &= u_0,\ 0<x<l. \end{aligned}$$

Упътване. За функцията $v(x,p)=\int\limits_0^\infty e^{-pt}u(x,t)dt$ се намира

$$v(x,p)=\frac{u_0}{p}+\frac{u_1-u_0}{p}\cdot\frac{\mathrm{ch}x\sqrt{p}}{\mathrm{ch}l\sqrt{p}}.$$

Приложете формулата за обръщане.

Отг. $u(x,t)=u_0+\frac{4}{\pi}(u_1-u_0)$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\exp\left(-\frac{\pi^2}{l^2}\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 t\right)\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}.$$

Дефиниция. Нека $D'_+(\gamma)$ е съвкупността от всички разпределения $u\in D'(\mathbf{R}^1)$ с носител в $[0,+\infty)$ и такива, че $u(t)e^{-at}\in S'(\mathbf{R}^1)$ за всяко $a>\gamma$.

7.70. Покажете, че:

а) ако $\gamma_1\le\gamma_2$, то $D'_+(\gamma_1)\subset D'_+(\gamma_2)$;

б) ако $u\in S'(\mathbf{R}^1)$ и $\mathrm{supp}\, u\subset[0,+\infty)$, то $u\in D'_+(0)$;

в) ако $u\in D'_+(a)$, то в 1) $u(kt)\in D'_+(ka)$, $k>0$, в 2) $u(t)e^{\lambda t}\in D'_+(a+\mathrm{Re}\lambda)$, в 3) $b(t)u(t)\in D'_+(a)$, ако $b\in O_M$ (вж. дефиницията преди зад. 7.34);

г) ако $u,\ v\in D'_+(a)$, то $u*v\in D'_+(a)$ и

$$(u*v)e^{-\sigma t}=ue^{-\sigma t}*ve^{-\sigma t},\forall\sigma>a.$$

Дефиниция. Разпределението

$$L(u)(p) = F[u(t)e^{-at}](b), p = a + ib, a > \gamma,$$

се нарича трансформация на Лаплас на $u \in D'_+(\gamma)$(F — трансформация на Фурие).

7.71. Докажете, че ако $u \in D'_+(a)$, то

а) $L((-t)^m u(t))(p) = \frac{d^m}{dp^m} L(u(t))(p)$ при Re $p > a$, $m = 0, 1, 2, \ldots$;

б) $L\left(\frac{d^m}{dt^m} u(t)\right)(p) = p^m L(u(t))(p)$ при Re $p > a$, $m = 1, 2, \ldots$;

в) $L(u(t)e^{\lambda t})(p) = L(u(t))(p - \lambda)$ за Re $p > a + \mathrm{Re}\lambda$;

г) $L(u(kt))(p) = \frac{1}{k} L(u(t)) \left(\frac{p}{k}\right)$ за Re $p > ka$ $(k > 0)$.

7.72. Докажете, че ако u, $v \in D'_+(a)$, то

$$L((u * v)(t))(p) = L(u)(p) \cdot L(v)(p), \mathrm{Re}\ p > a.$$

7.73. а) Намерете трансформацията на Лаплас на $\delta(t - \tau)$, $\tau \geq 0$.

б) Изразете трансформацията на Лаплас на

б 1) $u(t - \tau)$, $\tau \geq 0$,

б 2) $\underbrace{\theta * \theta * \ldots * \theta *}_{m \text{ пъти}} u(t), m = 1, 2, \ldots,$

чрез трансформацията на Лаплас на $u \in D'_+(a)$.

Отг. а) $e^{-\tau p}$; б1) $e^{-\tau p} L(u)(p)$; б2) $\frac{1}{p^m} L(u)(p)$.

7.74. Сравнете резултатите от зад. 7.71 б) и 7.60 б).

Упътване. Вж. зад. 5.11.

7.75. Нека $D((a, b), \mathbf{C})$ е множеството от комплекснозначни функции f, дефинирани върху $\mathbf{R}^1$, за които при всеки избор на интервала $J \subset (a, b)$ и естественото число n

$$\sup_{y \in J} \int\limits_{\mathbf{R}^1} \left| e^{yt} \frac{d^n f}{dt^n} \right|^2 dt < \infty.$$

Проверете, че:

а) ако $J = [y_1, y_2]$, то горното условие е изпълнено, ако са ограничени интегралите само при $y = y_1, y_2$;

б) ако $f \in D((a,b), \mathbf{C})$, то функцията

$$\mathcal{L}(f)(z) = \int\limits_{\mathbf{R}^1} e^{-itz} f(t)dt, z \in B,$$

където B е ивицата $\{z \in \mathbf{C} | \mathrm{Im} z \in (a,b)\}$, принадлежи на пространството $\mathcal{H}(B)$ от холоморфни функции F в B, които са бързо намаляващи, т.е. за всеки интервал $J \subset (a,b)$ и всяко естествено число n

$$\sup_{y \in J} \int\limits_{\mathrm{Im} z = y} |z^n F(z)|^2 dz < +\infty;$$

в) ако означим $D_t = -i\frac{d}{dt}$, $D_z = -i\frac{d}{dz}$, то

в 1) $P(z)\mathcal{L}(f)(z) = \mathcal{L}(P(D_t)f(t))(z)$ и

$$P(D_z)\mathcal{L}(f)(z) = \mathcal{L}(P(-t)f(t))$$

за произволен полином P,

в 2) $e^{-it_0 z}\mathcal{L}(f)(z) = \mathcal{L}(f(t-t_0))(z)$, $t_0 \in \mathbf{R}^1$.

Упътване. а) Нека φ_1, $\varphi_2 \in C^\infty(\mathbf{R})$, $\varphi_1 + \varphi_2 \equiv 1$ и supp φ_1 е ограничен отгоре, а supp φ_2 — отдолу. Използвайте представянето

$$e^{ty} f(t) = e^{(y-y_1)t}\varphi_1(t)e^{y_1 t} f(t) + e^{(y-y_2)t}\varphi_2(t)e^{y_2 t} f(t),$$

където $y \in (y_1, y_2)$.

б) Възползвайте се от теоремата на Морера. Условието за ръста на $\mathcal{L}(f)(z)$ се проверява лесно след интегриране по части предвид $z^n e^{-itz} = i^n \frac{d^n}{dt^n} e^{-itz}$ и условията за f.

7.76. При означенията от предната задача докажете формулата за обръщане

$$f(t) \equiv \mathcal{L}^{-1}(F(z))(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathrm{Im} z = y_0} F(z) e^{itz} dz,$$

където $y_0 \in (a,b)$ и $F(z) = \mathcal{L}(f)(z)$.

§ 8. Фундаментални решения на линейни диференциални оператори с постоянни коефициенти и приложение към обобщената задача на Коши

Една обобщена функция $\mathcal{E}(x) \in D'(\mathbf{R}^n)$ се нарича фундаментално решение на линейния диференциален оператор с постоянни коефициенти $P(D)$.

$$P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha, \tag{1}$$

ако $P(D)\mathcal{E} = \delta(x)$.

Фундаменталните решения играят основна роля при изучаването на диференциалните уравнения и затова ще посветим този параграф на току-що споменатите разпределения.

8.1. Нека $u \in D'(\mathbf{R}^n)$ е решение на уравнението $P(D)u = f$, $f \in D'(\mathbf{R}^n)$, в областта $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ (т.е. $[P(D)u - f]_\Omega = 0$). Докажете, че ако функцията $u \in C^m(\Omega)$, и $f \in C(\Omega)$, то $P(D)u = f$ в класически смисъл в областта Ω.

Упътване. Възползвайте се от факта, че обобщените и класическите производни до ред m в областта Ω съвпадат, и от лемата на Дюбоа — Раймон (3.8).

8.2. Да предположим, че $\mathcal{E} \in D'(\mathbf{R}^n)$ е фундаментално решение на оператора (1) и f е разпределение, за което съществува $\mathcal{E} * f$. Покажете, че $\mathcal{E} * f$ удовлетворява уравнението $P(D)u = f$ в $D'(\mathbf{R}^n)$.

8.3. С T_ε ще означим множеството от обобщените функции, притежаващи конволюция с фиксираното фундаментално решение $\mathcal{E}(x)$ на оператора (1). Установете, че ако $P(D)u = 0$ и $u \in T_\varepsilon$, то $u = 0$. Убедете се, че щом $P(D)u = 0$ и u е разпределение с компактен носител, то $u = 0$.

8.4. Разпределението $\mathcal{E}(x) \in S'(\mathbf{R}^n)$ е фундаментално решение на (1) точно когато неговият фуриеров образ $\mathcal{E} \in S'$ удовлетворява алгебричното уравнение $P(i\xi)\ \mathcal{E}(\xi) = 1$, където

$$P(i\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (i\xi)^\alpha.$$

Забележка. Независимо от това, че фундаменталното решение не е еднозначно определено (защо?), в задачите, които привеждаме по-долу, често ще пишем "постройте фундаменталното решение" и т.н. Под тези думи се уславяме да разбираме намирането на *някое* фундаментално решение.

8.5. Проверете, че $\theta(x)e^{-ax}$, $\theta(x)\sin ax/a$, $\theta(x)\mathrm{sh}ax/a$ са фундаментални решения на операторите:

1) $\frac{d}{dx}+a$; 2) $\frac{d^2}{dx^2}+a^2$; 3) $\frac{d^2}{dx^2}-a^2$, $a\neq 0$.

8.6. Намерете фундаменталното решение на параболичния оператор

$$L(u)=u_t-a^2\Delta_n u, u(x,t)\in D'(\mathbf{R}^n_x\times\mathbf{R}^1_t), a>0.$$

Решение. $\frac{\partial\mathcal{E}_n}{\partial t}-a^2\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\mathcal{E}_n}{\partial x_j^2}=\delta(x)\otimes\delta(t)$. В последното уравнение правим частична фуриерова трансформация по x и получаваме, че

$$\frac{\partial\widehat{\mathcal{E}_n}}{\partial t}+a^2|\xi|^2\widehat{\mathcal{E}_n}=1(\xi)\otimes\delta(t), \widehat{\mathcal{E}_n}(\xi,t), \tag{2}$$

защото $\widehat{\frac{\partial\mathcal{E}_n}{\partial t}}=\frac{\partial\widehat{\mathcal{E}_n}}{\partial t}(\xi,t)$. Сравнението на (2) с пример 8.5.1 ни навежда на мисълта да проверим дали $v(\xi,t)=\theta(t)e^{-a^2|\xi|^2t}$ не е решение на (2). На първо място отбелязваме, че $v\in S'(\mathbf{R}^n_\xi\times\mathbf{R}^1_t)$ и следователно на основание на зад. 7.37 б) операцията частична фуриерова трансформация $F^{-1}_{\xi\to x}(v)$ е законна. От друга страна, формулата за скока от зад. 5.19 ни убеждава, че $v(\xi,t)$ удовлетворява (2) и значи можем да дефинираме $\widehat{\mathcal{E}_n}(\xi,t)=v(\xi,t)$. И така

$$\mathcal{E}_n(x,t)=F^{-1}_{\xi\to x}(v)=\frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n}e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}\in S'(\mathbf{R}^{n+1})$$

е фундаментално решение на параболичния оператор.

8.7. Намерете фундаменталното решение $\mathcal{E}_n$ на оператора на Лаплас Δ_n при $n\geq 3$.

Упътване. Използвайте зад. 8.4 и 7.45.

8.8. Пресметнете фундаменталното решение $\mathcal{E}_n(x,t)\in S'(\mathbf{R}^{n+1})$ на оператора на Шрьодингер $i\frac{\partial}{\partial t}+\Delta_n$.

Упътване. Послужете си с начина на решение на зад. 8.6 и 7.44 б).

Отг. $\mathcal{E}_n(x,t) = -i\theta(t)\left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{\pi/2}\exp\left(i\left(\frac{|x|^2}{4t} - \frac{n\pi}{4}\right)\right)$.

8.9. Нека $\Box_3 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_3$ е вълновият оператор в $\mathbf{R}^3_x \times \mathbf{R}^1_t = \mathbf{R}^4$. С помощта на фуриеровата трансформация намерете неговото фундаментално решение $\mathcal{E}_3$ в $S'(\mathbf{R}^4)$.

Упътване. Използвайте зад. 7.46.

Отг. $\mathcal{E}_3 = \frac{\theta(t)}{4\pi t}\delta_{S(t)}$.

8.10. Проверете, че едно фундаментално решение на оператора $\Delta_3 - k^2$ се дава от $\mathcal{E}_3(x) = -\frac{e^{-k|x|}}{4\pi|x|} \in S'(\mathbf{R}^3)$ $(k = \text{const} \in \mathbf{R}^1_+)$.

8.11. Постройте фундаменталното решение на оператора $\frac{\partial}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b\frac{\partial}{\partial x} + c$, където a, b, c са реални константи, $a > 0$, $c > 0$.

Отг. $\mathcal{E}(x,t) = \frac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left(\frac{(x-bt)^2}{4a^2t}\right) - ct$.

8.12. Намерете фундаменталното решение $\mathcal{E}^{2m}_n$ на итерираното уравнение на топлопроводността

$$L = \left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta_n\right)^m, m \geq 2, a = \text{const} > 0,$$

където със символа $(\cdot)^m$ сме означили m-тата степен на линейния оператор $\frac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta_n$.

Упътване. Покажете предварително, като се позовете на зад. 5.29, че функцията $K(t) = \theta(t)e^{-at}t^{m-1}/(m-1)!$ е фундаментално решение на $\left(\frac{d}{dt} + a\right)^m$ в пространството $S'(\mathbf{R}^1)$.

Отг. $\mathcal{E}^{2m}_n(x,t) = \frac{\theta(t)t^{m-\frac{n}{2}-1}}{(2a\sqrt{\pi})^n(m-1)!}\exp\left(-\frac{|x|}{4a^2t}\right) \in S'(\mathbf{R}^{n+1})$.

8.13. Постройте фундаменталното решение $\mathcal{E}^{2m}_n$ на итерирания оператор на Шрьодингер $L = \left(i\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_n\right)^m$, $m \geq 2$.

Отг. $\mathcal{E}^{2m}_n(x,t) = -i\frac{\theta(t)}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}t^{m-\frac{n}{2}-1}\exp\left(i\left(\frac{|x|^2}{4t} - \frac{n\pi}{4}\right)\right)\cdot\frac{1}{(m-1)!}$.

8.14. Намерете в $S'(\mathbf{R}^2)$ фундаментално решение на оператора $L = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \omega\frac{\partial}{\partial x}\right)^m$, $m \geq 1$, ако $\omega \neq 0$ е реална константа.

8.15.* Определете фундаменталното решение $\mathcal{E}^{2m}_n$ на m-тата степен на лапласовия оператор Δ_n.

Упътване. Ако е известна функцията $\mathcal{E}_n^{2(m-1)}$, то $\mathcal{E}_n^{2m}$ може да бъде определена от уравнението $\Delta_n \mathcal{E}_n^{2m} = \mathcal{E}_n^{2(m-1)}$ (защо?). Предвид на сферичната симетрия на Δ_n е естествено да потърсим $\mathcal{E}_n^{2m}$ в класа на функциите, зависещи от $|x| = \rho$. Убедете се, че $(\Delta_n f)(|x|) = f''(|x|) + (n-1)|x|^{-1} f'(|x|)$, ако $f(|x|) \in C^2(|x| > 0)$. След това установете, че общото решение на $f''(\rho) + \rho^{-1}(n-1)f' = h(\rho)$ се дава от $f(\rho) = \int \rho^{1-n} \left[\int^{\varrho} r^{n-1} h(r) dr \right] d\rho + C \int \rho^{1-n} d\rho$: Следователно:

1) ако $h(\rho) = \rho^\lambda$, $\lambda \neq -2$, $\lambda \neq -n$, то

$$f(\rho) = \frac{\rho^{\lambda+2}}{(\lambda+2)(\lambda+n)} (C = 0);$$

2) ако $h(\rho) = \rho^{-2}$, $n > 2$, то $f(\rho) = (n-2)^{-1} \ln \rho (C = 0)$;
3) щом $h(\rho) = \rho^\lambda \ln \rho$, $\lambda \neq -2$, $\lambda \neq -n$, то

$$f(\rho) = \frac{\rho^{\lambda+2} \ln \rho}{(\lambda+2)(\lambda+n)} - \frac{\rho^{\lambda+2}}{(\lambda+2)(\lambda+n)^2}.$$

Понеже съгласно зад. 5.22 $\mathcal{E}_n^2 = -c_n^{-1} \cdot \rho^{2-n}$ и $\mathcal{E}_2^2 = \frac{\ln \rho}{2\pi}$, предлаганата задача се решава индуктивно с помощта на 1), 2), 3).

Отг. $\mathcal{E}_n^{2m}(x) = \begin{cases} c_{n,2m}|x|^{2m-n} & \text{при нечетно } n \text{ или} \\ & \text{при четно } n, n > 2m, \\ b_{n,2m}|x|^{2m-n} \ln|x| & \text{при четно } n, n \leq 2m, \end{cases}$ където $c_{n,2m}$ и $b_{n,2m}$ са ненулеви константи.

Забележка. **Любознателният читател сигурно си е задал въпроса, как сме се досетили за вида на фундаменталните решения на операторите $\Delta_3 \pm k^2$ от зад. 5.24 и 8.10 съответно. Евристичните съображения са следните. Поради сферичната симетрия на $P_\pm = \Delta_3 \pm k^2$ е разумно да потърсим фундаментално решение от вида $u(|x|)$, $\rho = |x|$. Съгласно предишната задача в сферични координати $P_\pm u(\rho) = u'' + 2\rho^{-1}u' \pm k^2 u$. Тъй като уравнението $P_\pm v(p) = 0$ има само безкрайно гладки решения за $\rho > 0$, които допускат особеност евентуално при $\rho = 0$, е естествено да смятаме, че сферично симетричните фундаментални решения на операторите $P_\pm$ са от класа $C^\infty(\mathbf{R}^3 \setminus \{0\})$. Но тогава $P_\pm \mathcal{E}_\pm = 0$ в $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ дори в класически смисъл (защо?) и значи $\mathcal{E}_\pm'' + 2\rho^{-1} \mathcal{E}_\pm' \pm k^2 \mathcal{E}_\pm = 0$ за $\rho > 0$. С помощта на смяната $\mathcal{E}_\pm(\rho) = \rho^{-1} z_\pm$ се убедете, че $\mathcal{E}_+ = \rho^{-1}(c_1 e^{ik\varrho} + c_2 e^{-ik\varrho})$, c_1, $c_2 = \mathrm{const}$, и $\mathcal{E}_- = \rho^{-1}(c_1 e^{k\varrho} + c_2 e^{-k\varrho})$.**

8.16.* Нека $\Box_n = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_n$ е вълновият оператор в $\mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}^1_t$. С помощта на частична фуриерова трансформация по x намерете едно негово фундаментално решение. Проверете, че при $n \geq 3$ и n нечетно $\Box_n$ притежава фундаментално решение $\mathcal{E}_n(x,t)$, за което $\operatorname{supp} \mathcal{E}_n = \operatorname{sing\,supp} \mathcal{E}_n = \{(x,t) : t \geq 0,\ |x| = t\} = S_+$. В случая на четно n, $n \geq 2$, установете, че съществува такова фундаментално решение $\mathcal{E}_n$, щото $\operatorname{sing\,supp} \mathcal{E}_n = S_+$, $\operatorname{supp} \mathcal{E}_n = \{(x,t) : t \geq 0, |x| \leq t\}$.

Упътване. Използвайте зад. 7.48.

8.17. С $\mathcal{E}_3(x,t)$ е означено фундаменталното решение на $\Box_3$, построено в зад. 8.9. Очевидно $\operatorname{supp} \mathcal{E}_3 = S_+ = \{x \in \mathbf{R}^3,\ t \geq 0 : |x| = t\}$. Докажете, че не съществува фундаментално решение на $\Box_3$, чийто носител е разположеният в горното полупространство $t \geq 0$ конус K и $K \neq S_+$.

Упътване. Допуснете, че може да се намери разпределение $\mathcal{E} \in D'(\mathbf{R}^4)$ със следните свойства: $\Box_3 \mathcal{E} = \delta$, $\operatorname{supp} \mathcal{E} = K \neq S_+$. След това изучете конволюцията $(\mathcal{E} - \mathcal{E}_3) * \mathcal{E}_3$.

8.18. Покажете, че не съществува фундаментално решение с компактен носител на произволен ненулев линеен диференциален оператор с постоянни коефициенти.

Упътване. Въз основа на зад. 8.3 предположението, че съществува фундаментално решение с компактен носител, означава, че ако $P(D)u = 0$, $u \in D'(\mathbf{R}^n)$, то $u = 0$. От друга страна, винаги може да се построи такава ортогонална трансформация $y = Ux$, $U^* = U^{-1}$, че в новите координати y операторът P да има вида

$$P(D_y) = a_0 \frac{\partial^m}{\partial y_1^m} + \sum_{|\alpha+\beta| \leq m, |\alpha| \leq m-1} a_{\alpha\beta} D^\beta_{y'} \frac{\partial^\alpha}{\partial y_1^\alpha},$$

където $D_{y'} = \left(\frac{\partial}{\partial y_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial y_n}\right)$ и $a_0 \neq 0$ (докажете!). След това потърсете разпределение $u = f(y_1) \otimes 1(y') \neq 0$, за което $P(D_y)u = 0$.

Методът на спускането е твърде удобен при намиране на фундаменталните решения на някои класове диференциални оператори. За да можем да го приложим към конкретни задачи, ще направим известна предварителна подготовка.

8.19. Нека в $\mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}^1_t$ е дефинирана измеримата функция

$u(x,t)$, за която $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |u(x,t)|dt$ е локално сумируема. Да разгледаме функцията

$$u_0(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x,t)dt.$$

Убедете се, че за всяка редица $\{\eta_\nu\} \subset D(\mathbf{R}^{n+1})$, която клони към единица в $\mathbf{R}^{n+1}$ в смисъл на дефиницията, дадена след зад. 6.10, съществува границата $\lim\langle u(x,t), \eta_\nu(x,t)\varphi(x)\rangle = \langle u_0, \varphi\rangle$, $\forall\varphi \in D(\mathbf{R}^n)$.

Упътване. $u(x,t)$ е локално сумируема в $\mathbf{R}^{n+1}$ въз основа на обратната теорема на Фубини.

8.20. Да разгледаме разпределението $u(x,t) = f(x) \otimes \delta(t) \in D'(\mathbf{R}^{n+1})$. Проверете, че за всяка редица $\{\eta_\nu\} \subset D(\mathbf{R}^{n+1})$, която клони към единица в $\mathbf{R}^{n+1}$, съществува границата

$$\lim_{\nu\to\infty} \langle u(x,t), \eta_\nu(x,t)\varphi(x)\rangle = \langle f, \varphi\rangle, \forall\varphi \in D(\mathbf{R}^n_x).$$

Задачи 8.19 и 8.20 ни подсещат да дадем следното определение. Ще казваме, че обобщената функция $u \in D'(\mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}^1_t)$ допуска продължение върху функциите от вида $\varphi(x) \times 1(t)$, $\varphi \in D(\mathbf{R}^n)$, ако за всяка сходяща към единица (в смисъл на определението след зад. 6.10) редица $\{\eta_\nu\} \subset D(\mathbf{R}^{n+1})$ съществува границата $\lim\langle u, \eta_\nu, \varphi\rangle, = \langle u_0, \varphi\rangle$, $\forall\varphi \in D(\mathbf{R}^n)$. Освен това изисква се границата да не зависи от избора на $\{\eta_\nu\}$, а $u_0 \in D'(\mathbf{R}^n)$.

8.21.** Докажете, че разпределението $u(x,t) \in D'(\mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}^1_t)$ притежава продължение u_0 върху функциите $\{\varphi(x) \times 1(t)\}$, $\varphi \in D(\mathbf{R}^n)$, точно тогава, когато съществува конволюцията $u * (\delta(x) \otimes 1(t))$. Нещо повече, разпределенията u и u_0 са свързани чрез релацията

$$u * (\delta(x) \otimes 1(t)) = u_0(x) \otimes 1(t).$$

Забележка. Зад. 8.21 няма да бъде използвана по-нататък.**

8.22. Дадено е уравнението

$$(3) \qquad L\left(D_x, \frac{\partial}{\partial t}\right)u = \sum_{j=1}^{m} P_j(D_x)\frac{\partial^j u}{\partial t^j} + P_0(D_x)u = f(x) \otimes \delta(t),$$

където $P_j(D_x)$ са диференциални оператори, действащи по променливата x и $f(x) \in D'(\mathbf{R}^n)$. При условие, че обобщената функция u има продължение u_0 върху функциите от вида $\{\varphi(x) \times 1(t)\}$, $\varphi \in D(\mathbf{R}^n)$, установете, че

$$P_0(D_x)u_0 = f(x) \text{ в } D'(\mathbf{R}^n).$$

Упътване. Предварително покажете, че ако $\{\eta_\nu(x,t)\}$ клони към единица в $\mathbf{R}^{n+1}$ и α е естествено число, то $\left\{\eta_\nu + \frac{\partial^\alpha \eta_\nu}{\partial t^\alpha}\right\}$ клони също към 1. Оттук получаваме, че $\lim\limits_\nu \left\langle u, \varphi(x)\frac{\partial^\alpha \eta_\nu}{\partial t^\alpha}\right\rangle = 0$. След това фиксирайте $\varphi \in D(\mathbf{R}^n)$. Следователно за всички достатъчно големи ν имаме, че $\eta_\nu \equiv 1$ в околност на supp φ. По дефиницията на обобщена производна и на $u_0(x)$

$$\langle P_0(D_x)u_0, \varphi(x)\rangle = \langle u_0, P_0(-D_x)\varphi\rangle = \lim_\nu \langle u, \eta_\nu P_0(-D_x)\varphi(x)\rangle$$

$$= \lim_\nu \langle u, P_0(-D_x)(\eta_\nu\varphi)\rangle$$

$$= \lim_\nu \left\langle u, \left[L\left(-D_x, -\frac{\partial}{\partial t}\right) - \sum_{j=1}^{m}(-1)^j P_j(-D_x)\frac{\partial^j}{\partial t^j}\right](\eta_\nu\varphi)\right\rangle.$$

8.23. Нека $\mathcal{E}$ е фундаментално решение на оператора (3), за което съществува продължение $\mathcal{E}_0$ върху функциите $\{\varphi(x) \times 1(t)\}$, $\varphi \in D(\mathbf{R}^n)$. Докажете тогава, че $\mathcal{E}_0$ е фундаментално решение на оператора $P_0(D_x)$. В специалния случай, когато $\mathcal{E}$ е измерима в $\mathbf{R}^{n+1}$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{E}(x,t)|dt$ е локално сумируема функция, проверете, че регулярното разпределение

$$\mathcal{E}_0(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(x,t)dt$$

удовлетворява уравнението $P_0(D_x)\mathcal{E}_0(x) = \delta(x)$.

Изложеният метод в зад. 8.19 – 8.23 за намиране $u_0(x)$ по зададена $u(x,t)$ се нарича *метод на спускането*.

8.24. Разгледайте параболичния оператор $\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_n$, $n \geq 3$. С помощта на метода на спускането определете фундаменталното решение на $\mathcal{E}_n$ на Δ_n.

Решение. Като комбинираме зад. 8.23 и 8.6, получаваме

$$\mathcal{E}_n(x) = -\int\limits_0^\infty \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{-|x|^2/4t} dt = -\frac{|x|^{2-n}}{4\pi^{n/2}} \int\limits_0^\infty e^{-u} u^{n/2-2} du$$

$$= -\Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right) \frac{|x|^{2-n}}{4\pi^{n/2}},$$

където Γ е знаменитата гама-функция на Ойлер.

8.25. Постройте фундаментално решение на Δ_n^m, $n \geq 3$, $2m < n$, като използвате метода на спускането.

Отг. $\mathcal{E}_n^{2m} = (-1)^m \dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2} - m\right) |x|^{2m-n}}{4^m \pi^{n/2} (m-1)!}$.

8.26. След като знаете, че $\mathcal{E}_3 = \frac{1}{4\pi t}\delta_{S(t)}$ е фундаментално решение на $\Box_3$, намерете $\mathcal{E}_2$ и $\mathcal{E}_1$.

Упътване. Ако $\varphi(x_1, x_2, t) \in D(\mathbf{R}^3)$, то

$$\langle \mathcal{E}_2, \varphi \rangle = \langle \mathcal{E}_3, \varphi(x,t) \times 1(x_3) \rangle = \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^\infty \frac{1}{t} \left[\int\limits_{S(t)} \varphi(x,t) dS_t \right] dt.$$

Понеже $\varphi(x,t)$ не зависи от x_3, можем да смятаме, че φ е четна функция на x_3 и значи $\langle \mathcal{E}, \varphi \rangle = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^\infty \frac{1}{t} \left[\int\limits_{S^+(t)} \varphi(x,t) dS_t \right] dt$, където $S^+(t) = S(t) \cap \{x \in \mathbf{R}^3,\ x_3 \geq 0\}$. Както е известно от курса по анализ

$$\int\limits_{S^+(t)} \varphi(x,t) dS_t = \int\limits_{U(t)} \varphi(x_1, x_2, t) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_2}\right)^2} dx_1 dx_2.$$

В последното равенство $U(t)$ е проекцията на $S^+(t)$ върху равнината $x_3 = 0$, т.е. $U(t) = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq t^2\}$ и $x_3 = \sqrt{t^2 - x_1^2 - x_2^2}$ е уравнението на $S^+(t)$.

Отг. $\mathcal{E}_2 = \frac{1}{2\pi} \dfrac{\theta(t - |x|)}{\sqrt{t^2 - |x|^2}}$, $x \in \mathbf{R}^2$; $\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2}\theta(t - |x|)$, $x = x_1$.

Въпрос: Можете ли да намерите $\mathcal{E}_1(x,t)$ чрез фуриерова трансформация?

8.27. Постройте фундаменталното решение на оператора на Коши — Риман $\partial/\partial\overline{z}$, като се базирате на зад. 5.23.

Упътване. Нека $\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\overline{z}} = \delta(x, y)$; $\frac{\partial}{\partial\overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$. Разгледайте оператора $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ и проверете, че $\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = \Delta_2$. След това използвайте зад. 8.2.

Ще завършим този параграф с приложение на фундаменталното решение към задачата на Коши.

8.28. Разгледайте задачата на Коши за обикновения диференциален оператор с постоянни коефициенти:

$$y'' + a^2 y = f, f \in C(t \geq 0), a > 0, \tag{4}$$

$$y(0) = y_0, y'(0) = y_1, t \geq 0.$$

Продължете функциите $y(t)$ и $f(t)$ като 0 при $t < 0$, т.е.

$$\widetilde{y} = \begin{cases} y(t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \qquad \widetilde{f} = \begin{cases} f(t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

и докажете, че $\widetilde{y}$ удовлетворява в $D'(\mathbf{R}^1)$ уравнението

$$\widetilde{y}'' + a^2\widetilde{y} = \widetilde{f} + y_0\delta'(t) + y_1\delta(t). \tag{5}$$

Установете, че (5) притежава единствено решение в класа на разпределенията, чийто носител е разположен в $\mathbf{R}^1_+ = \{t \geq 0\}$. Намерете това решение, както и решението в класическата задача на Коши (4).

Решение. Понеже (4) има решение $y \in C^2(t \geq 0)$, уравнението (5) за $\widetilde{y}$, $\widetilde{f}$ е следствие от формулата за скока от зад. 5.11. Съгласно зад. 8.5, т.2 фундаменталното решение $\mathcal{E}(t) \in D'(\mathbf{R}^1)$ на оператора $\frac{\partial^2}{\partial t^2} + a^2$ е $\theta(t)\sin at/a$ и очевидно $\mathcal{E}(t) = 0$ при $t < 0$. Задача 6.20, приложена за $n = 0$, ни учи, че в D' винаги съществува и се обръща в 0 при $t < 0$ конволюцията

$$\mathcal{E} * (\widetilde{f} + y_0\delta' + y_1\delta) = \mathcal{E} * \widetilde{f} + y_0\mathcal{E}' + y_1\mathcal{E}. \tag{6}$$

От друга страна, въз основа на зад. 6.9

$$(\mathcal{E} * \widetilde{t})(t) = \frac{\theta(t)}{a}\int\limits_0^t f(\tau)\sin a(t - \tau)d\tau.$$

Според зад. 8.3 уравнението (5) притежава единствено решение в класа на обобщените функции, анулиращи се при $t < 0$, Тъй като продълженото като нула класическо решение на (4) е решение и на (5), то оттук следва, че формулата (6) при $t \geq 0$, а именно

$$y(t) = \frac{\theta(t)}{a} \int_0^t f(\tau) \sin a(t-\tau) d\tau + y_0 \cos at + y_1 \frac{\sin at}{a}$$

задава единственото решение на (4).

8.29. Нека функцията $y(t)$ удовлетворява следната задача на Коши:

$$L(y) = y^{(m)} + a_1 y^{(m-1)} + \cdots + a_m y = f(t), f \in C(t \geq 0),$$

$a_i = \text{const}$, $y^{(j)}(0) = y_j$; $j = 0, 1, \ldots, m-1$; $t \geq 0$. Продължете y и f като нула при $t < 0$. Убедете се, че $\widetilde{y}$ е решение в $D'(\mathbf{R}^1)$ на уравнението

$$(6) \qquad L(\widetilde{y}) = \widetilde{f} + \sum_{j=0}^{m-1} z_j \delta^{(j)}(t),$$

където $z_j = \sum\limits_{k=0}^{m-1-j} a_{m-1-k-j} y_k (a_0 = 1)$. Проверете, че (6′) притежава единствено решение в множеството $\{u \in D'(\mathbf{R}^1) : \text{supp } u \subset \{t \geq 0\}\}$. Постройте в явен вид решението на изходната класическа задача на Коши.

Отг. $y(t) = \int\limits_0^t f(\tau) Z(t-\tau) d\tau + \sum\limits_{j=0}^{m-1} z_j Z^{(j)}(t)$; където $Z(t)$ е фундаменталното решение на оператора L от зад. 5.29.

Горните две задачи ни навеждат на мисълта да дефинираме обобщена задача на Коши за вълновия оператор. И така да разгледаме в $D'(\mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}^1_t)$ уравнението

$$(6'') \qquad u_{tt} = \Delta_n u + F(x,t), \text{ където } F \in D'(\mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}^1_t)$$
$$\text{и supp } F \subset \{(x,t) : t \geq 0\}.$$

Ще казваме, че разпределението u е решение на обобщената задача на Коши за (6″), ако u удовлетворява (6″) в смисъл на $D'(\mathbf{R}^{n+1})$ и освен това supp $u \subset \{(x,t) : t \geq 0\}$.

8.30. Докажете, че:

1. Обобщената задача на Коши притежава единствено решение в класа $K = \{u \in D'(\mathbf{R}^{n+1}) : \operatorname{supp} u \subset \{(x,t) : t \geq 0\}\}$.
2. Означете с $T : K \to K$ линейния оператор, обратен на $\Box_n$, и покажете, че T е непрекъснат. Намерете явния вид на T.

Упътване. Позовете се на зад. 8.16*, 6.20. 8.3.
Отг. $T = \mathcal{E}_n * F$, ако $\Box_n \mathcal{E}_n = \delta$.

Следователно операторът $\Box_n$ осъществява топологичен изоморфизъм на K върху себе си.

8.31. Разгледайте в $D'(\mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}^1_t)$ следната специална обобщена задача на Коши:

$$u_{tt} = \Delta_n u + F(x,t) + u_0(x) \otimes \delta'(t) + u_1(x) \otimes \delta(t), \tag{7}$$

където $\operatorname{supp} F \subset \{(x,t) : t \geq 0\}$ и $u_0,\ u_1 \in D'(\mathbf{R}^n)$.

Убедете се, че тя притежава единствено решение в множеството на обобщените функции, чийто носител лежи в полупространството $t \geq 0$. Посочете явния вид на това решение. Установете, че u зависи непрекъснато от F, u_0, u_1 относно сходимостта в $D'(\mathbf{R}^{n+1})$ (т.е. щом $F_\nu \to F$ в $D'(\mathbf{R}^{n+1})$, $\operatorname{supp} F_\nu \subset \{(x,t) : t \geq 0\}$, $u_{0_\nu} \to u_0$ в $D'(\mathbf{R}^n)$ и $u_{1_\nu} \to u_1$ в $D'(\mathbf{R}^n)$, то съответната редица от решения u_ν на (7) клони към u в $D'(\mathbf{R}^{n+1})$).

Отг. $u = \mathcal{E}_n * F + \dfrac{\partial}{\partial t}(\mathcal{E}_n * u_0) + \mathcal{E}_n * u_1$, като $\mathcal{E}_n$ е фундаменталното решение от зад. 8.16, а $\mathcal{E}_n * u_0$ е определена с 5) от зад. 6.33.

8.32. Нека $u \in C^2(t \geq 0)$ е решение на класическата задача на Коши в $\mathbf{R}^3_x \times \mathbf{R}^1_t : \Box_3 u = f(x,t)$, $f \in C(t \geq 0)$, $u|_{t=0} = u_0(x) \in C^2(\mathbf{R}^3)$, $u_t|_{t=0} = u_1(x) \in C^1(\mathbf{R}^3)$. Продължете u и f като нула при $t < 0$: $\widetilde{u} = 0$ за $t < 0$, и докажете, че $\widetilde{u}$ удовлетворява уравнението (7) при $F = \widetilde{f}$. Намерете формули за u и $\widetilde{u}$.

Упътване. Използвайте зад. 5.21, 6.37* и 6.38*.
Отг. $\widetilde{u} = V_3 + V_3^0 + V_3^1 = \mathcal{E}_3 * f + \mathcal{E}_3 * u_1 + \dfrac{\partial}{\partial t}(\mathcal{E}_3 * u_0)$

$$u = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{U(x,t)} \frac{f(\xi, t - |x - \xi|)}{|x - \xi|} d\xi + \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{S(x,t)} u_1(\xi) dS_\xi \tag{8}$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi t}\int\limits_{S(x,t)} u_0(\xi)dS_\xi\right)$$ при $t \geq 0$ (формула на Кирхоф).

Забележка. Ясно е, че $\widetilde{u}$ е сума от обемен закъсняващ потенциал с плътност f, повърхнинен закъсняващ потенциал от прост слой с плътност u_1 и повърхнинен закъсняващ потенциал от двоен слой с плътност u_0. Обръщаме внимание, че зад. 8.32 може да се интерпретира така. Ако класическата задача на Коши притежава решение $u \in C^2(t \geq 0)$, то е единствено и при $t \geq 0$ има вида (8). Обратното за съжаление не е вярно, т.е. при $f \in C(t \geq 0)$, $u_1 \in C^1(\mathbf{R}^3)$ и $u_0 \in C^2(\mathbf{R}^3)$ формулата (8) не определя класическо решение на задачата на Коши. Както е показано в [8], при някои допълнителни ограничения върху гладкостта на f, u_0 и u_1 формулата на Кирхоф задава единственото класическо решение на задачата на Коши.

8.33. В $D'(\mathbf{R}^1_x \times \mathbf{R}^1_t)$ решете обобщените задачи на Коши:

1) $u_{tt} = u_{xx} + \delta(x) \otimes \delta(t)$;

2) $u_{tt} = u_{xx} + \delta'(x) \otimes \delta(t)$;

3) $u_{tt} = u_{xx} + \delta(x) \otimes \delta'(t)$;

4) $u_{tt} = u_{xx} + f(t) \otimes \delta(x) + \delta(x) \otimes \delta'(t) + \delta(x) \otimes \delta(t)$, $f \in C(t \geq 0)$, $f = 0$ при $t < 0$;

5) $u_{tt} = u_{xx} + \theta(t)\sin t \otimes \delta(x)$.

Отг. Нека $\mathcal{E}_1 = 1/2\theta(t - |x|)$ Тогава: 1. $u = \mathcal{E}_1$; 2. $u = 1/2\theta(t) \times [\delta(t + x) - \delta(t - |x|)]$; 3. $1/2\delta(t - |x|)$; 4. $1/2\theta(t - |x|)\left[\int\limits_0^{t-|x|} f(\tau)d\tau + 1\right] + 1/2\theta(t)[\delta(t + x) - \delta(t - x)]$.

8.34. В $D'(\mathbf{R}^2_x \times \mathbf{R}^1_t)$ намерете решението на уравнението

$$u_{tt} = \Delta_2 u + F(x,t) + u_0(x) \otimes \delta'(t) + u_1(x) \otimes \delta(t),$$

ако:

1) $F = \theta(t)t^k \otimes \delta(x)$, $u_0 = u_1 = \delta(x)$, $k \geq 0$;

2) $F = \theta(t)\sin t \otimes \delta(x)$, $u_0 = |x|^2\delta(x)$, $u_1 = \delta(x)$;

3) $F = f(t) \otimes \delta(x)$, $f \in C(t \geq 0)$, $f = 0$ при $t < 0$, $u_0 = 0$, $u_1 = e^{-|x|^2}\delta(x)$;

4) $F = \theta(t) \otimes \delta(x)$, $u_0 = |x|^2 \dfrac{\partial^2 \delta(x)}{\partial x_1^2}$, $u_1 = |x|^2 \dfrac{\partial^2 \delta(x)}{\partial x_1 \partial x_2}$.

Упътване. Използвайте начина на решение на зад. 8.33 и 6.36.

Отг. Означаваме с $\mathcal{E}_2$ фундаменталното решение на $\square_2$ от зад. 8.26. В такъв случай:

1. $u = \dfrac{1}{2\pi}\theta(t-|x|)\left[\ln\dfrac{t+\sqrt{t^2-|x|^2}}{|x|} + \dfrac{1}{\sqrt{t^2-|x|^2}}\right] + \dfrac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial t}$ при $k = 0$; при $k > 0$ имаме:

$$u = \frac{1}{2\pi}\theta(t-|x|)\left[\int\limits_0^{t-|x|} \frac{\tau^k\, d\tau}{\sqrt{(t-\tau)^2-|x|^2}} + \frac{1}{\sqrt{t^2-|x|^2}}\right] + \frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial t};$$

2. $$u = \frac{1}{2\pi}\theta(t-|x|)\left[\frac{1}{\sqrt{t^2-|x|^2}} + \int\limits_0^{t-|x|} \frac{\sin \tau}{\sqrt{(t-\tau)^2-|x|^2}}\,d\tau\right];$$

3. $$u = \frac{1}{2\pi}\theta(t-|x|)\left[\int\limits_0^{t-|x|} \frac{f(\tau)\,d\tau}{\sqrt{(t-\tau)^2-|x|^2}} + \frac{1}{\sqrt{t^2-|x|^2}}\right];$$

4. $$u = \frac{1}{2\pi}\theta(t-|x|)\ln\frac{t+\sqrt{t^2-|x|^2}}{|x|} + 2\frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial t}.$$

8.35. В $D'(\mathbf{R}^3_x \times \mathbf{R}^1_t)$ решете обобщената задача на Коши за уравнението

$$u_{tt} = \Delta_3 u + F(x,t) + u_0(x) \otimes \delta'(t) + u_1(x) \otimes \delta(t)$$

в следните случаи:

1) $F = \theta(t)t^k \otimes \delta(x)$, $k \geq 0$, $u_0 = u_1 = \delta(x)$;

2) $F = \theta(t)\cos t \otimes \delta(x)$, $u_0 = u_1 = 0$;

3) $F = f(t) \otimes \delta(x)$, като $f \in C(t \geq 0)$ и $f = 0$ при $t < 0$, $u_0(x) = e^{|x|^2}\dfrac{\partial \delta}{\partial x_1}$, $u_1(x) = \dfrac{\partial \delta}{\partial x_2}$;

4) $F = f(t)g(x)$, $f \in C(t \geq 0)$, $f = 0$ при $t < 0$, $g \in C(\mathbf{R}^3)$, $u_0 = \sin|x|^2\delta(x)$, $u_1 = \cos|x|^2\delta(x)$;

5) $F = f(t) \in C(t \geq 0)$, $f(t) = 0$, ако $t < 0$.

Отг. Означаваме $\mathcal{E}_3 = \theta(t)/(4\pi t)\delta_{S(t)}$. Тогава съгласно зад. 6.39:

1) $$u = \frac{\theta(t-|x|)(t-|x|)^k}{4\pi|x|} + \mathcal{E}_3 + \partial\mathcal{E}_3/\partial t;$$

2) $$\frac{\theta(t-|x|)\cos(t-|x|)}{4\pi|x|};$$

3) $$\frac{f(t-|x|)}{4\pi|x|} + \frac{\partial^2\mathcal{E}_3}{\partial x_1\partial t} + \frac{\partial\mathcal{E}_3}{\partial x_2};$$

4) $$u = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{U(x,t)} \frac{f(t-|x-\xi|)g(\xi)d\xi}{|x-\xi|} + \mathcal{E}_3;$$

5) $$u = \int\limits_0^t \tau f(t-\tau)d\tau.$$

8.36.* При предположение, че $F(x,t)$ е непрекъсната за $t \geq 0$, $F = 0$ при $t < 0$ и F, $u_0(x)$, $u_1(x) \in C(\mathbf{R}^3)$ са сферично симетрични функции спрямо x (т.е. $u_0(x) = u_0(|x|)$, $u_1(x) = u_1(|x|)$, $F(x,t) = F(|x|,t)$), решете обобщената задача на Коши от предната задача.

Упътване. Използвайте формулата на Кирхоф и зад. 6.31, т. 5.

Отг. $$u(x,t) = \frac{1}{4|x|}\int\limits_0^t [G((|x|+\rho)^2,\ t-\rho) - G((\rho-|x|)^2,\ t-\rho)]d\rho$$
$$+\frac{1}{4|x|}[\Phi_1((t+|x|)^2) - \Phi_1((t-|x|)^2)] + \frac{1}{4|x|}\frac{\partial}{\partial t}[\Phi_0((t+|x|)^2) - \Phi_0((t-|x|)^2)].$$

В последното равенство $G(\lambda, t-\rho)$ е някоя примитивна на функцията $F(\sqrt{\lambda},\ t-\rho)$ относно аргумента $\lambda \geq 0$, Φ_1 е примитивна на $u_1(\sqrt{\lambda})$, $\lambda \geq 0$, и най-сетне Φ_0 е примитивна на $u_0(\sqrt{\lambda})$, $\lambda \geq 0$.

Въпрос. Ако $F = \theta(t)|x|^2$, $u_0 = 0$ и $u_1 = |x|$, на колко се равнява u?

8.37. Ще считаме, че функцията $u(x,t) \in C^2(t \geq 0)$ удовлетворява класическата задача на Коши в полупространството $t \geq 0$:

$$u_{tt} - \Delta_2 u = f(x,t), x \in \mathbf{R}^2, f \in C(t \geq 0),$$

$$u|_{t=0} = u_0(x) \in C^2(\mathbf{R}^2),$$

$$u_t|_{t=0} = u_1(x) \in C^1(\mathbf{R}^2).$$

Убедете се, че е валидна теорема за единственост на решението u в класа $C^2(t \geq 0)$ и за u е валидно следното представяне:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_{U(x,t-\tau)} \frac{f(\xi,\tau)d\xi d\tau}{\sqrt{(t-\tau)^2 - |x-\xi|^2}} + \frac{1}{2\pi} \int_{U(x,t)} \frac{u_1(\xi)d\xi}{\sqrt{t^2 - |x-\xi|^2}}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t} \int_{U(x,t)} \frac{u_0(\xi)d\xi}{\sqrt{t^2 - |x-\xi|^2}}$$ (формула на Поасон); $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$.

Глава III

КАНОНИЗИРАНЕ И МЕТОД НА ХАРАКТЕРИСТИКИТЕ

§ 9. Канонизиране. Намиране на общото решение

Две променливи

Уравнението

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + F(x,y,u,u_x,u_y) = 0, \tag{1}$$

където $|a| + |b| + |c| \neq 0$, в точка или област е *хиперболично*, ако $b^2 - ac > 0$; *параболично*, ако $b^2 - ac = 0$; *елиптично*, ако $b^2 - ac < 0$. За да се приведе урвнението (1) в каноничен вид, се разглежда *характеристичното уравнение*

$$a(dy)^2 - 2b\ dx\ dy + c(dx)^2 = 0 \tag{2}$$

(обърнете внимание на знака $(-)$ пред $2b\ dx\ dy$!). То се разпада на две уравнения: при $a \neq 0$ спрямо dx/dy

$$ady - (b + \sqrt{b^2 - ac})dx = 0,\ ady - (b - \sqrt{b^2 - ac})dx = 0, \tag{3}$$

а при $c \neq 0$ спрямо dx/dy

$$cdx - (b + \sqrt{b^2 - ac})dy = 0,\ cdx - (b - \sqrt{b^2 - ac})dy = 0. \tag{4}$$

Ако пък в някоя точка имаме $a = 0$ и $c = 0$, извършвайки смяната $x_1 = x + y$, $y_1 = x - y$, достигаме до горния случай, тъй като $b \neq 0$.

Хиперболични уравнения: $b^2 - ac > 0$. Общите интеграли $\varphi(x,y) = C_1$ и $\psi(x,y) = C_2$ на уравненията (3), или на (4), са реални и различни. Те фиксират две различни семейства реални *характеристики*. След смяната на независимите променливи

$$\xi = \varphi(x,y),\ \eta = \psi(x,y) \tag{5}$$

уравнението (1) се привежда във вида

$$u_{\xi\eta} = F_1(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta).$$

Това е каноничният вид на хиперболичните уравнения. Другият каноничен вид се получава, като извършим смяната $\xi_1 = \xi + \eta$, $\eta_1 = \xi - \eta$, и е

$$u_{\xi_1\xi_1} - u_{\eta_1\eta_1} = F_2(\xi_1, \eta_1, u, u_{\xi_1}, u_{\eta_1}).$$

Забележка. Нека $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$ е обратната смяна на (5). Тук и навсякъде по-нататък функцията $v(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ ще означаваме с $u(\xi, \eta)$.

9.1. Определете типа на уравнението

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} - 2yu_y = 0 \tag{6}$$

в различните точки (x, y) и го канонизирайте в областите, където то е хиперболично.

Решение. Тук изразът $b^2 - ac$ е равен на x^2y^2 и следователно уравнението (6) е хиперболично в цялата равнина $\mathbf{R}^2$ с изключение на правите $x = 0$ и $y = 0$, в точките на които е параболично. Нека $x \neq 0$, $y \neq 0$. В случая уравнението на характеристиките (2) има вида

$$x^2(dy)^2 - y^2(dx)^2 = 0.$$

Решавайки го спрямо $\frac{dy}{dx}$, получаваме уравненията

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \ \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x},$$

които са с отделени променливи. Общите им интеграли са $\frac{y}{x} = C_1$, $xy = C_2$. Извършваме смяна на променливите

$$\xi = \frac{y}{x}, \ \eta = xy. \tag{7}$$

Тази смяна е неособена — якобианът й е

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = -\frac{2y}{x} \neq 0.$$

Пресмятаме производните:

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = -\frac{y}{x^2} u_\xi + yu_\eta,$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = \frac{1}{x} u_\xi + x u_\eta,$$

$$u_{xx} = \xi_x^2 u_{\xi\xi} + 2\xi_x \eta_x u_{\xi\eta} + \eta_x^2 u_{\eta\eta} + \xi_{xx} u_\xi + \eta_{xx} u_\eta$$

$$= \frac{y^2}{x^4} u_{\xi\xi} - 2\frac{y^2}{x^2} u_{\xi\eta} + y^2 u_{\eta\eta} + \frac{2y}{x^3} u_\xi,$$

$$u_{yy} = \xi_y^2 u_{\xi\xi} + 2\xi_y \eta_y u_{\xi\eta} + \eta_y^2 u_{\eta\eta} + \xi_{yy} u_\xi + \eta_{yy} u_\eta$$

$$= \frac{1}{x^2} u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + x^2 u_{\eta\eta},$$

$$u_{xy} = \xi_x \xi_y u_{\xi\xi} + (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) u_{\xi\eta} + \eta_x \eta_y u_{\eta\eta} + \xi_{xy} u_\xi + \eta_{xy} u_\eta.$$

Заместваме ги в уравнението (6) и получаваме

$$u_{\xi\eta} + \frac{x}{2y} u_\eta = 0.$$

Замествайки x и y с равните им от обратната смяна (в същност на нас ни е нужен изразът $\frac{x}{y}$), получаваме

$$u_{\xi\eta} + \frac{1}{2\xi} u_\eta = 0.$$

Това е каноничният вид на уравнението (6).

9.2. Канонизирайте уравнението

$$u_{yy} - \frac{x}{y} u_{xy} + \frac{2}{3y} u_y = 0 \tag{8}$$

в областта, където е хиперболично.

Решение. Понеже $b^2 - ac = \frac{x^2}{y^2} > 0$ при $x \neq 0$ и $y \neq 0$, тук уравнението (8) е хиперболично. Уравнението на характеристиките

$$(dx)^2 + \frac{x}{y} dx dy = 0$$

решаваме относно dx/dy:

$$\frac{dx}{dy} = 0, \ \frac{dx}{dy} = -\frac{x}{y}.$$

Смяната $\xi = xy$, $\eta = x$ привежда уравнението (8) във вида

$$u_{\xi\eta} + \frac{1}{3\eta} u_\xi = 0.$$

Параболични уравнения: $b^2 - ac = 0$. В този случай в произволна точка имаме или $a \neq 0$, или $c \neq 0$. Сега уравненията (3) (или ако $a = 0$ — уравненията (4)) съвпадат. Получаваме само един интеграл $\varphi(x, y) = C$, който определя едно семейство реални характеристики на уравнението (2). Полагаме

$$\xi = \varphi(x, y), \ \eta = \psi(x, y), \tag{9}$$

където $\psi(x, y)$ е гладка функция, за която якобианът $\dfrac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)}$ на смяната (9) е различен от нула в разглежданата област. За простота в пресмятанията, ако $\varphi_y \neq 0$, обикновено полагаме $\eta = x$, а ако $\varphi_x \neq 0$, полагаме $\eta = y$. Уравнението (1) се преобразува във вида

$$u_{\eta\eta} = F_3(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

9.3. Да се определи къде е параболично уравнението

$$x^2 u_{xx} - 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} + x u_x + y u_y = 0 \tag{10}$$

и да се канонизира.

Решение. Формата $b^2 - ac = (xy)^2 - x^2 y^2 = 0$ за всяко $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. В точка $(0, 0)$ уравнението не е от втори ред и там не го разглеждаме. Във всички останали точки на равнината (x, y) уравнението е параболично. Уравнението на характеристиките е

$$x^2 (dy)^2 + 2xy \, dx \, dy + y^2 (dx)^2 = 0,$$

т.е. то е $xdy + ydx = 0$. При $x \neq 0$, $y \neq 0$ общият му интеграл е $xy = \text{const}$. Да разгледаме точките, за които $x \neq 0$. Извършваме смяната

$$\xi = xy, \ \eta = x. \tag{11}$$

Ще отбележим, че при $x = 0$ тя е особена. Пресмятаме производните и заместваме в уравнението (10). Получаваме каноничния вид

$$u_{\eta\eta} + \frac{1}{\eta} u_\eta = 0, \ \eta \neq 0. \tag{12}$$

За всички точки (x, y), $y \neq 0$ (в частност за точките от вида $(0, y)$, за които смяната (11) е особена), чрез смяната $\xi = xy$, $\eta = y$ достигаме до същото уравнение (12).

Елиптични уравнения: $b^2 - ac < 0$. Сега очевидно $a \neq 0$. Разглеждаме уравненията

$$ady - (b + i\sqrt{ac - b^2})dx = 0, \; ady - (b - i\sqrt{ac - b^2})dx = 0. \tag{13}$$

Общите им интеграли са комплексно спрегнати и определят две фамилии имагинерни характеристики. Нека общият интеграл на едното от уравненията (13) има вида

$$\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = C,$$

където $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ са реални функции. Тогава смяната $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$ привежда уравнението (1) в каноничния вид

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = F(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

9.4. В областите, където е елиптично, канонизирайте уравнението

$$y^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + 2x^2 u_{yy} + y u_y = 0. \tag{14}$$

Решение. Уравнението е елиптично при $x \neq 0$, $y \neq 0$. Уравнението на характеристиките се разпада на двете уравнения

$$ydy = (1 - i)xdx, \; ydy = (1 + i)xdx.$$

И двете са с отделени променливи. Интегрирайки първото, получаваме

$$y^2 - (1 - i)x^2 = \text{const}.$$

След смяната $\xi = y^2 - x^2$, $\eta = x^2$ получаваме каноничния вид

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{2\eta} u_\eta + \frac{1}{\xi + \eta} u_\xi = 0.$$

9.5. В точките от равнината определете от какъв тип е всяко от следните уравнения. Канонизирайте ги във всяка област, където типът е постоянен. Намерете характеристиките им.

1. $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} + u_y = 0.$

2. $u_{xx} - 6u_{xy} + 10u_{yy} + u_x - 3u_y = 0.$
3. $4u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} - 2u_y = 0.$
4. $yu_{xx} + u_{yy} = 0$ — уравнението на Трикоми.
5. $u_{xx} + yu_{yy} = 0.$
6. $(1 + x^2)u_{xx} + (1 + y^2)u_{yy} + xu_x + yu_y = 0.$
7. $\mathrm{tg}^2 x u_{xx} - 2y\mathrm{tg} x u_{xy} + y^2 u_{yy} + \mathrm{tg}^3 x u_x = 0.$
8. $yu_{xx} + xu_{yy} = 0.$
9. $e^{2x}u_{xx} + 2e^{x+y}u_{xy} + e^{2y}u_{yy} + (e^{2y} - e^{x+y})u_y = 0.$

Отг. 1. Уравнението е хиперболично в $\mathbf{R}^2$ и чрез смяната $\xi = x - y$, $\eta = 3x + y$ приема вида $u_{\xi\eta} - \frac{1}{16}(u_\xi - u_\eta) = 0$. Характеристиките му са двете фамилии прави $x - y = C_1$ и $3x + y = C_2$.

2. Уравнението е елиптично в $\mathbf{R}^2$; $\xi = x$, $\eta = 3x + y$; $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_\xi = 0$.

3. Уравнението е параболично в $\mathbf{R}^2$; $\xi = x - 2y$, $\eta = x$; $u_{\eta\eta} + u_\xi = 0$. Има една фамилия характеристики — правите $x - 2y = C_1$.

4. Това е уравнение от смесен тип: хиперболично при $y < 0$, елиптично при $y > 0$, параболично при $y = 0$. За $y > 0$ смяната $\xi = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}$, $\eta = x$ го привежда във вида $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{3\xi}u_\xi = 0$. За $y < 0$ смяната $\xi = \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} + x$, $\eta = \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} - x$ го привежда във вида

$$u_{\xi\eta} + \frac{1}{6(\xi + \eta)}(u_\xi + u_\eta) = 0.$$

Характеристиките на уравнението на Трикоми са полукубичните параболи (черт 9.1) $x - C = \pm\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}$.

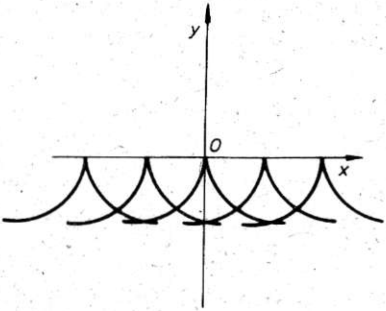
5. Уравнение от смесен тип в $\mathbf{R}^2$. При $y > 0$ е елиптично и смяната $\xi = x$, $\eta = 2\sqrt{y}$ го привежда в каноничен вид:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - \frac{1}{\eta}u_\eta = 0, \; \eta > 0.$$

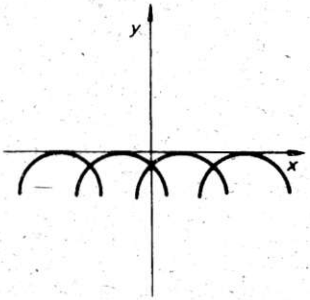
При $y = 0$ е параболично. При $y < 0$ е хиперболично и чрез смяната $\xi = 2\sqrt{-y} + x$, $\eta = 2\sqrt{-y} - x$ се привежда във вида

$$u_{\xi\eta} + \frac{1}{2(\xi + \eta)}(u_\xi + u_\eta) = 0, \ \xi + \eta > 0.$$

Характеристиките му са параболите $y = -\frac{1}{4}(x - C)^2$ (черт. 9.2). Клоновете, насочени наляво, се задават с уравнението $\xi = \text{const}$, а тези надясно — с $\eta = \text{const}$.



Черт. 9.1



Черт. 9.2

6. Елиптично в $\mathbf{R}^2$; $\xi = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$, $\eta = \ln(y + \sqrt{1 + y^2})$; $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$.
7. Коефициентите са дефинирани за $x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, k — цяло. Уравнението е от втори ред за $(x, y) \neq (k\pi, 0)$ и е параболично. При $x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, $y \neq 0$, неособената смяна $\xi = y \sin x$, $\eta = y$ води до $u_{\eta\eta} - \frac{2\xi}{\eta^2}u_\xi = 0$. В околност на точките $(x, 0)$, $x \neq k\pi$, $x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ можем да положим $\xi = y \sin x$, $\eta = x$ и достигаме до

$$u_{\eta\eta} + \mathrm{tg}\eta u_\eta - \frac{2\xi}{\mathrm{tg}^2\eta}u_\xi = 0.$$

8. Уравнението е хиперболично за $x > 0$, $y < 0$ и за $x < 0$, $y > 0$ и се привежда във вида
$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + \frac{1}{3\xi}u_\xi - \frac{1}{3\eta}u_\eta = 0$$
чрез смяната $\xi = |x|^{\frac{3}{2}}$, $\eta = |y|^{\frac{3}{2}}$. Уравнението е елиптично за $x > 0$, $y > 0$ и за $x < 0$, $y < 0$, т.е. в първи и трети квадрант; смяната $\xi = |x|^{\frac{3}{2}}$, $\eta = |y|^{\frac{3}{2}}$ го привежда във вида $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{3\xi}u_\xi + \frac{1}{3\eta}u_\eta = 0$. Върху осите $x = 0$ и $y = 0$ уравнението е параболично.

9. Уравнението е параболично в цялата равнина и смяната $\xi = e^{-y} - e^{-x}$, $\eta = x$ го привежда в каноничния вид $u_{\eta\eta} = 0$.

Общо решение

Функцията $u(x, y)$ се нарича решение на уравнението (1) в някаква област D, ако $u \in C^2(D)$, и заместена в уравнението (1), го превръща в тъждество. Съвкупността от всички решения на уравнението (1) се нарича негово общо решение. За някои уравнения общото решение може да се намери, след като те се приведат в каноничен вид.

9.6. Намерете в посочените области общото решение на следните уравнения с постоянни коефициенти:

1. $u_{xy} = 0$ в $\mathbf{R}^2$.

Решение. Да фиксираме променливата $x = x_0$. Тогава уравнението става обикновено диференциално уравнение върху правата $x = x_0$:
$$\frac{d}{dy}[u_x(x_0, y)] = 0.$$
Следователно $u_x(x_0, y) = \text{const}$ при фиксираното x_0. Ясно е, че когато x_0 се мени, тази константа също може да се мени, така че имаме $u_x(x, y) = f(x)$ с някаква еднократно гладка функция $f(x)$. Фиксирайки y, получаваме обикновено диференциално уравнение относно x, зависещо от параметъра y. Решението е
$$u(x, y) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt + \text{const}.$$

Първият израз е функция $F(x)$ само на x, а вторият е постоянен при фиксирано y, т.е. когато y се мени, това е функция $G(y)$. И така, ако $u(x,y)$ е решение на уравнението, съществуват двукратно гладки функции F и G, така че

$$u(x,y) = F(x) + G(y), \tag{15}$$

Обратното е очевидно: за всеки две функции $F \in C^2$ и $G \in C^2$ функцията (15) е решение на уравнението. И така: всички решения на уравнението и само те се дават по формула (15), т.е. тя дава общото решение на уравнението.

2. $u_{xy} = 0$ в изпъкнала област $D \subset \mathbf{R}^2$.

Решение. Да означим $a_1 = \inf x$ за $(x,y) \in D$ и съответно $a_2 = \sup x$, $b_1 = \inf y$, $b_2 = \sup y$. Тогава за $x_0 \in (a_1, a_2)$, $D \bigcap \{x = x_0\}$ е краен или безкраен интервал. Да фиксираме едно такова x_0. Както горе, имаме $u_x(x_0, y) = \text{const}$. Така че

$$u_x(x,y) = f(x) \in C^1(a_1, a_2).$$

Нека x_1 е точка от интервала (a_1, a_2). Ако означим

$$F(x) = \int\limits_{x_1}^{x} f(t)dt,$$

очевидно имаме $\frac{d}{dx}[u(x,y) - F(x)] = 0$, $(x,y) \in D$, откъдето за $y_0 \in (b_1, b_2)$ в интервала $D \bigcap \{y = y_0\}$ получаваме

$$u(x,y_0) - F(x) = C_1 = \text{const},$$

където константата C_1 зависи от y_0. Отново получаваме формулата (15).

3. $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$, $a = \text{const}$, в изпъкналата област D.

Решение. Характеристиките на това уравнение са двете фамилии прави $x - at = c_1$, $x + at = c_2$. След смяната $\xi = x + at$,

$\eta = x - at$ достигаме до уравнението $u_{\xi\eta}(\xi, \eta) = 0$, чието общо решение според задача 9.6.2 е $u(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta)$. След обратната смяна получаваме

$$u(x, t) = F(x + at) + G(x - at)$$

с произволни двукратно гладки функции F и G.

4. $u_{xx} = 0$.

Отг. $u(x, y) = xf(y) + g(y)$.

5. $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0$.

Отг. $u(x, y) = f(x - y) + g(3x + y)$.

6. $u_{xy} + au_x = 0$, $a = \text{const}$.

Упътване. Означете $v = u_x$ и решете полученото уравнение за v. Намерете оттук $u(x, y) = e^{-ay}F(x) + G(y)$, което е общото решение. Вижте и зад. 9.6.8.

7. $3u_{xx} - 5u_{xy} - 2u_{yy} + 3u_x + u_y = 2$.

Решение. След смяната $\xi = 2x + y$, $\eta = 3y - x$ получаваме каноничния вид $u_{\xi\eta} - \frac{1}{7}u_\xi = -\frac{2}{49}$. При фиксирано ξ това е линейно обикновено диференциално уравнение относно функцията $v = u_\xi$. Решаваме го и намираме u_ξ и оттук

$$u(\xi, \eta) = \frac{2}{7}\xi + F(\xi)e^{\frac{\eta}{7}} + G(\eta).$$

След обратната смяна получаваме $u(x, y)$.

8. $u_{xy} + au_x + bu_y + abu = 0$, $a, b - \text{const}$.

Упътване. Въведете функцията v по формулата (вж. зад. 9.15) $u(x, y) = v(x, y)e^{-bx-ay}$ и решете полученото уравнение за v.

9. $u_{xy} - 2u_x - 3u_y + 6u = 2e^{x+y}$.

10. $u_{xx} + 2au_{xy} + a^2u_{yy} + u_x + au_y = 0$.

9.7. Докажете, че уравнението с постоянни коефициенти

$$u_{xy} + au_x + bu_y + cu = 0$$

след смяната $u(x,y) = v(x,y)e^{-bx-ay}$ се привежда във вида

$$v_{xy} + (c - ab)v = 0.$$

Забележка. От зад. 9.7 и 10.18 следва, че можем да намерим общото решение на *всяко* линейно хиперболично уравнение с две променливи и с постоянни коефициенти.

9.8. Намерете общото решение на уравнението $u_{xy} = F(x,y)$ в областта $D = \{|x - x_0| < a,\ |y - y_0| < b\}$, където $F \in C(D)$.

Решение. Интегрирайки в D уравнението, получаваме

$$u(x,y) = f(x) + g(y) + \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y} F(\xi,\eta)d\xi d\eta,$$

където функциите $f,\ g \in C^2$ са произволни.

9.9. Намерете общото решение на уравнението

$$u_{xy} + A(x,y)u_x = 0$$

в областта $D = \{|x - x_0| < a,\ |y - y_0| < b\}$, където $A \in C^1(D)$.

Отг. $u(x,y) = g(y) + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi)e^{-\int\limits_{y_0}^{y} A(\xi,\eta)d\eta} d\xi$, където f и g са произволни функции съответно от C^1 и C^2.

9.10. В областите, където запазват типа си, намерете общото решение на всяко от следните уравнения:

1. $u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y = 0.$

Отг. $u(x,y) = f(y - \cos x + x) + g(y - \cos x - x)$, където f и g са произволни функции от C^2.

2. $3yu_{yy} - 3xu_{xy} + 2u_y = 0$.

Отг. От зад. 9.2 и 9.9 получаваме

$$u(x,y) = f(xy)\sqrt[3]{x} + g(x),\ x \neq 0\ y \neq 0; f, g \in C^2.$$

3. $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} - 2yu_y = 4xy,\ x < 0,\ y > 0$.

Упътване. След смяната $\xi = y/x$, $\eta = xy$ от задача 9.1 уравнението добива вида

$$u_{\xi\eta} + \frac{1}{2\xi}u_\eta = -\frac{1}{\xi}.$$

При фиксирано η интегрираме и получаваме

$$u_\eta = -2 + f(\eta)|\xi|^{-1/2},$$

откъдето общото решение е

$$u(x,y) = -2xy + F(xy)\sqrt{-\frac{x}{y}} + G\left(\frac{y}{x}\right);\ F, G \in C^2.$$

4. $x^2u_{xx} - 2xu_{xy} + u_{yy} + 2u_y = 0$.

Отг. $u(x,y) = F(xe^y)e^{-2y} + G(xe^y);\ F,\ G \in C^2$.

5. $yu_{xx} + (x-y)u_{xy} - xu_{yy} = 0$.

Отг. Уравнението е хиперболично за $x + y \neq 0$. Във всяка от полуравнините $x + y > 0$ и $x + y < 0$ общото решение е

$$u(x,y) = f(x+y) + (x-y)g(x^2 - y^2).$$

6. $xu_{xx} - yu_{yy} + \frac{1}{2}(u_x - u_y) = 0$.

Отг. Уравнението е хиперболично за $x > 0$, $y > 0$ и $x < 0$, $y < 0$. Например за $x > 0$, $y > 0$ общото му решение е

$$u(x,y) = f(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + g(\sqrt{x} - \sqrt{y}).$$

Често пъти една подходяща смяна на търсената функция позволява да се опрости уравнението и да се намери общото му решение.

9.11. Намерете общото решение на следните уравнения:

1. $(x^2u_x)_x = x^2u_{yy}$.

Упътване. Въведете нова функция по формулата $v = xu$. *Отг.* $u(x,y) = \frac{1}{x}[f(x-y)+g(x+y)]$.

2. $(x-y)u_{xy} - u_x + u_y = 0$.

Отг. След смяната $v = (x-y)u$ получете $u(x,y) = \dfrac{f(x)+g(y)}{x-y}$.

3. $u_{xy} - xu_x + u = 0$.

Решение. Означавайки $v = u_x$, имаме $v_y - xv + u = 0$. Чрез диференциране по x получаваме $v_{xy} - xv_x = 0$ и оттук

$$u(x,y) = \int\limits_0^x (x-\xi)f(\xi)e^{\xi y}d\xi + xg(y) + h(y).$$

Понеже сме диференцирали, получили сме и функции, които не са решения на първоначалното уравнение. Замествайки $u(x,y)$ в него, получаваме $h(y) = -g'(y)$, така че общото решение е

$$u(x,y) = \int\limits_0^x (x-\xi)f(\xi)e^{\xi y}d\xi + xg(y) - g'(y).$$

9.12. Намерете областите на хиперболичност, елиптичност и параболичност на уравнението

$$(x^2-1)u_{xx} + 2xyu_{xy} + (y^2-1)u_{yy} + 2xu_x + 2yu_y = 0.$$

Намерете общото му решение в областта на хиперболичност. Сравнете със зад. 9.14.

Упътване. При интегриране на уравненията на характеристиките

$$(xy \pm \sqrt{x^2+y^2-1})dx + (1-x^2)dy = 0$$

въведете нови променливи (z,t) по формулите $t^2 = x^2 - 1$, $y = zt$.

Отг. Извън окръжността $x^2+y^2=1$ уравнението е хипербо- лично, вътре — елиптично, а върху окръжността — параболично. Общото решение е

$$u(x,y)=f\left(\frac{y+\sqrt{x^2+y^2-1}}{1+x}\right)+g\left(\frac{y-\sqrt{x^2+y^2-1}}{1+x}\right).$$

Много променливи

Уравнението

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_ix_j}+F(x,u,u_{x_1},\ldots,u_{x_n})=0,\ a_{ij}=a_{ji}, \tag{16}$$

във всяка фиксирана точка x_0 може да се приведе в каноничен вид по следния начин. Нека B е такава* неособена матрица, че трансформацията $\xi=B\eta$ привежда квадратичната форма $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0)\xi_i\xi_j$ в каноничен вид $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\eta_i^2$. Тогава неособената линейна трансформация $y=B'x$ (B' е транспонираната на B матрица) привежда в точка x_0 уравнението (16) в каноничния вид.

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_{y_iy_i}+F_1(y,u,u_{y_1},\ldots,u_{y_n})=0.$$

Относно дефинициите на различните типове уравнения по отношение знаците на числата λ_i вж. [8].

9.13. Канонизирайте следните уравнения и определете от какъв тип са:

1. $3u_{x_1x_1}+4u_{x_2x_2}+\frac{4}{3}u_{x_3x_3}-6u_{x_1x_2}+2u_{x_1x_3}=0.$

Решение. Разглеждаме формата

$$3\xi_1^2+4\xi_2^2+\frac{4}{3}\xi_3^2-6\xi_1\xi_2+2\xi_1\xi_3=\left(\sqrt{3}\xi_1-\sqrt{3}\xi_2+\frac{1}{\sqrt{3}}\xi_3\right)^2$$

$$+\xi_2^2+\xi_3^2+2\xi_2\xi_3=\eta_1^2+\eta_2^2,$$

---

*Такава матрица може да се намери например чрез последователно отделяне на пълни квадрати в квадратичната форма (вж. зад. 9.13.1).

където смяната е $\eta_1 = \sqrt{3}\xi_1 - \sqrt{3}\xi_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\xi_3$, $\eta_2 = \xi_2 + \xi_3$, $\eta_3 = \xi_3$. Така че матрицата B е

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следователно смяната

$$(17) \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = B'x = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{3} & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}x_1 \\ x_1 + x_2 \\ -\frac{4}{3}x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

привежда (проверете!) уравнението 1 в каноничния вид

$$u_{y_1y_1} + u_{y_2y_2} = 0.$$

Производни от първи ред не се появяват, понеже смяната (17) е линейна. Уравнението е параболично.

2. $u_{x_1x_1} - 4u_{x_1x_2} + 2u_{x_1x_3} + 4u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3} = 0.$

Решение. Разглеждаме формата

$$\xi_1^2 - 4\xi_1\xi_2 + 2\xi_1\xi_3 + 4\xi_2^2 + \xi_3^2 = (\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3)^2 + 4\xi_2\xi_3$$

$$= (\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3)^2 + (\xi_2 + \xi_3)^2 - (\xi_2 - \xi_3)^2 = \eta_1^2 + \eta_2^2 - \eta_3^2.$$

Следователно смяната $y_1 = x_1$, $y_2 = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{2}$, $y_3 = \dfrac{3x_1 + x_2 - x_3}{2}$ привежда (проверете!) уравнението 2 в каноничния вид

$$u_{y_1y_1} + u_{y_2y_2} - u_{y_3y_3} = 0.$$

Това е хиперболично уравнение.

3. $u_{x_1x_1} + 2u_{x_1x_2} - 2u_{x_1x_3} + 2u_{x_2x_2} + 6u_{x_3x_3} = 0.$

Отг. Смяната $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2 - x_1$, $y_3 = x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3$ го привежда във вида $u_{y_1y_1} + u_{y_2y_2}u_{y_3y_3} = 0$, т.е. уравнението е елиптично.

4. $u_{x_1x_2} + u_{x_1x_3} + u_{x_1x_4} + u_{x_3x_4} = 0$.

Отг. Смяната $y_1 = x_1 + x_2$, $y_2 = x_1 - x_2$, $y_3 = -2x_2 + x_3 + x_4$, $y_4 = x_3 - x_4$ води до $u_{y_1y_1} - u_{y_2y_2} + u_{y_3y_3} - u_{y_4y_4} = 0$, т.е. това е ултрахиперболично уравнение.

5. $u_{x_1x_1} + 2\sum\limits_{k=2}^{n} u_{x_kx_k} - 2\sum\limits_{k=1}^{n-1} u_{x_kx_{k+1}} = 0$.

Упътване. $\xi_1^2 + 2\sum\limits_{k=2}^{n} \xi_k^2 - 2\sum\limits_{k=1}^{n-1} \xi_k\xi_{k+1} = \sum\limits_{k=1}^{n-1}(\xi_k - \xi_{k+1})^2 + \xi_n^2$.

9.14. Определете типа на уравнението на Буземан

$$\sum_{i=1}^{n} u_{x_ix_i} - \sum_{i,j=1}^{n} x_ix_ju_{x_ix_j} = 0$$

и го канонизирайте в произволна точка от $\mathbf{R}^n$.

Решение. В точката $x = 0$ уравнението е елиптично и е в каноничен вид. Нека $z = (z_1, \dots z_n) \neq 0$. Квадратичната форма в точката z е $\sum \xi_i^2 - \left(\sum z_i\xi_i\right)^2$. Забелязваме, че при ортогонална трансформация $\eta = \mathbf{A}\xi$ първата сума ще запази вида си. Затова избираме $\eta_1 = \sum \frac{z_i}{z}\xi_i$ и намираме

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 - |z|^2\eta_1^2 = (1 - |z|^2)\eta_1^2 + \sum_{i=2}^{n} \eta_i^2.$$

Следователно каноничният вид на уравнението на Буземан в точка $x = z$ е

$$(1 - |z|^2)u_{y_1y_1} + \sum_{i=2}^{n} u_{y_iy_i} = F(y, u, u_{y_1}, \dots, u_{y_n}),$$

така че то е елиптично при $|z| < 1$, параболично при $|z| = 1$ и хиперболично при $|z| > 1$, т.е. това е уравнение от смесен тип. Намерете трансформация, която го привежда в каноничен вид.

Забележка. До уравнението на Буземан се свеждат някои уравнения от хидродинамиката. До него се свежда и нелинейното уравнение на минималните повърхнини след трансформацията на Льожандър.

9.15. Със смяна на променливите $u = wv$, където w е подходяща помощна функция, трансформирайте уравнението с постоянни коефициенти

$$\sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i x_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu = f(x), \ a_i \neq 0,$$

в уравнение относно v, несъдържащо първи производни на v.

Решение. Извършете смяната. Приравнявайки на нула коефициентите пред v_{x_i}, получаваме уравненията

$$2a_i w_{x_i} + b_i w = 0, \ i = 1, \dots, n,$$

откъдето $w(x) = \exp\left(-\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{b_i x_i}{2a_i}\right)$. След смяната $u = vw$ уравнението добива вида

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_{x_i x_i} + \left[c - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^2}{a_i}\right] v = f(x) \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{2a_i}\right).$$

9.16.* Нека линейният оператор с постоянни коефициенти

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial}{\partial x_i} + C$$

може да се представи като композиция на два оператора от първи ред с реални коефициенти

$$L \equiv L_1 L_2 \equiv \left(a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n} + a_0\right)\left(b_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + b_n \frac{\partial}{\partial x_n} + b_0\right).$$

Намерете общото решение на уравнението $Lu \equiv 0$. Докажете, че при $L_1 \neq L_2$ то е сума от двукратно гладките общи решения на $L_1 u = 0$ и $L_2 u = 0$. Какво е решението при $L_1 = L_2$, т. е. при $a_i = \lambda b_i$ за всяко $i = 0, 1, \dots, n$?

Упътване. Разгледайте два случая:

1. Векторите $(a_1, \ldots, a_n)$ и $(b_1, \ldots, b_n)$ са *пропорционални*, т. е. $b_i = \lambda a_i$, $i = 1, \ldots, n$, $\lambda \neq 0$. Въведете такива нови променливи $\xi_1, \ldots, \xi_n$, че $\dfrac{\partial}{\partial \xi_1} = a_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + a_n \dfrac{\partial}{\partial x_n}$. Тогава

$$Lu \equiv \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} + a_0\right)\left(\lambda \frac{\partial u}{\partial \xi_1} + b_0 u\right) = 0,$$

което е обикновено диференциално уравнение в направлението ξ_1 с постоянни коефициенти. Решете го! В общото му решение ще участват произволни функции на $\xi_2, \ldots, \xi_n$.

2. Векторите *не са пропорционални*. Въведете нови променливи $\eta_1, \ldots, \eta_n$, така че $\dfrac{\partial}{\partial \eta_1} = a_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + a_n \dfrac{\partial}{\partial x_n}$, $\dfrac{\partial}{\partial \eta_2} = b_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + b_n \dfrac{\partial}{\partial x_n}$. Тогава $Lu \equiv \left(\frac{\partial u}{\partial \eta_1} + a_0\right)\left(\frac{\partial u}{\partial \eta_2} + b_0 u\right) = 0$ (вж. зад. 9.7).

Забележка. Общите решения на $L_1 u = 0$ и $L_2 u = 0$ могат да се намерят, като се интегрират тези две частни диференциални уравнения от първи ред и по познатия начин (без предварителна смяна на променливите). Според доказаното по-горе сумата от тези две решения дава общото решение на $Lu = 0$, ако $L_1 \neq L_2$.

9.17 Намерете общото решение на следните уравнения:

1. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} - u_{zz} - 2u_z - u = 0$.

Упътване. Тъй като уравнението $t_1^2 + 2t_1 t_2 + t_2^2 - t_3^2 - 2t_3 - 1 = 0$ има относно t_3 два корена $(-1 + t_1 + t_2)$ и $(-1 - t_1 - t_2)$, получаваме

$$t_1^2 + 2t_1 t_2 + t_2^2 - t_3^2 - 2t_2 - 1 = -(t_3 - t_1 - t_2 + 1)(t_3 + t_1 + t_2 + 1),$$

така че

$$Lu = -\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} + 1\right)\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + 1\right) u.$$

Приложете зад. 9.16.

2. $2u_{xx} + u_{xy} + 2u_{xz} - u_{yy} - u_{yz} = 0$.

3. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} - 2u_{yz} - 2u_{xz} + u_{zz} = 0$.

Упътване. Сега $L_1 = L_2$.

4. $u_{zz} = Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy}$, където A, B и C са положителни константи и $B^2 = AC$.
5. $\dfrac{\partial^4 u}{\partial t^4} - 2\dfrac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} + \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0.$

Упътване. Уравнението може да се запише във вида

$$Lu \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 0,$$

т. е. това е квадратът на едномерния вълнов оператор $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$. След смяната $\xi = t + x$, $\eta = t - x$ операторът L добива вида $Lu \equiv u_{\xi\xi\eta\eta} = 0$. Общото решение е

$$u(x,t) = (t-x)F(t+x) + (t+x)G(t-x) + F_1(t+x) + G_1(t-x),$$

където F, G, F_1 и G_1 са произволни функции от C^4.

9.18. Докажете, че в цилиндрични координати (ρ, φ, z), свързани с декартовите (x, y, z) чрез $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, за лапласовия оператор $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ е валидно тъждеството

$$\Delta u \equiv u_{\varrho\varrho} + \frac{1}{\rho}u_{\varrho} + \frac{1}{\rho^2}u_{\varphi\varphi} + u_{zz} \equiv \frac{1}{\rho}(\rho u_{\varrho})_{\varrho} + \frac{1}{\rho^2}u_{\varphi\varphi} + u_{\;z}.$$

9.19. Докажете, че в сферични координати (r, φ, θ), свързани с декартовите (x, y, z) чрез $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$, е валидно тъждеството

$$\Delta u = \frac{1}{r}(ru)_{rr} + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}u_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r^2\sin\theta}(u_\theta\sin\theta)_\theta.$$

9.20. Намерете решенията на вълновото уравнение

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}),$$

които имат сферична симетрия, т. е. $u(x,y,z,t) = u(r,t)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Упътване. Въведете сферични координати (r, φ, θ). Имайки предвид зад. 9.19, положете $u = rv$.
Отг. $u(r,t) = \frac{1}{r}[f(r+at) + g(r-at)]$.

§ 10. Метод на характеристиките. Задачи на Коши, Гурса и Дарбу. Функция на Риман

Метод на характеристиките

Да се реши задача с метода на характеристиките означава следното. Намира се общото решение на уравнението и произволните функции, участващи в него, се определят от зададените начални и гранични условия. С помощта на този метод в § 10 и 11 ще изследваме различни задачи за хиперболични уравнения.

Задача на Коши в равнината

Постановката на задачата на Коши:

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + d(x,y)u_x + e(x,y)u_y + h(x,y)u = F(x,y). \tag{1}$$

$$u\Big|_{\Gamma} = u_0(x,y), \frac{du}{dl}\Big|_{\Gamma} = u_1(x,y), \tag{2}$$

е следната. Нека в областта D е дадено уравнението (1) от хиперболичен тип ($b^2 - ac > 0$) и върху кривата Г, която лежи в D или е част от границата на D, са зададени функциите $u_0(x,y)$, $u_1(x,y)$ и ненулевият вектор $l(x,y)$. Търси се функция $u(x,y)$, която е решение на уравнението (1) в областта D и удовлетворява условието (2) върху Г.

Нека в никоя точка на Г векторът l не е тангенциален към Г и тангенциалният вектор към Г няма характеристично направление. Тогава в областта D', ограничена от характеристиките, минаващи през крайните точки на Г, при достатъчно гладки коефициенти на уравнението (1) и начални данни (2) съществува единствено решение на задачата на Коши (1), (2).

10.1. Нека в интервала (a,b) са зададени функциите $\varphi \in C^2$ ($\varphi' \neq 0$), $u_0 \in C^2$, $u_1 \in C^1$. Докажете, че задачата на Коши:

$$u_{xy} = 0,\ a < x < b,\ c < y < d, \tag{3}$$

$$u|_{y=\varphi(x)} = u_0(x),\ u_y|_{y=\varphi(x)} = u_1(x), \tag{4}$$

има единствено решение

$$u(x,y) = u_0(x) + \int\limits_x^{\varphi^{-1}(y)} u_1(\xi)\varphi'(\xi)d\xi, \tag{5}$$

където φ^{-1} е обратната на φ функция, $c = \inf \varphi(x)$, $d = \sup \varphi(x)$.

Решение. Общото решение на (3) е $u(x,y) = f(x) + g(y)$ за $f \in C^2$, $g \in C^2$. Заместваме в (4) и получаваме

$$f(x) + g(\varphi(x)) = u_0(x), g'(\varphi(x)) = u_1(x), a < x < b.$$

Тук и по-нататък с g' ще бележим производна по целия аргумент на функцията на една променлива $g(y)$. Полагаме $t = \varphi(x)$ във второто равенство и получаваме*

$$g'(t) = u_1(\varphi^{-1}(t)), g(t) = \int_{t_0}^{t} u_1(\varphi^{-1}(\eta))d\eta + C = \int_{x_0}^{\varphi^{-1}(t)} u_1(\xi)\varphi'(\xi)d\xi + C,$$

където $t \in (c,d)$, $t_0 \in (c,d)$, $x_0 \in (a,b)$. Тогава

$$f(x) = u_0(x) - g(\varphi(x)) = u_0(x) - \int_{x_0}^{x} u_1(\xi)\varphi'(\xi)d\xi - C.$$

Замествайки в общото решение намерените функции f и g, получаваме (5). Следователно, ако задача (3), (4) има решение, то се дава с (5) (единственост). Непосредствено се проверява, че (5) дава решение на задачата.Как се диференцира интеграл, зависещ от параметър?

10.2. Нека в интервала $(-1,1)$ са зададени функциите $u_0 \in C^2$, $u_1 \in C^1$. Докажете, че задачата на Коши:

$$u_{xx} - u_{yy} = 1, \tag{6}$$

$$u(x,0) = u_0(x), u_y(x,0) = u_1(x), -1 < x < 1, \tag{7}$$

има единствено решение в квадрата $D_1 = \{|x-y| < 1, |x+y| < 1\}$. Покажете, че във всеки правоъгълник $D_{ab} = \{|x-y| < a, |x+y| < b\}$, където $a \geq 1$, $b \geq 1$, $a + b > 2$, решението на тази задача не е единствено.

Решение. Първо ще отбележим, че квадратът D_1 е получен, след като са прекарани характеристиките $x - y = \pm 1$,

---

*За предпочитане е винаги да се използва определен интеграл.

$x + y = \pm 1$ на уравнението (6) през крайните точки на интервала $[-1, 1]$, така че това е естествената област за съществуване и единственост на решението на (6), (7). Канонизирайки (6), лесно се вижда, че общото решение е

$$u(x, y) = \frac{1}{4}(x^2 - y^2) + f(x + y) + g(x - y), \tag{8}$$

където $f \in C^2$, $g \in C^2$. Замествайки в (7), получаваме

$$f(x) = \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}\int\limits_0^x u_1(\xi)d\xi + C_1, -1 < x < 1,$$

$$g(x) = \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}\int\limits_0^x u_1(\xi)d\xi - C_1, -1 < x < 1,$$

където C_1 е произволна константа. По този начин функцията $f(x+y) \in C^2$ е определена точно за $|x+y| < 1$, а $g(x-y) \in C^2$ за $|x-y| < 1$. Следователно функцията $u(x, y) \in C^2$ от (8) е напълно определена в квадрата D_1 и само в D_1 по формулата

$$u(x, y) = \frac{u_0(x + y) + u_0(x - y)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y} u_1(\xi)d\xi - \frac{1}{2}y^2.$$

Нека сега вземем един по-голям правоъгълник D_{ab} и например нека $b > 1$. Да продължим функцията $f(x)$ в интервалите $(-b, -1)$ и $(b, 1)$ до функция от $C^2(-b, b)$. Това може да се направи по безбройно много начини. Ако $a > 1$, продължаваме и $g(x)$ до функция от $C^2(-a, a)$. Тогава функцията $u(x, y)$, определена по формулата (8), ще бъде от $C^2(D_{ab})$ и ще е решение на (6), което ще удовлетворява и (7) (защо?). Тези решения са безбройно много.

10.3. Докажете, че решение на задачата на Коши

$$u_{xy} = 0, -\infty < x, y < +\infty, \tag{9}$$

$$u|_{y=0} = u_0(x),\ u_y|_{y=0} = u_1(x) \tag{10}$$

съществува тогава и само **тогава**, когато $u_0 \in C^2(\mathbf{R}^1)$ и $u_1(x) = \text{const}$. Покажете, че решението на тази задача не е единствено и може да се представи във вида

$$u(x,y) = u_0(x) + f(y) - f(0) + y[u_1(0) - f'(0)],$$

където $f(y)$ е произволна функция от $C^2(\mathbf{R}^1)$.

Забележка. За уравнението (9) правата $y = 0$ е характеристика (докажете!). По тази причина задача (9), (10) не е разрешима за произволни гладки функции u_0 и u_1.

10.4. Определете най-голямата област, в която поставената задача на Коши има единствено решение. Намерете това решение!

1. $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0$, $u|_{y=0} = 3x^2$, $u_y|_{y=0} = 0$, $-\infty < x < \infty$.

Отг. $u(x,y) = 3x^3 + y^2$, $-\infty < x,\ y < +\infty$.

2. $u_{xy} + yu_x + xu_y + xyu = 0$. $u|_{y=3x} = 0$, $u_y|_{y=3x} = e^{-5x^2}$, $x < 1$.

Упътване. Уравнението може да се запише така:

$$(u_y + yu)_x + x(u_y + yu) = 0,$$

и се решава, като се положи $u_y + yu = v$. Дефиниционната област на решението се намира, като от крайната точка (1,3) на лъча $\{y = 3x,\ x < 1\}$ прекараме двете характеристики $x = 1$ и $y = 3$, така че областта е $\{x < 1,\ y < 3\}$.

Отг. $u(x,y) = (y - 3x)e^{-\frac{x^2+y^2}{5}}$.

3. $xu_{xx} + (x+y)u_{xy} + yu_{yy} = 0$. $u|_{y=1/x} = x^3$, $u_x|_{y=1/x} = 2x^2$, $x > 0$.

Отг. $u(x,y) = \frac{x^2}{y}$, $x > 0$, $y > 0$.

4. $x^2u_{xx} - 2xyu_{xy} - 3y^2u_{yy} = 0$, $u|_{y=1} = 0$, $u_y|_{y=1} = \sqrt[4]{x^7}$.

Отг. $u(x,y) = \frac{3}{4}\sqrt[4]{x^7 y}\left(\sqrt[3]{y} - \frac{1}{y}\right)$, $x > 0$, $y > 0$.

5. $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} - 2yu_y = 0$. $u|_{x=1} = y$, $u_x|_{x=1} = y$, $y < 0$.

Упътване. Вж. зад. 9.10.3; $u(x,y) = \frac{y}{3x} + \frac{2x^2y}{3}$, $x > 0$, $y > 0$.

6. $u_{xx} - 2\cos x u_{xy} - \sin^2 x u_{yy} + \sin x u_y = 0$, $u|_{x=0} = e^{2y}$, $u_x|_{x=0} = 1$.

Отг. $u(x,y) = x + e^{2(y+\sin x - x)}$.

7. $3u_{xx} - 10u_{xy} - 8u_{yy} = 0$, $u|_{y=3x} = 0$, $(u_y - 2u_x)|_{y=3x} = 49x^2$.

Отг. $u(x,y) = \frac{1}{42}[(3y - 2x)^3 - (y + 4x)^3]$.

Забележка. При израждащи се хиперболични уравнения, когато линията на израждане е характеристика за уравнението, постановката на задачата на Коши се изменя (вж. зад. 10.5).

10.5. Покажете, че уравнението

$$u_{xx} + yu_{yy} + \frac{1}{2}u_y = 0, y < 0,$$

има единствено решение, удовлетворяващо условията

$$u|_{y=0} = \tau(x), \tau \in C^2(\mathbf{R}^1), \tag{11}$$

$$u_y(x,y) \text{ има граница при } y \to -0. \tag{12}$$

Упътване. Докажете, че общото решение на уравнението е

$$u(x,y) = f(x + 2\sqrt{-y}) + g(x - 2\sqrt{-y}),$$

където f, $g \in C^2$. Покажете, че необходимо условие, за да е изпълнено (12), е $f'(x) - g'(x) = 0$ за всяко x. Оттук и от (11) намерете f и g. Докажете, че така получената функция $u(x,y)$ е наистина решение.

Отг. $u(x,y) = \frac{\tau(x + 2\sqrt{-y}) + \tau(x - 2\sqrt{-y})}{2}$.

10.6. Намерете решение на задачата на Коши за уравнението от четвърти ред

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0,$$

$$u|_{y=0} = \varphi(x),\ u_y|_{y=0} = \varphi_1(x),\ u_{yy}|_{y=0} = \varphi_2(x),\ u_{yyy}|_{y=0} = \varphi_3(x).$$

Упътване. Вж. зад. 9.17.5.

10.7. Решете следните задачи на Коши за параболични уравнения. Намерете областта, в която е определено решението.

$$1.\ x^2 u_{xx} - 2x u_{xy} + u_{yy} + x u_x = 0,\ u|_{x=1} = e^{2y},\ u_x|_{x=1} = 0.$$

Решение. Характеристиките на това уравнение са линиите от вида $xe^y = \text{const}$ и $x = 0$. Полагайки $\xi = xe^y$, $\eta = y$, уравнението преминава в $u_{\eta\eta} = 0$, т.е. върху всяка от характеристиките $\xi = \text{const}$ получаваме обикновено диференциално уравнение от втори ред. Следователно, ако в една точка на коя да е характеристика е зададено решението и първата му производна в тази точка, то ние ще го знаем и върху цялата характеристика (задача на Коши за о.д.у.). Задавайки началните данни върху правата $x = 1$, която пресича всички характеристики, лежащи в дясната полуравнина, решението ще е напълно определено в областта, която се запълва от тези характеристики, т.е. дясната полуравнина $\{x > 0\}$.

Отг. $u(x,y) = (1 - 2\ln x)x^2 e^{2y}$, $x > 0$.

$$2.\ 4y^2 u_{xx} + 4y u_{xy} + u_{yy} + 2u_x = 0,\ u|_{y=0} = 9\sin x,\ u_y|_{y=0} = e^x.$$

Упътване. Характеристиките тук са параболите $x - y^2 = \text{const}$. След смяната $\xi = x - y^2$, $\eta = y$ уравнението преминава в $u_{\eta\eta} = 0$, т.е. о.д.у. върху $\xi = \text{const}$.

Отг. В цялата равнина $u(x,y) = 9\sin(x-y)^2 + ye^{x-y^2}$.

10.7а. Намерете решение на вълновото уравнение

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}),$$

удовлетворяващо началните условия

$$u|_{t=0} = \varphi(r), u_t|_{t=0} = \psi(r), r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

където функциите $\varphi(r)$ и $\psi(r)$ са зададени за всяко $r \geq 0$.

Упътване. За този случай на сферична симетрия вж. зад. 9.20.

Задача на Гурса и Дарбу

За хиперболичното уравнение (1) постановката на задачата на Гурса е следната. Търси се решение на уравнението (1), което да приема отнапред зададени стойности (само на решението, а не и на производните му!) върху две пресичащи се характеристики на уравнението (1). Тази задача притежава единствено решение (вж. [8], стр. 77). Може да се постави и друга задача. Търси се решение на (1), като данните се задават върху една характеристика и върху една пресичаща я нехарактеристична крива. Тази задача се нарича задача на Дарбу или също задача на Гурса.

10.8. Докажете, че задачата на Гурса

$$u_{xy} = 0, x > 0, y > 0;\ u|_{y=0} = \varphi(x), u|_{x=0} = \psi(y),$$

има единствено решение $u(x,y) = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(0)$, ако $\varphi, \psi \in C^2(x > 0) \cap C(x \geq 0)$ и е изпълнено условието за съгласуване $\varphi(0) = \psi(0)$.

Забележка. Тъй като $u \in C(x \geq 0, y \geq 0)$, условието за съгласуване е необходимо, понеже $\varphi(0) = u(0,0) = \psi(0)$.

10.9. Нека $\alpha = \text{const} < 0$. Докажете, че задачата на Дарбу

$$u_{xy} = 0, \qquad \alpha x < y < 0,$$

$$u|_{y=0} = \varphi(x), \qquad u|_{y=\alpha x} = \psi(x)$$

има единствено решение $u(x,y) = \varphi(x) + \psi\left(\frac{y}{\alpha}\right) - \varphi\left(\frac{y}{\alpha}\right)$, ако

$$\varphi, \psi \in C^2(x > 0) \cap C(x \geq 0) \text{ и } \varphi(0) = \psi(0).$$

10.10. Докажете, че решението на задачата на Дарбу

(13) $$u_{xy} = 0, y > \alpha x, x > 0, \alpha < 0;$$

(14) $$u|_{y=\alpha x} = 0, u|_{x=0} = 0$$

не е единствено. Покажете, че всички решения имат вида

$$u(x,y) = f(x) - f\left(\frac{y}{\alpha}\right), \tag{15}$$

където f е произволна функция от $C^2(\mathbf{R}^1)$, която е нула за $x \le 0$.

Упътване. Замествайки общото решение на (13) $u(x,y) = F(x) + G(y)$ в (14), изразете функцията $G(y)$ за $y > 0$ и за $y < 0$ чрез функцията F. При какви условия имаме $G \in C^2(-\infty,\infty)$?

10.11.* Докажете, че задачата

$$u_{xy} = 0 \text{ в } D = \{y > \alpha x, x > 0\}, \alpha < 0, \tag{16}$$

$$u|_{y=\alpha x} = \varphi_1(x), u_y|_{y=\alpha x} = \varphi_2(x), u|_{x=0} = \varphi_3(x), \tag{17}$$

където φ_1, $\varphi_3 \in C^2[0,\infty)$, $\varphi_2 \in C^1[0,\infty)$, има не повече от едно решение. Какви условия върху функциите φ_1, φ_2 и φ_3 са необходими и достатъчни, за да съществува решение от $C^2(\overline{D})$? Сравнете със задачи 10.8, 10.9 и 10.10.

Решение. Задачата на Коши с данни върху $y = \alpha x$, $x > 0$, има единствено решение в областта $\alpha x \le y \le 0$. Намерете го (зад. 10.1)! Стойностите на това решение върху $y = 0$, $x > 0$ и зададените условия (17) върху $x = 0$, $y > 0$ също определят единствено решение (вж. зад. 10.8) в $x > 0$, $y > 0$. Следователно задача (16), (17) има не повече от едно решение. Дали тя има решение $u \in C^2(\overline{D})$ или не, зависи от това, дали се ”залепват” двукратно гладко при $y = 0$ решението на задачата на Коши в $y < 0$ и решението на задачата на Гурса в $y > 0$. Покажете, че достатъчни за това са условията

$$\varphi_1(0) = \varphi_3(0), \varphi_2(0) = \varphi_3'(0), \varphi_2'(0) = \alpha\varphi_3''(0) \tag{18}$$

и тогава решението е

$$u(x,y) = \begin{cases} \varphi_1(x) - \varphi_1(0) + \varphi_3(y) - \alpha \displaystyle\int_0^x \varphi_2(t)dt, x \ge 0, y > 0, \\ \varphi_1(x) + \alpha \displaystyle\int_x^{y/\alpha} \varphi_2(t)dt, x \ge 0, \alpha x \le y \le 0. \end{cases}$$

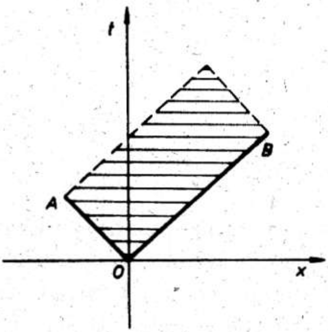
Докажете, че условията (18) са и необходими. Първите две получете от (17). За да получите последното, пресметнете производната $\frac{\partial u_y}{\partial l}$ (0,0) по направлението $l = (1,\alpha)$. Използвайте и уравнението (16).

Забележка. Ако не са изпълнени последните две от условията (18), получаваме обобщено решение (вж. § 12) на уравнението (16). То също е единствено (защо?).

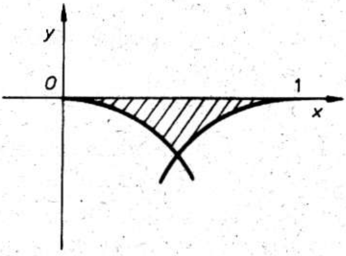
10.12. В поставените задачи на Гурса и Дарбу 1 – 6 намерете решение чрез метода на характеристиките. Докажете, че решението е единствено.

1. $u_{tt} = u_{xx}$, $t > 0$, $-t < x < t$; $u|_{t=x} = \varphi(x)$, $u|_{t=-x} = \psi(x)$, където $\varphi(0) = \psi(0)$. Къде е определено решението, ако началните данни са зададени не върху целите характеристики $x = t$ и $x = -t$, $t > 0$, а само върху техните части OA и $OB (O = (0,0))$?

Отг. $u(x,t) = \varphi\left(\frac{x+t}{2}\right) + \psi\left(\frac{x-t}{2}\right) - \varphi(0)$; решението съществува и е единствено в правоъгълника със страни OA, OB и частите от другите две характеристики през точки A и B (вж. черт. 10.1).



Черт. 10.1



Черт. 10.2

2. $u_{xy} + u_x = x$, $x > 0$, $y > 0$; $u|_{x=0} = y^2$, $u|_{y=0} = x^2$.

Отг. $u(x,y) = y^2 + \frac{1}{2}x^2(1 + e^{-y})$.

3. $u_{xy} + xu_x = 0$, $x > 0$, $y > 0$, $u|_{x=0} = 0$, $u|_{y=0} = x$.

Отг. $u(x,y) = \frac{1}{y}(1 - e^{-xy})$.

4. $2u_{xx} + u_{xy} - u_{yy} + u_x + u_y = 0$, $-\frac{1}{2}x < y < x$, $x > 0$; $u|_{y=x} = 1 + 3x$, $u|_{y=-x/2} = 1$.

Отг. $u(x,y) = 1 + (x + 2y)e^{\frac{1}{3}(y-x)}$.

5. $u_{xx} + yu_{yy} + \frac{1}{2}u_y = 0$, $-\frac{1}{4}x^2 < y < 0$, $x > 0$; $u|_{y=0} = 0$, $u|_{y=-x^2/4} = x^2$.

Отг. $u(x,y) = 2x\sqrt{-y}$.

6. $u_{xx} + yu_{yy} + \frac{1}{2}u_y = 0$, $y < 0$, $u = 4x^2$ при $y = -\frac{1}{4}x^2$, $0 \le x \le \frac{1}{2}$, $u = 1 + \cos \pi x$ при $y = -\left(\frac{1-x}{2}\right)^2$, $\frac{1}{2} \le x \le 1$. Къде решението съществува и е единствено?

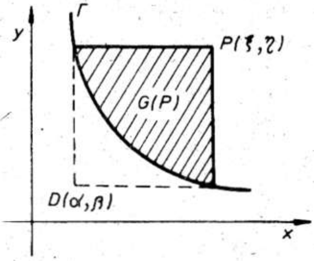
Отг. $u(x,y) = (x + 2\sqrt{-y})^2 + \cos\left[(x - 2\sqrt{-y} + 1)\frac{\pi}{2}\right]$. В криволинейния триъгълник между оста $y = 0$ и двете характеристики, върху които са зададени началните условия (черт. 10.2).

Функция на Риман

Разглеждаме уравнението

$$Lu \equiv u_{xy} + au_x + bu_y + cu = f, \tag{18}$$

където a, b, c и f са дадени непрекъснато диференцируеми функции на x и y. За уравнението (18) изследваме две задачи: задачата на Коши с данни върху Г и задачата на Гурса с данни върху характеристиките $x = \alpha$ и $y = \beta$ (вж. черт. 10.3). Риман е намерил явно интегрално представяне за решението на която и да е от тези задачи. То е аналогично на интегралното представяне с помощта на функцията на Грийн при елиптичните гранични задачи.



Черт. 10.3

10.13. Докажете, че за всеки две функции u, $v \in C^2$ е в сила тъждеството

$$(19)\quad vLu-uL^*v=(vu_x+buv)_y -(uv_y - auv)_x,$$

където L^* е формално спрегнатият оператор на L:

$$L^*v \equiv v_{xy}-(av)_x-(bv)_y+cv.$$

Да означим с $G(P)$ областта на зависимост (вж. [8], стр. 78) за точка $P(\xi,\eta)$. Тази област е заключена между кривата Γ и двете характеристики $x=\xi$ и $y=\eta$ (вж. черт. 10.3).

10.14. Докажете, че е в сила формулата

$$(20)\quad u(P)v(P)$$

$$= u(A)v(A)+\int\limits_{AP} u(v_x-bv)dx+\int\limits_{BP} u(v_y-av)dy$$

$$+\int\limits_{AB}[v(u_x+bu)dx+u(v_y-av)dy]+\int\limits_{G(P)}\int(fv-uL^*v)dxdy.$$

Упътване. Интегрирайте тъждеството (19) в областта $G(P)$ и приложете формулата на Гаус — Остроградски. Преработете получените изрази.

За да получим $u(P)=u(\xi,\eta)$, ще въведем *функцията на Риман* $R(x,y;\xi,\eta)$ със свойствата:

а) R като функция на x и y удовлетворява в областта $G(P)$ уравнението

$$(21)\quad L^*_{xy}R=0,\ (x,y)\in G(P);$$

б) R върху характеристиките AP и PB е съответно равна на

$$R(x,\eta;\xi,\eta)=\exp\left\{\int\limits_{\xi}^{x} b(\lambda,\eta)d\lambda\right\},\alpha\le x\le\xi, \tag{22}$$

$$R(\xi,y;\xi,\eta)=\exp\left\{\int\limits_{\eta}^{y} a(\xi,\lambda)d\lambda\right\},\beta\le y\le\eta, \tag{23}$$

Задача (21), (22), (23) е задача на Гурса и има решение (вж. [8], стр. 77). В някои частни случаи решението може да се намери в явен вид (вж. зад. 10.15 и 10.16).

10.15. Покажете, че $u(\xi,\eta)$ се представя чрез R по следния начин:

$$U(P)=\frac{1}{2}[u(A)R(A;P)+u(B)R(B;P)] \tag{24}$$

$$+\iint\limits_{G(\ P)} Rf dxdy+\int\limits_{AB}\{[Ru_x+(2bR-R_x)u]dx-[Ru_y+(2aR-R_y)u]dy\}.$$

Упътване. Изхождайки от представянето (20), интегрирайте подходящи изрази върху кривата Γ от A до B.

Забележка. Ако $u(\xi,\eta)$ е решение на задачата на Коши всички негови стойности, участващи в дясната страна на (24), са известни

10.16. С помощта на функцията на Риман решете по друг начин задачата на Коши 11.2:

$$u_{yy}-a^2u_{xx}=f(x,y),y>0;$$

$$u(x,0)=\varphi(x),u_y(x,0)=\psi(x).$$

Упътване. След смяната $x_1=x-ay$, $y_1=x+ay$ се получава уравнението $u_{x_1y_1}=f$, за което покажете, че $R\equiv 1$. Във формула (24) преработете получените изрази.

---

*Целта на равенства (22) и (23) е да се анулират интегралите върху AP и PB във формула (20).

10.17. Намерете функцията на Риман за телеграфното уравнение

$$u_{xy} + cu = 0, c = \text{const}.$$

Упътване. Напишете задача (21), (22) и (23) в този случай! Функцията на Риман търсете във вида $R(x, y; \xi, \eta) = f(z)$, където $z = (x - \xi)(y - \eta)$. Покажете, че f удовлетворява уравнението $zf'' + f' + cf = 0$, което след смяната $\lambda = \sqrt{4cz}$ преминава в уравнението на Бесел

$$\frac{d^2f}{d\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}\frac{df}{d\lambda} + f = 0.$$

Проверете, че търсената функция е

$$R(x, y; \xi, \eta) = J_0(\sqrt{4c(x - \xi)(y - \eta)}),$$

където $J_0(z)$ е беселевата функция от нулев ред:

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}.$$

По този повод вж. и Допълнението към глава IV.

10.18.* Използвайки зад. 10.17, решете задачата на Гурса:

$$u_{xy} = u, x > 0, y > 0;$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), x \geq 0; u(0, y) = \psi(y), y \geq 0,$$

с $\varphi \in C^2$, $\psi \in C^2$, $\varphi(0) = \psi(0)$ и получете решението във вида

$$u(x, y) = \int_0^x \varphi'(t) J_0(2i\sqrt{y(x - t)})dt \tag{25}$$

$$+ \int_0^y \psi'(t) J_0(2i\sqrt{x(y - t)})dt + \varphi(0)J_0(2i\sqrt{xy}).$$

Проверете, че това е решение.

Упътване. Използвайте формулата (20), като за AB вземете $AD \cup DB$ (вж. черт. 10.3).

Решение II. Формулата (25) може да се изведе и директно, като се реши задачата на Гурса с метода на последователните приближения. Равенството, от което се тръгва, е

$$\int_0^x\int_0^y u_{\xi\eta}(\xi,\eta)d\xi d\eta = \int_0^x\int_0^y u(\xi,\eta)d\xi d\eta,$$

т. е.

$$u(x,y) = \int_0^x\int_0^y u(\xi,\eta)d\xi d\eta + u(x,0) + u(0,y) - u(0,0).$$

Следователно рекурентната връзка ще бъде $u_0 \equiv 0$,

$$u_{n+1}(x,y) = \int_0^x\int_0^y u_n(\xi,\eta)d\xi d\eta + \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(0).$$

Забележка. Формула (25) дава общото решение на уравнението $u_{xy} = u$, изразено чрез произволните функции φ и ψ.

10.19. Решете следната задача на Гурса

$$u_{xy} = \lambda_1\lambda_2 u,\ x > 0, y > 0,$$

$$u(x,0) = e^{\lambda_1 x},\ x \geq 0;\ u(0,y) = e^{\lambda_2 y},\ y \geq 0,$$

където λ_1 и λ_2 константи.

Упътване. Решете задачата и по двата начина от зад. 10.18.

Отг. $u(x,y) = e^{\lambda_1 x + \lambda_2 y}$.

§ 11. Уравнение на струната. Смесена задача. Физическа интерпретация

Уравнението на струната

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0,\ a = \text{const} > 0,\ t > 0,$$

описва движението на трептяща хомогенна струна. При това е ясно, че поведението на струната в двата ѝ края за известно време няма да влияе на движението ѝ в достатъчно отдалечени от краищата точки. Ако се интересуваме от движението само в такива точки, достигаме до следната математическа абстракция: разглежда се безкрайната струна ($-\infty < x < +\infty$). Можем също да се абстрахираме от поведението на струната в единия ѝ край, а можем да разглеждаме и цялата струна. Математическото описание съответно е: полуограничена струна $x \geq 0$ и ограничена струна с дължина l. Във всеки от тези три случая се поставят подходящи задачи, произтичащи от физическата същност на явлението.

11.1. Намерете решение на задачата на Коши за безкрайната струна

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0,\ t > 0,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x);\ -\infty < x < \infty,$$

където $\varphi \in C^2(\mathbf{R}^1)$, $\psi \in C^1(\mathbf{R}^1)$.

Упътване. Вж. зад. 10.1. Решението се дава от формулата на Даламбер:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\lambda)d\lambda.$$

Интересно е да се види физическата интерпретация на формулата на Даламбер. В постановката на задачата функцията $\varphi(x)$ описва началното положение на точка x от струната, а $\psi(x)$ — началната скорост на същата точка. Нека например $\psi \equiv 0$, а φ е отлична от нула само в краен интервал. Функцията $\varphi(x - at)$ описва една вълна, която се движи надясно със скорост a, без да изменя големината си. Наистина, ако при $t = 0$ точка $x = x_0$ е имала положение $\varphi(x_0)$, същото положение при $t = t_0$ ще има точката $x_1 = x_0 + at_0$, понеже $\varphi(x_1 - at_0) = \varphi(x_0)$, т. е. за време t_0 вълната се е преместила на разстояние $x_1 - x_0 = at_0$. Аналогично функцията $\varphi(x + at)$ описва вълна, която се движи наляво със скорост a. Следователно, ако $\psi \equiv 0$, формулата на Даламбер описва решението като суперпозиция (наслагване) на две вълни, които се разпространяват със скорост a в противни посоки.

11.2. Докажете, че решението на задачата

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t),\ t > 0,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x),$$

където $\varphi \in C^2(\mathbf{R}^1)$, където $\psi \in C^1(\mathbf{R}^1)$; f, $f_x \in C(x \in \mathbf{R}^1, t \geq 0)$, се дава с формулата

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\lambda)d\lambda$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi\ d\tau.$$

Упътване. Вж. зад. 9.8, до която се достига след канонизиране на уравнението. Задача 11.2 може да се реши и така: Нека $(x,t) \in \{t > 0\}$. Върху характеристичния триъгълник с върхове точките (x,t), $(x-at,\ 0)$ и $(x+at,\ 0)$ интегрирайте тъждеството $u_{\tau\tau} - a^2 u_{\xi\xi} = f(\xi,\tau)$. Прилагайки формулата на Гаус — Остроградски, преработете по подходящ начин контурните интеграли. Вж. и зад. 10.16.

Смесена задача

Нека единият от краищата на струната се намира толкова далеч от разглежданата нейна част, че отражението на вълните от него не влияе на трептенията в тази част. Така достигаме до задачата за трептенето на полуограничена струна $0 < x < \infty$, където $x = 0$ съответства на "близкия" край на струната. Задачата, която се поставя, включва уравнението, началните условия и поведението на струната в точка $x = 0$ — гранично условие. Тази задача се нарича смесена задача (има и начални, и гранични условия).

11.3. За полуограничената струна $x \geq 0$ решете смесената задача

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ x > 0, t > 0,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), x \geq 0;\ u(0,t) = 0, t > 0.$$

Решение. Необходимите условия за гладкост на φ и ψ са $\varphi \in C^2[0,\infty)$ и $\psi \in C^2[0,\infty)$. От съпоставянето на началните и граничните условия следва

$$\varphi(0) = u(0,0) = 0, \psi(0) = u_t(0,0) = 0, \varphi''(0) = \frac{1}{a^2}u_{tt}(0,0) = 0,$$

като в последното равенство използвахме и уравнението. И така за съществуване на решение са необходими следните условия:

$$(26) \qquad \varphi \in C^2[0,\infty), \psi \in C^1[0,\infty), \varphi(0) = 0, \psi(0) = 0, \varphi''(0) = 0.$$

Ще докажем, че те са и достатъчни. Нека са изпълнени. Общото решение на уравнението на струната в областта $x > 0$, $t > 0$ има вида (зад. 9.6.3)

$$(27) \qquad u(x,t) = f(x + at) + g(x - at).$$

Тук функцията $f(x)$ трябва да се определи върху лъча $[0, \infty)$, а g — върху цялата права ($a > 0$). Началните условия определят f и g за положителни стойности на аргумента. Граничното условие дава $f(at) + g(-at) = 0$, $t > 0$. Оттук определяме за $z < 0$

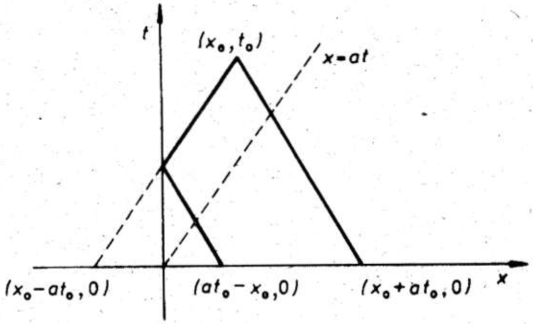
$$(28) \qquad g(z) = -f(-z) = -\frac{1}{2}\varphi(-z) - \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{-z} \psi(\lambda)d\lambda - C,$$

откъдето получаваме

$$(29) \qquad u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}[\varphi(x + at) + \varphi(x - at)] + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\lambda)d\lambda, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x - at \geq 0 \ , \\ \dfrac{1}{2}[\varphi(x + at) - \varphi(at - x)] + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{at-x}^{at+x} \psi(\lambda)d\lambda, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x - at < 0. \end{cases}$$

Проверете, че получената функция удовлетворява началните и граничните условия. Внимавайте за знака на аргумента $x - at$ в двата случая! Използвайки (26), докажете, че функцията $g(x)$ е двукратно гладка при $x = 0$ и оттук — че $u \in C^2$.

Да дадем физическо тълкуване на задача 11.3. Условието $u(0,t) = 0$ показва, че имаме полуограничена струна с неподвижен край $x = 0$. Нека за простота $\psi \equiv 0$. Да фиксираме една точка $x (x > 0)$. Какво е положението на струната в нея в момент t според формула (29)? До момента $t = x/a$ решението в тази точка се дава с формулата на Даламбер — наслагване на две вълни, една, движеща се наляво, и една — надясно. От момента $t = x/a$ картината се изменя. Вълната, която се движи наляво, запазва вида си, но вълната, движеща се надясно, е променила фазата си. Последната вълна се обяснява като отражение от края $x = 0$ на отиващата наляво вълна. От формула (29) се



Черт. 11.1

вижда, че картината в точка (x_0, t_0) при $t_0 > x_0/a$ е следната (черт. 11.1). В точка (x_0, t_0) попадат две вълни. Едната се описва с функцията $\varphi(x_0 + at_0)$. Тя излиза от точка $x_0 + at_0$ и движейки се наляво, в момента $t = t_0$, достига точката x_0. Другата вълна, описвана с $\varphi(at_0 - x_0)$, тръгва от точка $x = at_0 - x_0$, движи се наляво, отразява се в края $x = 0$ (при което сменя фазата си и става $-\varphi(at_0 - x_0)$), после се движи надясно и попада в точка x_0 в момента t_0. Решението в точка (x_0, t_0) се получава от наслагване на тези две вълни.

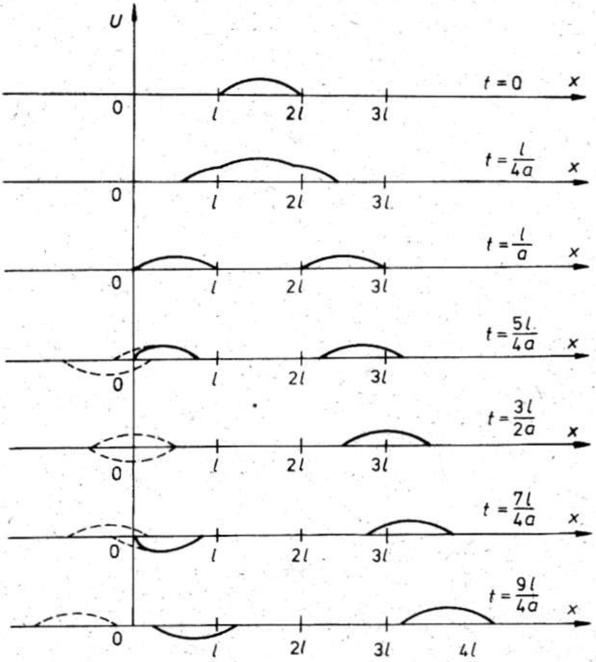
11.4. Полуограничена хомогенна струна $0 \leq x < \infty$ със закрепен край $x = 0$ е възбудена с начално отклонение

$$u(x,0) = \begin{cases} -\sin^3 \frac{\pi x}{l} & \text{при } x \in (l, 2l), \\ 0 & \text{при } x \notin (l, 2l). \end{cases}$$

Определете графически формата на струната в моментите време

$$t = \frac{l}{4a}, \frac{l}{a}, \frac{5l}{4a}, \frac{3l}{2a}, \frac{7l}{4a}, \frac{9l}{4a},$$

предполагайки, че движението започва с нулева начална скорост.



Черт. 11.2

Решение. По формулата (29) с $\psi \equiv 0$ и $\varphi(x) = u(x,0)$ построяваме черт. 11.2 в равнината (x, u).

11.5. Решете смесената задача

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0,\ x > 0, t > 0,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), x > 0;\ u_x(0,t) = 0, t > 0,$$

където $\varphi \in C^2[0,\infty)$, $\psi \in C^1[0,\infty)$. Намерете условията за съгласуване.

Отг. Условията за съгласуване са $\varphi'(0) = 0$, $\psi'(0) = 0$. Ако те са изпълнени, решението е

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\lambda)d\lambda, & x - at \geq 0, \\ \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(at-x)] + \frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{x+at} \psi(\lambda)d\lambda + \frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{at-x} \psi(\lambda)d\lambda, & x - at < 0. \end{cases}$$

11.6. Намерете решение на задачата

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ x > 0, t > 0,$$

$$u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0, x > 0;\ u(0,t) = \mu(t), t > 0,$$

където $\mu \in C^2[0,\infty)$, $\mu(0) = \mu'(0) = \mu''(0) = 0$.

Упътване. От общото решение се получава

$$u(x,t) = 0, x - at \geq 0;\ u(x,t) = \mu\left(t - \frac{x}{a}\right), x - at < 0.$$

В тази задача се описва движението на струна, единия край на която се движи по определен закон. Поражданите от това движение вълни се движат надясно по струната със скорост a. Точката $x = x_0$ ще бъде неподвижна до момента $t = x_0/a$, когато в нея за първи път ще достигне тази вълна.

11.7. Докажете, че задачата

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ x > 0, t > 0,$$

$$u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = 0, u_x|_{x=0} = \mu(t)$$

има единствено решение

$$u(x,t) = 0, x \geq at; \; u(x,t) = -a \int\limits_0^{t-\frac{x}{a}} \mu(\tau)d\tau, x < at,$$

ако $\mu \in C^1(t \geq 0)$, $\mu(0) = \mu'(0) = 0$.

Упътване. От общото решение (27) и от началните условия имаме $f(x) = C$, $g(x) = -C$ за $x > 0$, където $C = \text{const}$. Замествайки в граничното условие, получаваме

$$f'(at) + g'(-at) = \mu(t), t > 0,$$

т. е. $g'(z) = \mu(-z/a)$, $z < 0$, откъдето

$$g(z) = -a \int\limits_0^{-z/a} \mu(\tau)d\tau + C_1.$$

Тъй като $g(+0) = -C$, за да е непрекъсната функцията g в точката $x = 0$, е необходимо $C_1 = -C$. От условията за съгласуване получаваме $g \in C^2(\mathbf{R}^1)$, т.е. $u(x,t)$ е решение.

11.8. Решете задачата

$$u_{tt} = 4u_{xx}, \; x > 0, t > 0.$$

$$u(x,0) = x, u_t(x,0) = -2, x > 0; \; u_x(0,t) + tu(0,t) = 1, t > 0.$$

Решение. От общото решение (27) на уравнението с $a = 2$ и от началните условия при $x > 0$ получаваме $f(x) = C$, $g(x) = x - C$ $(C = \text{const})$. От граничното условие имаме $g'(z) - \frac{z}{2}g(z) = 1 + \frac{Cz}{2}$. Решавайки това линейно уравнение, за $z < 0$ получаваме

$$g(z) = -C + e^{z^2/4} \int\limits_0^z e^{-y^2/4} dy,$$

понеже $g(+0) = -C$. Веднага се проверява, че $g'(+0) = 1 = g'(-0)$, $g''(+0) = 0 = g''(-0)$, т. е. $g \in C^2(\mathbf{R}^1)$. Следователно решението на задачата е от $C^2(x \geq 0, \, t \geq 0)$ и има вида

$$u(x,t) = \begin{cases} x - 2t, & x - 2t \geq 0, \\ e^{\left(t - \frac{x}{2}\right)^2} \int\limits_0^{x-2t} e^{-\frac{y^2}{4}} dy, & x - 2t < 0. \end{cases}$$

В задачи 11.9 ÷ 11.17 докажете, че съществува единствено решение на поставените задачи, и го намерете.

11.9. $u_{tt} = u_{xx}$, $x > 0$, $t > 0$,
$u(x,0) = x^2$, $u_t(x,0) = x$, $x > 0$; $u(0,t) = t^2$, $t > 0$.

Отг. $u(x,t) = x^2 + xt + t^2$.

11.10. $u_{tt} = 4u_{xx} + 16t^2$, $x > 0$, $t > 0$,
$u(x,0) = \frac{1}{6}x^4$, $u_t(x,0) = 0$, $x > 0$; $u(0,t) = 4t^2$, $t > 0$.

Упътване. Общото решение на нехомогенното уравнение може да се намери по два начина. Общият път е да решим уравнението, след като го канонизираме. Другият начин е да намерим едно частно решение на нехомогенното уравнение. Тогава общото решение на нехомогенното уравнение е сума от това частно решение и от общото решение на хомогенното уравнение. Този начин е приложим, когато свободният член в уравнението има сравнително прост вид (например функция само на x или само на t). В случая едно частно решение е $u_0(x,t) = \frac{4}{3}t^4$.

Отг. $u(x,t) = \frac{4}{3}t^4 + 4t^2x^2 + \frac{1}{6}x^4$.

11.11. $u_{tt} = u_{xx} + 2$, $x > 0$, $t > 0$,
$u(x,0) = x + \cos x$, $u_t(x,0) = 1$, $x > 0$; $u_x(0,t) = 1$, $t > 0$.

Отг. $u(x,t) = x + t^2 + t + \cos x \cos t$.

11.12. $u_{tt} = u_{xx}$, $x > 0$, $t > 0$,
$u(x,0) = x$, $u_t(x,0) = 1$, $x > 0$, $u_x(0,t) = \cos t$, $t > 0$.

Отг. $u(x,t) = \begin{cases} x + t, & x \geq t, \\ 2t + \sin(x - t), & x < t. \end{cases}$

11.13. $u_{tt} = 3u_{xx} + 2(1 - 6t^2)e^{-2x}$, $x > 0$, $t > 0$,
$u(x,0) = 1$, $u_t(x,0) = x$, $x > 0$; $u_x(0,t) + 2u(0,t) = 2 + t$, $t > 0$.

Отг. $u(x,t) = 1 + xt + t^2e^{-2x}$.

11.14. $u_{tt} = u_{xx}$, $x > 0$, $t > 0$,
$u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$, $x > 0$; $u_x(0,t) + u(0,t) = 1 - \cos t$, $t > 0$.

Отг. $u(x,t) = \begin{cases} 0, & x \geq t, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{t-x} - \frac{1}{2}[\sin(x - t) + \cos(x - t)], & x < t. \end{cases}$

11.15. $u_{tt} = u_{xx} + 4$, $x > 0$, $t > 0$,
$u(x,0) = 2 - 2x$, $u_t(x,0) = 0$; $x > 0$, $u_x(0,t) + u(0,t) = \frac{3}{2}t^2$, $t > 0$.

Отг. $u(x,t) = \begin{cases} 2t^2 + 2 - 2x, & x \geq t, \\ 2t^2 + 1 - x - t - \frac{1}{2}(x-t)^2 + e^{t-x}, & x < t. \end{cases}$

11.16. $u_{tt} = u_{xx} - 6,\ x > 0,\ t > 0,$
$u(x,0) = x^2,\ u_t(x,0) = 0,\ x > 0;\ 2u_x(0,t) + u_t(0,t)$
$= -4t,\ t > 0.$

Отг. $u(x,t) = x^2 - 2t^2.$

11.17. $u_{tt} = 4u_{xx} + 2,\ x > 0,\ t > 0,$
$u(x,0) = 2 - x,\ u_t(x,0) = 2,\ x > 0;\ u_t(0,t) + u_x(0,t) = 3t$
$+e^{-t},\ t > 0.$

Отг. $u(x,t) = \begin{cases} 2 + 2t - x + t^2, & x \geq 2t, \\ 4 + \frac{x^2}{4} - xt + 2t^2 - 2e^{\frac{x}{2}-t}, & x < 2t. \end{cases}$

Сега ще разгледаме друг начин за решаване на смесената задача в областта $\{x > 0,\ t > 0\}$. След това ще изучим по аналогичен начин смесената задача за ограничена струна.

11.18. Нека $u(x,t)$ е решение на задачата на Коши

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ t > 0,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), -\infty < x < \infty,$$

където $\varphi \in C^2(\mathbf{R}^1)$, $\psi \in C^1(\mathbf{R}^1)$. Докажете:

а. Ако началните условия са нечетни функции спрямо $x = x_0$, т. е. $\varphi(x_0 + x) = -\varphi(x_0 - x)$, $\psi(x_0 + x) = -\psi(x_0 - x)$ за всяко x, тогава $u(x_0, t) = 0$ за $t \geq 0$.

б. Ако началните условия са четни функции спрямо $x = x_0$, т. е. $\varphi(x_0 + x) = \varphi(x_0 - x)$, $\psi(x_0 + x) = \psi(x_0 - x)$ за всяко x, тогава $u_x(x_0, t) = 0$ за $t \geq 0$.

Упътване. Запишете решението с формулата на Даламбер и пресметнете $u(x_0,t)$ в единия случай и $u_x(x_0,t)$ в другия.

11.19. Нека $f \in C^1[0,\infty)$. Дайте геометрично тълкуване и докажете, че са верни следните твърдения за нечетното и четното продължение на функцията f:

а. $f(0) = 0$ е необходимо и достатъчно условие за $F \in C^1(\mathbf{R}^1)$, където $F(x) = f(x)$ за $x \geq 0$ и $F(x) = -f(-x)$ за $x < 0$.

б. $f'(0) = 0$ е необходимо и достатъчно условие за $F_1 \in C^1(\mathbf{R}^1)$, където $F_1(x) = f(x)$ за $x \geq 0$ и $F_1(x) = f(-x)$ за $x < 0$.

11.20. Нека $f \in C^2[0, \infty)$. За функциите F и F_1, дефинирани в зад. 11.19, докажете:

а. $f(0) = 0$, $f''(0) = 0$ са необходими и достатъчни условия за $F \in C^2(\mathbf{R}^1)$.

б. $f'(0) = 0$ е необходимо и достатъчно условие за $F_1 \in C^2(\mathbf{R}^1)$.

11.21. Намерете решение на задачата

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \ x > 0, t > 0,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), x > 0; \ u(0,t) = 0, t > 0,$$

където $\varphi \in C^2[0, \infty)$, $\psi \in C^1[0, \infty)$, $\varphi(0) = \varphi''(0) = \psi(0) = 0$.

Упътване. Ако продължим функциите φ и ψ нечетно през точката $x = 0$ до функции $\widetilde{\varphi}$ и $\widetilde{\psi}$, от зад. 11.19 и 11.20 имаме $\widetilde{\varphi} \in C^2(\mathbf{R}^1)$, $\widetilde{\psi} \in C^1(\mathbf{R}^1)$. Решавайки по формулата ма Даламбер задачата на Коши с данни върху цялата права $\widetilde{\varphi}$ и $\widetilde{\psi}$, получаваме решението $\widetilde{u}$. Според задачата 11.18 имаме $\widetilde{u}(0,t) = 0$ за всяко $t > 0$. Тогава рестрикцията $u(x,t)$ на функцията $\widetilde{u}$ в областта $\{x \geq 0, \ t \geq 0\}$ ще бъде решение на задачата.

11.22. Намерете решение на уравнението

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \ x > 0, t > 0,$$

удовлетворяващо условията

$$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), x > 0; \ u(0,t) = \mu(t), t > 0,$$

където φ, $\mu \in C^2[0, \infty)$, $\psi \in C^1[0, \infty)$.

$$\mu(0) = \varphi(0), \mu'(0) = \psi(0), \mu''(0) = a^2 \varphi''(0).$$

Решение. Искаме да решим задачата, като използваме зад. 11.6 и 11.21. Обаче, ако разбием веднага на две задачи, нито една от тях няма да е съгласувана, понеже φ и ψ са съгласувани с μ, а не с нулата. Затова разглеждаме функцията

$$u_1(x,t) = u(x,t) - \varphi(0) - \frac{1}{2}\varphi''(0)x^2 - \psi(0)t - \frac{1}{2}\mu''(0)t^2, \tag{30}$$

която удовлетворява същото уравнение и условията

$$u_1(x,0) = \varphi(x) - \varphi(0) - \frac{1}{2}\varphi''(0)x^2 = \varphi_1(x),\ x > 0,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}(x,0) = \psi(x) - \psi(0) = \psi_1(x),\ x > 0, \tag{31}$$

$$u_1(0,t) = \mu(t) - \mu(0) - \frac{1}{2}\mu''(0)t^2 = \mu_1(t),\ t > 0.$$

Ако намерим решение u_1 на тази задача, по формула (30) намираме решението $u(x,t)$ и на първоначалната задача. Функцията u_1 ще търсим във вида $u_1 = v + w$, където

$$\left|\begin{array}{l} v_{tt} = a^2 v_{xx},\ x > 0, t > 0, \\ v(x,0) = \varphi_1(x), v_t(x,0) = \psi_1(x), x > 0, \\ v(0,t) = 0,\ t > 0, \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} w_{tt} = a^2 w_{xx},\ x > 0, t > 0, \\ w(x,0) = 0, w_t(x,0) = 0, x > 0, \\ w(0,t) = \mu_1(t),\ t > 0. \end{array}\right.$$

Ако v и w са решения на тези две задачи, то u_1 ще е решение на задача (31) (проверете!), понеже уравнението, началните и граничните условия са линейни. Обаче задачите за v и w са разрешими според зад. 11.6 и 11.21, понеже са съгласувани (проверете!). Следователно задача (31), а с нея и първоначалната са разрешими.

По аналогичен начин, използвайки четно продължение на началните условия, решете зад. 11.5. Способът на решение на задачи 11.21 и 11.22 ни дава само теорема за съществуване. Затова, работейки по този начин, отделно трябва да докажем теорема за единственост.

11.23. Нека $D = \{(x,t) : x > 0,\ t > 0\}$. Разглеждаме задачата

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \text{ в } D,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x),\ x > 0,$$

$$\beta u_x(0,t) + \alpha(t)u(0,t) = \mu(t),\ t > 0,$$

където, ако $\beta = 0$, функцията $\alpha(t)$ е отлична от нула за всяко t. Докажете, че тази задача има не повече от едно решение $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$.

Решение. Да допуснем, че тази задача има две решения u_1 и u_2. Тогава функцията $v = u_1 - u_2$ е решение на хомогенната задача:

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} \text{ в } D, \tag{32}$$

$$v(x,0) = 0, v_t(x,0) = 0,\ x > 0, \tag{33}$$

$$\beta v_x(0,t) + \alpha(t)v(0,t) = 0,\ t > 0. \tag{34}$$

Отначало ще отбележим, че върху характеристиките от вида $x + at = C_1 = \text{const}$ имаме $av_x + v_t = \text{const}(C_1)$, а върху тези от вида $x - at = C_2 = \text{const}$ имаме $av_x - v_t = \text{const}(C_2)$. Това следва веднага от вида (27) на общото решение на (32). Твърдим, че $v(0,t) = 0$ за $t \geq 0$. Ако $\beta = 0$, това е така по условие. Нека $\beta \neq 0$ и $t_0 > 0$. Върху отсечката L от правата $x + at = at_0$, като вземем предвид (33), получаваме

$$(av_x + v_t)|_L = (av_x + v_t)|_{L\cap\{t=0\}} = 0.$$

Следователно оттук и от (34) следва

$$\beta v_t(0,t_0) - a\alpha(t)v(0,t_0) = 0,\ t_0 > 0.$$

Понеже $v(0,0) = 0$, теоремата за единственост за обикновени диференциални уравнения ни дава $v(0,t) = 0$. Оттук получаваме $v_t(0,t) = 0$ и $v_x(0,t) = 0$. Нека $(x,t) \in D$ е произволна точка. Прекарваме през нея двете характеристики до пресичането им с границата на D. Върху едната от тях $av_x + v_t = 0$, а върху другата $av_x - v_t = 0$ (защо?), така че $v_x(x,t) = 0$, $v_t(x,t) = 0$. Следователно v е константа в D и понеже $v(x,0) = 0$, следва $v \equiv 0$ в D.

11.24. Нека $G = \{0 < x < l,\ t > 0\}$. Докажете, че задачата

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \text{ в } G,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x),\ 0 < x < l,$$

$$\beta_1 u_x(0,t) + \alpha_1(t)u(0,t) = \mu_1(t),\ t > 0,$$

$$\beta_2 u_x(l,t)+\alpha_2(t)u(l,t)=\mu_2(t),\ t>0,$$

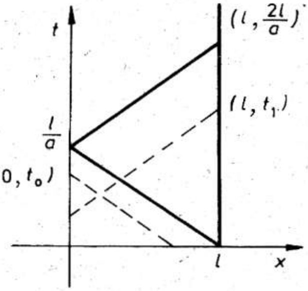
където $\beta_i^2+\alpha_i^2(t)\neq 0$ за всяко $t\geq 0$ $(i=1,2)$, има не повече от едно решение $u\in C^2(G)\cap C^1(\overline{G})$.

Упътване. Въведете, както в задача 11.23, функцията v, за която е достатъчно да докажете, че $v=v_x=v_t=0$ върху границата на G. Ако през точка $(0,t_0)$ с $at_0\leq l$ прекарате (черт. 11.3) характеристиката $x+at=at_0$, тя ще пресече оста $t=0$ в точка от $[0,l)$, в която знаем, че $v=v_x=v_t=0$. Както горе, докажете, че

$$v(0,t_0)=v_x(0,t_0)=v_t(0,t_0)=0,$$

$$0\leq t_0\leq l/a.$$

За точките от вида (l,t_1), $0\leq at_1\leq 2l$ характеристиката $x-at=l-at_1$ ще пресече или $\{0\leq x\leq l,\ t=0\}$, или $\{x=0,\ 0\leq t\leq l/a\}$, така че и за тези точки имаме $v=v_x=v_t=0$. Отново се връщаме към $x=0$, разглеждайки вече точките от вида $(0,t)$ за $0\leq at\leq 3l$, и разсъждаваме аналогично. По индукция получаваме $v=v_x=v_t=0$ върху ∂G и оттук $v\equiv 0$, както в зад. 11.23.



Черт. 11.3

11.25. Решете задачата

$$u_{tt}=a^2u_{xx},\ 0<x<l, t>0,$$

$$u(x,0)=\varphi(x), u_t(x,0)=\psi(x),\ 0<x<l,$$

$$u(0,t)=0, u(l,t)=0,\ t>0,$$

където $\varphi\in C^2[0,l]$, $\psi\in C^1[0,l]$, $\varphi(0)=\varphi''(0)=\varphi(l)=\varphi''(l)=0$, $\psi(0)=\psi(l)=0$.

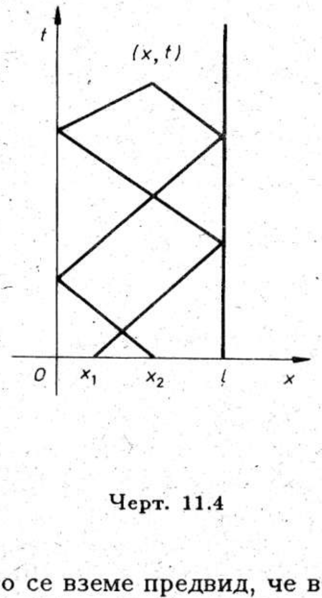
Упътване. Продължете нечетно φ и ψ в интервала $[-l,0]$ и после периодично с период $2l$ върху цялата права. Докажете, че така получените функции са съответно от $C^2(\mathbf{R}^1)$ и $C^1(\mathbf{R}^1)$. Приложете формулата на Даламбер. Използвайте и зад. 11.18.

Забележка. Условията за функциите φ и ψ са необходими, за да има задачата решение от $C^2(0 \leq x \leq l,\ t \geq 0)$.

Физическата интерпретация на зад. 11.25 е следната. Имаме струна с дължина l, със закрепени неподвижно краища $x = 0$ и $x = l$. В началния момент време $t = 0$ струната е с форма $u = \varphi(x)$ и началната скорост на точка x от нея е $\psi(x)$. Как ще трепти струната по-нататък? Отговорът се дава от зад. 11.25. Нека $\psi \equiv 0$. Тогава в точка $(x,t) \in G$ решението ще бъде

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[(-1)^m \varphi(x_1) + (-1)^n \varphi(x_2)].$$

Физическият смисъл на тази формула е следният. В началния момент $t = 0$ тръгват две вълни, породени от началното отклонение $\varphi(x)$. Едната се движи наляво, другата надясно. Вълната, която върви наляво, достига края $x = 0$, който е закрепен неподвижно и се отразява от него. При това тя сменя фазата си (математически нечетното продължение) и тръгва надясно. Достигайки края $x = l$, отново се отразява, сменяйки фазата си, и тръгва наляво. Аналогично е поведението на другата вълна. Тогава, за да знаем какво е положението на тази точка x от струната в момента t, трябва да видим от кои точки x_1 и x_2 са тръгнали двете вълни, които след многократно отразяване достигат в точка x точно в момента t. Това се определя, като се вземе предвид, че вълните се движат със скорост a, т.е. като прекараме през точка (x,t) характеристиките $x - at = \text{const}$ и $x + at = \text{const}$ и вземем и техните отражения (черт. 11.4; тук $m = 2$ и $n = 3$).



Черт. 11.4

11.26. Решете задачата

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l, t > 0,$$

$$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ 0 < x < l,$$

$$u(0,t) = \mu(t),\ u(l,t) = 0,\ t > 0,$$

където $\mu \in C^2[0,\infty)$, $\mu(0) = \mu'(0) = \mu''(0) = 0$.

Решение. Когато областта е $x > 0$, $t > 0$, в зад. 11.6 видяхме, че решението е $\overline{\mu}\left(t - \frac{x}{a}\right)$, където функцията $\overline{\mu} \in C^2(\mathbf{R}^1)$ е

$$\overline{\mu}(t) = \mu(t),\ t \geq 0;\ \overline{\mu}(t) = 0,\ t < 0.$$

Проверете, че функцията $\overline{\mu}\left(t - \frac{x}{a}\right)$ удовлетворява уравнението, началните условия и граничното условие при $x = 0$! Прибавяме още една вълна, за да удовлетворим граничното условие и при $x = l$:

$$u_1(x,t) = \overline{\mu}\left(t - \frac{x}{a}\right) + f_1(x + at),$$

където $0 = u_1(l,t) = \overline{\mu}\left(t - \frac{l}{a}\right) + f_1(l + at)$. Определяме f. Функцията

$$u_1(x,t) = \overline{\mu}\left(t - \frac{x}{a}\right) - \overline{\mu}\left(t + \frac{x}{a} - \frac{2l}{a}\right)$$

удовлетворява началните условия и граничното условие при $x = l$ (ние така я търсихме). Обаче тя не удовлетворява граничното условие при $x = 0$ за $t > 2l/a$. Затова прибавяме нова вълна — движеща се надясно, и тъй нататък, докато получим решението във вида

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\mu}\left(t - \frac{x}{a} - \frac{2nl}{a}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}\left(t + \frac{x}{a} - \frac{2nl}{a}\right).$$

При фиксирано t във всеки един от тези два реда само краен брой членове са отлични от нула, понеже $\overline{\mu}(t) = 0$, $t < 0$; $at \pm x - 2nl \to -\infty$ при $n \to \infty$. Проверете, че $u(x,t)$ е решение на задачата.

Физическият смисъл на решението е ясен. Търсейки вълна от вида $f_1(x + at)$, ние намираме отразената на $\overline{\mu}\left(t - \frac{x}{a}\right)$ вълна от закрепения край $x = l$ на струната.

11.27. Решете задачата

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l, t > 0,$$

$$u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0,\ 0 < x < l,$$

$$u(0,t) = 0, u(l,t) = \mu(t),\ t > 0,$$

ако $\mu \in C^2[0,\infty)$, $\mu(0) = \mu'(0) = \mu''(0) = 0$.

Упътване. Започнете с вълна от вида $g(x + at)$ (защо?). Решението е

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\mu}\left(t + \frac{x}{a} - \frac{(2n+1)l}{a}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}\left(t - \frac{x}{a} - \frac{(2n+1)l}{a}\right).$$

11.28. Решете задачата

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l, t > 0,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x),\ 0 < x < l,$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), u(l,t) = \mu_2(t),\ t > 0,$$

където $\varphi \in C^2[0,l]$, $\psi \in C^1[0,l]$; μ_1, $\mu_2 \in C^2[0,\infty)$,

$$\mu_1(0) = \varphi(0), \mu_1'(0) = \psi(0), \mu_1''(0) = a^2\varphi''(0),$$

$$\mu_2(0) = \varphi(l), \mu_2'(0) = \psi(l); \mu_2''(0) = a^2\varphi''(l).$$

Упътване. Вижте зад. 11.22. Въведете помощна функция $u_1(x,t)$, като извадите от $u(x,t)$ подходящ полином. Използвайте и зад. 11.25 – 11.27.

11.29. Решете задачата

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l, t > 0,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x),\ 0 < x < l,$$

$$u_x(0,t) = 0, u_x(l,t) = 0,\ t > 0,$$

като намерите условията за съгласуване, необходими и достатъчни, за да има решение $u \in C^2(0 \leq x \leq l,\ t \geq 0)$.

Упътване. Използвайте четно продължение на функциите φ и ψ в интервала $[-l, 0]$ и после периодично с период $2l$ върху цялата права.

11.30. Решете задачата

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l, t > 0,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), u_x(0,t) = 0, u(l,t) = 0.$$

Упътване. Направете четно продължение на φ и ψ през $x = 0$ в интервала $[-l, 0]$, след това нечетно продължение през $x = l$ в интервала $[l, 3l]$. След периодично продължение с период $4l$ на получените функции, използвайте формулата на Даламбер.

Забележка. Всичките продължения, описани по-горе, се извършват автоматично, когато се използва методът на Фурие (вж. гл. IV). При него ние развиваме функциите φ и ψ в интервала $[0, l]$ в ред на Фурие по функции, които са дефинирани върху цялата права (напр. по $\left\{\sin\frac{n\pi x}{l}\right\}$). Именно редът на Фурие дава това продължение на φ и ψ. При това, развивайки например по $\left\{\sin\frac{n\pi x}{l}\right\}$, получаваме нечетно продължение през $x = 0$ и $x = l$.

11.31. Краищата $x = 0$ и $x = 1$ на струната са закрепени неподвижно, началното положение е зададено с

$$u(x,0) = A\sin\pi x \text{ при } 0 \leq x \leq 1,$$

началната скорост е нула. Намерете какво е отклонението на струната при $t > 0$.

Упътване. Математическото описание е:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < 1, t > 0,$$

$$u(x,0) = A\sin\pi x, u_t(x,0) = 0,\ 0 < x < 1,$$

$$u(0,t) = 0, u(1,t) = 0,\ t > 0.$$

Отг. $u(x,t) = A\sin\pi x\cos\pi at$.

11.32. Намерете решение на системата уравнения

$$\theta_x = -b(\theta - T),\ T_y = a(\theta - T)\ (a, b - \quad \text{const}),$$

удовлетворяващо условията: $\theta|_{x=0} = 0$, $T|_{y=0} = 1$.

Решение. При $a \neq 0$, $b \neq 0$ определяме θ от второто уравнение, заместваме в първото и получаваме

$$\begin{gathered} T_{xy} + aT_x + bT_y = 0,\ T|_{y=0} = 1, \\ (T_y + aT)|_{x=0} = 0. \end{gathered} \tag{35}$$

Върху $x = 0$ решаваме (35) и от $T(0,0) = 1$ получаваме $T(0,y) = e^{-ay}$. Полагайки $T(x,y) = e^{-ay-bx}u(x,y)$, $\xi = ax$, $\eta = by$, свеждаме до задача 10.17:

$$u_{\xi\eta} = u, u|_{\xi=0} = 1, u|_{\eta=0} = e^{\frac{b}{a}\xi}.$$

Намирайки T, определяме и θ. При $a = 0$ второто уравнение и началното условие за T дават $T = 1$, след което решаваме първото уравнение.

§ 12. Обобщено решение. Особености

Да разгледаме отново нехомогенното уравнение на струната

$$L \equiv u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t) \tag{1}$$

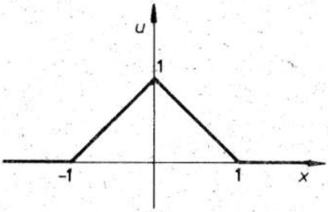
при начални условия

$$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), -\infty < x < \infty. \tag{2}$$

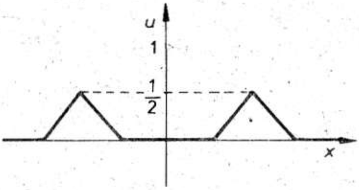
При $f = 0$ и $\psi = 0$ решението е

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)]. \tag{3}$$

Функцията (3) е решение на задача (1), (2) само ако функцията φ има непрекъсната втора производна. Нека сега графиката на $\varphi(x)$ е надебелената начупена линия на черт. 12.1. Тази функция в трите точки $x = 0$, $x = +1$ и $x = -1$ няма дори първа производна. Въпреки това задачата за трептенето на струна с такава начална форма е съвсем смислена. Формата на струната $u(x,t)$ след известно време t е показана на черт. 12.2. Ясно е, че функцията (3) няма дори първи производни в точките (x,t), където $x \pm at = 0$, ± 1.



Черт. 12.1



Черт. 12.2

За да достигнем до пълна яснота, е необходимо да въведем обобщение на понятието решение на уравнението (1). Има различни обобщения. Тук ще се спрем на следното. Трептенето на струната $u(x,t)$ се описва (вж. [19], стр. 25) с интегралното уравнение на трептенията

$$\int_{x_1}^{x_2} [u_t(\xi,t_2) - u_t(\xi,t_1)]d\xi = \int_{t_1}^{t_2} a^2[u_x(x_2,\tau) - u_x(x_1,\tau)]d\tau \tag{4}$$

$$+\int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} f(\xi,\tau)d\xi\ d\tau.$$

Именно от това уравнение, предполагайки, че функцията $u(x,t)$ има втори производни, се извежда диференциалното уравнение (1) на струната. По такъв начин, преминавайки от интегралното уравнение (4) към диференциалното (1), ние изключваме процесите на трептене, които не са двукратно гладки. Ще се условим непрекъснатите функции с частично непрекъснати първи производни да наричаме *частично гладки.* В класа на частично гладките функции уравнението (4) е еквивалентно (вж. [19], стр. 74 – 75) с уравнението

$$\int_\Gamma \left[\frac{\partial u}{\partial t}dx + a^2\frac{\partial u}{\partial x}dt\right] = \int_G\int f dx dt, \tag{5}$$

където G е ограничена област в равнината (x,t) с частично гладка граница Г. Кривата Г се описва в положителна относно G посока (при обхождане на Г областта G да остава отляво). Уравнението (4) е частен случай от (5), когато G е правоъгълник. От своя страна уравнението (5) се получава от (4) чрез апроксимиране на частично гладкия контур Г с криви, съставени само от хоризонтални и вертикални отсечки. Частично гладката функция $u(x,t)$ се нарича *обобщено решение* на уравнението (1) в областта D, ако уравнението (5) е удовлетворено за произволна подобласт G на D с частично гладък контур Г.

12.1. Докажете, че функцията

$$u(x,t) = g(x+at) + h(x-at) + \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi\ d\tau \tag{6}$$

е обобщено решение на уравнението на струната (1), ако функциите g и h са частично гладки, а f е частично непрекъсната.

Упътване. Проверете, че $u(x,t)$ е решение на (4).

12.2. В полуравнината $t > 0$ намерете обобщено решение на уравнението (1), което удолетворява началните условия (2). Функцията φ е частично гладка, а ψ и f са частично непрекъснати.

Упътване. Приложете (5) за триъгълника $G = ABM$ с върхове $M(x,t)$, $A(x-at,0)$ и $B(x+at,0)$. Преработете интегралите върху Г, като използвате, че върху BM имаме $dx = adt$, така че

$$\frac{\partial u}{\partial t}dx + a^2\frac{\partial u}{\partial x}dt = a\left(\frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}dx\right) = a\ du,$$

а върху MA имаме $dx = -adt$. Окончателно

$$(7) \qquad u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\lambda)d\lambda$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi\ d\tau,$$

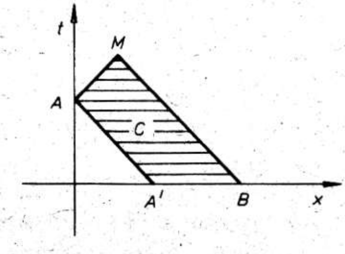
т. е. получава се единствено обобщено решение (вж. зад. 12.1).

12.3. В областта $\{x > 0,\ t > 0\}$ намерете обобщено решение на уравнението (1), което удовлетворява условията

$$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x),\ x > 0;\ u(0,t) = \mu(t), t > 0,$$

където φ и μ са частично гладки, а ψ и f — частично непрекъснати, като $\varphi(0) = \mu(0)$ (срв. със зад. 11.22).

Упътване. За $x \geq at$ вж. (7). За $x < at$ приложете (5) за четириъгълника $G = MAA'B$, в който $M = M(x,t)$, а MA, MB и AA' са отсечки от характеристиките (черт. 12.3).



Черт. 12.3

Отговор за $x < at$:

$$u(x,t) = \mu\left(t - \frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2}[\varphi(x+at)$$

$$-\varphi(at-x)] + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi + \frac{1}{2a}\int\limits_0^t\int\limits_{|x-a(t-\tau)|}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\eta)d\xi\ d\tau.$$

По-горе дадохме едно от възможните определения на обобщено решение за уравнението (1). Ние се спряхме на него по две причини. От една страна, точно до него се достига при извода на закона за трептенията. От друга страна, от него леко се получават решения на задачи 12.1, 12.2 и 12.3, които (според нас) добре илюстрират понятието обобщено решение. Ще отбележим обаче, че това определение не е много удобно за изграждане на математическата теория. По-често използвани са следните "обобщени решения":

1. Функцията $u \in L_2(G)$ наричаме "*слабо решение*" на уравнението (1) в областта G, ако за всяка функция $\varphi \in C_0^\infty(G)$ е изпълнено

$$(8) \qquad \iint\limits_G u(x,t)L^*v(x,t)dx\ dt = \iint\limits_G f(x,t)v(x,t)dx\ dt,$$

където $L^* = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ е формално спрегнатият оператор на L. Ясно е, че "слабото решение" $u(x,t)$ е решение на (1) в смисъл на теория на разпределенията.

2. Казваме, че функцията $u \in L_2(G)$ е "*силно решение*" на (1) в G, ако съществува редица от функции $u_n \in C^2(\overline{G})$, такива, че ако означим $Lu_n = f_n(x,t)$, ще имаме

$$\|u_n - u\|_{L_2(G)} \to 0, \|f_n - f\|_{L_2(G)} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

12.4. Докажете, че всяко "силно решение" е и "слабо решение".

Упътване. Използвайте, че (8) е изпълнено за u_n и f_n.

12.5. Докажете, че обобщеното решение $u(x,t)$ от формула (6) е "силно решение" на (1) във всяка ограничена област $G \subset \{t > 0\}$.

Упътване. Апроксимирайте $g(x)$, $h(x)$ и $f(x,t)$ в L_2 с функции от C^2 (вж. зад. 1.29). Разгледайте съответните функции $u_n(x,t)$.

12.6.* Докажете, че функцията $u(x,t)$ от формула (6) с $f = 0$ е прекъснато "слабо решение" на (1) в областта $t > 0$, ако $g \in C^2(-\infty,0)$; g, $h \in C^2(0,\infty)$ и функцията $g(x)$ има прекъсване от първи род при $x = 0$: $\lim\limits_{x\to+0} g(x) \neq \lim\limits_{x\to-0} g(x)$. Докажете, че тази функция е "силно решение" във всяка ограничена област $G \subset \{t > 0\}$.

Упътване. За функцията g интегралът в лявата страна на (8) запишете във вида

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\iint\limits_{\substack{x+at>\varepsilon\\ t>0}} g(x+at)L^*v\,dxdt+\iint\limits_{\substack{x+at<-\varepsilon\\ t>0}} g(x+at)L^*v\,dxdt\right].$$

За всяко $\varepsilon > 0$ докажете, че двата интеграла са равни на нула. За целта прехвърлете производните върху функцията g и покажете, че линейните интеграли са равни на нула.

Да разгледаме обобщеното ртешение (3) на уравнението (1). Естествен е следният въпрос: ако първите или вторите производни на φ се прекъсват в точка x_0, къде ще се прекъсват производните на $u(x,t)$? Формула (3) дава веднага отговор: тези прекъсвания (особености) ще се разпространяват по характеристиките на (1) през точка $(x_0, 0)$.

12.7.* Нека $D = \{0 < x < l,\ t > 0\}$ и D_1 се получава, като от D се изключват характеристиките, излизащи от точки $(0,0)$ и $(l,0)$, и техните отражения от $x = 0$ и $x = l$ (черт. 12.4). Докажете, че следната задача има не повече от едно решение от $C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_1)$:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \text{ в } D_1,$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x),$$

$$0 < x < l,$$

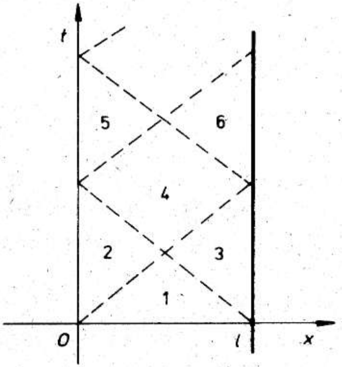
$$\alpha_1 u_x(0,t) + \beta_1 u(0,t)$$

$$= \mu_1(t), t > 0,$$

$$\alpha_2 u_x(l,t) + \beta_2 u(l,t)$$

$$= \mu_2(t), t > 0,$$

където $\alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0$, $\alpha_2^2 + \beta_2^2 \neq 0$.



Черт. 12.4

Упътване. Ако u_1 и u_2 са две решения, означете $v = u_1 - u_2$. Тогава във всяка една от означените на черт. 12.4 области

1,2,3,4 и т.н. функцията v ще има вида $v(x,t) = f_i(x+at)+g_i(x-at)$, където f_i, $g_i \in C^2$. Понеже $v \in C^1(\overline{D})$, оттук следва $av_x + v_t = \text{const}$ върху $\{x + at = c_1\} \cap \overline{D}$; $av_x - v_t = \text{const}$, върху $\{x - at = c_2\} \cap \overline{D}$. По-нататък вж. зад. 11.23 и 11.24.

Забележка. Подобна ситуация възниква, когато функциите φ, ψ, μ_1 и μ_2 са гладки, но не се съгласуват достатъчно добре в точките $(0,0)$ и $(l,0)$ (вж. зад. 13.4 и 13.5). В същност такава функция u ще бъде обобщено решение на уравнението (1) в областта D. Аналогично се разглежда тази задача и когато функцията φ' е само частично гладка в $(0,l)$. Тогава прекъсванията на вторите производни на $u(x,t)$ ще тръгнат и от вътрешни точки на $(0,l)$ по съответните характеристики (вж. зад. 13.5). Решението и в този случай е единствено.

Аналогично на извода на уравнението за малки напречни трептения на струната може да се изведе уравнение, което описва надлъжните трептения на еластичен прът и пружина (вж. [19], стр. 27). За функцията $u(x,t)$, която описва изместването на точката x в момента време t, се получава уравнението

$$(E(x)u_x)_x = \rho(x)u_{tt} - F(x,t),$$

където $E(x)$ е модулът на Юнг в точка x, а $\rho(x)$ — плътността. И сега обобщеното решение (при негладки данни) удовлетворява интегралното уравнение (4).

12.8. Неограничен еластичен прът е получен от съединяване в точката $x = 0$ на два пръта с характеристики съответно: E_1, ρ_1 и $a_1 = \sqrt{\frac{E_1}{\rho_1}}$ при $x < 0$ и E_2, ρ_2 и $a_2 = \sqrt{\frac{E_2}{\rho_2}}$ при $x > 0$. Нека от областта $x < 0$ се движи вълна $u(x,t) = f\left(t - \frac{x}{a_1}\right)$, $t \leq 0$, където функцията $f(\xi)$ е известна. Намерете отразената и пречупената вълна при преминаване през точката $x = 0$ за време $t > 0$. Определете при какви условия няма отразена вълна.

Упътване. Задачата води до решаване на уравненията

$$u_{1tt} = a_1^2 u_{1xx}, x < 0;\ u_{2tt} = a_2^2 u_{2xx}, x > 0,$$

за $t > 0$ при условията

$$u_1(0,t) = u_2(0,t), E_1 u_{1x}(0,t) = E_2 u_{2x}(0,t), t > 0,$$

$$u_1(x,0) = f\left(-\frac{x}{a_1}\right), u_{1t}(x,0) = f'\left(-\frac{x}{a_1}\right), x < 0,$$

$$u_2(x,0) = 0, u_{2t}(x,0) = 0, x > 0.$$

Използвайте вида на решението (6) в двете области $x < 0$ и $x > 0$.

Отг.

$$u_1(x,t) = \begin{cases} f\left(t - \frac{x}{a_1}\right), & t < -\frac{x}{a_1}, \\ f\left(t - \frac{x}{a_1}\right) + \frac{a_1E_2 - a_2E_1}{a_1E_2 + a_2E_1} f\left(t + \frac{x}{a_1}\right), & t > -\frac{x}{a_1}, \end{cases}$$

$$u_2(x,t) = 0, t < \frac{x}{a_2}; u_2(x,t) = \frac{2a_1E_2}{a_1E_2 + a_2E_1} f\left(t - \frac{x}{a_2}\right), t > \frac{x}{a_2}.$$

При $a_1E_2 = a_2E_1$ липсва отразена вълна, което е съвсем естествено — вълната безпрепятствено преминава през точката $x = 0$, без да се промени.

12.9. Цилиндър с дължина l, движещ се постъпателно със скорост v_1, настига друг цилиндър с дължина l, движещ се със скорост $v_2 < v_1$. Определете разпределението на скоростите на надлъжните вълни по дължината на двата пръта. Знае се, че напречните сечения и характеристиките на материалите на двата пръта са еднакви.

Упътване. Надлъжните изместванияя $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ на точките от двата пръта удовлетворяват уравненията

$$u_{1tt} = a^2u_{1xx}, 0 < x < l;\ u_{2tt} = a^2u_{2xx}, l < x < 2l,$$

при следните начални и гранични условия:

$$u_1(x,0) = 0, u_{1t}(x,0) = v_1,\ 0 < x < l,$$

$$u_2(x,0) = 0, u_{2t}(x,0) = v_2,\ l < x < 2l,$$

$$u_1(l,t) = u_2(l,t),\ u_{1x}(l,t) = u_{2x}(l,t),$$

$$u_{1x}(0,t) = 0, u_{2x}(2l,t) = 0.$$

Последните две гранични условия изразяват факта, че двата края са свободни. За решението ще получите формула (7), където $\varphi \equiv 0$, а за функцията $\psi(\lambda)$ имаме: тя е периодична с период $4l$ и $\psi(\lambda) = v_1,\ 0 < \lambda < l;\ \psi(\lambda) = v_2,\ l < \lambda < 2l,\ \psi(\lambda) = \psi(-\lambda)$.

Отг. За първия цилиндър скоростта $\frac{\partial u_1}{\partial t}$ е периодична с период $\frac{4l}{a}$ и

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}(x,t) = \begin{cases} v_1 & \text{при } 0 < at < l - x, \\ \frac{1}{2}(v_1 + v_2) & \text{при } l - x < at < l + x, \\ v_2 & \text{при } l + x < at < 3l - x, \\ \frac{1}{2}(v_1 + v_2) & \text{при } 3l - x < at < 3l + x. \end{cases}$$

За втория цилиндър имаме същия период и

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}(x,t) = \begin{cases} v_2 & \text{при } 0 < at < 2l - x, \\ \frac{1}{2}(v_1 + v_2) & \text{при } 2l - x < at < 3l - x, \\ v_1 & \text{при } 3l - x < at < l + x, \\ \frac{1}{2}(v_1 + v_2) & \text{при } l + x < at < 5l - x. \end{cases}$$

Пресметнете, че за $t > \frac{2l}{a}$ функцията $u_x(l,t)$ става положителна и процесът на удара завършва. В този момент цилиндрите са си разменили скоростите, както се вижда от горните формули.

Глава IV

МЕТОД НА РАЗДЕЛЯНЕ НА ПРОМЕНЛИВИТЕ (МЕТОД НА ФУРИЕ)

Разглеждаме уравнението

$$u_{xx} + c(y)u_{yy} + d(y)u_y + e(y)u = 0, \tag{1}$$

в което няма смесена производна u_{xy}. Нека областта D има вида $D = \{\alpha < x < \beta,\ \gamma < y < \delta\}$, като се допуска и $\delta = \infty$. Търсим решение на уравнението (1) в D, което удовлетворява зададени условия върху границата на D. Ще предполагаме, че условията върху $x = \alpha$ и $x = \beta$ са от вида

$$A_1u_x(\alpha, y) + B_1u(\alpha, y) = 0, A_2u_x(\beta, y) + B_2u(\beta, y) = 0,\ \gamma < y < \delta, \tag{2}$$

където A_1, A_2, B_1 и B_2 са константи, за които $A_1^2 + B_1^2 \neq 0$, $A_2^2 + B_2^2 \neq 0$. Ще отбележим, че при $y = \delta$ може да няма никакво условие (а напр., ако $\delta = \infty$, може да има условие за ограниченост на решението или за клонене към нула при $y \to \delta$). Според метода на разделяне на променливите търсим ненулево решение от вида

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \not\equiv 0 \tag{3}$$

на уравнението (1) и граничните условия (2). Условията при $y = \gamma$ и $y = \delta$ засега не се вземат предвид. Замествайки функцията (3) в уравнението (1), получаваме

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{c(y)Y''(y) + d(y)Y'(y) + e(y)Y(y)}{Y(y)}.$$

Дясната страна на това равенство не зависи от x, а лявата не зависи от y. Следователно общата им стойност е константа, която означаваме с λ. Получаваме две уравнения:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{4}$$

$$c(y)Y''(y) + d(y)Y'(y) + [e(y) - \lambda]Y(y) = 0. \tag{5}$$

Замествайки (3) в (2), получаваме

$$[A_1X'(\alpha) + B_1X(\alpha)]Y(y) = 0, [A_2X'(\beta) + B_2X(\beta)]Y(y) = 0,\ \gamma < y < \delta.$$

Понеже $Y(y) \not\equiv 0$, т.е. има точка $y_0 \in (\gamma, \delta)$, за която $Y(y_0) \neq 0$, трябва да е изпълнено

$$A_1X'(\alpha) + B_1X(\alpha) = 0, A_2X'(\beta) + B_2X(\beta) = 0. \tag{6}$$

По този начин променливите "се разделиха" — за $Y(y)$ се получи уравнението (5), а за $X(x)$ — уравнението (4) и граничните условия (6). Задачата (4), (6) за функцията $X(x)$ се нарича *задача на Щурм — Лиувил*. За някои стойности на λ тази задача има решение, което не е тъждествено нула. Тези стойности на λ се наричат собствени стойности, а ненулевото решение — собствена функция. Задачата на Щурм — Лиувил има изброимо много собствени стойности λ_k, $k = 1, 2, \ldots$. На всяка от тях съответства точно една собствена функция $X_k(x)$ с точност до умножение с константа. Системата от собствени функции $X_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, е ортогонална и пълна в интервала $[\alpha, \beta]$, така че всяка функция от $L_2(\alpha, \beta)$ може да се развие в ред на Фурие по нея (вж. зад. 1.18). Намираме общото решение $Y_k(y)$ на уравнението (5) при $\lambda = \lambda_k$. В него участват две неопределени константи (или една, ако $c(y) \equiv 0$). Решение на задачата търсим във вид на формалния ред

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) Y_k(y),$$

който заместваме в условията при $y = \gamma$ и $y = \delta$. Определяйки константите в $Y_k(y)$, удовлетворяваме и тези условия.

Нека сега търсим решение на нехомогенното уравнение

$$u_{xx} + c(y)u_{yy} + d(y)u_y + e(y)u = f(x,y) \tag{7}$$

в област D от горния вид. Както горе, намираме всички собствени функции $X_k(x)$ на хомогенната задача. Решението на нехомогенната задача търсим във вида

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) u_k(y). \tag{8}$$

Заествайки в (7) и използвайки, че от (4) $X_k'' = -\lambda_k X_k$, намираме

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{c(y)u_k''(y) + d(y)u_k'(y) + [e(y) - \lambda_k]u_k(y)\} X_k(x) = f(x,y),$$

откъдето получаваме уравненията

$$c(y)u_k''(y) + d(y)u_k'(y) + [e(y) - \lambda_k]u_k(y) = f_k(y), \tag{9}$$

като с $f_k(y)$ сме означили коефициентите на Фурие в развитието на $f(x,y)$ по системата $\{X_k(x)\} : f(x,y) = \sum f_k(y) X_k(x)$. Освен уравненията (9) трябва да са изпълнени и условията при $y = \gamma$ и $y = \delta$, които водят до условия за $u_k(y)$ при $y = \gamma$ и $y = \delta$. Намирайки решението $u_k(y)$ на (9), което удовлетворява и тези условия, получаваме решението (8) на задачата.

§ 13. Хиперболични уравнения

13.1. Намерете решение на уравнението

(1) $$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l, t > 0,$$

което удовлетворява началните условия

(2) $$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x),\ 0 < x < l,$$

и граничните условия

(3) $$u_x(0,t) = 0, u(l,t) = 0,\ t > 0,$$

където $\varphi \in C^3[0,l]$, $\psi \in C^2[0,l]$ и са изпълнени условията за съгласуване $\varphi'(0) = \psi'(0) = 0$, $\varphi(l) = \psi(l) = \varphi''(l) = 0$.

Решение. Търсим решение $u(x,t) = X(x)T(t)$ на (1) и (3). Получаваме

(4) $$X'' + \lambda x = 0,$$

(5) $$T'' + \lambda a^2 T = 0,$$

(6) $$X'(0) = 0, X(l) = 0.$$

Получихме задачата на Щурм — Лиувил (4), (6). Общото решение на (4) е:

а) при $\lambda < 0 : X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$;

б) при $\lambda = 0 : X(x) = C_1 x + C_2$;

в) при $\lambda > 0 : X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x$.

В случаите а) и б) заместете $X(x)$ в (6) и покажете, че $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, т. е. $X(x) \equiv 0$. Остава случай в) $\lambda > 0$. Тогава от (6) получаваме $C_2 = 0$ и $\cos\sqrt{\lambda}l = 0$. Следователно собствените стойности и функции на задачата (4), (6) съответно са

$$\lambda_k = \frac{(2k+1)^2\pi^2}{4l^2}, X_k(x) = C_k \cos\frac{(2k+1)\pi x}{2l}, k = 0, 1, 2, \ldots$$

Намерете общото решение на (5) за $\lambda = \lambda_k$. Решението на задача (1), (2), (3) търсим във вида

(7) $$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x,t)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2l} \left[A_k \cos \frac{(2k+1)\pi at}{2l} + B_k \sin \frac{(2k+1)\pi at}{2l} \right],$$

където коефициентите A_k и B_k са все още неопределени. От първото от условията (2) ще получим

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2l}.$$

Следователно коефициентите A_k са (вж. зад. 1.16)

$$A_k = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(x) \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2l} dx.$$

Тук използвахме, че A_k са коефициентите на Фурие в развитието на функцията $\varphi(x)$ по пълната (вж. зад. 1.20) и ортогонална система $\left\{ \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2l} \right\}$ и че $\left\| \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2l} \right\|^2_{L_2(0,l)} = \frac{l}{2}$. Аналогично от равенството

$$u_t(x,0) = \psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{(2k+1)\pi a}{2l} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2l}$$

получаваме

$$B_k = \frac{4}{(2k+1)\pi a} \int\limits_0^l \psi(x) \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2l} dx.$$

С тези изрази за A_k и B_k по-долу ще докажем, че редът (7) и получените от него редове с почленно диференциране по x и t от първи и втори ред са равномерно сходящи в $\overline{D}$. Тогава $u \in C^2(\overline{D})$ и производните ѝ се получават с почленно диференциране. Следователно функцията $u(x,t)$ удовлетворява уравнението (1) и граничните условия (3), понеже всеки член на реда ги удовлетворява. Например

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = \sum (u_k)_{tt} - a^2 \sum (u_k)_{xx} = \sum [(u_k)_{tt} - a^2 (u_k)_{xx}] = 0,$$

тъй като функциите u_k са решения на (1). Забелязваме също, че

$$\sum_{k=0}^{N} A_k \cos\frac{(2k+1)\pi x}{2l} \underset{N\to\infty}{\rightrightarrows} u(x,0), \sum_{k=0}^{N} A_k \cos\frac{(2k+1)\pi x}{2l} \xrightarrow[N\to\infty]{L_2(0,l)} \varphi(x).$$

Първото е в сила, понеже редът (7) е равномерно сходящ в $\overline{D}$, а второто — понеже A_k са коефициентите на Фурие по пълната и ортогонална в $L_2(0,l)$ система $\left\{\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2l}\right\}$ (вж. зад. 1.18). Следователно $u(x,0) = \varphi(x)$ почти навсякъде в $(0,l)$ и понеже и двете функции са непрекъснати, $u(x,0) = \varphi(x)$ за $x \in [0,l]$. Аналогично се получава и другото начално условие.

Равномерната сходимост на посочените редове ще бъде доказана, ако докажем, че

$$\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)^2(|A_k| + |B_k|) < \infty \tag{8}$$

(диференцирайте почленно и проверете). Интегрирайки по части и използвайки условията за съгласуване за φ и ψ, намираме

$$A_k = -\left[\frac{2l}{(2k+1)\pi}\right]^3 A_k''', B_k = -\frac{1}{a}\left[\frac{2l}{(2k+1)\pi}\right]^3 B_k'',$$

където A_k''' и B_k'' са фуриеровите коефициенти в развитието съответно на $\varphi'''(x)$ по $\left\{\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}\right\}$ и на φ'' по $\left\{\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2l}\right\}$. От неравенството на Бесел (зад. 1.16) следва $\sum(|A_k'''|^2 + |B_k''|^2) < \infty$. Оттук получете (8), като използвате, че например $\frac{|A_k'''|}{2k+1} \le |A_k'''|^2 + \frac{1}{(2k+1)^2}$.

13.2. Намерете собствените стойности и собствените функции на следните задачи на Щурм — Лиувил:

$$X'' + \lambda X = 0,\ 0 < x < l \text{ и:}$$

а) $X(0) = 0,\ X(l) = 0$; б) $X(0) = 0,\ X'(l) = 0$;

в) $X'(0) = 0,\ X'(l) = 0.$

Отг. Във всички случаи $\lambda_k \geq 0$, по-точно:

а) $\sqrt{\lambda_k} = \frac{k\pi}{l},\ X_k(x) = \sin\frac{k\pi x}{l},\ k = 1, 2, \ldots;$

б) $\sqrt{\lambda_k} = \frac{(2k+1)\pi}{2l},\ X_k(x) = \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l},\ k = 0, 1, \ldots;$

в) $\lambda_0 = 0,\ X_0(x) = 1;\ \sqrt{\lambda_k} = \frac{k\pi}{l},\ X_k(x) = \cos\frac{k\pi x}{l},\ k = 1, 2, \ldots$

13.3. Намерете решение на уравнението

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l, t > 0,$$

което удовлетворява началните условия $u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x),\ 0 < x < l$, и граничните условия:

а) $u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,\ t > 0,$
като $\varphi(0) = \varphi''(0) = \psi(0) = 0,\ \varphi(l) = \varphi''(l) = \psi(l) = 0;$

б) $u(0,t) = 0,\ u_x(l,t) = 0,\ t > 0,$
като $\varphi(0) = \varphi''(0) = \psi(0) = 0,\ \varphi'(l) = \psi'(l) = 0;$

в) $u_x(0,t) = 0,\ u_x(l,t) = 0,\ t > 0,$
като $\varphi'(0) = \psi'(0) = 0,\ \varphi'(l) = \psi'(l) = 0.$

Отг. а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sin\frac{k\pi x}{l}\left(A_k \cos\frac{ak\pi t}{l} + B_k \sin\frac{ak\pi t}{l}\right),$

$$A_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx, B_k = \frac{2}{ak\pi}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx; \tag{9}$$

б) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}\left(A_k \cos\frac{(2k+1)\pi at}{2l} + B_k \sin\frac{(2k+1)\pi at}{2l}\right),$

$$A_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}dx,$$

$$B_k = \frac{4}{(2k+1)\pi a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}dx;$$

$$\text{в)}\ \frac{1}{l}\int\limits_0^l[\varphi(x)+t\psi(x)]dx+\sum_{k=1}^{\infty}\cos\frac{k\pi x}{l}\left(A_k\cos\frac{ak\pi t}{l}+B_k\sin\frac{ak\pi t}{l}\right),$$

$$A_k=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\varphi(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx, B_k=\frac{2}{ak\pi}\int\limits_0^l\psi(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx.$$

Забележка. Сравнете решенията на зад. 13.1 и 13.3 с тези на зад. 11.25, 11.29 и 11.30.

Във всички разгледани задачи началните и граничните условия са съгласувани в точките $(0,0)$ и $(l,0)$ и решението $u(x,t)$ е от $C^2(\overline{D})$. На практика могат да се решават и задачи, при които първите производни на решението се съгласуват в двете точки, а вторите не се съгласуват. Тогава решението няма да бъде двукратно гладко върху характеристиките, излизащи от точките $(0,0)$ и $(l,0)$ и техните отражения от правите $x=0$ и $x=l$ (вж. черт. 12.4). Естествено така ще получим обобщено решение $u\in C^1(\overline{D})$.

13.4.* Намерете закона за трептенето на струна с дължина l, разположена върху отсечката $[0,l]$, ако в началния момент струната има форма $u(x,0)=x(l-x)$ и е пусната без начална скорост. Струната е закрепена в краищата си и не ѝ действат външни сили.

Решение. Стигаме до математическата задача

$$u_{tt}=a^2u_{xx}\ \text{в}\ D=\{0<x<l,t>0\},$$

$$u(x,0)=x(l-x), u_t(x,0)=0,\ 0<x<l,$$

$$u(0,t)=0, u(l,t)=0,\ t>0.$$

Тя прилича на зад. 13.3 а), но тук условията $\varphi''(0)=\varphi''(l)=0$ не са изпълнени. В отговора на зад. 13.3 а) сега имаме $B_k=0$. Пресмятаме A_k от (9), като помним, че $\cos k\pi=(-1)^k$. Получаваме

$$u(x,t)=\frac{8l^2}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}\cos\frac{(2k+1)\pi at}{l}. \tag{10}$$

Понеже всеки член на този ред се мажорира от съответния член на сходящия числов ред $\sum(2k+1)^{-3}$, редът (10) е равномерно сходящ в $\overline{D}$ според критерия на Вайерщрас. Следователно функцията $u(x,t)$ е непрекъсната в $\overline{D}$. Покажете аналогично, че $u \in C^1(\overline{D})$. Да диференцираме формално реда (10) два пъти по x. Получаваме реда

$$\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}\cos\frac{(2k+1)\pi at}{l}. \tag{11}$$

който не е равномерно сходящ в $\overline{D}$ (вж. условията за съгласуване). За да го изследваме, ще използваме критерия на Дирихле: ако за $y \in Y$ имаме $0 \le f_{k+1}(y) \le f_k(y) \rightrightarrows 0$ и парциалните суми на реда $\sum g_k(y)$ са равномерно ограничени в Y, редът $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(y)g_k(y)$ е равномерно сходящ в Y. Ще вземем в случая $f_k = (2k+1)^{-1}$. Остава да изследваме $g_k(y)$, където $y = (x,t)$:

$$g_k(x,t) = \sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}\cos\frac{(2k+1)a\pi t}{l}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin\frac{(2k+1)\pi}{l}(x+at) + \sin\frac{(2k+1)\pi}{l}(x-at)\right].$$

Леко се доказва, че за $z \neq m\pi$ (m — цяло) имаме

$$\sum_{k=0}^{n}\sin(\alpha+2kz) = \frac{\sin(\alpha+nz)\sin(n+1)z}{\sin z}.$$

Тъй като $(2k+1)\pi(x \pm at) = \pi(x \pm at) + 2k\pi(x \pm at)$, при $x + at \neq ml$ и $x - at \neq ml$ имаме

$$\left|\sum_{k=0}^{n} g_k(x,t)\right| \le \left|\sin\frac{\pi(x+at)}{l}\right|^{-1} + \sin\left|\frac{\pi(x-at)}{l}\right|^{-1}.$$

Следователно редът (11) е равномерно сходящ в околност на всяка точка (x_0,t_0), за която числата $(x_0+at_0)/l$ и $(x_0-at_0)/l$ не са цели. Следователно в тази околност функцията $u(x,t)$ има непрекъснати втори производни. Лесно се вижда, че точките (x_1,y_1), за които някои от числата $(x_1 + at_1)/l$ или $(x_1 - at_1)/l$ е цяло, са точно тези точки от $\overline{D}$, които лежат на характеристиките през (0,0) и $(l, 0)$ или на отраженията им от $x = 0$ и $x = l$ (вж. черт. 12.4). Ще отбележим, че решението на тази задача е единствено (вж. зад. 12.7).

13.5.* Хомогенна струна с дължина l е със закрепени краища в точките $x = 0$ и $x = l$. В точка $x = c$ струната е изтеглена на малко разстояние h от положението на равновесие и в момента $t = 0$ е пусната без начална скорост. Определете положението ѝ в момента t.

Упътване. Математическата задача тук има вида на зад. 13.3 а) с $\psi(x) = 0$ и (вж. черт. 12.1)

$$\varphi(x) = h\frac{x}{c}, 0 \leq x \leq c;\ \varphi(x) = h\frac{l-x}{l-c}, c \leq x \leq l.$$

Решението на тази задача ще е обобщено. То ще бъде непрекъсната функция в $\overline{D}$, но първите му производни ще се прекъсват върху характеристиките през $(c, 0)$ и техните отражения от $x = 0$ и $x = l$. Търсейки решението с коефициенти от формула (9), след преработка получете

$$u(x,t) = \frac{hl^2}{2\pi^2 c(l-c)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left\{ \sin\frac{k\pi}{l}(c + x - at) - \sin\frac{k\pi}{l}(c + x + at) \right.$$

$$\left. + \sin\frac{k\pi}{l}(x + at - c) + \sin\frac{k\pi}{l}(c - x + at) \right\}.$$

Този ред е равномерно и абсолютно сходящ и ако го представим във вида $u(x,t) = f_1(x - at) + f_2(x + at) + f_3(x + at) + f_4(x - at)$, функциите f_1, f_2, f_3, f_4 и първите им производни са частично непрекъснати (вж. предишната задача), т.е. функциите f_1, f_2, f_3, f_4 са частично гладки в $\overline{D}$. Следователно $u(x,t)$ е обобщено решение на уравнението на струната (вж. зад. 12.1). Докажете, че то е единствено!

По-долу в § 13 няма да отбелязваме изрично кога става дума за класическо и кога за обобщено решение. Методът на Фурие ни дава някакво "решение", което след това трябва да се изследва.

13.6. Намерете решение на уравнението $u_{tt} = u_{xx}$, $0 < x < l$, $t > 0$, което удовлетворява следните начални и гранични условия:

а) $l = 1$; $u(x,0) = x^4 - 2x^3 + x$, $u_t(x,0) = 0$, $u(0,t) = 0$, $u(1,t) = 0$;

б) $l = \pi$; $u(x,0) = \cos\frac{3x}{2}$, $u_t(x,0) = x\sin x$, $u_x(0,t) = 0$, $u(\pi,t) = 0$;

в) $l = \frac{\pi}{2}$; $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = \cos 5x \sin x$, $u(0,t) = 0$, $u_x\left(\frac{\pi}{2},t\right) = 0$;

г) $l = 2\pi$; $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = x\cos\frac{x}{4}$, $u(0,t) = 0$, $u(2\pi,t) = 0$;

д) $l = \pi$; $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 2x\sin\frac{x}{2} + 4\cos\frac{x}{2}$, $u_x(0,t) = 0$, $u_x(\pi,t) = 0$;

е) $l = \pi$; $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = \sin x + (\pi - x)\cos x$, $u_x(0,t) = 0$, $u_x(\pi,t) = 0$;

ж) $l = 2\pi$; $u(x,0) = \cos\frac{5x}{2}$, $u_t(x,0) = x^2 - 4\pi^2$, $u_x(0,t) = 0$, $u_x(2\pi,t) = 0$.

13.7. Намерете решение на задачата

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x),\ 0 < x < l, t > 0,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x),\ 0 < x < l,$$

$$u(0,t) = c_1, u(l,t) = c_2,\ c_i = \text{const}.$$

Упътване. Търсете решение от вида $u(x,t) = v(x,t) + w(x)$, където

$$a^2 w''(x) + f(x) = 0, w(0) = c_1, w(l) = c_2;$$

$$v_{tt} = a^2 v_{xx}, v(x,0) = \varphi(x) - w(x), v_t(x,0) = \psi(x), v(0,t) = 0,$$

$$v(l,t) = 0.$$

След като решите първата задача, втората е напълно определена и е частен случай от задача 13.3 а).

13.8. (продължение на зад. 13.7). Може ли по този начин да решите задачата с гранични условия $u_x(0,t) = 0$, $u_x(l,t) = 0$? Какво условие върху функцията $f(x)$ е необходимо за това?

Отг. $\int\limits_0^l f(x)dx = 0.$

Забележка. Причината за това условие е, че $\lambda = 0$ е собствена стойност на съответната задача на Щурм — Лиувил. В зад. 13.12 ще получим решението по друг начин, без да налагаме това условие на f.

13.9. Решете задача 13.7 при $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ и:

а) $f(x) = x(l-x)$; б) $f(x) = \text{sh } x$; в) $f(x) = g = \text{const}$.

13.10. Решете смесената задача

$$u_{tt} = 9u_{xx} + tf(x), u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), u(0,t) = 0, u_x(l,t) = 0.$$

Упътване. Търсейки решение във вида $u(x,t) = v(x,t) + tw(x)$, където

$$9w''(x) + f(x) = 0,\ 0 < x < l; w(0) = 0, w'(l) = 0,$$

стигаме до зад. 13.3 б) за функцията $v(x,t)$.

13.11. Решете задача 13.10 при $l = 1$, $f(x) = -x$, $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = \sin\frac{\pi x}{2}$.

13.12. Намерете решението на задачата

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ 0 < x < l, t > 0, \tag{12}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x),\ 0 < x < l, \tag{13}$$

$$u(0,t) = 0, u(l,t) = 0,\ t > 0, \tag{14}$$

където $f \in C^2(\overline{D})$ и $f(0,t) = 0$, $f(l,t) = 0$, $t > 0$; φ и ψ удовлетворяват условията на задача 13.1.

Упътване. Решение на задачата търсете във вида*

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin\frac{k\pi x}{l}.$$

---

*Вж. увода към глава IV, формула (8).

Покажете, че

$$u_k(t) = \frac{l}{ak\pi}\int\limits_0^t f_k(\tau)\sin\frac{ak\pi}{l}(t-\tau)d\tau + A_k\cos\frac{ak\pi t}{l} + B_k\sin\frac{ak\pi t}{l},$$

където A_k и B_k се дават от (9), а

$$f_k(t) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x,t)\sin\frac{k\pi x}{l}dx.$$

Докажете, че редът за $u(x,t)$ и получените от него редове след двукратно почленно диференциране спрямо x и t са равномерно сходящи.

Условията за $f(x,t)$ в зад. 13.12 не са необходими за съществуване на решение. Такива условия са необходими за f само при $t = 0$, а не за всяко $t \geq 0$.

13.13. Намерете решение на задачата (12), (13), (14) при $\varphi = 0$ и $\psi = 0$, ако $f \in C^2(\overline{D})$, $f(0,0) = 0$, $f(l,0) = 0$.

Решение. Ще сведем задачата до зад. 13.12. Търсим решението във вида $u(x,t) = v(x,t) + X_1(x)\,T_1(t) + X_2(x)\,T_2(t)$, където помощните функции $X_i(x)$ и $T_i(t)$ са от C^2 и $X_i(0) = 0$, $X_i(l) = 0$, $i = 1,2$. За v получаваме

$$v_{tt} - a^2v_{xx} = f(x,t) - X_1(x)T_1''(t) - X_2(x)T_2''(t) + a^2X_1''(x)T_1(t)$$
$$+a^2X_2''(x)T_2(t) = f_1(x,t); v(0,t) = 0, v(l,t) = 0$$

и съответните начални условия. Трябва така да подберем функциите X_i и T_i, че да имаме

$$\begin{aligned} 0 &= f_1(0,t) = f(0,t) + a^2X_1''(0)T_1(t) + a^2X_2''(0)T_2(t), \\ 0 &= f_1(l,t) = f(l,t) + a^2X_1''(l)T_1(t) + a^2X_2''(l)T_2(t). \end{aligned}$$

Това ще е изпълнено, ако положим: $X_1''(0) = 1$, $X_2''(0) = 0$, $T_1(t) = -\frac{1}{a^2}f(0,t)$, $X_1''(l) = 0$, $X_2''(l) = 1$, $T_2(t) = -\frac{1}{a^2}f(l,t)$. За v получаваме зад. 13.12.

13.14. Решете следните задачи:

а) $u_{tt} = u_{xx} + x(1-x)t^2,\ 0 < x < 1,\ t > 0,$
$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ u(0,t) = 0,\ u(1,t) = 0;$

б) $u_{tt} = u_{xx} + 2\sin t,\ 0 < x < \pi,\ t > 0,$
$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0.$

Упътване към б). Разгледайте функцията

$$v = u + x(x-\pi)\sin t.$$

13.15. Намерете решение на уравнението (12) при началните условия (13) и следните гранични условия:

а) $u(0,t) = \mu_1(t),\ u(l,t) = \mu_2(t);$

б) $u_x(0,t) = \mu_1(t),\ u(l,t) = \mu_2(t);$

в) $u(0,t) = \mu_1(t),\ u_x(l,t) = \mu_2(t);$

г) $u_x(0,t) = \mu_1(t),\ u_x(l,t) = \mu_2(t).$

Упътване. Търсим решение във вида $u = v + w$, където функцията $w(x,t)$ удовлетворява *само* нехомогенните гранични условия. Функцията w в случаите а), б), в) търсим от вида $w(x,t) = A(t)x + B(t)$, а в г) — от вида $w(x,t) = A(t)x^2 + B(t)x$. За v получаваме задачата

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = f(x,t) - w_{tt} + a^2 w_{xx},$$

$$v(x,0) = \varphi(x) - w(x,0), v_t(x,0) = \psi(x) - w_t(x,0)$$

при съответните хомогенни гранични условия, т.е. задачата се сведе до вече решените задачи 13.12 и 13.13.

13.16. Решете следните смесени задачи:

а) $u_{tt} = u_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0,$
$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ u(0,t) = 0,\ u(l,t) = t;$

б) $u_{tt} = u_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0,$
$u(x,0) = x+1,\ u_t(x,0) = 0,\ u(0,t) = t+1,\ u(l,t) = t^2 + 2;$

в) $u_{tt} - u_{xx} = 2x + t^3 \sin\frac{3x}{2},\ 0 < x < \pi,\ t > 0,$
$u(x,0) = x,\ u_t(x,0) = x^2 - 2\pi x,\ u(0,t) = 0,\ u_x(\pi,t) = t^2 + 1;$

г) $u_{tt} - u_{xx} = 2 + (t^2 + 1)\cos\frac{5x}{2}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$,
$u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 9\cos\frac{7x}{2}$, $u_x(0,t) = 0$, $u(\pi,t) = t^2$;

д) $u_{tt} - u_{xx} = t^3\cos 2\pi x - 2t$, $0 < x < 1$, $t > 0$,
$u(x,0) = \cos\pi x$, $u_t(x,0) = x^2 + x$, $u_x(0,t) = t$, $u_x(1,t) = 3t$.

Упътване към г). Функциите $\cos\frac{5x}{2}$ и $\cos\frac{7x}{2}$ са собствени функции на съответната задача на Щурм – Лиувил. Оттук веднага намираме развитието в ред на Фурие. За $T_k(t)$ получаваме задачи на Коши, само две от които имат нетривиално решение (теорема за единственост).

13.17. Намерете решение на задачата ($\omega = \text{const} > 0$)

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + g(x)\sin\omega t,\ \ 0 < x < t, t > 0,$$

$$u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0, u(0,t) = 0, u(l,t) = 0.$$

Отг. а) Ако числото $\frac{\omega l}{a\pi}$ не е цяло, решението е

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k}{\omega_k(\omega^2 - \omega_k^2)}(\omega\sin\omega_k t - \omega_k\sin\omega t)\sin\frac{k\pi x}{l},$$

$$\text{където } \omega_k = \frac{ak\pi}{l}, g_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l g(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx.$$

б) Ако за някое цяло число k_0 имаме $\omega = \frac{ak_0\pi}{l} = \omega_{k_0}$, решението е

$$u(x,t) = \frac{g_{k_0}}{2\omega^2}(\sin\omega t - t\omega\cos\omega t)\sin\frac{\omega x}{a}$$

$$+ \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq k_0}}^{\infty} \frac{g_k}{\omega_k(\omega^2 - \omega_k^2)}(\omega\sin\omega_k t - \omega_k\sin\omega t)\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Получете този израз и от отговора в случай а) при $\omega \to \omega_{k_0}$.

Забележка. Ако честотата ω на външната сила съвпада с една от честотите ω_k на собствените трептения на закрепената струна, имаме резонанс — случай б). В този случай амплитудата на трептене на струната с честота ω нараства неограничено при нарастване на времето (в решението $u(x,t)$ участват $t\cos\omega t$).

13.18. Намерете решение на хомогенното уравнение на струната при нулеви начални условия и при гранични: $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = \sin\omega t$.

13.19. Намерете закона за трептенето на струна $0 \leq x \leq 1$ със закрепени краища, трептяща в среда, която оказва пропорционално на скоростта ѝ съпротивление.

Упътване. Стигаме до математическата задача

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - 2hu_t,$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x),\ u(0,t) = u(1,t) = 0.$$

Търсейки решение на уравнението от вида $u = X(x)T(t)$, удовлетворяващо граничните условия, за $X(x)$ получаваме зад. 13.2 а), а за $T(t)$ — уравнението $T'' + 2hT' + \lambda T = 0$. Ако $|h| < \pi$, имаме*

$$T_k(t) = e^{-ht}(A_k \cos\alpha_k t + B_k \sin\alpha_k t), \alpha_k = \sqrt{k^2\pi^2 - h^2}.$$

Тогава оттук намираме

$$u(x,t) = e^{-ht}\sum_{k=1}^{\infty} \sin k\pi x(A_k \cos\alpha_k t + B_k \sin\alpha_k t),$$

където

$$A_k = 2\int_0^1 \varphi(x)\sin k\pi x dx, B_k = \frac{h}{\alpha_k}A_k + \frac{2}{\alpha_k}\int_0^1 \psi(x)\sin k\pi x dx.$$

13.20. Решете задачата

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l, t > 0,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x),\ 0 < x < l,$$

---

*Ако $|h| \geq \pi$, ще се появят и краен брой експоненциални членове и евентуално една линейна функция измежду решенията T_k.

$$u_x(0,t) = 0, u_x(l,t) + hu(l,t) = 0,\ t > 0,$$

където h е положителна константа.

Упътване. След разделяне на променливите се достига до задачата на Щурм — Лиувил:

$$X''(x) + \mu X(x) = 0, 0 < x < l;\ X'(0) = 0, X'(l) + hX(l) = 0.$$

Покажете, че при $\mu \leq 0$ няма собствени стойности! След това положете $\mu = \lambda^2$. Положителните собствени стойности λ_k са корени на трансцендентното уравнение $\lambda \operatorname{tg} \lambda l = h$. Докажете, че във всеки интервал $\left[\frac{2k\pi}{l}, \frac{(2k+1)\pi}{l}\right]$ има точно по едно λ_k. Собствените функции са $X_k(x) = \cos \lambda_k x$. Тогава решението е

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \cos \lambda_k x (A_k \cos \lambda_k at + B_k \sin \lambda_k at).$$

Покажете, че функциите $X_k(x)$ образуват ортогонална система.* Пресмятаме

$$\|X_k\|^2 = \int_0^l \cos^2 \lambda_k x dx = \frac{l}{2} + \frac{h \cos^2 \lambda_k l}{2\lambda_k^2} = \frac{l}{2} + \frac{h}{2(\lambda_k^2 + h^2)},$$

$$A_k = \frac{2}{\|X_k\|^2} \int_0^l \varphi(x) \cos \lambda_k x dx, B_k = \frac{2}{a\lambda_k \|X_k\|^2} \int_0^l \psi(x) \cos \lambda_k x dx.$$

13.21. Решете следните смесени задачи:

1. $u_{tt} = u_{xx} - 4u$, $0 < x < 1$, $t > 0$,
   $u(x,0) = x^2 - x$, $u_t(x,0) = 0$, $u(0,t) = 0$, $u(1,t) = 0$.
2. $u_{tt} + 2u_t = u_{xx} - u$, $0 < x < \pi$, $t > 0$,
   $u(x,0) = \pi x - x^2$, $u_t(x,0) = 0$, $u(0,t) = 0$, $u(\pi,t) = 0$.
3. $u_{tt} + 2u_t = u_{xx} - u$, $0 < x < \pi$, $t > 0$,
   $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = x$, $u_x(0,t) = 0$, $u(\pi,t) = 0$.

---

*В същност от по-общи резултати за задачата на Щурм — Лиувил се знае, че системата от собствени функции $\{X_k(x)\}$ е ортогонална и пълна в $L_2(0,l)$.

4. $u_{tt} - u_{xx} + 2u_t = 4x + 8e^t \cos x,\ 0 < x < \frac{\pi}{2},\ t > 0,$

$u(x,0) = \cos x,\ u_t(x,0) = 2x,\ u_x(0,t) = \pi,\ u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = \pi t.$

5. $u_{tt} = u_{xx} + 4u + 2\sin^2 x,\ 0 < x < \pi,\ t > 0,$

$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ u_x(0,t) = 0,\ u_x(\pi,t) = 0.$

13.22. Единият край на еластичен прът е закрепен, а върху другия действа сила Q. Намерете надлъжните трептения на пръта, ако в началния момент силата престава да действа.

Упътване. Вж. обясненията преди зад. 12.8. Получената задача ще бъде:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0,$$

$$u(0,t) = 0,\ u_x(l,t) = 0,\ t > 0,$$

$$u(x,0) = \frac{Qx}{E\sigma},\ u_t(x,0) = 0,\ 0 < x < l,$$

където σ е площта на напречното сечение на пръта, а E — модулът му на Юнг. Първото начално условие е получено, понеже при действието на силата Q скъсяването (или удължаването) на пръта е линейно.

Отг.

$$u(x,t) = \frac{8Ql}{E\sigma\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l} \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}.$$

13.23. Хомогенен еластичен прът с дължина $2l$ е свит до дължина $2l(1-\varepsilon)$ от равни по големина сили, приложени в двата му края. При $t = 0$ натоварването се снема. Покажете, че надлъжните измествания $u(x,t)$ на сечението с абсциса x на пръта се определят от формулата

$$u(x,t) = \frac{8\varepsilon l}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2} \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l} \cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l}.$$

Упътване. Покажете, че получената задача ще бъде:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0,$$

$$u_x(-l,t) = 0,\ u_x(l,t) = 0,\ u(x,0) = -\varepsilon x,\ u_t(x,0) = 0.$$

Аналогично на двумерните задачи могат да се разглеждат и многомерни. Например задачата за трептенето на правоъгълна мембрана има следния вид:

13.24. $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}),\ 0 < x < c,\ 0 < y < b,\ t > 0,$

(15) $$u(x,y,0) = 0, u_t(x,y,0) = xy(c-x)(b-y),$$

(16) $$u|_{x=0} = u|_{x=c} = u|_{y=0} = u|_{y=b} = 0.$$

Решение. Търсим решение от вида $u(x,y,t) = v(x,y)T(t) \not\equiv 0$ на уравнението и граничните условия (16). Получаваме

$$v_{xx} + v_{yy} - \lambda v = 0,\ T'' - \lambda T = 0,$$

$$v|_{x=0} = v|_{x=c} = v|_{y=0} = v|_{y=b} = 0.$$

По този начин за $v(x,y)$ имаме задача на Дирихле в правоъгълника $\{0 < x < c,\ 0 < y < b\}$ и отново разделяме променливите (вж. и зад. 15.1):

$$v(x,y) = X(x)Y(y) \not\equiv 0,\ X'' + \alpha X = 0,\ Y'' + \beta Y = 0,\ \alpha + \beta = -\lambda,$$

$$X(0) = 0,\ X(c) = 0,\ Y(0) = 0,\ Y(b) = 0.$$

Тези две задачи на Щурм — Лиувил са разрешими само за $\sqrt{\alpha} = \frac{k\pi}{c}$ и $\sqrt{\beta} = \frac{m\pi}{b}$ (зад. 13.2 а)). Собствените функции са съответно $\sin\frac{k\pi x}{c}$ и $\sin\frac{m\pi y}{b}$. Тогава получаваме

$$\lambda_{k,m} = -\pi^2\left(\frac{k^2}{c^2} + \frac{m^2}{b^2}\right), v_{k,m} = \sin\frac{k\pi x}{c}\sin\frac{m\pi y}{b}.$$

Решението на първоначалната задача търсим във вида

$$u(x,y,t)$$

$$= \sum_{k,m=1}^{\infty} \sin\frac{k\pi x}{c}\sin\frac{m\pi y}{b}(A_{k,m}\cos\sqrt{-\lambda_{k,m}}t + B_{k,m}\sin\sqrt{-\lambda_{k,m}}t).$$

Замествайки в началните условия (15), получаваме $A_{k,m} = 0$,

$$B_{k,m} = \frac{4}{cb\sqrt{-\lambda_{k,m}}} \int\limits_0^c x(c-x)\sin\frac{k\pi x}{c}dx \int\limits_0^b y(b-y)\sin\frac{m\pi y}{b}dy.$$

Функциите $\left\{\sin\frac{k\pi x}{c}\sin\frac{m\pi y}{b}\right\}$ образуват пълна и ортогонална система в правоъгълника (вж. зад. 1.23). Следователно всяка непрекъсната функция може да се развие в ред по тях и този ред съвпада с нея, ако е равномерно сходящ. Окончателно решението е

$$u(x,y,t) = \frac{16cb}{\pi^7 a}$$

$$\times \sum_{k,m=0}^{\infty} \frac{\sin\frac{(2k+1)\pi x}{c}\sin\frac{(2m+1)\pi y}{b}\sin\left\{\pi at\sqrt{\frac{(2k+1)^2}{c^2}+\frac{(2m+1)^2}{b^2}}\right\}}{(2k+1)^3(2m+1)^3\sqrt{\frac{(2k+1)^2}{c^2}+\frac{(2m+1)^2}{b^2}}}$$

13.25. Решете смесената задача

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy},\ 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, t > 0,$$

$$u|_{t=0} = 3\sin x\sin 2y, u_t|_{t=0} = 5\sin 3x\sin 4y,$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0.$$

Относно смесената задача за кръгова мембрана вж. зад. 2 от Допълнението към глава IV.

§ 14. Параболични уравнения

Задачата за разпространение на топлината в тънък прът $0 < x < l$, околната повърхнина на който е топлоизолирана, а на краищата $x = 0$ и $x = l$ се поддържа нулева температура, води до решаването на уравнението на топлопроводността

(1) $$u_t = a^2 u_{xx}$$

при начално условие (началната температура)

(2) $$u(x,0) = \varphi(x)$$

и гранични условия

(3) $$u|_{x=0} = 0, u|_{x=t} = 0.$$

Ако пък краищата на пръта са топлоизолирани (т. е. топлина не преминава), условията (3) се заменят с условията

(4) $$u_x|_{x=0} = 0, u_x|_{x=l} = 0.$$

14.1. Да се реши задача (1), (2), (3), ако φ е частично гладка и $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$.

Упътване. Търсейки ненулеви решения на (1) и (3) от вида $u(x,t) = X(x)T(t)$, за $X(x)$ получаваме зад. 13.2 а), а за $T(t)$ достигаме до уравнението

$$T'(t) + a^2\lambda T(t) = 0.$$

Затова търсим решението на задачата във вид на формалния ред

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-(\frac{ak\pi}{l})^2 t} \sin\frac{k\pi x}{l},$$

като от (2) следва (покажете!), че е необходимо да имаме

$$A_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx.$$

Докажете, че полученият ред е равномерно сходящ в $\overline{D} = \{0 \leq x \leq t,\ t \geq 0\}$, т. е. $u \in C(\overline{D})$ (вж. зад. 13.1). Докажете, че всички редове, получени с почленно диференциране на $u(x,\ t)$, са равномерно сходящи за $t \geq \delta$ при произволно $\delta > 0$, т. е. $u \in C^{\infty}(t > 0)$. Докажете, че $u(x,\ t)$ е решение на задачата (1), (2), (3).

14.2. Нека $u_0 = \text{const}$. Решете следните смесени задачи:

а) задача (1), (2), (3) при $\varphi(x) = u_0 x(x - l)$;

б) задача (1), (2), (3) при $\varphi(x) = u_0$;

в) задача (1), (2), (4) при $\varphi(x) = u_0$;

г) задача (1), (2), (4) при $\varphi(x) = u_0$, $0 < x < l/2$ и $\varphi = 0$ при $l/2 < x < l$. Изследвайте поведението на $u(x, t)$ при $t \to \infty$.

Упътване. При $u_0 \neq 0$ в случай б) решението $u(x,t)$ няма да е непрекъснато* в $\overline{D} = \{0 \leq x \leq l,\ t \geq 0\}$. Докажете, че $u \in C(\overline{D} \setminus [(0,0) \cup (l,0)])$. За целта използвайте критерий на Дирихле за равномерна сходимост (вж. зад. 13.4). В случай г) докажете, че $u \in C\left(\overline{D} \setminus \left(\frac{l}{2}, 0\right)\right)$.

Отг. а) $\displaystyle \frac{8l^2 u_0}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2 a^2 t}{l^2}} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{l}$;

б) $\displaystyle \frac{4u_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} e^{-\left[\frac{(2k+1)\pi a}{l}\right]^2 t} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{l}$;

в) u_0;

г) $\displaystyle \frac{u_0}{2} + \frac{2u_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} e^{-\left[\frac{(2k+1)\pi a}{l}\right]^2 t} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{l}$;

$$u(x,t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \frac{u_0}{2}.$$

14.3. Даден е тънък хомогенен прът $0 < x < l$, околната повърхнина на който е топлоизолирана. Намерете разпределението на топлината в пръта, ако:

а) На краищата се поддържа постоянна температура $u|_{x=0} = u_1\, |_{x=l} = u_2$, а началната температура е $u\,|_{t=0} = u_0 =$ const. Намерете $\lim\ u(x,t)$ при $t \to \infty$.

б) Краищата имат постоянна температура $u|_{x=0} = u|_{x=l} = u_1$, а началната температура е $u(x,0) = u_0 x(l-x)$. Намерете $\lim u(x,t)$ при $t \to \infty$.

в) Левият край е топлоизолиран (т.е. $u_x|_{x=0} = 0$), на десния се поддържа постоянна температура $u|_{x=l} = u_2$ и началната температура е $u|_{t=0} = \frac{u_0}{l} x$.

г) На левия край се поддържа постоянна температура $u|_{x=0} = u_1$, а на десния край се подава отвън постоянен топлинен поток (т.е. $u_x|_{x=l} = q =$ const). Началната температура е $u|_{t=0} = \varphi(x)$.

Упътване. Вж. зад. 13.7.

---

*Не са изпълнени условията за съгласуване в точките $(0,0)$ и $(l,0)$.

Отг.: а) $u_1+\frac{u_2-u_1}{l}x+\frac{2}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}[u_0-u_1+(-1)^k(u_2-u_0)]e^{-\frac{k^2\pi^2a^2t}{l^2}}\sin\frac{k\pi x}{l}$;

при $t\to\infty$ имаме $u(x,t)\to u_1+(u_2-u_1)\frac{x}{l}$.

б) $u_1+\frac{8u_0l^2}{\pi^3}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}e^{-\left[\frac{2k+1)\pi a}{l}\right]^2t}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}$

$$-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4u_1}{(2k+1)\pi}e^{-\left[\frac{(2k+1)\pi a}{l}\right]^2t}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l};\ \lim_{t\to\infty}u(x,t)=u_1.$$

14.4. Намерете решение на задачата

$$u_t=a^2u_{xx}+f(x,t),\ 0<x<l,t>0,$$

$$u(x,0)=\varphi(x),u(0,t)=\mu_1(t),\ u_x(l,t)=\mu_2(t).$$

Упътване. Търсете решение от вида $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$, където $w(x,t)$ удовлетворява граничните условия (вж. зад. 13.15). За v се получава задачата

$$v_t-a^2v_{xx}=f-w_t+a^2w_{xx},$$

$$v(x,0)=\varphi(x)-w(x,0);v(0,t)=0,v_x(l,t)=0,$$

която се решава аналогично на задачи 13.12 и 13.13.

14.5. Решете следните смесени задачи:

а) $u_t=u_{xx}+u+2\sin 2x\sin x,\ 0<x<\frac{\pi}{2},\ t>0,\ u|_{t=0}=0,$
$u_x|_{x=0}=0,\ u|_{x=\frac{\pi}{2}}=0;$

б) $u_t=u_{xx}-2u_x+x+2t,\ 0<x<1,\ t>0,\ u|_{t=0}=e^x\sin\pi x,$
$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=1}=t;$

в) $u_t=u_{xx}+u-x+2\sin 2x\cos x,\ 0<x<\frac{\pi}{2},\ t>0,\ u|_{t=0}=x,$
$u|_{x=0}=0,\ u_x|_{x=\frac{\pi}{2}}=1;$

г) $u_t=36u_{xx}+9\cos\frac{\pi x}{2},\ 0<x<2,\ t>0,$
$u|_{t=0}=0,\ u_x|_{x=0}=0,\ u_x|_{x=2}=0;$

д) $u_t=u_{xx}\qquad+6u+x^2(1-6t)-2(t+3x)+\sin 2x,$
$u|_{t=0}=x,\ u_x|_{x=0}=1,\ u_x|_{x=\pi}=2\pi t+1.$

Отг. а) $t\cos x+\frac{1}{8}(e^{-8t}-1)\cos 3x;$

б) $xt + e^{x-t-\pi^2 t}\sin \pi x$;

в) $x + t\sin x + \frac{1}{8}(1 - e^{-8t})\sin 3x$;

г) $\frac{1}{\pi^2}\left(1 - e^{-9\pi^2 t}\right)\cos\frac{\pi x}{2}$;

д) $x^2 t + x + \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n[1 - e^{-(4n^2+4n-5)t}]\cos(2n+1)x$,

$$c_n = \frac{-4}{(2n+3)(2n-1)(4n^2+4n-5)}.$$

14.6. Даден е тънък хомогенен прът с дължина l. Началната температура във всяка точка x от него е равна на Ax/l. Върху края $x = 0$ се поддържа нулева температура, а краят $x = l$ изстива по закона $u(l,t) = Ae^{-t}$, $t \geq 0$. Намерете разпределението на температурата във вътрешните точки на пръта за времена $t > 0$.

Упътване. Търсете решението във вида $u(x,t) = A\frac{x}{l}e^{-t}$ $+v(x,t)$.

Задачата за разпространението на топлината в хомогенно кълбо с радиус R и център в началото на координатната система в случай, че температурата на произволна точка от кълбото зависи само от разстоянието на тази точка до центъра, води до решаване на уравнението на топлопроводността

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(u_{rr} + \frac{2}{r}u_r\right) \equiv \frac{a^2}{r}(ru)_{rr} \tag{5}$$

при начално условие

$$u|_{t=0} = u_0(r). \tag{6}$$

Ако през повърхността на кълбото се извършва топлообмен по закона на Нютон с околната среда, която е с нулева температура, граничното условие ще бъде

$$(u_r + hu)|_{r=R} = 0. \tag{7}$$

В частност, ако върху сферата се поддържа нулева температура, имаме $u|_{r=R} = 0$, а ако тя е топлоизолирана, то $u_r|_{r=R} = 0$.

Полагайки $v = ru$, получаваме

$$v_t = a^2 v_{rr},\ 0 < r < R, t > 0, \tag{8}$$

$$(9) \qquad v|_{t=0} = ru_0(r), v|_{r=0} = 0, \left[v_r + \left(h - \frac{1}{R}\right) v\right]_{r=R} = 0.$$

По такъв начин задача (5) — (7) се сведе до задача (8) — (9) за разпространението на топлината в прът (едномерна задача).

14.7. Дадено е хомогенно кълбо с радиус R и център в началото на координатната система. Определете температурата в кълбото, ако външната температура се поддържа нулева, а началната температура е $u|_{t=0} = u_0(r)$, т.е. зависи само от разстоянието до центъра на кълбото.
Отг.

$$\frac{2}{Rr} \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\left(\frac{ak\pi}{R}\right)^2 t} \sin \frac{k\pi r}{R}, a_k = \int_0^R ru_0(r) \sin \frac{k\pi r}{R} dr.$$

14.8. Намерете разпределението на температурата в хомогенно кълбо с радиус R, вътре в което, започвайки от момента време $t = 0$, действа топлинен източник с постоянна плътност Q. На повърхността на кълбото постоянно се поддържа нулева температура. Началната температура на кълбото е също нула.

Упътване. Задачата води до решаване на уравнението

$$u_t = a^2 \left(u_{rr} + \frac{2}{r} u_r\right) + \frac{Q}{c\rho},$$

при условията: $u(0,t)$ е с крайна стойност, $u(r,0) = 0$, $u(R,t) = 0$.
Отг.

$$u(r,t) = \frac{Q}{6k}(R^2 - r^2) + \frac{2QR^3}{\pi^3 kr} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2 t}{R^2}} \sin \frac{n\pi r}{R},$$

където k е коефициентът на топлопроводност и $a^2 c\rho = k$.

§ 15. Елиптични уравнения

15.1 Намерете решение $u \in C(\overline{D}) \cap C^2(D)$ на уравнението на Лаплас

$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ в } D = \{0 < x < a, 0 < y < b\},$$

което приема върху границата Γ на D зададените стойности $u|_\Gamma = f$ (задачата на Дирихле за правоъгълника), където функцията f е частично гладка върху Γ.

Решение. Търсим $u(x,y)$ във вида

$$u(x,y) = v(x,y) + A + Bx + Cy + Exy \equiv v(x,y) + u_0(x,y),$$

където константите A, B, C и E определяме така, че функцията v да е нула във върховете на правоъгълника. Функцията v търсим във вида $v = v_1 + v_2$, където

$$v_{1xx} + v_{1yy} = 0; v_1|_{x=0} = v_1|_{x=a} = 0; v_1|_{y=0} = \psi_0(x), v_1|_{y=b} = \psi_1(x),$$

$$v_{2xx} + v_{2yy} = 0; v_2|_{x=0} = \varphi_0(y), v_2|_{x=a} = \varphi_1(y); v_2|_{y=0} = v_2|_{y=b} = 0,$$

като например $\psi_0(x) = f(x,0) - u_0(x,0)$. Ще решим задачата за v_1. Полагайки $v_1(x,y) = X(x)Y(y)$ в уравнението и в хомогенните гранични условия (при $x = 0$ и $x = a$), достигаме до задачата

$$X'' + \lambda X = 0, Y'' - \lambda Y = 0, X(0) = X(a) = 0.$$

Оттук следва (вж. зад. 15.2 а))

$$v_1(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{k\pi}{a}x \left(A_k \mathrm{sh}\frac{k\pi}{a}y + B_k \mathrm{ch}\frac{k\pi}{a}y\right)$$

Замествайки в нехомогенните гранични условия, намираме A_k и B_k. След преработка получаваме

$$(1) \qquad v_1(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{k\pi}{a}x \left[\psi_{1k}\frac{\mathrm{sh}\frac{k\pi}{a}y}{\mathrm{sh}\frac{k\pi}{a}b} + \psi_{0k}\frac{\mathrm{sh}\frac{k\pi}{a}(b-y)}{\mathrm{sh}\frac{k\pi}{a}b}\right],$$

където $\psi_{ik} = \frac{2}{a}\int\limits_0^a \psi_i(x)\sin\frac{k\pi}{a}x dx$. Тъй като $\sum\limits_k |\psi_{ik}| < \infty$, $i = 1,2$ (докажете!), редът за v_1 е равномерно сходящ в $\overline{D}$ и $v_1 \in C(\overline{D})$. Членовете на реда са хармонични функции в D. Следователно и функцията v_1 е хармонична в D по теоремата на Харнак.* Това може да се види и директно. Наистина всички редове, получени от (1) с почленно диференциране, са равномерно сходящи

---

*Ако един ред от хармонични функции е равномерно сходящ във всяко компактно подмножество на областта D, той е хармонична функция в D.

(докажете!) в областта $\delta < y < b - \delta$ за произволно $\delta > 0$, т.е. $v_1 \in C^\infty(D)$. Понеже членовете на реда (1) са хармонични функции и диференцираме почленно, то и функцията v_1 е хармонична.

Функцията v_2 се получава след замяната във формула (1) на x с y, ψ_i с φ_i и a с b. Така намерихме функцията $u \in C(\overline{D})$, която е решение на задачата.

15.2. Решете задача 15.1 при $\varphi_0(y) = \alpha y(b-y)$, $\psi_0(x) = \beta \sin\frac{\pi x}{a}$, $\varphi_1(y) = 0$, $\psi_1(x) = 0$.

Отг. $u(x,y) = \beta \dfrac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{a}(b-y)}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{a}b} \sin\dfrac{\pi x}{a}$

$$+\frac{8\alpha b^2}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\frac{(2k+1)\pi}{b}(a-x)}{(2k+1)^3}\cdot\frac{\sin\frac{(2k+1)\pi y}{b}}{\operatorname{sh}\frac{(2k+1)\pi a}{b}}.$$

15.3. Решете следните задачи, в които на част от границата се задава функцията, а на останалата — нормалната производна:

а) $\Delta u = 0$, $0 < x < 1$, $0 < y < 2$,
$u|_{x=0} = 1$, $u|_{y=0} = x+1$, $u_x|_{x=1} = \sin\frac{3\pi}{4}y$, $u_y|_{y=2} = 0$;

б) $\Delta u = 0$, $0 < x < 1$, $0 < y < 2$,
$u|_{y=0} = 0$, $u|_{y=2} = 1$, $u_x|_{x=0} = 0$, $u_x|_{x=1} = \sin 2\pi y$.

Отг. на б) $\frac{y}{2} + \dfrac{\operatorname{ch}2\pi x \sin 2\pi y}{2\pi \operatorname{sh}2\pi}$.

15.4. Намерете ограничено решение $u \in C(\overline{D} \setminus [(0,0) \bigcup (a,0)]) \bigcap C^2(D)$ на задачата:
$\Delta u = 0$ в $D = \{0 < x < a,\ y > 0\}$,
$u|_{y=0} = 1$, $u|_{x=0} = 0$, $u|_{x=a} = 0$.
Определете граничните значения на $u(x,y)$ в точките $(0,0)$ и $(a,0)$!

Забележка. Това решение е единствено (вж. [8], стр. 225, упр. 4).

Решение. Разделянето на променливите води до частните решения

$$u_k(x,y) = \sin\frac{k\pi x}{a}\left(A_k e^{-\frac{k\pi}{a}y} + B_k e^{\frac{k\pi}{a}y}\right), k = 1, 2, \ldots.$$

Понеже функцията $u(x, y)$ е ограничена при $y \to \infty$, следва $B_k = 0$. Докажете, че функцията

$$u(x,y) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}e^{-\frac{(2k+1)\pi}{a}y}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{a}$$

е решение на задачата (вж. зад. 13.4).

Редът, който дефинира $u(x, y)$, може да се сумира за $y > 0$, където е абсолютно сходящ. Наистина да означим $z = \exp\left(\frac{-\pi y + i\pi x}{a}\right)$. Докажете, че при $|z| < 1$ е вярно

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}z^{2k+1} = \frac{1}{2}\mathrm{Log}_0\frac{1+z}{1-z}, \mathrm{Log}_0 v = \ln|v| + i\arg v,$$

където $-\pi < \arg v \leq \pi$, и оттук получете

$$u(x,y) = \frac{4}{\pi}\mathrm{Im}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\left(e^{-\frac{\pi y}{a}}e^{\frac{i\pi x}{a}}\right)^{2k+1}\right\} = \frac{2}{\pi}\arg\frac{(1+z)(1-\overline{z})}{|1-z|^2}$$

$$= \frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}\frac{2\mathrm{Im}z}{1-|z|^2} = \frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}\left(\frac{\sin\frac{\pi x}{a}}{\mathrm{sh}\frac{\pi y}{a}}\right).$$

Проверете директно, че получената функция е решение на задачата, ако при $y = 0$ я додефинираме като $u(x, 0) = 1$. Докажете, че в точките $(0,0)$ и $(a, 0)$ гранични значения на $u(x, y)$ са всички числа от интервала $[0, 1]$.

Забележка 1. От решението на тази задача при $a \to \infty$ се получава (докажете!) единственото ограничено решение на уравнението на Лаплас в областта $\{x > 0,\ y > 0\}$ при гранични условия $u|_{x=0} = 0$, $u|_{y=0} = 1$, което е $u(x, y) = \frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}\frac{y}{x}$.

Забележка 2. С помощта на конформни изображения тези задачи са решени в [1], зад. 330, 332.

15.5. Намерете непрекъсната и ограничена в полуивицата $0 \leq x \leq 2$, $y \geq 0$ функция, която е хармонична в $0 < x < 2$, $y > 0$ и удовлетворява условията

$$u_x|_{x=0} = 0, u|_{x=2} = 0, u|_{y=0} = 2 - x.$$

Отг. $\frac{16}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}e^{-\frac{(2k+1)\pi}{4}y}\cos\frac{(2k+1)\pi x}{4}$.

За двумерни области с праволинейни граници методът на Фурие беше приложим, когато областта имаше вида $\alpha < x < \beta$, $\gamma < y < \delta$. Тогава "разделяхме променливите" x и y. Естествено за кръгови области е необходимо да се работи с други независими променливи, например с радиус-вектора ρ и полярния ъгъл φ. Тогава за кръга $x^2 + y^2 < 1$ границата се задава с $\rho = 1$ и е подходящо да "разделяме променливите" ρ и φ.

15.6. Решете задачата на Дирихле за вътрешността на кръга: търси се решение $u \in C(\overline{D}) \bigcap C^2(D)$ на уравнението на Лаплас

$$\Delta u = 0 \text{ в } D = \{x^2 + y^2 < a^2\},$$

което удовлетворява граничните условия

$$u|_{x^2+y^2=a^2} = f(x, y),$$

където $f \in C^1$.

Решение. След смяната $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ в полярни координати (ρ, φ) получаваме задачата (вж. зад. 9.11)

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0, \tag{2}$$

$$u|_{\varrho=a} = f(\varphi). \tag{3}$$

Търсим решения на уравнението (2) от вида $u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$. От (2) получаваме

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0, \lambda = \text{const}, \tag{4}$$

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) - \lambda R = 0. \tag{5}$$

Понеже точката с координати $(\rho, \varphi + 2\pi)$ и (ρ, φ) е една и съща, то $u(\rho, \varphi + 2\pi) = u(\rho, \varphi)$, откъдето $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$. Оттук и от (4) получаваме (докажете!) $\sqrt{\lambda} = n$, където n е цяло и

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi, n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Уравнението (5) е ойлерово. Решете го при $\sqrt{\lambda} = n$! Окончателно получаваме

$$R_n(\rho)\Phi_n(\varphi) = (C_n\rho^n + D_n\rho^{-n})(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), n = 1, 2, \ldots; \tag{6}$$

$$R_0\Phi_0 = C_0 + D_0 \ln\ \rho.$$

За вътрешната задача на Дирихле (която разглеждаме сега) $\rho = 0$ е точка от областта. Следователно трябва да положим $D_n = 0$, $D_0 = 0(\rho^{-n} \to \infty$ и $\ln \rho \to -\infty$ при $\rho \to 0)$ и решението търсим от вида

$$u(\rho, \varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi). \tag{7}$$

От граничните условия (3) определяме A_n и B_n и намираме

$$u(\rho, \varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi), \tag{8}$$

където a_n и b_n са коефициентите на Фурие за функцията f, т. е.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta, a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta, \tag{9}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta\ d\theta.$$

Понеже $f \in C^1$ и $f(0) = f(2\pi)$ (защо?), получаваме $\sum(|a_n| + |b_n|) < \infty$, така че редът (8) е абсолютно и равномерно сходящ в затворения кръг $0 \le \rho \le a$. Следователно функцията $u(\rho, \varphi)$ е непрекъсната в $\overline{D}$ и е решение на задачата (2), (3) (докажете!).

Ще сумираме реда (8). Означавайки $z = \frac{\rho}{a} e^{i(\varphi - \theta)}$, за $\rho < a$ имаме

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^n \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n(\varphi - \theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \mathrm{Re} \left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n\right] d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \frac{1 - |z|^2}{|1 - z|^2} d\theta,$$

откъдето получаваме интеграла на Поасон

$$u(\rho,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\theta)\frac{a^2-\rho^2}{a^2-2a\rho\cos(\varphi-\theta)+\rho^2}d\theta,\ \rho < a.$$

15.7. Решете външната задача на Дирихле за кръга: в областта $\rho > a$ намерете ограничено решение на уравнението на Лаплас, непрекъснато при $\rho \geq 0$ и удовлетворяващо условието (3).

Упътване. В (6) сега е необходимо да положим $C_n = 0$, $D_0 = 0$.

Отг. $u(\rho,\varphi) = a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{\rho}\right)^n(a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi)$.

15.8. Намерете решение на уравнението на Лаплас в пръстена $a < \rho < b$ при гранични условия $u|_{\varrho=a} = f(\varphi)$, $u|_{\varrho=b} = g(\varphi)$.

Упътване. Търсете решението във вида $u = \sum \Phi_n R_n$, където Φ_n и R_n се дават от (6), т.е.

$$u(\rho,\varphi) = C_0 + D_0\ln\ \rho$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(A_n\rho^n + \frac{C_n}{\rho^n}\right)\cos n\varphi + \left(B_n\rho^n + \frac{D_n}{\rho^n}\right)\sin n\varphi\right].$$

15.9. Решете следните задачи на Дирихле:

1. $\Delta u = 0$ в $x^2+y^2 < 1$; $u|_{x^2+y^2=1} = x^2$.
2. $\Delta u = 0$ в $\rho < 1$; $u|_{\varrho=1} = \sin^3\varphi$.
3. $\Delta u = 0$ в $x^2+y^2 > 1$; $u|_{x^2+y^2=1} = x$.
4. $\Delta u = 0$ в $1 < \rho < 2$; $u|_{\varrho=1} = u_1$, $u|_{\varrho=2} = u_2$ $(u_i = \text{const})$.
5. $\Delta u = 0$ в $1 < \rho < 2$; $u|_{\varrho=1} = \sin\varphi$, $u|_{\varrho=2} = \sin^3\varphi$.
6. $\Delta u = 2A$ в $1 < \rho < 2$; $u|_{\varrho=1} = u_1$, $u|_{\varrho=2} = u_2$ $(A, u_i = \text{const})$.
7. $\Delta u = -xy$ в $\rho < 2$; $u|_{\varrho=2} = 0$.

Упътване към задачи 6 и 7. Търсете решението във вида $u = v + w$, където $w(x,y)$ е частно решение на нехомогенното уравнение. Например в задача 7 можем да вземем $w(x,y) = -\frac{1}{6}x^3y$ и за v ще имаме

$$\Delta u = 0 \text{ в } \rho < 2; v(2,\varphi) = \frac{1}{6}x^3y|_{\varrho=2} = \frac{8}{3}\cos^3\varphi\sin\varphi.$$

Отг. 1. $u(x,y) = \frac{1}{2}(1 + x^2 - y^2)$.

2. $u(\rho,\varphi) = \frac{\rho}{4}(3\sin\varphi - \rho^2\sin 3\varphi)$.

3. $u(\rho,\varphi) = \frac{1}{\rho}\cos\varphi$. 4. $u(\rho,\varphi) = u_1 + (u_2 - u_1)\frac{\ln\,\rho}{\ln\,2}$.

5. $u(\rho,\varphi) = \frac{1}{6}\left(\rho + \frac{5}{\rho}\right)\sin\varphi + \frac{2}{63}\left(\frac{1}{\rho^3} - \rho^3\right)\sin 3\varphi$.

6. $u(\rho,\varphi) = u_2 + A(\rho^2 - 4) + \frac{u_1 - u_2 + 3A}{\ln\,2}\ln\frac{2}{\rho}$.

7. $u(\rho,\varphi) = \frac{\rho^2}{24}(4 - \rho^2)\sin 2\varphi$.

15.10. Решете задачата на Нойман за кръга: намерете хармонична в кръга $\rho < a$ функция, непрекъсната за $\rho \leq a$ и удовлетворяваща условието

$$(10) \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\varrho=a} = f(\varphi),$$

където n е единичният вектор на външната нормала към $\rho = a$, $f \in C^1$ и

$$(11) \qquad \int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi = 0.$$

Забележка. Условието (11) е необходимо за съществуване на решение.

Упътване. Заместете реда (7) в (10) и от $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\varrho=a}$ $= \left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\varrho=a}$ (докажете!) получете

$$(12) \qquad u(\rho,\varphi) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^k}{ka^{k-1}}(a_k\cos k\varphi + b_k\sin k\varphi),$$

където a_k и b_k се дават от (9), а A_0 е произволна константа. Докажете, че редът (12) дава решение на задачата. Сумирайте го и получете формулата на Дини

$$u(\rho,\varphi) = A_0 - \frac{a}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\theta)\ln\,[a^2 - 2a\rho\cos(\varphi-\theta)+\rho^2]d\theta.$$

15.11. Поставете и решете външната задача на Нойман за кръга!

15.12. Решете следните задачи.

1. $\Delta u = 0$ в $\rho < 1$; $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\varrho=1} = A\cos\varphi$.
2. $\Delta u = 0$ в $\rho < 2$; $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\varrho=2} = \sin^2\varphi$.
3. $\Delta u = 12(x^2-y^2)$ в $1 < \rho < 2$; $u|_{\varrho=1} = 0$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\varrho=2} = 0$.
4. $\Delta u = 0$ в $1 < \rho < 2$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\varrho=1} = 2\cos\varphi$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\varrho=2} = \sin^3\varphi$.

15.13. Намерете решение на уравнението на Лаплас в сектора $0 < \rho < a$, $0 < \varphi < \alpha$ при гранични условия

$$u|_{\varphi=0} = 0, u|_{\varphi=a} = 0, u|_{\varrho=a} = f(\varphi),$$

където $f \in C^1$ и $f(0) = f(\alpha) = 0$, а α е константа, $0 < \alpha < 2\pi$.

Упътване. Търсим решения на уравнението на Лаплас, които имат вида $u(\rho,\varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi) \not\equiv 0$ и удовлетворяват граничните условия върху $\varphi = 0$ и $\varphi = \alpha$. За функциите R и Φ получаваме уравненията (4) и (5) и условията $\Phi(0) = 0$, $\Phi(\alpha) = 0$. Собствените стойности и функции са (вж. зад. 13.2 и 15.6)

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{\alpha}\right)^2, \Phi_k(\varphi) = \sin\frac{k\pi}{\alpha}\varphi, R_k(\rho) = A_k\rho^{\frac{k\pi}{\alpha}} + B_k\rho^{-\frac{k\pi}{\alpha}}, k = 1,2,\ldots.$$

Полагаме $B_k = 0$ (защо?) и получаваме

$$u(\rho,\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} R_k(\rho)\Phi_k(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\rho^{\frac{k\pi}{\alpha}}\sin\frac{k\pi}{\alpha}\varphi.$$

От граничното условие при $\rho = a$ намираме

$$A_k a^{\frac{k\pi}{\alpha}} = a_k = \frac{2}{\alpha}\int\limits_0^{\alpha} f(\varphi)\sin\frac{k\pi}{\alpha}\varphi d\varphi.$$

15.14. Решете задача 15.13 при $f(\varphi) = u_1$, $0 < \varphi < \frac{\alpha}{2}$; $f(\varphi) = u_2$, $\frac{\alpha}{2} < \varphi < \alpha$, където u_1 и u_2 са константи.

Упътване. Аналогично на задача 15.4 сумирайте реда. Докажете, че полученото решение е непрекъснато в $\{\rho \leq a, 0 \leq \varphi \leq \alpha\}$ с изключение на трите точки с $\rho = a$ и съответно $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\alpha}{2}$, $\varphi = \alpha$.

Отг. $\frac{u_1 + u_2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{2\rho^{\frac{\pi}{\alpha}}\sin\frac{\pi}{\alpha}\varphi}{a^{\frac{2\pi}{\alpha}} - \rho^{\frac{2\pi}{\alpha}}} + \frac{u_1 - u_2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{2\rho^{\frac{2\pi}{\alpha}}\sin\frac{2\pi}{\alpha}\varphi}{a^{\frac{4\pi}{\alpha}} - \rho^{\frac{4\pi}{\alpha}}}.$

15.15. Решете задача 15.13 при $f(\varphi) = A\varphi$. Докажете, че решението е непрекъснато в затворения сектор с изключение на точката $\rho = a$, $\varphi = \alpha$.

15.16. Намерете хармонична функция в сектора $\rho < a$, $0 < \varphi < \alpha$, за която

$$u|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=\alpha} = u_1, u|_{\varrho=a} = u_2 \ (u_i \ - \ \text{const}).$$

Упътване. За функцията $v = u - u_1$ вж. задача 15.13.

15.17. Решете задачата на Нойман:

$$\Delta u = 0 \text{ в } \rho < a, 0 < \varphi < \alpha,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\varphi=0} = 0, \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\varphi=\alpha} = 0, \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\varrho=a} = f(\varphi).$$

Упътване. Покажете, че $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\varrho=a} = \left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\varrho=a}$ и

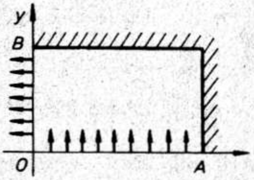
$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\varphi=\alpha} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(-yu_x - xy_y) = \left.\frac{1}{\rho}u_\varphi\right|_{\varphi=\alpha}, \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\varphi=0} = -\left.\frac{1}{\rho}u_\varphi\right|_{\varphi=0}.$$

Преминете към полярни координати (ρ, φ) и решете задачата аналогично на 15.13. Не забравяйте, че $\lambda = 0$ тук е собствена стойност на съответната задача на Щурм — Лиувил!

15.18. Решете следните задачи:

1. $\Delta u = 0$ в $x^2 + y^2 < 1$, $y > 0$;
   $u_y(x, 0) = 0$, $-1 < x < 1$; $u = 3x - x^3$ при $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$.
2. $\Delta u = 0$ в $x^2 + y^2 < 1$, $x > 0$, $y > 0$;
   $u_y(x, 0) = 0$, $0 < x < 1$; $u(0, y) = 0$, $0 < y < 1$;
   $u = 2x^2$ при $x^2 + y^2 = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.
3. $\Delta u = 0$ в $1 < x^2 + y^2 < 4$, $x > 0$, $y > 0$;
   $u_x(0, y) = 0$, $1 < y < 2$; $u(x, 0) = 0$, $1 < x < 2$;
   $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$ при $x^2 + y^2 = 4$, $u = x^2 y$ при $x^2 + y^2 = 1$, $x > 0$, $y > 0$.
4. $\Delta u = 0$ в $x^2 + y^2 < 4$, $x > 0$, $y > 0$;
   $u_x(0, y) = 0$, $0 < y < 2$; $u_y(x, 0) = 0$, $0 < x < 2$;
   $u = 1 + y^2$ при $x^2 + y^2 = 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.
5. $\Delta u = y^5$, $x^2 + y^2 < 1$, $y > 0$;
   $u_y(x, 0) = 0$, $-1 < x < 1$; $u = y^3$ при $x^2 + y^2 = 1$, $y > 0$.

15.19. Дадена е тънка правоъгълна пластинка $OACB$ (вж. черт. 15.1). През страната OA равномерно се вкарва топлина, през OB равномерно се извежда същото количество, а останалите две страни AC и BC са покрити с топлинна изолация (т.е. потокът там е нула). Намерете стационарното разпределение на температурата в точките на пластината.



Черт. 15.1

Упътване. Стигаме до задачата

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, 0 < x < a, 0 < y < b,$$

$$u_x|_{x=0} = \frac{Q}{kb}, u_x|_{x=a} = 0, \qquad u_y|_{y=0} = -\frac{Q}{ka}, u_y|_{y=b} = 0,$$

където с Q е означено количеството топлина, влизащо през OA и излизащо през OB, а k е коефициентът на вътрешна топлопроводност на пластината.

Отг. $u(x, y) = \dfrac{Q}{2kab}[(y - b)^2 - (x - a)^2] + \text{const}.$

Допълнение

Разделяне на променливите и функции на Бесел

Редица въпроси от математическата физика и техниката водят до решаване на гранични задачи за частни диференциални уравнения в кръгови, кълбовидни или цилиндрични области. Един от класическите начини за намиране на формални решения — методът за разделяне на променливите, се натъква в този случай на необходимостта от разглеждане на беселовите функции. За тази цел се налага да се приведат без доказателствата някои техни свойства, които да се упражняват впоследствие в процеса на решаване на конкретни задачи. Строгото обосноваване на получените формули се извършва или чрез теорията на интегралните уравнения, или чрез използването на по-дълбоки резултати за самите беселови функции.

Ние ще се ограничим с привеждането на няколко свойства и няколко задачи от този тематичен кръг.

Кратък обзор върху функциите на Бесел

Да напомним, че известната гама-функция на Ойлер $\Gamma(x)$[31] е дефинирана и безбройно много пъти диференцируема за всяко $x \in R \setminus Z_-$, $Z_- = \{0, -1, -2, \ldots\}$. Освен това тя удовлетворява следните релации:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), x \notin Z_-; \Gamma(n+1) = n!, n \in Z_+ = \{0,1,2,\ldots\};$$

$$\lim_{x \to -n} |\Gamma(x)| = +\infty, n \in Z_+.$$

1. Нека ν е реална константа. Обикновеното диференциално уравнение

$$y'' + \frac{1}{\rho}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right) y = 0, \rho > 0, y = y(\rho), \tag{1}$$

наричаме беселово уравнение.

Веднага се проверява, че редът

$$J_\nu(\rho) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2j+\nu}}{\Gamma(j+1)\Gamma(j+\nu+1)}, \rho > 0,$$

е решение на (1) и $\left(\frac{\rho}{2}\right)^{-\nu} J_\nu(\rho)$ е четна функция. Отбелязваме, че функцията $J_\nu(\rho)$ е добре дефинирана за $\nu \in Z_-$, ако се условим да считаме, че $\frac{1}{\Gamma(j+1+\nu)} = 0$ за онези $j \in Z_+$, за които $j + \nu + 1 \in Z_-$.

Тогава:

а) $J_\nu(\rho)$ и $J_{-\nu}(\rho)$ са линейно независими функции за всяко $\nu \notin Z$ и $J_\nu(0) = 0$, $\nu > 0$; $J_{-\nu}(0) = \infty$, $\nu > 0$, $\nu \notin Z_+$.

б) щом $n \in Z_+$, то $J_{-n}(\rho) = (-1)^n J_n(\rho)$. Ако $\nu = n \in Z_+$, то наред с $J_n(\rho)$ ни трябва второ, линейно независимо от J_n решение на (1). Това решение можем да вземем да бъде така наречената нойманова функция:

$$N_n(\rho) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(\rho) - (-1)^n\frac{\partial}{\partial\nu}J_{-\nu}(\rho)\,\right]\Bigg|_{\nu=n}.$$

Тя удовлетворява (1) за $\nu = n$ и има следното асимптотично поведение при $\rho \to +0$:

$$N_n(\rho) = \begin{cases} c_n\rho^{-n}(1+o(1)), & \rho \to 0, \quad n \geq 1, \quad c_n = \text{const} \neq 0 \\ c_0 \ln\ \rho(1+o(1)), & \rho \to 0, \qquad\qquad\quad c_0 = \text{const} \neq 0. \end{cases} \tag{2}$$

2. Нули на беселовите функции.

а) При $\rho > 0$ уравнението $J_\mu(\rho) = 0$ има само прости корени $\mu_j^{(\nu)}$. Те са безбройно много:

$$0 < \mu_1^{(\nu)} < \mu_2^{(\nu)} < \cdots < \mu_n^{(\nu)} < \cdots \to +\infty$$

и $\lim\limits_{n\to\infty}(\mu_n^{(\nu)} - \mu_{n-1}^{(\nu)}) = \pi$.

б) Между всеки два положителни корена на $J_\nu(\rho) = 0$ лежи точно единкорен на $J_{\nu+1}(\rho) = 0$.

в) $J'_\nu(\rho)$ и $J_{\nu+1}(\rho)$ нямат общи положителни нули.

г) $J'_\nu(\rho) = 0$ има безбройно много положителни корени

$$0 < \gamma_1^{(\nu)} < \gamma_2^{(\nu)} < \cdots < \gamma_n^{(\nu)} < \cdots \to +\infty.$$

3. Рекурентни формули, свързващи беселовите функции с различен индекс ν.

Между функциите $J_{\nu-1}$, J_ν и $J_{\nu+1}$ са валидни следните съотношения:

$$\frac{d}{d\rho}(\rho^\nu J_\nu(\rho)) = \rho^\nu J_{\nu-1}(\rho),\ \rho > 0, \tag{3}$$

$$\frac{d}{d\rho}\left(\frac{J_\nu(\rho)}{\rho^\nu}\right) = -\frac{J_{\nu+1}(\rho)}{\rho^\nu},\ \rho > 0, \tag{4}$$

$$J_{\nu+1}(\rho) = -J_{\nu-1}(\rho) + \frac{2\nu}{\rho}J_\nu(\rho),\ \rho > 0, \tag{5}$$

$$J_{\nu+1}(\rho) = J_{\nu-1}(\rho) - 2J'_\nu(\rho),\ \rho > 0. \tag{6}$$

В частност $J'_0 = -J_1$, $(\rho J_1)' = \rho J_0$.

Да споменем също, че $J_{1/2}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\sin\rho$, $J_{-1/2}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\cos\rho$.

4. Ортогонални свойства на беселовите функции.

Разглеждаме компактния интервал $[0, r]$, $r > 0$, и нека функцията $J_\nu(\rho)$, $\nu > -1$, притежава положителни нули $\lambda \neq \mu$. Тогава са изпълнени:

$$\int\limits_0^r \rho J_\nu\left(\lambda\frac{\rho}{r}\right) J_\nu\left(\mu\frac{\rho}{r}\right) d\rho = 0, \tag{7}$$

$$\int\limits_0^r \rho J_\nu^2\left(\lambda\frac{\rho}{r}\right) d\rho = \frac{r^2}{2} J_\nu'(\lambda) = \frac{r^2}{2} J_{\nu+1}^2(\lambda). \tag{8}$$

Да предположим, че $\alpha \neq \beta$ са положителни корени на $J_\nu'(\lambda) = 0$, $\nu > -1$. Доказва се, че

$$\int\limits_0^r \rho J_\nu\left(\alpha\frac{\rho}{r}\right) J_\nu\left(\beta\frac{\rho}{r}\right) d\rho = 0, \tag{9}$$

$$\int\limits_0^r \rho J_\nu^2\left(\alpha\frac{\rho}{r}\right) d\rho = \frac{r^2}{2}\left(1 - \frac{\nu^2}{\alpha^2}\right) J_\nu^2(\alpha). \tag{10}$$

5. Развиване на функции в ред на Фурие — Бесел.

В интервала $[0, r]$ разглеждаме системата от беселови функции $\left\{J_\nu\left(\mu_n^{(\nu)}\frac{\rho}{r}\right)\right\}_{n=1}^\infty$, $\nu > -1$, където $\mu_n^{(\nu)}$ се дават от 2 а). Интересуваме се от въпроса, кога една функция $f \in C[0, r]$ може да се развие в реда

$$\sum_{n=1}^\infty c_n J_\nu\left(\mu_n^{(\nu)}\frac{\rho}{r}\right), c_n = \frac{\int\limits_0^r \rho f(\rho) J_\nu\left(\mu_n^{(\nu)}\frac{\rho}{r}\right) d\rho}{J_{\nu+1}^2(\mu_n^{(\nu)})\frac{r^2}{2}}. \tag{11}$$

Абсолютно същия въпрос поставяме и за развитие на $f(\rho)$ в ред от вида

$$d_0 + \sum_{n=1}^\infty d_n J_\nu\left(\gamma_n^{(\nu)}\frac{\rho}{r}\right), \text{ където } d_0 = \frac{2}{r^2}\int\limits_0^r \rho f(\rho) d\rho, \tag{12}$$

$$d_n = \frac{\int\limits_0^r \rho f(\rho) J_\nu\left(\gamma_n^{(\nu)}\frac{\rho}{r}\right) d\rho}{\frac{r^2}{2}\left(1 - \frac{\nu^2}{\gamma_n^{(\nu)^2}}\right) J_\nu^2(\gamma_n^{(\nu)})} \text{ и } \gamma_n^{(\nu)} \text{ са дефинирани чрез 2 г).}$$

Редовете (11) и (12) наричаме редове на Фурие — Бесел.

За читателя с вкус към прецизиране на нещата предлагаме два критерия за представяне на една функция чрез абсолютно и равномерно сходящ фурие-беселов ред и за почленната му диференцируемост.

Теорема 1. **Нека $f \in C^2[0,r]$, $f(0) = f'(0) = 0$ и $f(r) = 0$. Тогава редът (11) на функцията $f(\rho)$ е абсолютно и равномерно сходящ в $[0,r]$ при $\nu \geq 0$ и сумата му съвпада с $f(\rho)$ за $\nu > 0$.**

Следствие 1. **Системата от функции $\left\{\sqrt{\rho} J_\nu \left(\lambda_n^{(\nu)} \frac{\rho}{r}\right)\right\}$, $\nu \geq 0$, образува ортогонална база в $L_2(0,r)$.**

Теорема 2. **Да предположим, че $f \in C^4[0,r]$, $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ и $f(r) = f'(r) = f''(r) = 0$. Тогава редът (11) е двукратно почленно диференцируем в интервала $[0,r]$ при $\nu = 0, 1$ и $\nu \geq 2$.**

Да споменем най-сетне, че функциите $\left\{\sqrt{\rho}, \sqrt{\rho} J_0 \left(\gamma_n^{(0)} \frac{\rho}{r}\right)\right\}$ образуват ортогонална база в $L_2(0,r)$ и че $\varphi \equiv 1$ е решение на $\varphi'' + \frac{1}{\rho}\varphi' + 0 \cdot \varphi = 0$, $\varphi'(1) = 0$.

Доказателствата на горните твърдения са изложени подробно в [31], стр. 247 – 304 и [19], стр. 632 – 671.

1*. Намерете собствените функции и собствените стойности на задачата на Дирихле за уравнението на Лаплас в кръга $U(r) = \{\xi \in \mathbf{R}^2 : |\xi| < r\}$.

Решение. Ясно е, че трябва да определим онези стойности на реалния параметър $\lambda > 0$ (защо?), за които уравнението

$$\Delta_2 u = -\lambda u, \qquad \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2},$$

$$u|_{S(r)} = 0,$$

има нетривиални решения.

За тази цел да направим полярната смяна $x_1 = \rho \cos\varphi$, $x_2 = \rho \sin\varphi$, $\rho = |x|$, $x = (x_1, x_2)$. Така стигаме до граничната задача

$$u_{\varrho\varrho} + \frac{1}{\rho} u_\varrho + \frac{1}{\rho^2} u_{\varphi\varphi} = -\lambda u,$$

$$u|_{\varrho=r} = 0.$$

От постановката на задачата следва, че $u(\rho, \varphi + 2\pi) = u(\rho, \varphi)$, $\rho \geq 0$ и $|u(0,\varphi)| \leq \text{const}$. Стандартното разделяне на променливите $u = \Phi(\varphi) R(\rho)$ ни довежда до съотношенията

$$\Phi'' + \mu\Phi = 0, \tag{13}$$

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi),$$

$$R'' + \frac{1}{\rho}R' + \left(\lambda - \frac{\mu}{\rho^2}\right) R = 0, \tag{14}$$

$$R(r) = 0, |R(0)| \leq \text{const}.$$

Веднага се съобразява, че собствените стойности и собствените функции на (13) имат вида $\mu_k = k^2$, $k \in \mathbf{Z}_+$, $\Phi_k(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\pm ik\varphi}$. Да отбележим, че въз основа на зад. 1.19 и ойлеровите формули, изразяващи $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ посредством $e^{\pm i\varphi}$, системата $\{\Phi_k(\varphi)\}$ образува ортонормирана база в $L_2(0, 2\pi)$. В (14) правим смяната $\rho \to \frac{\rho}{\sqrt{\lambda}}$ и намираме, че функцията $S(\rho) = R\left(\frac{\rho}{\sqrt{\lambda}}\right)$ удовлетворява беселовото уравнение $S'' + \frac{1}{\rho}S' + \left(1 - \frac{k^2}{\rho^2}\right)S = 0$ и условията $S(\sqrt{\lambda}r) = 0$, $|S(0)| \leq C$. Следователно $S(\rho) = A_1 J_k(\rho)$ $+A_2 N_k(\rho)$, $A_{1,2} = \text{const}$.

Свойство (2) на $N_k(\rho)$ ни учи, че $S(\rho) = J_k(\rho)$, т.е. $R_k(\rho)$ $= J_k(\sqrt{\lambda}\cdot\rho)$ и $= J_k(\sqrt{\lambda}r) = 0$. И така $\sqrt{\lambda}r = \mu_j^{(k)}$, където $\{\mu_j^{(k)}\}$ са положителни корени на $J_k(\mu) = 0$. Търсените собствени стойности и собствени функции на (14) са: $\lambda_j^{(k)} = \left(\frac{\mu_j^{(k)}}{r}\right)^2$, $R_j^{(k)}(\rho)$ $= J_k\left(\frac{\mu_j^{(k)}}{r}\rho\right)$. След ортонормиране (вж. (8)) получаваме собствените функции $u_{j\pm}^{(k)}(\rho, \varphi) = \dfrac{J_k\left(\frac{\mu_j^{(k)}}{r}\rho\right)e^{\pm ik\varphi}}{\sqrt{\pi}r|J_{k+1}(\mu_j^{(k)})|}$ на изходната задача. Нещо повече,

$$J_k\left(\frac{\mu_j^{(k)}}{r}\cdot\rho\right)e^{\pm ik\varphi} = \left(\frac{x_1 \pm ix_2}{2r}\right)^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{|x|^2}{4r^2}\right)^m (\mu_j^{(k)})^{2m+k}}{\Gamma(m+k+1)\Gamma(m+1)},$$

защото $|x|^k e^{\pm ik\varphi} = (x_1 \pm ix_2)^k$. Очевидно $u_{j\pm}^{(k)}(x) \in C^\infty(U(r))$. Непосредствено се проверява чрез полярна смяна и (7), (8), че функциите $u_{j\pm}^{(k)}(x_1, x_2)$ са ортонормирани в $L_2(U(r))$. Нека

$$f(x_2, x_2) \in C_0^\infty(U(r)) \text{ и } \int\limits_{U}\int\limits_{(r)} f(x_1, x_2)\overline{u_{j\pm}^{(k)}(x_1, x_2)}dx_1dx_2 = 0,$$

$j = 1, 2, \ldots,\ k = 0, 1, \ldots$ Установете с помощта на полярна смяна и следствие 1, че $f(x_1, x_2) \equiv 0$.

Така заключаваме, че построената от нас система от собствени функции $\{u_{j\pm}^{(k)}(x)\}$ образува ортонормирана база $L_2(U(r))$.

2. Задача за трептенията на кръгла мембрана, закрепена неподвижно върху окръжността $S(r)$.

Математическият израз се дава от следната смесена задача [31]: да се намери функция $u(x, t)$, за която

$$\begin{aligned} &u_{tt} = \Delta_2 u,\ t > 0,\ x = (x_1, x_2) \in U(r),\ u|_{S(r)} = 0,\\ &u|_{t=0} = u_0(x),\ u_t|_{t=0} = u_1(x);\ u_0,\ u_1 \in C^2\overline{(U(r))},\\ &u_0|_{S(r)} = u_1|_{S(r)} = 0. \end{aligned}$$

Упътване. Преминете в полярни координати, както в зад. 1, и разделете променливите: $u(\rho, \varphi, t) = T(t)v(\rho, \varphi)$. Така ще получите уравненията $T'' + \lambda T = 0$, $\lambda = \text{const}$ и задачата за собствените стойности и собствените функции на задачата на Дирихле за уравнението на Лаплас:

$$v_{\varrho\varrho} + \frac{1}{\rho}v_\varrho + \frac{1}{\rho^2}v_{\varphi\varphi} = -\lambda v,$$

$$v|_{\varrho=r} = 0, |v(0, \varphi)| \leq \text{const}, v(\rho, \varphi + 2\pi) = v(\rho, \varphi),$$

Следователно $\lambda = \lambda_j^{(k)} = \left(\dfrac{\mu_j^{(k)}}{r}\right)^2$, $v_{j\pm}^{(k)} = \dfrac{J_k\left(\dfrac{\mu_j^{(k)}}{r}\rho\right)e^{\pm ik\varphi}}{\sqrt{\pi}r|J_{k+1}(\mu_j^{(k)})|}$. И така $T_j^{(k)}(t) = C_{jk}\cos\dfrac{\mu_j^{(k)}}{r}t + D_{jk}\sin\dfrac{\mu_j^{(k)}}{r}t$. Функцията u търсете от вида

$$u = \sum_{j,k}\left(C_{jk\pm}\cos\frac{\mu_j^{(k)}}{r}t + D_{jk\pm}\sin\frac{\mu_j^{(k)}}{r}t\right)v_{j\pm}^{(k)}(\rho, \varphi). \tag{15}$$

Чрез формално диференциране на (15) се убедете, че

$$C_{jk\pm} = \int\limits_0^r \int\limits_0^{2\pi} \rho u_0(\rho,\varphi)\overline{v_{j\pm}^{(k)}(\rho,\varphi)}d\rho\, d\varphi,$$

$$D_{jk\pm} = \int\limits_0^r \int\limits_0^{2\pi} \frac{r}{\mu_j^{(k)}}\rho u_1(\rho,\varphi)\overline{v_{j\pm}^{(k)}(\rho,\varphi)}d\rho\, d\varphi.$$

Обосноваването на формулата (15) за u се натъква на значителни трудности. Читателят може да намери една система достатъчни условия в [30].

3. Решете граничната задача

$$u_t = \Delta_2 u,\ t > 0,\ x \in U(r),$$
$$u|_{S(r)} = 0,$$
$$u|_{t=0} = u_0(x) \in C^2\overline{(U(r))},\ u_0|_{S(r)} = 0.$$

Отг. $u(\rho,\varphi,t) = \sum\limits_{j,k} e^{-(\frac{\mu_j^{(k)}}{r})^2 t} A_{jk\pm} v_{j\pm}^{(k)}(\rho,\varphi)$, където функциите $v_{j\pm}^{(k)}$ са дефинирани в предната задача, а

$$A_{jk\pm} = \int\limits_0^r \int\limits_0^{2\pi} \rho u_0(\rho,\varphi)\overline{v_{j\pm}^{(k)}}d\rho\, d\varphi.$$

Задача 3 описва изстиването на безкрайно дълъг цилиндър с радиус r, ако е зададена някаква начална температура, а на повърхността му се поддържа нулева температура [31].

4. Решете

$$u_t = u_{\varrho\varrho} + \frac{1}{\rho}u_\varrho,\ t > 0,\ 0 < \rho < r,\ |u|_{\varrho=0}| < \infty,$$
$$u(r,t) = 0,$$
$$u|_{t=0} = f(\rho),\ u_t|_{t=0} = 0.$$

Пресметнете явния вид на коефициентите за:

1) $f(\rho) = 1$; 2) $f(\rho) = 1 - \frac{\rho^2}{r^2}$.

Отг. 1) $u(\rho, t) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} A_j \cos \frac{\mu_j}{r} t J_0\left(\frac{\mu_j}{r}\rho\right)$, $A_j = \frac{2}{J_1(\mu_j)\mu_j}$, където за простота на означенията сме положили $\mu_j \equiv \mu_j^{(0)}$. Използвайте факта, че $\rho J_0 = (\rho J_1)'$.

2) $u(\rho, t) = 8 \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_j^3 J_1(\mu_j)} \cos \frac{\mu_j}{r} t J_0\left(\frac{\mu_j}{r}\rho\right)$.

За да намерите примитивна на $\rho^3 J_0(\rho)$, интегрирайте два пъти по части и приложете (3), (4), (5). По този начин ще получите, че

$$\int\limits_0^{\rho} t^3 J_0(t) dt = \rho^3 J_1 - 4\rho J_1 + 2\rho^2 J_0 = -(\rho^3 - 4\rho) J_0' + 2\rho^2 J_0.$$

5. Намерете функция $u(\rho, t)$, която да притежава следните свойства:

$$u_t = u_{\varrho\varrho} + \frac{1}{\rho} u_{\varrho},\ t > 0,\ 0 < \rho < r,\ |u(0, t)| < \infty,$$
$$u_{\varrho}|_{\varrho = r} = A = \text{const},$$
$$u(\rho, 0) = B = \text{const}.$$

Упътване. Потърсете $u = u_1 + u_2$, така че u_2 да удовлетворява уравнението и граничното условие. За тази цел можете да опитате с $u_2 = \widetilde{u}_2(\rho) + \widetilde{u}_2(t)$. Функцията u_1 пък ще бъде решение на задачата при нулево гранично условие.

Отг. $u(\rho, t) = \frac{A\rho^2}{2r} + \frac{2A}{r} t + B - 2Ar \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\left(\frac{\gamma_j}{r}\right)^2 t}}{\gamma_j^2 J_0(\gamma_j)} J_0\left(\frac{\gamma_j \rho}{r}\right) - \frac{Ar}{4}$, където с $\gamma \equiv \gamma_j^{(0)}$ сме означили положителните корени на уравнението $J_0'(\gamma) = 0$. Не забравяйте, че $\varphi \equiv 1$ е собствена функция на $\varphi'' + \frac{1}{\rho}\varphi' = 0$, $\varphi'(1) = 0$.

6. Решете задачата на Дирихле за уравнението на Лаплас във вътрешността на ограничения цилиндър $S(r) \times (0, l) = \{x \in$

$\mathbf{R}^3 : 0 < x_3 < l,\ x_1^2 + x_2^2 < r^2\}$, ако $u|_{S(r)} = 0$, $u|_{x_3=0} = 0$ и $u|_{x_3=l} = u_0(x_1, x_2)$.

Упътване. Разделете променливите $u(\rho, \varphi, x_3) = v(\rho, \varphi)Z(x_3)$ и сведете към зад. 1 и разглежданията от зад. 2.

Отг. $u(\rho, \varphi, x_3) = \sum\limits_{j,k} c_{jk\pm} \dfrac{\operatorname{sh}\frac{\mu_j^{(k)}}{r}x_3}{\operatorname{sh}\frac{\mu_j^{(k)}}{r}l} v_{j\pm}^{(k)}(\rho, \varphi)$, където

$$c_{jk\pm} = \int_0^r \int_0^{2\pi} \rho u_0(\rho, \varphi) \overline{v_{j\pm}^{(k)}(\rho, \varphi)} d\rho\, d\varphi,$$

7. Намерете функция $u(\rho, t)$, $|u(0, t)| < \infty$, за която

$$u_{tt} = u_{\varrho\varrho} + \frac{1}{\rho} u_{\varrho},\ t > 0,\ 0 < \rho < r,$$
$$u_{\varrho}|_{\varrho=r} = 0,$$
$$u(\rho, 0) = u_0(\rho),\ u_t(\rho, 0) = u_1(\rho).$$

Отг. $u(\rho, t) = \frac{2}{r^2} \int\limits_0^{r^2} (u_0(\rho) + t u_1(\rho)) d\rho$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} \left(A_j \cos \frac{\gamma_j}{r} t + B_j \sin \frac{\gamma_j}{r} t \right) J_0 \left(\frac{\gamma_j}{r} \rho \right),$$

$$A_j = \frac{2}{r^2 J_0^2(\gamma_j)} \int_0^r \rho u_0(\rho) J_0 \left(\frac{\gamma_j}{r} \rho \right) d\rho,$$

$$B_j = \frac{2}{r \gamma_j J_0^2(\gamma_j)} \int_0^r \rho u_1(\rho) J_0 \left(\frac{\gamma_j}{r} \rho \right) d\rho.$$

Тук $\gamma_j \equiv \gamma_j^{(0)}$ са положителните корени на $J_0'(\gamma) = 0$.

8. Решете смесената задача

$$u_{tt} = u_{\varrho\varrho} + \tfrac{1}{\rho} u_{\varrho} + g(\rho) \sin \omega t, 0 < \rho < r, t > 0, |u(0, t)| < \infty,$$

$$u(r,t) = 0,$$
$$u(\rho,0) = u_t(\rho,0) = 0,$$

ако $\omega = \text{const} > 0$, $g \in C(0,r]$ и $g(r) = 0$, $|g(0)| \leq \text{const}$.

Упътване. Също както в зад. 13.12, потърсете решение от вида

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} u_j(t) J_0\left(\frac{\mu_j}{r}\rho\right), \ J_0(\mu_j) = 0.$$

Отг. а) Ако $\omega \neq \frac{\mu_j}{r}$ за всяко $j = 1, 2, \ldots$, то

$$u(\rho,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{r^2 g_j}{(r^2\omega^2 - \mu_j^2)\mu_j}\left(r\omega \sin\frac{\mu_j}{r}t - \mu_j \sin\omega t\right) J_0\left(\frac{\mu_j}{r}\rho\right),$$

където $g_j = \frac{2}{r^2 J_1^2(\mu_j)} \int\limits_0^r \rho g(\rho) J_0\left(\frac{\mu_j}{r}\rho\right) d\rho$.

б) Ако за някое цяло j_0 имаме $\omega = \frac{\mu_{j_0}}{r}$, то решението е:

$$u(\rho,t) = \frac{g_{j_0}}{2\omega^2}(\sin\omega t - t\omega\cos\omega t) J_0(\omega\rho)$$

$$+ \sum_{j=1, j\neq j_0}^{\infty} \frac{r^2 g_j}{(r^2\omega^2 - \mu_j^2)\mu_j}\left(r\omega \sin\frac{\mu_j}{r}t - \mu_j \sin\omega t\right) J_0\left(\frac{\mu_j}{r}\rho\right).$$

Забележка. Разглежданата смесена задача описва радиалните трептения на неподвижно закрепена мембрана върху $S(r)$ под действието на периодичната външна сила. Наблюдаваният резонансен ефект е аналогичен на този от зад. 13.17.

Глава V

ЕЛИПТИЧНИ И ПАРАБОЛИЧНИ УРАВНЕНИЯ

§ 16. Оператор на Лаплас

Ще казваме, че функцията $u(x)$ е *хармонична* в областта $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, ако $u \in C^1(\Omega)$, производните $u_{x_ix_i}$, $i = 1, \ldots, n$, са непрекъснати в Ω и $\Delta u \equiv u_{x_1x_1} + \cdots + u_{x_nx_n} = 0$ в Ω. Функциите

$$E_n(x,x_0) = \frac{-1}{(n-2)\omega_n|x-x_0|^{n-2}}, n > 2, E_2(x,x_0) = \frac{1}{2\pi}\ln|x-x_0|, n = 2,$$

където ω_n е мярката на единичната сфера в $\mathbf{R}^n$, са фундаментални решения на оператора на Лаплас. Да напомним също, че

$$\text{mes } S(x,r) = r^{n-1}\omega_n \text{ и } \text{mes } U(x,r) = \frac{r^n \cdot \omega_n}{n}.$$

Важна роля играят следните формули на Грийн (ν — външна нормала към частично гладката граница $\partial\Omega$; Ω — ограничена):

1) ако u, $v \in C^1(\overline{\Omega})$, $u_{x_ix_i} \in C(\Omega)$, $i = 1, \ldots, n$, то

$$(1) \qquad \int\limits_{\Omega} v \cdot \Delta u \, dx = \int\limits_{\partial\Omega} v \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu} ds - \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} v_{x_i} u_{x_i} dx;$$

2) ако u, $v \in C^1(\overline{\Omega})$, $u_{x_ix_i}$, $v_{x_ix_i} \in C(\Omega)$, то

$$(2) \qquad \int\limits_{\Omega} (v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v) dx = \int\limits_{\partial\Omega} \left(v \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \cdot \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) ds.$$

16.1. Докажете, че за функцията $u \in C^1(\overline{\Omega})$, за която $u_{x_ix_i} \in C(\Omega)$, $i = 1, \ldots, n$, е валидно представянето

$$u(x_0) = \int\limits_{\partial\Omega} \left(u \cdot \frac{\partial E_n}{\partial \nu} - E_n \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) ds + \int\limits_{\Omega} E_n \cdot \Delta u dx, x_0 \in \Omega,$$

където ν е външната нормала към $\partial\Omega$, Ω — ограничена област.

Упътване. Приложете формула (2) за функциите u и E_n в областта $\Omega \setminus U(x_0, \varepsilon)$, $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$, и извършете граничен преход при $\varepsilon \to 0$.

16.2. Нека $u \in C^1(\Omega)$ и $u_{x_i x_i} \in C(\Omega)$, $i = 1, \ldots, n$. Ако $\int\limits_{S(x,r)} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = 0$ за всяко кълбо $U(x,r) \subset \Omega$, ν — външна нормала към $S(x,r)$, тогава u е хармонична в Ω.

Упътване. От (2) следва (за $v \equiv 1$), че

$$\int\limits_{U(x,r)} \Delta u \cdot dx = \int\limits_{S(x,r)} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds.$$

16.3. (Теорема за средното аритметично по сфера.) Покажете, че ако функцията u е хармонична в областта Ω и

$$U(x,r) \subset \Omega, \text{ то } u(x_0) = \frac{1}{\operatorname{mes} S(r)} \int\limits_{S(x_0,r)} u ds.$$

16.4. (Теорема за средното аритметично по кълбо.) Покажете, че ако функцията u е хармонична в областта Ω и

$$U(x_0,r) \subset \Omega, \text{ то } u(x_0) = \frac{1}{\operatorname{mes} U(r)} \int\limits_{U(x_0,r)} u dx.$$

Дефиниция. Ще казваме, че функцията $u \in C(\Omega)$ притежава свойството за *средното сферично* (*обемно*) в Ω, ако за всяко кълбо $U(x_0,r)$ числото

$$\nu_1(x_0) = \frac{1}{\operatorname{mes} S(r)} \int\limits_{S(x_0,r)} u ds,$$

съответно

$$\nu_2(x_0) = \frac{1}{\operatorname{mes} U(r)} \int\limits_{U(x_0,r)} u dx,$$

не зависи от радиуса r, а само от точката x_0.

16.5. Нека функцията u е непрекъсната в областта Ω. Покажете, че свойствата за средното сферично и средното обемно са еквивалентни и $\nu_1(x_0) = \nu_2(x_0) = u(x_0)$ за всяко $x_0 \in \Omega$.

Решение. От свойството за средното сферично, т.е.

$$\omega_n \cdot r^{n-1} \cdot \nu_1(x_0) = \int\limits_{S(x_0,r)} uds,$$

както в задача 16.3, намираме $\frac{\omega_n r^n}{n} \cdot \nu_1(x_0) = \int\limits_{U(x_0,r)} udx$, т.е. функцията u притежава свойството за средното обемно и $\nu_2(x_0) = \nu_1(x_0)$. Обратното твърдение следва аналогично. Накрая от теоремата за средните стойности следва, че съществува точка $y \in U(x_0, r)$, за която

$$\nu_2(x_0) = \frac{1}{\text{mes}\, U(r)} \int\limits_{U(x_0,r)} udx = u(y).$$

При $r \to 0$ това дава $\nu_2(x_0) = u(x_0)$, тъй като $u \in C(\Omega)$.

Забележка. Предвид задача 16.5, ако една функция притежава свойството за средното сферично или обемно, ще казваме, че тя притежава свойство за средното *аритметично*.

16.6. Нека $u \in C(\Omega)$ притежава свойството за средното аритметично в Ω. Тогава $u \in C^\infty(\Omega)$ и всичките ѝ производни притежават свойството за средното аритметично.

Решение. Достатъчно е да се докаже, че съществуват непрекъснати първи производни и че те притежават свойството за средното аритметично. Фиксираме k, $1 \le k \le n$, и нека $u(x) = \frac{\partial \psi}{\partial x_k}(x)$, $x \in U(x_0, R) \subset \Omega$, $\psi \in C^1(\Omega)$. По формулата на Гаус

$$\text{mes}\, U(R) \cdot u(x_0) = \int\limits_{U(x_0,R)} \frac{\partial \psi}{\partial x_k}(x)dx = \int\limits_{S(R)} \psi(x_0 + y)\cos(\nu, y_k)ds_y.$$

Следователно $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ съществува, непрекъсната е и

$$\operatorname{mes} U(R) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_k}(x_0) = \int\limits_{S(R)} \frac{\partial \psi}{\partial x_k}(x_0 + y) \cos(\nu, y_k) ds_y$$

$$= \int\limits_{S(R)} u(x_0 + y) \cos(\nu, y_k) ds_y = \int\limits_{U(x_0,R)} \frac{\partial u}{\partial x_k}(x) dx.$$

16.7. Докажете, че една непрекъсната функция е хармонична тогава и само тогава, когато притежава свойството за средното аритметично .

Упътване. Достатъчност. Предвид задача 16.6 е достатъчно да се докаже, че $\Delta u(x_0) = 0$ за всяко $x_0 \in \Omega$. Диференцираме по R равенството $\omega_n \cdot u(x_0) = \int\limits_{S(1)} u(x_0 + Rz) ds_z$, откъдето

$$0 = \int\limits_{S(1)} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k}(x_0 + Rz) \cos(\nu, x_k) ds_z$$

$$= \sum_{k=1}^{n} R^{1-n} \int\limits_{S(x_0,R)} \frac{\partial u}{\partial x_k}(x) \cos(\nu, x_k) ds_x = R^{1-n} \int\limits_{U(x_0,R)} \Delta u(x) dx,$$

т. е. $\Delta u(x_0) = 0$, тъй като Δu притежава свойство за средното аритметично.

16.8. Докажете твърдението от зад. 16.2 само при предположение, че $u \in C^1(\Omega)$.

Упътване. С интегриране по r, $0 < r < R$, на равенството

$$\int\limits_{S(1)} \frac{\partial u}{\partial r}(x_0 + rz) ds_z = 0,$$

където z описва $S(1)$, установете, че функцията u притежава свойството за средното аритметично.

16.9. Покажете, че за функцията $u \in C^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, са в сила равенствата

$$\Delta u(x_0) = \lim_{r\to 0} \frac{2n}{r^2} \left\{ \frac{1}{\operatorname{mes} S(r)} \int\limits_{S(x_0,r)} u ds - u(x_0) \right\},$$

$$\Delta u(x_0) = \lim_{r\to 0} \frac{2(n+2)}{r^2} \left\{ \frac{1}{\operatorname{mes} U(r)} \int\limits_{U(x_0,r)} u ds - u(x_0) \right\},$$

където $x_0 \in \Omega$, изразяващи непосредствената връзка на лапласиана с аритметичните средни.

Упътване. Използвайте, че $\operatorname{mes} U(r) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}} r^n}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ и формулата на Тейлор за u до втори производни в околност на точката x_0. При доказателството на второто равенство вземете предвид, че

$$\int\limits_{U(x_0,r)} u dx = \int\limits_0^r \left[\int\limits_{S(x_0,\rho)} u ds_\rho \right] d\rho.$$

Забележка. Според задача 16.9 операторът на Лаплас е обобщение на обичайната втора производна в едномерния случай, понеже, ако f' съществува в околност на точката x_0, а f'' — в самата точка x_0, то

$$f''(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{2}{h^2} \left\{ \frac{f(x_0+h) + f(x_0-h)}{2} - f(x_0) \right\}.$$

16.10. Нека $\varphi \in C[0,r]$ и $A(r) = \int\limits_{U(x_0,r)} \varphi(|x-x_0|)dx \neq 0$. Покажете, че ако u е хармонична в $\Omega \supset U(x_0,r)$, тогава

$$u(x_0) = \frac{1}{A(r)} \int\limits_{U(x_0,r)} u(x)\varphi(|x-x_0|)dx.$$

Решение. Умножаваме равенството от зад. 16.3 за сферата $S(x_0,r)$ с $\operatorname{mes} S(\rho)\cdot\varphi(\rho)$, $\rho = |x-x_0|$, и интегрираме по ρ от 0 до r.

16.11. Докажете без да използвате зад. 16.6, че ако функцията u е хармонична в областта Ω, то $u \in C^{\infty}(\Omega)$.

Решение I. Разсъждавайки за произволна ограничена подобласт Ω_1 на Ω, получаваме твърдението от зад. 16.1.

Решение II. Нека $\Omega_1 \subset \overline{\Omega}_1 \subset \Omega$ и $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(\Omega_1, \partial\Omega)$, а $\varphi_\varepsilon(|x - x_0|)$ е усредняващото ядро от зад. 1.25. Тогава за всяка точка $x_0 \in \Omega_1$ средните функции

$$u_\varepsilon(x_0) = \int\limits_{U(x_0,r)} \varphi_\varepsilon(|x - x_0|)u(x)dx, 0 < \varepsilon < r,$$

съвпадат с $u(x_0)$ предвид зад. 16.10, тъй като

$$\int\limits_{U(x_0,r)} \varphi_\varepsilon(|x - x_0|)dx = 1.$$

16.12. (Лема на Вайл.) Нека $u \in L_p(\Omega)$, $p \geq 1$, и за всяка функция $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ да бъде в сила $\int\limits_{\Omega} u(x) \cdot \Delta\varphi(x)dx = 0$. Тогава u е хармонична функция в Ω.

Решение. Разглеждаме средните функции $u_h(x)$ в Ω_1, $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$, $h \leq h_0 < \operatorname{dist}(\Omega_1, \partial\Omega)$. Тъй като $u_h \to u$ в $L_p(\Omega_1)$ при $h \to 0$, ще покажем, че в околност на произволно фиксираната точка $x_0 \in \Omega_1$ средните функции съвпадат. По условие

$$\Delta_{x_0} u_h(x_0) = \int\limits_{\Omega} u(x)\Delta_{x_0}\varphi_h(|x - x_0|)dx = \int\limits_{\Omega} u(x)\Delta_x\varphi_h(|x - x_0|)dx = 0$$

и следователно (зад. 16.10)

$$u_h(x_0) = \frac{1}{A(\rho)} \int\limits_{U(x_0,\rho)} u_h(x) \cdot \varphi(|x - x_0|)dx.$$

С помощта на неравенството на Хьолдер намираме

$$\lim_{h\to 0} u_h(x_0) = \frac{1}{A(\rho)} \int\limits_{U(x_0,\rho)} u(x)\varphi(|x - x_0|)dx.$$

Понеже лявата страна не зависи от h, вземайки последователно $\varphi = \varphi_{h_i}(|x - x_0|)$, $i = 1, 2$, в дясната страна получаваме $u_{h_1}(x_0) = u_{h_2}(x_0)$ за всяко $x_0 \in \Omega_\rho$, $\Omega_\rho \subset \Omega_1$, dist $(\Omega_\rho, \partial\Omega_1) \geq \rho$ и $h_i < \rho$. Следователно u съвпада с хармоничната функция u_h в Ω_ρ, $h < \rho$.

16.13. (Обобщение на лемата на Вайл.) Нека $u \in D'(\mathbf{R}^n)$ е хармонично разпределение, т.е. $\Delta u = 0$ в смисъл на теорията на разпределенията. Докажете, че $u \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ като следствие от $u * \varphi_\varepsilon = u$, където φ_ε е усредняващото ядро от зад. 1.25.

Решение. Нека $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. От тъждеството $(u * \varphi_\varepsilon) * \psi = (u * \psi) * \varphi_\varepsilon$ и от факта, че $u * \psi \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ е хармонична функция, имаме (решение II на зад. 16.11) $(u * \psi) * \varphi_\varepsilon = u * \psi$. От тези равенства следва $u * \varphi_\varepsilon = u$ поради произволността на ψ.

16.14. Нека функциите u_m са хармонични в Ω и клонят в $D'(\Omega)$ при $m \to \infty$ към $u \in D'(\Omega)$. Тогава u е хармонична функция и $u_m \to u$ във всяка точка (както и редиците от съответните производни).

Упътване. Според лемата на Вайл u е хармонична функция. От зад. 16.10

$$u_m(x_0) = \frac{1}{A(\rho)} \int\limits_{U(x_0,\rho)} u_m(x)\varphi(|x - x_0|)dx, U(x_0, \rho) \subset \Omega.$$

Очевидно дясната страна има за граница при $m \to \infty$ аналогичен израз за хармоничната функция u, който съвпада с $u(x_0)$.

16.15. Нека u_m са хармонични функции в Ω, които принадлежат на $L_p(\Omega)$, $p \geq 1$, и $u_m \to u$ в $L_p(\Omega)$ при $m \to \infty$. Тогава редицата $\{u_m\}$ клони равномерно към u и във всяка компактна подобласт Ω_1, $\Omega_1 \subset \Omega$, и u е хармонична функция.

Упътване. Нека $x \in \Omega_1$ и $\rho < \operatorname{dist}(\Omega_1, \partial\Omega)$. От теоремата за средното обемно за функцията $u_n - u_m$ с помощта на неравенството на Хьолдер се установява равномерната сходимост на $\{u_m\}$ в Ω_1. Понеже $\int\limits_\Omega u_m \cdot \Delta\varphi dx = 0$ за всяка функция $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_1)$, получаваме $\int\limits_\Omega u \cdot \Delta\varphi dx = 0$, т.е. u е хармонична (зад. 16.13).

16.16. Нека $u \in L_p(\mathbf{R}^n)$, $p \geq 1$, е хармонична в $\mathbf{R}^n$. Докажете, че $u \equiv 0$.

Упътване. Използвайте теоремата за средното обемно и неравенството на Хьолдер.

16.17. (Интеграл на Поасон.) Проверете, че решението на задачата на Дирихле

$$\Delta u = 0 \text{ в } U(\overline{x}, R), u = \psi \text{ върху } S(\overline{x}, R)$$

се дава с формулата ($n \geq 2$)

$$u(y) = \frac{1}{R\omega_n} \int\limits_{S(\overline{x},R)} \frac{R^2|\overline{x} - y|^2}{|x - y|^n} \psi(x) ds_x.$$

Упътване. Най-напред проверете директно, че за всяка точка $x \in S(\overline{x}, R)$ ядрото на Поасон $\Pi(\overline{x}, y) = \frac{1}{R \cdot \omega_n} \cdot \frac{R^2 - |\overline{x} - y|^2}{|x - y|^n}$, $n > 2$, е хармонична функция относно y. Поради инвариантността на лапласиана относно ортогонални трансформации с ротация довеждаме точката x върху оста x_1, т. е. $x = (R, 0, \ldots, 0)$ (като за простота е предположено, че $\overline{x}$ съвпада с началото). Тогава

$$\frac{R^2 - |\overline{x} - y|^2}{|x - y|^n} = \frac{R^2 - \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2}{\left[(R - y_1)^2 + \sum\limits_{i \geq 2} y_i^2\right]^{\frac{n}{2}}}$$

$$= \frac{-1}{\left[(R - y_1)^2 + \sum\limits_{i \geq 2} y_i^2\right]^{\frac{n-2}{2}}} + \frac{R^2 - -2y_1 R}{\left[(R - y_1)^2 + \sum\limits_{i \geq 2} y_i^2\right]^{\frac{n}{2}}}$$

$$= \frac{-1}{|x - y|^{n-2}} + \frac{2R}{2 - n} \cdot \frac{\partial}{\partial y_1} \left[\frac{1}{|x - y|^{n-2}}\right],$$

откъдето твърдението следва лесно. За да проверите условието по контура, установете, че при $\psi \equiv c = \text{const}$ имаме $u(y) \equiv c$. Действително, понеже в този случай очевидно $u(y) = f(r)$, $r = |y - \overline{x}|$, а, от друга страна, $\Delta u = 0$, т. е. $f'' + \frac{n-1}{r} f' = 0$ и функцията f е ограничена при $r = 0$, намираме $f \equiv \text{const}$. Тази константа се пресмята най-лесно при $y = \overline{x}$.

16.18. (Неравенство на Харнак.) Нека хармоничната в кълбото $U(x_0, R)$ функция u е неотрицателна и принадлежи на

$C(\overline{U(x_0, R)})$. Тогава за всяка точка $y \in U(x_0, R)$

$$\frac{R^{n-2}(R - |x_0 - y|)}{(R + |x_0 - y|)^{n-1}} u(x_0) \leq u(y) = \frac{R^{n-2}(R + |x_0 - y|)}{(R - |x_0 - y|)^{n-1}} u(x_0).$$

16.19. Покажете, че ако u е неотрицателна хармонична функция в областта Ω, то в ограничената област Ω_1, $\overline{\Omega_1} \subset \Omega$, или $u \equiv 0$, или $u > 0$ и съществуват константи c_1, c_2, зависещи само от Ω_1, такива, че

$$0 < c_1 \leq \frac{u(x_1)}{u(x_2)} \leq c_2$$

при произволни x_1, $x_2 \in \Omega_1$.

16.20. Покажете, че ако u е неотрицателна хармонична функция в кълбото $U(x_0, R)$, то $|\operatorname{grad} u(x_0)| \leq \frac{n}{R} u(x_0)$.

Упътване. С помощта на неравенството на Харнак оценете частното $\dfrac{u(x) - u(x_0)}{|x - x_0|}$ и оставете x да клони към x_0.

16.21. Нека $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ и $\Delta u \geq 0$ ($\Delta u \leq 0$) в ограничената област Ω. Тогава за всяко $x \in \Omega$ е в сила

$$u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u (u(x) \geq \min_{\partial\Omega} u).$$

Упътване. Разглеждайки $u + c$, c — подходяща константа, можем да считаме, че $u > 0$. Нека $u(x) = (1 - \varepsilon|x|^2)v(x)$, където $\varepsilon > 0$ е толкова малко, че $1 - \varepsilon|x|^2 > 0$ в $\overline{\Omega}$. От неравенството

$$\Delta u \equiv (1 - \varepsilon|x|^2)\Delta v - 4\varepsilon \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial u}{\partial x_j} - 2\varepsilon n v \geq 0$$

и от необходимите условия за максимум следва, че $\max\limits_{\overline{\Omega}} v$ не се достига вътре в Ω. Следователно $v(x) \leq \max\limits_{\partial\Omega} v$, откъдето при $\varepsilon \to 0$ получаваме първото твърдение.

16.22. Покажете, че задачата

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} = u^3 \quad &\text{за} \quad x^2 + y^2 < 1, \\ u = 0 \quad &\text{за} \quad x^2 + y^2 = 1 \end{aligned}$$

не притежава друго решение освен $u \equiv 0$.

16.23. Нека u е решение на задачата

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= -1 \quad \text{за} \quad |x| < 1,\ |y| < 1, \\ u &= 0 \quad \text{за} \quad |x| = 1,\ |y| = 1. \end{aligned}$$

Покажете, че $\frac{1}{4} \leq u(0,0) \leq \frac{1}{2}$.

Упътване. Разгледайте функцията $v = u + \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$.

16.24. Нека ограничената област $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ притежава свойството

$$\forall P \in \partial\Omega \cdot \exists K(P) : K(P) \cap \overline{\Omega} = P,$$

където $K(P)$ е кръг с фиксиран радиус ρ. Покажете, че ако за функцията $g \in C^2(\Omega)$ е в сила неравенството $|\Delta g| \leq A = \text{const}$ в Ω, то за решението $u(x,y)$ на задачата

$$\Delta u = 0 \ \text{ в } \ \Omega, \quad u = g \ \text{ върху } \ \partial\Omega$$

е изпълнена навсякъде в Ω оценката

$$|\text{grad} u| \leq \max_{\partial\Omega} |\text{grad} g| + \sup_{\Omega} |\Delta g| \frac{R^2 - \rho^2 - 2\rho^2 \ln \frac{R}{\rho}}{4\rho \ln \frac{R}{\rho}},$$

където R е число, по-голямо от $\operatorname{diam}\Omega + \rho$.

Упътване. Фиксирайте точката $P \in \partial\Omega$ и въведете полярна координатна система с начало в центъра на кълбото $K(P)$. Покажете, че за функциите

$$\psi = \frac{1}{4} A \left[(R^2 - \rho^2) \frac{\ln \frac{r}{\rho}}{\ln \frac{R}{\rho}} - r^2 + \rho^2 \right]$$

и $z_1 = g - \psi$, $z_2 = g + \psi$ са изпълнени съотношенията: $z_1(P) = z_2(P) = g(P)$, $\Delta z_1 \geq 0 \geq \Delta z_2$ в Ω и $z_1 \leq g \leq z_2$ върху $\partial\Omega$. Принципът за максимума, приложен за функциите $z_1 - u$ и $u - z_2$, позволява да се установи, че в точката P

$$\frac{\partial z_2}{\partial \nu} \leq \frac{\partial u}{\partial \nu} \leq \frac{\partial z_1}{\partial \nu},$$

където ν е направлението на външната нормала. Понеже $\left|\frac{\partial}{\partial\nu}(u-g)\right| = |\mathrm{grad}(u-g)|$ върху $\partial\Omega$ (защо?), следва оценка за граничните стойности на $|\mathrm{grad} u|$. Остава да се приложи резултатът от зад. 16.21 за функцията $v = |\mathrm{grad} u|^2$.

16.25. Докажете n-мерния аналог ($n \geq 3$) на твърдението от предишната задача.

Упътване. Вместо ψ използвайте функцията

$$\frac{A}{2n}\left[(R^2-\rho^2)\frac{\rho^{2-n}-r^{2-n}}{\rho^{2-n}-R^{2-n}} - r^2 + \rho^2\right].$$

16.26. Нека $u \in C(\overline{\Omega})$ е хармонична функция в областта Ω, която не е тъждествено равна на константа и достига $\min\limits_{\overline{\Omega}} u$ в точка $x_0 \in \partial\Omega$. Нека в точката x_0 съществува вътрешно допираща се сфера и l е направление, сключващо остър ъгъл β с външната нормала в точката x_0. Тогава $\frac{\partial u}{\partial l}(x_0) < 0$.

Упътване. Нека $S(x_1, r)$ е вътрешно допиращата се сфера

$$v(x) = \begin{cases} |x-x_1|^{2-n} - r^{2-n}, & n > 2, \\ \ln\frac{1}{|x-x_1|} - \ln\frac{1}{r}, & n = 2, \end{cases}$$

и $w(x) = u(x) - u(x_0) - \varepsilon v(x)$, $\varepsilon > 0$. Лесно се вижда, че $w(x) = u(x) - u(x_0) \geq 0$ върху $S(x_1, r)$, и предвид принципа за максимума $u(x) - u(x_0) \geq \mathrm{const} > 0$ върху $S\left(x_1, \frac{r}{2}\right)$. Следователно за достатъчно малки $\varepsilon > 0$ е изпълнено $w(x) \geq 0$ в $Q = U(x_1, r) \setminus U\left(x_1, \frac{r}{2}\right)$, откъдето $\frac{\partial w}{\partial l}(x_0) \leq 0$, т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial l}(x_0) \leq \varepsilon\frac{\partial v}{\partial l}(x_0) = -\varepsilon(n-2)R^{1-n}\cdot\cos\beta.$$

Понеже $\cos\beta > 0$ по условие, твърдението следва.

16.27. а) Нека $G \subset \mathbf{R}^2$ е неограничена област, чието допълнение има вътрешна точка $\overline{x}$. Покажете, че ако $u \in C(\overline{G})$ е хармонична и $\sup\limits_{x\in\overline{G}} |u(x)| = c < +\infty$, тогава навсякъде в G

$$m_1 = \inf_{x\in\partial G} u(x) \leq u(x) \leq \sup_{x\in\partial G} u(x) = m_2.$$

б) Покажете, че твърдението остава в сила и при предположението $u \in C(\overline{G} \setminus \{A_1, \ldots, A_m\})$, където точките A_i, $i = 1, \ldots, m$, принадлежат на ∂G.

в) Разгледайте случая, когато в допълнението на G не се съдържат вътрешни точки.

Упътване. а) Нека $x_0 \in G$ и $G_{\varepsilon,R} = U(\overline{x}, R)\setminus U(\overline{x}, \varepsilon)$, където $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(\overline{x}, \partial G)$, $R > \operatorname{dist}(\overline{x}, x_0)$. В тази област дефинираме хармоничната функция $v(x) = 2c\ln\frac{|\overline{x} - x|}{\varepsilon} \cdot \left(\ln\frac{R}{\varepsilon}\right)^{-1}$. С помощта на принципа за максимума установяваме $u(x) - m_2 \leq v(x)$ в $G \cap G_{\varepsilon,R}$ и в частност в точката x_0, след което извършваме граничния преход при $R \to \infty$.

16.28. Нека $G \subset \mathbf{R}^n$, $n > 2$, е неограничена област. Покажете, че ако функцията u е хармонична в G и непрекъсната в $\overline{G}$, то навсякъде в G са в сила неравенствата от предишната задача при условие, че $m_1 \leq 0 \leq m_2$ и $\lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) = 0$.

16.29. Нека Q е правоъгълникът $\{(x, y) | 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b\}$. Покажете, че ако λ е собствено число на задачата $\Delta\Delta u + \lambda u = 0$ в Q, $u = \Delta u = 0$ върху ∂Q, тогава $\lambda < 0$.

Упътване. Интегрирайте равенството $u \cdot \Delta\Delta u = -\lambda u^2$ върху Q и използвайте формула (2) от началото на параграфа за $v = u$ и Δu вместо u. Приложете принципа за максимума.

16.30. Нека функцията u удовлетворява в еднократно гладката и ограничена област $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ условията

$$\Delta u = -1 \quad \text{в} \quad \Omega,$$

$$u = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = c = \text{const} \quad \text{върху} \quad \partial\Omega.$$

Покажете, че Ω е кълбо и относно координатната система с начало в центъра му

$$u(x) = \frac{n^2c^2 - r^2}{2n}, \quad r = |x|.$$

Решение. Нека началото на координатната система е вътрешна точка за областта Ω. Най-напред проверяваме тъждеството

$$\Delta\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) \equiv r\frac{\partial}{\partial r}(\Delta u) + 2\Delta u = -2,$$

откъдето следва, че

$$2u - r \cdot u_r = (-u)(-2) + r \cdot u_r(-1) = -u \cdot \Delta(ru_r) + r \cdot u_r \Delta u.$$

Прилагайки симетричната формула на Грийн, намираме

$$\int\limits_{\Omega} \left[2u - r\frac{\partial u}{\partial r}\right] dx = \int\limits_{\partial\Omega} \left[-u\frac{\partial}{\partial\nu}(ru_r) + ru_r\frac{\partial u}{\partial\nu}\right] ds$$

$$= \int\limits_{\partial\Omega} r\frac{\partial r}{\partial\nu}\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)^2 ds = c^2 \int\limits_{\partial\Omega} r\frac{\partial r}{\partial\nu} ds = n \cdot c^2 \cdot V, \quad V = \operatorname{mes}\Omega.$$

От друга страна,

$$\int\limits_{\Omega} r\frac{\partial u}{\partial r} dx = \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} x_i u_{x_i} dx = -n \int\limits_{\Omega} u dx,$$

понеже $u = 0$ върху $\partial\Omega$. Следователно,

а) $(n+2)\int\limits_{\Omega} udx = nc^2V$.

Като приложим неравенството на Коши, получаваме

б) $1 = (\Delta u)^2 \le n \sum\limits_{i=1}^{n} u^2_{x_ix_i} \le n \sum\limits_{i,j=1}^{n} u^2_{x_ix_j}$,

откъдето ($\Delta u = -1$!) следва

в) $\Delta\left(|\mathrm{grad} u|^2 + \frac{2}{n}u\right) = 2\sum\limits_{i,j=1}^{n} u^2_{x_ix_j} - \frac{2}{n} \ge 0$.

Понеже $u|_{\partial\Omega} = 0$, то $|\mathrm{grad} u|^2 + \frac{2}{n}u = c^2$ върху $\partial\Omega$, и чрез строгия принцип за максимума заключаваме, че или

г) $|\mathrm{grad} u|^2 + \frac{2}{n}u < c^2$ в Ω,

или

д) $|\mathrm{grad} u|^2 + \frac{2}{n}u \equiv c^2$ в Ω.

С интегриране върху Ω на неравенството г) намираме

$$\left(1 + \frac{2}{n}\right)\int\limits_{\Omega} udx < c^2V,$$

което противоречи на а). Тъй като е валидно д), във в) и в б) се получават равенства. От б) и от $\Delta u = -1$ намираме, че

$u_{x_ix_j} = \frac{-1}{n}\delta_{ij}$, откъдето $u = (2n)^{-1}(A - r^2)$, $A = \text{const}$. С помощта на условието $u|_{\partial\Omega} = 0$ заключаваме, че $A > 0$ и Ω е кълбо с радиус $\sqrt{A}$.

16.31. Нека $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ и $\Delta u = f$ в ограничената област Ω. Тогава за всяко $x \in \overline{\Omega}$

$$\min_{\partial\Omega} u - M \sup_{\Omega} |f| \leq u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u + M \sup_{\Omega} |f|,$$

където константата M зависи само от областта Ω.

Упътване. Нека $v_{\pm}(x) = u(x) \pm \sup\limits_{\Omega} |f| \cdot v(x)$, където $v(x) = \frac{l^2}{2n} - \frac{|x|^2}{2n}$, $l = \sup\limits_{\Omega} |x|$. Използвайте зад. 16.21. Константата е $M = (2n)^{-1} \cdot l^2$.

16.32. Докажете, че решението на задачата на Дирихле

$$\Delta u = f \;\text{ в }\; \Omega, \; u = \psi \;\text{ върху }\; \partial\Omega$$

зависи непрекъснато от данните f и $\psi(\Omega$ — ограничена област).

Упътване. От зад. 16.31 следва, че

$$|u(x)| \leq \max_{\partial\Omega} |\psi| + \text{const} \cdot \sup_{\Omega} |f|.$$

16.33. Нека функцията $u \in C^1(\overline{\Omega})$ е хармонична в ограничената област Ω. Ако $\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + a(x)u\right)\Big|_{\partial\Omega} = \psi(\nu$ — външна нормала към $\partial\Omega \in C^1)$ и $a(x) \geq a_0 = \text{const} > 0$, тогава $|u(x)| \leq a_0^{-1} \max\limits_{\partial\Omega} |\psi|$ в Ω.

Решение. Нека $|u(\overline{x})| = \max\limits_{\overline{\Omega}} |u|$. Очевидно $\overline{x} \in \partial\Omega$, ако $u \not\equiv \text{const}$. При условие, че $u(\overline{x})$ е максималната положителна стойност на u в $\overline{\Omega}$, то $\frac{\partial u}{\partial \nu}(\overline{x}) \geq 0$ и следователно $a(\overline{x})u(\overline{x}) \leq \psi(\overline{x})$, т. е. $u(\overline{x}) \leq a_0^{-1} \max\limits_{\partial\Omega} |\psi|$. Ако $u(\overline{x})$ е най-малката отрицателна стойност на u, се разсъждава аналогично.

16.34. Нека $u \in C(\overline{\Omega})$ е хармонична функция в ограничената област Ω. Тогава за точките от областта $\Omega_1 \subset \Omega$, за която $d = \text{dist}(\Omega_1, \partial\Omega) > 0$, са в сила неравенствата

$$|D^\alpha u(x)| \leq \left(\frac{n|\alpha|}{d}\right)^{|\alpha|} \max_{\overline{\Omega}} |u|$$

за всеки мултииндекс α (срв. [8], гл. III, § 6, стр. 163).

Решение. Функцията u_{x_j} е хармонична и следователно $u_{x_j}(x_0) = \dfrac{1}{\mathrm{mes} U(R)} \int\limits_{S(x_0,R)} u\cos(\nu, x_j)ds$, ако $U(x_0,R) \subset \Omega$. Оттук $|u_{x_j}(x_0)| \leq \frac{n}{R}\dfrac{\max|u|}{U(x_0,R)}$. Нека $\Omega_1 \subset \cdots \subset \Omega_{k+1} = \Omega$, $k = |\alpha|$, $\mathrm{dist}(\Omega_j, \partial\Omega_{j+1}) = \frac{d}{k}$. Тъй като за всяко $x_0 \in \Omega_j$ кълбото $U\left(x_0, \frac{d}{k}\right) \subset \Omega_{j+1}$, то съгласно доказаното

$$\max_{\Omega_j}|D^\beta u| \leq \frac{nk}{d}\max_{\overline{\Omega}_{j+1}}|D^\gamma u|,$$

където $|\beta| = |\alpha| - j + 1$, $|\gamma| = |\alpha| - j$, $j = 1, \ldots, k$.

16.35. Покажете, че ако при условията от зад. 16.34 означим $M = \max\limits_{\overline{\Omega}} u$ и $m = \min\limits_{\overline{\Omega}} u$, тогава

$$|\mathrm{grad} u| \leq \frac{n}{\mathrm{dist}(\Omega_1, \partial\Omega)} \cdot \frac{M-m}{2}.$$

Упътване. Приложете резултата от зад. 16.34 към функцията

$$u - \frac{1}{2}\Big(M + m\Big).$$

16.36. Нека u е хармонична и ограничена в цялото пространство $\mathbf{R}^n$. Покажете, че $u \equiv \mathrm{const}$.

16.37. Нека $\{u_m\}$ е редица от хармонични в областта Ω функции и $\|u_m\|_{L_p(\Omega)} \leq \mathrm{const}$. Тогава съществува подредица, която е равномерно сходяща във всяка компактна подобласт $\Omega_1, \overline{\Omega}_1 \subset \Omega$, и нейната граница е хармонична функция в Ω.

Упътване. Нека $U(x_0, R) \subset \Omega$ и $\mathrm{dist}(U(x_0,R), \partial\Omega) \geq 2\delta > 0$. С теоремата за средното обемно се установява равномерната ограниченост на u_m в $U(x_0, R+\delta)$. Твърдението се получава след прилагане на зад. 16.34 и теоремата на Арцела — Асколи, съчетани с диагонален процес.

16.38. Ако функцията u е хармонична в областта Ω, то тя е аналитична в Ω, т. е. в околност на всяка точка $x_0 \in \Omega$ се представя със сходящ степенен ред.

Решение. По формулата на Тейлор в $U(x_0,\rho)$, $U(x_0,2\rho)\subset \Omega$ имаме

$$u(x)=\sum_{|\alpha|<m}\frac{D^\alpha u(x_0)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha+\sum_{|\alpha|=m}\frac{D^\alpha u(\overline{x})}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha,$$

където $\overline{x}=\overline{x}(x,\alpha)\in U(x_0,\rho)$. Предвид $n^m=m!\sum\limits_{|\alpha|=m}\frac{1}{\alpha!}$ и зад. 16.34 остатъчният член не надминава $\left(\frac{n^2|x-x_0|}{\rho}\right)^m\cdot\frac{m^m}{m!}\max\limits_{U(x_0,2\rho)}|u|$. Но по формулата на Стирлинг $m^m\le m!e^m$. Следователно при $|x-x_0|<\varepsilon$, където $\varepsilon>0$ е избрано така, че $n^2\varepsilon e\rho^{-1}<1$, остатъчният член клони към нула.

16.39. Покажете, че задачата на Коши за уравнението на Лаплас

$$\Delta u=0 \ \text{ в } \ \Omega=\{x_n>0\},$$

$$u=\psi(x_1,\ldots,x_{n-1}),\ \frac{\partial u}{\partial x_n}=0 \ \text{ при } \ x_n=0$$

е разрешима в околност на точката $x_0\in\{x_n=0\}$ тогава и само тогава, когато ψ е аналитична функция в околност на същата точка.

Упътване. Ако задачата има решение, то четното продължение на решението принадлежи на класа C^1 в околност на точката x_0. С помощта на зад. 16.13 се установява, че тази функция е хармонична и следователно аналитична.

16.40. (Теорема на Лиувил.) Нека u е хармонична в $\mathbf{R}^n$ функция и $|u(x)|\le c(1+|x|^m)$, където c и m са неотрицателни константи. Покажете, че u е многочлен от степен, ненадминаваща $[m]$.

Решение. От зад. 16.34 следва, че

$$\max_{U(x_0,R)}|D^\alpha u|\le\left(\frac{n|\alpha|}{\rho}\right)^{|\alpha|}\max_{U(x_0,R+\rho)}|u|$$

$$\le c(n|\alpha|)^{|\alpha|}\cdot\rho^{-|\alpha|}\cdot(1+(R+\rho)^m).$$

Следователно при всички мултииндекси α с $|\alpha|\ge[m]+1$ граничният преход при $\rho\to\infty$ дава $D^\alpha u\equiv 0$, откъдето твърдението следва.

Забележка. Дайте друго решение посредством интеграла на Поасон.

16.41. Нека u е хармонична в $\mathbf{R}^n$ и за всички достатъчно големи числа ρ

$$\sup_{U(x_0,\rho)} |u| \leq c(1+\rho^m)a(\rho),$$

където $c = \mathrm{const}$, m — естествено число и $\lim\limits_{\rho\to\infty} a(\rho) = 0$. При тези условия u е многочлен от степен, ненадминаваща $m-1$.

16.42. Докажете твърдението от зад. 16.40 при следното по-слабо предположение:

$$u(x) \geq -c(1+|x|^m), \quad c = \mathrm{const} > 0.$$

Упътване. Нека $m = 0$ и $x_0 \in \mathbf{R}^n$ е произволно фиксирана точка. Ще покажем, че $v = u + c \geq 0$ е константа. Прилагайки последователно теоремата за средното обемно, формулата на Гаус, теоремата за средните стойности за интеграли и отново теоремата за средното сферично, намираме

$$v_{x_j}(x_0) = \frac{1}{r\cdot \mathrm{mes}U(1)} \cdot \int\limits_{S(x_0,1)} v(x_0+rz)\cos(\nu, z_j)ds_1$$

$$= j(z_0)\frac{1}{r\cdot \mathrm{mes}U(1)} \cdot \int\limits_{S(x_0,1)} v(x_0+rz)ds_1 = \frac{j(z_0)\cdot n}{r}v(x_0),.$$

където $j(z_0) = \cos(\nu, z_j)|_{z=z_0}$. При $r \to \infty$ получаваме $v_{x_j}(x_0) = 0$. За $m \geq 1$ следват аналогични разсъждения.

16.43. (Теорема на Фрагмен — Линдельоф.) Нека в областта $\Omega = \{x|0 < x_n < \pi h\}$, $h > 0$, е дефинирана хармонична функция $u \in C(\overline{\Omega})$. Докажете, че ако $u|_{x_n=0} \leq 0$, $u|_{x_n=\pi h} \leq 0$ и навсякъде в Ω $u(x) \leq c\cdot \exp\left\{\frac{1}{h}(a_1|x_1| + \dots + a_{n-1}|x_{n-1}|\right\}$, където c и a_j, $j = 1, \dots, n-1$, са положителни константи, такива, че $\sum\limits_{j=1}^{n-1} a_j^2 < 1$, тогава $u \leq 0$ върху Ω. Покажете, че условието за константите a_j не може да се замени със $\sum\limits_{j=1}^{n-1} a_j^2 \leq 1$.

Упътване. Фиксираме константите b_j така, че $b_j > a_j$ и $1 - \sum b_j^2 = \varepsilon$, където $2\varepsilon = 1 - \sum a_j^2$. Разглеждаме функцията $v(x) = \delta \sin\left(\sqrt{1-\varepsilon}\left(\frac{x_n}{h} + \rho\right)\right) f(\beta, x)$, където δ и ρ са положителни константи и

$$f(\beta, x) = \sum_{\beta} \exp\left\{\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{n-1} \beta_j x_j\right\}$$

(сумира се по всички $(n-1)$-орки $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$ с $|\beta_j| = b_j$, които са очевидно само краен брой). Имаме $f(\beta, x) \geq 1$. Функцията v е хармонична в Ω и при достатъчно малко ρ удовлетворява $v \geq \delta \cdot \mathrm{const} > 0$. Следователно $u \leq v$ върху $\partial\Omega$. Същото неравенство е валидно и върху $\partial\Omega_R$, $\Omega_R = \Omega \cap U(R)$ поради последното условие за u (при достатъчно голямо R). Остава да се приложи принципът за максимума и да се извърши граничен преход при $\delta \to 0$. Във връзка с последното твърдение разгледайте функцията

$$u(x) = \sin\frac{x_n}{h} \exp\left\{\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{n-1} a_j x_j\right\}, \ \sum_{j=1}^{n-1} a_j^2 = 1,$$

и установете, че $u \not\equiv 0$, $u|_{x_n=0} = u|_{x_n=\pi h} = 0$.

16.44. Нека $x_0 \in \Omega$ и функцията u е хармонична в $\Omega \setminus \{x_0\}$. Ако за $m(\rho) = \sup\limits_{\Omega \setminus U(x,\rho)} |u|$ е в сила неравенството $m(\rho) \leq E(\rho) a(\rho)$, където $a(\rho) > 0$ и $\lim\limits_{\rho\to\infty} a(\rho) = 0$, а

$$E(\rho) = \begin{cases} \rho^{2-n}, & n \geq 3, \\ |\ln \rho|, & n = 2 \end{cases}$$

Тогава функцията u може да се додефинира в точката x_0 така, че да бъде хармонична в Ω.

Упътване. I. Използвайте интеграла на Поасон, за да построите функция v, хармонична в $U(x_0, R) \subset \Omega$ и съвпадаща с u върху $S(x_0, R)$. С помощта на функциите

$$w_+(x) = u(x) - v(x) \pm \varepsilon E_n(x, x_0), \quad \varepsilon > 0,$$

покажете, че $u \equiv v$ в $U(x_0, R) \setminus \{x_0\}$.

II. Нека $U(x_0, R) \subset \Omega$ и $0 < \rho < R$. За точките от $U(x_0, R) \setminus U(x_0, \rho)$ използвайте интегралното представяне от зад. 16.1. Покажете, че интегралът върху $S(x_0, \rho)$ клони към нула при $\rho \to 0$, т. е. u може да се дефинира в точката x_0 по непрекъснатост. При оценяване на производните на u в интеграла

$$I = \int\limits_{S(x_0,\rho)} E_n(x,\xi)\frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi)ds_\xi = E_n(x,x_0) \int\limits_{S(x_0,\rho)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi)ds_\xi$$

$$+ \int\limits_{S(x_0,\rho)} [E_n(x,\xi) - E_n(x,x_0)]\frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi)ds_\xi,$$

ν — вътрешна нормала към $S(x_0, \rho)$, използвайте зад. 16.34 и константата $m\left(\frac{\rho}{2}\right)$.

16.45. Нека $n \geq 3$. Докажете, че при трансформацията на Келвин (инверсия относно единичното кълбо) образът

$$v(\xi) = \frac{1}{|\xi|^{n-2}} \cdot u\left(\frac{\xi_1}{|\xi|^2}, \cdots, \frac{\xi_n}{|\xi|^2}\right),\ \xi_i = \frac{x_i}{|x|^2},\ 1 \leq i \leq n,$$

на хармоничната в областта Ω функция u е хармонична функция в областта, получаваща се от Ω при същата трансформация (вж. [8], гл. IV, § 3, стр. 215).

Решение. Според зад. 16.1 в ограничената подобласт Ω_1 на Ω е в сила представянето на u посредством потенциали

$$u(x_0) = \int\limits_{\partial\Omega_1} \mu\frac{\partial}{\partial\nu}(|x-x_0|^{2-n})ds + \int\limits_{\partial\Omega_1} \eta|x-x_0|^{2-n}ds,$$

където $\mu = \frac{1}{(n-2)w_n}u\Big|_{\partial\Omega_1}$ и $\eta = -\frac{1}{(n-2)w_n} \cdot \frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega_1}$.

Като вземем предвид, че $\xi = \frac{x}{|x|^2}$, $x = \frac{\xi}{|\xi|^2}$ и съответните връзки за x_0, ξ_0, намираме

$$\frac{1}{|x-x_0|} = \frac{1}{|x|\ |x_0|\ |\xi-\xi_0|}.$$

(Триъгълниците с връх в началото и други два върха съответно в точките x, x_0 и ξ, ξ_0 са подобни!) Следователно

$$v(\xi_0) = |\xi_0|^{2-n} \cdot u\left(\frac{\xi_0}{|\xi_0|^2}\right) = |x_0|^{n-2}u(x_0)$$

$$= \int\limits_{\partial\Omega_1} \mu\frac{\partial}{\partial\nu}(|x|^{2-n}|\xi-\xi_0|^{2-n})ds + \int\limits_{\partial\Omega_1} \eta\cdot|x|^{2-n}|\xi-\xi_0|^{2-n}ds.$$

Понеже $|\xi-\xi_0|^{2-n}$ е хармонична по променливата ξ_0, хармонична е и функцията v.

16.46. Нека областта Ω е с еднократно гладък контур и съществува число $\delta > 0$ такова, че за всяка точка от $\partial\Omega$ има вътрешно допираща се сфера с радиус δ.

а) Ако $u \in C^1(\overline{\Omega})$ е хармонична функция, за която $\left.\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega} = \psi$ $\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right.$ е производна по външната нормала $\left.\nu\right)$, то съществуват константи c_1 и M_1 такива, че

$$|u(x)-c_1| \leq M_1 \max_{\partial\Omega}|\psi|, \quad x \in \Omega,$$

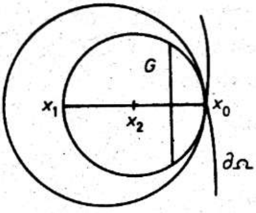
като M_1 зависи само от областта Ω.

б) Формулирайте и докажете твърдение за непрекъсната зависимост на подходящо избрано решение на задачата на Нойман

$$\Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \qquad \frac{\partial u}{\partial\nu} = \psi \text{ върху } \partial\Omega$$

от граничните данни.

Упътване. Нека $\max|\psi| \neq 0$. (В противен случай $u \equiv \text{const.}$) Ако $c_1 = \min\limits_{\overline{\Omega}} u$ и $w = (u-c_1)(\max\limits_{\partial\Omega}|\psi|)^{-1}$, ще докажем, че $|w| \leq M_1$ в Ω (M_1 зависи само от Ω), при условие, че $\Delta w = 0$ и $w \geq 0$ в Ω, а $\left|\frac{\partial w}{\partial\nu}\right| \leq 1$ върху $\partial\Omega$. Нека $U(x_1,\delta)$ е вътрешно допиращо



Черт. 16.1

се кълбо в точката x_0, в която $w(x_0) = \min_{\overline{\Omega}} w = 0$ и да означим с G сечението на $U\left(x_2, \frac{\delta}{2}\right)$ (x_2 — среда на отсечката с краища x_1, x_0) с равнината, минаваща през средата на отсечката x_2, x_0 и перпендикулярна на нея. С помощта на принципа за максимума и предвид условието $\left|\frac{\partial w}{\partial \nu}\right| \leq 1$ върху $\partial\Omega$, се вижда, че ако

$$v(x) = \begin{cases} \frac{2}{n-2}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{n-1}\left(|x-x_2|^{2-n} - \left(\frac{\delta}{2}\right)^{2-n}\right), & n > 2, \\ \delta\left(-\ln|x-x_2| + \ln\frac{\delta}{2}\right), & n = 2, \end{cases}$$

то върху G съществува точка y_1, в която

$$w(y_1) < v(y_1) \leq \sup_G v = \delta M_2, \ M_2 = \frac{1}{n-2}(2^{n-2}-1), \ n > 2,$$

и $M_2 = \ln 2$, $n = 2$. Очевидно числото

$$a = \operatorname{dist}(y_1, \partial\Omega) \geq \operatorname{dist}(G, S(x_1, \delta)) > 0$$

зависи само от δ. Ако $M = \max_{\overline{\Omega}} w$ и $w(x_0') = M$, то съществува точка y_1' на положително разстояние a от $\partial\Omega$, за която $M - w(y_1') \leq \delta M_2$, тъй като функцията $M - w$ има същите свойства както и w. Доказахме, че $M \leq \delta M_2 + w(y_1')$. За $\varepsilon > 0$ означаваме $\Omega_\varepsilon = \{x | x \in \Omega, \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \geq \varepsilon\}$. Множеството Ω_a може да се покрие с краен брой кълба Q_j, $j = 1, \ldots, N$, с радиус $\frac{a}{2}$, където N зависи само от δ (чрез a). Съединявайки y_1 и y_1' с центровете на съдържащите ги кълба, намираме начупена линия, която ги съединява, лежи в $\Omega_{a/2}$ и дължината ѝ не надминава $(N+1)a$. Покриваме я с кълба Q_j', $j = 1, \ldots, N'$, с радиус $\frac{a}{4}$, за които $Q_1' = U\left(y_1, \frac{a}{4}\right)$, центърът на Q_j е пресечната точка на начупената линия с ∂Q_{j-1} и $Q_{N'}' \in y_1'$. (Числото N' зависи само от δ.) Нека K_1 е константата от неравенството на Харнак. След като го приложим N' пъти, намираме

$$w(y_1') \leq K_1^{N'}, \ \ w(y_1) \leq K_1^{N'} \delta M_2.$$

§ 17. Субхармонични функции

Ще казваме, че непрекъснатата в областта Ω функция u е *субхармонична*, ако за всяко кълбо $K = U(x, r) \subset \Omega$ решението

$v = (u)_K$ на задачата на Дирихле $\Delta v = 0$ в K, $v = u$ върху ∂K удовлетворява неравенството $u \leq v$ в K. Въвеждаме означенията

$$L(u, x, r) = \frac{1}{\text{mes } S(r)} \int\limits_{S(x,r)} u ds,$$

$$A(u, x, r) = \frac{1}{\text{mes } U(r)} \int\limits_{U(x,r)} u dx.$$

17.1. Покажете, че ако u е субхармонична в Ω и $K = U(x_0, r) \subset \Omega$, тогава

$$u(x_0) \leq L(u, x_0, r) \text{ и } u(x_0) \leq A(u, x_0, r).$$

Решение. Най-напред имаме

$$u(x_0) \leq (u)_K(x_0) = L((u)_K, x_0, r) = L(u, x_0, r),$$

откъдето с интегриране следва и второто неравенството.

17.2. Докажете принципа за максимума за субхармонични функции: ако $u \in C(\overline{\Omega})$, Ω — ограничена област, е субхармонична, тогава $\max\limits_{\overline{\Omega}} u$ се достига във вътрешна точка на областта Ω само ако $u \equiv \text{const}$.

17.3. Докажете принципа за максимума за функция $v \in C(\overline{\Omega})$, Ω — ограничена област, притежаваща свойството: за всяка точка $x_0 \in \Omega$ съществува кълбо $U(x, r(x)) \subset \Omega$, такова, че $v(x) \leq L(v, x, r(x))$.

Упътване. Нека затвореното множество $F = \{x | v(x) = \max\limits_{\overline{\Omega}} v\} \neq \emptyset$ няма обща точка с $\partial\Omega$. Ако $x_0 \in F$ е най-близката точка до $\partial\Omega$, лесно се достига до противоречие, като се докаже, че $v = v(x_0)$ върху $S(x_0, r(x_0))$. Наистина в противен случай върху $S(x_0, r(x_0))$ би имало множество с ненулева мярка, върху което $v(x) < v(x_0)$ и следователно $v(x_0) \leq L(v, x_0, r(x_0)) < v(x_0)$, което е абсурдно.

17.4. Покажете, че съвкупността на субхармоничните функции в областта Ω съвпада с множеството от функции, притежаващи едно от следните свойства:

а) За всяко $x \in \Omega$ съществува число $\rho(x) > 0$, такова, че $u(x) \leq L(u, x, r)$ за всички $r < \rho(x)$.

б) За всяко $x \in \Omega$ съществува редица $\{r_n\}$, клоняща към нула, такава, че $u(x) \leq L(u, x, r_n)$ за всяко r_n. (Аналогични условия се формулират и чрез обемното средно.)

Упътване. Нека кълбото $K \subset \Omega$ и $v = (u)_K$. За да докажете, че $u \leq v$ в K, използвайте принципа за максимума за субхармоничната функция $u - v$.

17.5. Покажете, че ако $u \in C(\overline{\Omega})$ е субхармонична функция, а h — хармонична в Ω и такава, че $h \geq u$ върху $\partial\Omega$, тогава $h \geq u$ в Ω (Ω — ограничена област).

17.6. Нека u е субхармонична в кълбото $U(x_0, R)$. Покажете, че функцията $f(r) = L(u, x_0, r)$ е монотонно растяща в интервала $(0, R)$.

17.7. (Теорема на Рис.) Докажете, че дефинираната в зад. 17.6 функция $f(r)$ е изпъкнала в интервала $(0, R)$, ако се разглежда като функция на аргумента $\ln r$ при $n = 2$ и съответно — на r^{2-n} при $n \geq 3$.

Решение. Нека $n > 2$ и h — хармонична в $G = U(x_0, r_2) \setminus U(x_0, r_1)$, $0 < r_1 < r_2 < R$, и съвпадаща с u по контура на G. Съгласно теоремата на Гаус (при $\rho \in (r_1, r_2)$)

$$\int\limits_{S(x_0,\rho)} \frac{\partial h}{\partial \nu} ds_\rho = c = \text{const}, \qquad \nu \text{ — външна нормала,}$$

откъдето

$$\frac{c}{\text{mes } S(\rho)} = \frac{\partial}{\partial \rho}\left[\frac{1}{\text{mes } S(1)} \int\limits_{S(1)} h|_{S(x_0,\rho)} ds_1\right] = \frac{\partial}{\partial \rho} L(h, x_0, \rho).$$

Следователно

$$L(h, x_0, \rho) = \frac{a}{(2-n)\rho^{n-2}} + b \equiv g(\rho), \qquad a = \frac{c}{\text{mes } S(1)}.$$

При $\rho = r_1, r_2$ имаме $f(r_i) = g(r_i)$, а при $\rho \in (r_1, r_2)$ е изпълнено $f(\rho) \leq g(\rho)$ поради $u \leq h$ (вж. зад. 17.5), откъдето твърдението следва.

17.8. Ако непрекъснатата и субхармонична в цялата равнина функция u е ограничена отгоре, тогава $u \equiv \text{const}$.

Решение. От зад. 17.7 следва, че за произволно фиксирана точка x_0 имаме $L(u, x_0, \rho) = g(\ln \rho)$, където $g(\lambda)$ е изпъкнала функция, дефинирана за $\lambda \in (-\infty, +\infty)$. Понеже $g(\lambda)$ е ограничена, то $g(\lambda) = c = \mathrm{const}$, а тъй като u е субхармонична, е изпълнено $u(x_0) \le c$. Нека $\max\limits_{U(x_0,\rho)} u = u(x_\rho)$ и $x_\rho \in S(x_0,\rho_1)$, $\rho_1 \le \rho$. Очевидно $c = L(u, x_0, \rho_1) \le L(u(x_\rho), x_0, \rho_1) = u(x_\rho) \xrightarrow[\rho\to 0]{} u(x_0)$. От полученото равенство $u(x_0) = c = L(u, x_0, \rho)$ за всяко x_0 и за всяко ρ следва, че u е хармонична. Сега твърдението следва от теоремата на Лиувил.

Забележка. С помощта на функцията

$$u(x) = \begin{cases} -|x - x_0|^{2-n}, & |x - x_0| \ge 1, \\ -1, & |x - x_0| < 1 \end{cases}$$

се вижда, че при $n \ge 3$ не е валидно твърдение, подобно на зад. 17.8.

17.9. Нека функцията $u \in C(\overline{U(x_0, R)})$ е субхармонична. Тогава $f(r) = L(u, x_0, r)$ е непрекъсната функция в интервала $(0, R)$.

Упътване. Всяка изпъкнала функция е непрекъсната.

17.10. При условията от зад. 17.7 покажете, че величината

$$B(r) = \sup_{x \in S(x_0;r)} u(x)$$

е изпъкнала функция на $\ln r$ при $n = 2$ и на r^{2-n}, ако $n > 2$.

Решение. Нека $0 < r_1 < r_2 < R$ и нека $h(r)$ е линейна функция от $\ln r (n = 2)$ или $r^{n-2} (n > 2)$, която съвпада с $B(r)$ при $r = r_1$ и $r = r_2$. Функцията $v(x) = h(|x - x_0|)$ е хармонична в $G = U(r_2, x_0) \setminus U(r_1, x_1)$ и върху ∂G е очевидно изпълнено неравенството $u(x) - v(x) \le 0$. Според принципа за максимума то е вярно и в G, т. е. върху $S(x_0, r)$, $r \in (r_1, r_2)$, е в сила $u(x) \le v(x) = h(r)$ и следователно

$$B(r) \le h(r), \forall\ r \in (r_1, r_2),$$

с което твърдението е доказано.

17.11. Нека $U(x) \not\equiv \mathrm{const}$ е субхармонична функция в равнината $(n = 2)$. Покажете, че съществува границата

$$\alpha = \lim_{r\to\infty} \frac{B(r)}{\ln\ r}\ .$$

и че тя е положителна. ($B(r)$ е дефинирано в зад. 17.10.) Докажете, че ако $u(x)$ не е хармонична, то

$$\beta = \lim_{r\to\infty} \frac{L(u,0,r)}{\ln\ r} > 0.$$

Забележка. От зад. 17.11 и примерът към зад. 17.8 следва, че субхармоничните функции в равнината не са ограничени (освен когато са константи), докато в пространството ($n > 2$) съществуват ограничени субхармонични функции в цялото пространство. Разбира се, хармоничните функции в пространството, които не са тъждествено равни на константа, не могат да бъдат ограничени.

17.12. Покажете, че ако $u \in C(\overline{U(x_0,R)})$ е субхармонична, то $v(\rho) = A(u,x_0,\rho)$ е монотонно растяща в $(0,R)$.

Упътване. Величината

$$A(u,x_0,\rho) = \frac{n}{\rho^n}\int_0^\rho L(u,x_0,r)r^{n-1}dr$$

се апроксимира с риманови суми

$$\Sigma_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{n}{\rho^n} L\left(u,x_0,\frac{k}{m}\rho\right)\left(\frac{k}{m}\rho\right)^{n-1}\frac{\rho}{m}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{nk^{n-1}}{m^n} L\left(u,x_0,\frac{k}{m}\right),$$

които имат това свойство.

17.13. (Теорема на Адамар за трите кръга.) Нека функцията u е субхармонична във венеца $D = U(r_2)\setminus U(r_1)$, $0 < r_1 < r_2$, и $M(r) = \max_{x^2+y^2=r^2} u(x,y)$, $r \in (r_1,r_2)$, Докажете, че

$$M(r) \le \frac{M(r_1)\ln\frac{r_2}{r} + M(r_2)\ln\frac{r}{r_1}}{\ln\frac{r_2}{r_1}}.$$

Формулирайте и докажете n-мерния аналог на твърдението.

Упътване. Приложете принципа за максимума за функцията

$$v \equiv u - \varphi(r), \varphi(r) = a + b \ln\ r,$$

където константите a и b са избрани така, че

$$\varphi(r_i) = M(r_i), i = 1, 2.$$

В n-мерния случай разгледайте $\varphi(r) = a + br^{2-n}$.

17.14. Нека функцията u е субхармонична в $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ и удовлетворява едно от двете условия в дефиниционната си област:

$$\text{а)}\ u \leq \text{const}; \qquad \text{б)}\ \liminf \frac{M(r)}{|\ln\ r|} \leq 0$$

при $r \to 0$ и при $r \to \infty$. (Означението $M(r)$ е въведено в предишната задача.) Докажете, че $u = \text{const}$.

Забележка. Функциите

$$u_1 = \begin{cases} -\left(\frac{3}{4} - r^2 + \frac{1}{4}r^4\right), & r \leq 1, \\ \ln\ r, & r \geq 1, \end{cases} \quad \text{и } u_2 = \begin{cases} \ln\frac{1}{r} - \left(\frac{3}{4} - r^2 - \frac{1}{4}r^4\right), & r \leq 1, \\ 0, & r \geq 1. \end{cases}$$

показват, че резултатът от зад. 17.14 б) е най-добрият възможен.

17.15. Нека u е субхармонична в областта Ω. Дефинираме

$$\psi_r(x) \equiv A_1(x, u) = A(u, x, r).$$

Покажете, че

а) при достатъчно малко r функцията $\psi_r(x)$ е дефинирана и непрекъсната в Ω_1, $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$;

б) $\psi_r(x)$ е субхармонична в Ω.

Упътване. б) Като вземем предвид, че $u(x) \leq A_r(x, u)$ за всички достатъчно малки r, покажете, че

$$A_{r_1}(x_0, u) \leq A_{r_1}(x_0, A_r(x, u)) = A_r(x_0, A_{r_1}(x, u)).$$

Дефиниция. Нека u е субхармонична в Ω и числата $r_1, \ldots, r_n$ са достатъчно малки. Означаваме

$$A_{r_1 \cdot r_2}(x, u) = A_{r_2}(x, A_{r_1}(x, u))$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_{r_1, r_2, \ldots, r_n}(x, u) = A_{r_n}(x, A_{r_1, \ldots, r_{n-1}}(x, u)).$$

За $r_1 = \cdots = r_n = r$ последната функция означаваме с $A_r^{(n)}(x,u)$.

17.16. Покажете, че горните функции на x са непрекъснати, субхармонични и удовлетворяват неравенствата

$$u(x) \leq A_{r_1}(x,u) \leq A_{r_1,r_2}(x,u) \leq \cdots$$

и съответно $u(x) = A_r^{(n)}(x,u)$.

17.17. Покажете, че

а) $A_r^{(n)}(x,u) \leq A_s^{(n)}(x,u)$ за $r \leq s$;

б) $\lim\limits_{r\to 0} A_r^{(n)}(x,u) = u(x)$.

Упътване. От зад. 17.12 следва, че $A_r(x,u) \leq A_s(x,u)$ при $r \leq s$, откъдето се получава а) чрез повторно интегриране.

17.18. Покажете, че ако $f \in C(\Omega)$ и r е фиксирано число, тогава функцията $\psi_r(x) = A_r(x,f)$ има непрекъснати първи производни

$$\frac{\partial \psi_r}{\partial x_i}(x_0) = \frac{1}{\text{mes } U(1)} \int\limits_{S(1)} f(x_0 + ry)\cos(\nu, y_i)ds_y$$

(ν — външната нормала към $S(1)$) в областта

$$\Omega_1 = \{x | x \in \Omega, \text{dist}(x, \partial\Omega) \geq r\}.$$

Упътване. Като използвате предишната задача, покажете, че:

а) ако $f \in C^n(\Omega)$, то $A_r(x,f) \in C^{n+1}(\Omega)$;

б) ако $f \in C(\Omega)$, то $A_r^{(n)}(x,f) \in C^n$

в частта от Ω, в която A_r и $A_r^{(n)}$ са дефинирани.

Упътване. а) При $f \in C^1$ е изпълнено

$$\frac{\partial A_r(x,f)}{\partial x_i} = A_r\left(x, \frac{\partial f}{\partial x_i}\right).$$

17.20. Нека $u \in C(\Omega)$ е субхармонична в Ω. Покажете, че за всички достатъчно големи k функциите

$$u_k(x) = A_{1/k}^{(2)}(x,u), \; k = 1, 2, \ldots,$$

са дефинирани, субхармонични и двукратно гладки в Ω_1, $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$, и при $k \to \infty$ клонят, монотонно намалявайки към u.

Упътване. Твърдението следва от задачи 17.16 – 17.19. В компактните подмножества на Ω сходимостта е равномерна.

17.21. Нека редицата $\{u_k\}$ от субхармонични в Ω функции клони равномерно към функцията u в Ω_1, $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$. Покажете, че u е субхармонична в Ω_1.

Упътване. Използвайте неравенството от зад. 17.1 за функцията u_k и извършете граничен преход.

17.22. Покажете, че ако $u \in C^2(\Omega)$ в $\Delta u > 0$ в Ω, тогава u е субхармонична в Ω.

Решение. Нека $K = U(x_0, R) \subset \Omega$ и $h = (u)_K$. Ако неравенството $h \geq u$ се нарушава в някоя (вътрешна!) точка от K, тогава $u - h$ достига максимума си в K във вътрешна точка x_0 и следователно $\Delta(u-h)(x_0) \leq 0$. Но $\Delta u - \Delta h = \Delta u > 0$.

17.23. Покажете, че необходимото и достатъчно условие функцията $u \in C^2(\Omega)$ да бъде субхармонична в Ω е $\Delta u \geq 0$.

Решение. Ако u е субхармонична и в някоя точка x_0 е изпълнено $\Delta u(x_0) < 0$, то локално u е и суперхармонична (зад. 17.22). Следователно в тази околност u е хармонична и $\Delta u(x_0) = 0$ — противно на допускането. Обратно, ако $\Delta u \geq 0$, то $u_\varepsilon = u + \varepsilon|x|^2$ е субхармонична (зад. 17.22). Понеже $u_\varepsilon \rightrightarrows u$ при $\varepsilon \to 0$ върху всеки компакт, твърдението следва посредством зад. 17.21.

Забележка. От зад. 17.20 – 17.23 следва, че класът на всички непрекъснати субхармонични функции се получава, като към класа

$$\sigma = \{v | v \in C^2(\Omega), \Delta v \geq 0\}$$

се добавят равномерните граници на всички редици от функции от σ.

17.24. Докажете достатъчността на условието от зад. 17.23, като използвате формулата на Поасон за задачата на Дирихле за кълбото.

17.25. Установете директно еквивалентността на условията за субхармоничност на една двукратно гладка функция, дадени в задачи 17.23 и 17.4, като използвате функцията на Грийн $G(x, x_0)$ за кълбото, когато x_0 съвпада с центъра му.

Упътване. В интересуващия ни случай за кълбото

$U(x_0, R)$ имаме

$$G(x,x_0) = \begin{cases} \frac{1}{\text{mes } U(1)}(|x-x_0|^{2-n} - R^{2-n}), & n \geq 3, \\ \frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{|x-x_0|} - \ln\frac{1}{R}\right), & n = 2. \end{cases}$$

17.26. Покажете, че ако u_k, $k = 1, \ldots, m$, са субхармонични в областта Ω, тогава и функцията $u = \max(u_1, \ldots, u_k)$ е субхармонична.

Решение. Нека $x_0 \in \Omega$ е произволна и $\overline{U(x_0,r)} \subset \Omega$. Ако $u(x_0) = u_i(x_0)$, i — фиксирано, то

$$u(x_0) \leq L(u_i, x_0, r) \leq L(u, x_0, r).$$

Прилагаме зад. 17.4.

17.27. Нека $u \in C(\Omega)$. Покажете, че ако

$$\limsup_{r\to 0} \frac{1}{r^2}(L(u,x_0,r) - u(x_0)) \geq 0,$$

то функцията u е субхармонична в Ω.

Упътване. Неравенставото от зад. 17.1 е строго за функциите $f_n(x) = \frac{1}{n}|x|^2$, $n = 1, 2, \ldots$ (защо?). Следователно за $u_n = u + f_n$ е в сила условие б) от зад. 17.4, т.е. u_n са субхармонични. Но те са непрекъснати и монотонно клонят към u при $n \to \infty$, а следователно и равномерно върху всеки компакт. Приложете зад. 17.21.

17.28. Докажете, че ако за $u \in C(\Omega)$ е изпълнено

$$\limsup_{r\to 0} \frac{1}{r^2}(A(u,x_0,r) - u(x_0)) \geq 0$$

за всяко $x_0 \in \Omega$, то функцията u е субхармонична в Ω.

17.29. Нека функцията $u \in C^2(\Omega)$ е такава, че $u > 0$ в Ω и $w = u \cdot \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right)$ е субхармонична при всеки избор на константите α_i. Покажете, че $v = \ln u$ е субхармонична в Ω.

Решение. По условие

$$\Delta w = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right)\left[\Delta u + 2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i u_{x_i} + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 u\right] \geq 0$$

при всеки избор на константите $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$. Следователно $u\Delta u - \sum\limits_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 \geq 0$, което показва, че $\ln u$ е субхармонична, тъй като

$$\Delta(\ln\ u) = u^{-2}\left(u\Delta u - \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2\right).$$

17.30. Нека за $n = 2$ функцията u е строго положителна в областта Ω и $v = \ln u$ е субхармонична в Ω. Покажете, че и функцията u е субхармонична.

Упътване. По условие $v(x_0) \leq L(v, x_0, r)$ за всяко кълбо $\overline{U(x_0, r)} \subset \Omega$. Неравенството $u(x_0) = \exp v(x_0) \leq L(u, x_0, r)$ следва от $\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln\ f(\varphi)d\varphi \leq \ln\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi\right]$, $f \geq 0$.

17.31. Нека u е строго положителна и непрекъсната в Ω. Покажете, че ако ue^h е субхармонична във всяка подобласт Ω_1, в която h е хармонична, тогава $v = \ln u$ е субхармонична в Ω.

Решение. Нека $h = (v)_K$, K — кълбо, съдържащо се в Ω. От субхармоничността на ue^{-h} и принципа за максимума следва, че $ue^{-h} \leq 1$ в K, т.е. $v \leq h$ в K.

17.32. Нека $f(t)$ е дефинирана, изпъкнала и растяща в интервала (t_1, t_2). Покажете, че ако $u \in C(\Omega)$ е субхармонична и $t_1 < u(x) < t_2$ в Ω, тогава $v = f(u)$ е също субхармонична в Ω. (Напр. $f(t) = t^\alpha$, $\alpha \geq 1$, или $f(t) = e^{\beta t}$, $\beta > 0$.)

Упътване. Ако f и u са гладки, всичко следва от равенството

$$\Delta v = f''(u)\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 + f'(u)\Delta u.$$

Общия случай третирайте с апроксимации.

17.33. Нека $f \in C^2(\mathbf{R}^1)$ е дефинирана и строго растяща, а $v \in C^2(\Omega)$. Покажете, че ако $w = f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + v\right)$ е субхармонична при всеки избор на константите α_i, тогава v е субхармонична в Ω.

Упътване. Пресметнете Δw подробно и като изберете α_i по подходящ начин, заключете, че $\Delta v \geq 0$ във всяка фиксирана точка x_0. Приложете зад. 17.23.

17.34. Нека $f \in C^2(\mathbf{R}^1)$, $f'(t) > 0$ и $v \in C^2(\Omega)$ е такава, че $f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + v\right)$ е субхармонична при всеки избор на константите α_i. Покажете, че f е изпъкнала функция.

17.35. Нека u е субхармонична и $U(x_0, R)$ и $r = |x - x_0|$. Покажете, че $l(x) = L(u, x_0, r)$ е субхармонична в $U(x_0, R)$.

Решение. Очевидно $l = \text{const}$ върху всяка сфера $S(x_0, r)$, $O < r < R$, и по-точно $l = \lambda(t)$, където $\lambda(t)$ е изпъкнала и растяща функция на

$$t = \begin{cases} \ln\ r, & n = 2, \\ r^{2-n}, & n \geq 3. \end{cases}$$

От зад. 17.32 следва субхармоничността на $l(x)$ в $U(x_0, R) \setminus \{x_0\}$. За точката x_0 твърдението следва от съотношенията

$$L(l, x_0, \rho) = L(u, x_0, \rho) \geq u(x_0) = l(x_0).$$

17.36. При условията от зад. 17.35 покажете, че функцията $a(x) = A(u, x_0, r)$ е субхармонична в $U(x_0, R)$.

17.37. Нека $u \in C(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbf{R}^2_{(x,y)}$, и изпъкнала относно x при всяко фиксирано y и е изпъкнала относно y при всяко фиксирано x. Покажете, че u е субхармонична.

Решение. Нека $\overline{U(x_0, r)} \subset \Omega$ и числата h, k са така избрани, че $h^2 + k^2 = r^2$. Имаме

$$u(x_0) \leq \frac{1}{4}[u(x_0 + h, y_0 + k) + u(x_0 - h, y_0 + k)$$

$$+ u(x_0 - h, y_0 - k) + u(x_0 + h, y_0 - k)].$$

Разделяме $S(x_0, r)$ на m равни дъги посредством точките $(x_0 + h_i, y_0 + k_i)$, $i = 1, \ldots, m$. Събираме съответните неравенства за $i = 1, \ldots, m$ и при $m \to \infty$ получаваме

$$u(x_0) \leq L(u, x_0, r).$$

17.38. Нека u_i, $i = 1, \ldots, m$, са субхармонични и неотрицателни в областта Ω. Покажете, че функцията $u = (u_1^\alpha + \cdots + u_m^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, $\alpha > 1$, е субхармонична. Какво може да се каже за модула на една аналитична функция?

Упътване. В диференцируемия случай изследвайте Δu.

17.39. Нека функцията u е хармонична в областта Ω. Покажете, че $|u(x)|^{\alpha}$, $\alpha \geq 1$, и $e^{\beta u(x)}$, $\beta > 0$, са субхармонични функции в Ω. В частност, ако $f(z)$ е аналитична в $\Omega \subset \mathbf{C}$, то функциите $|\ln|f(z)||^{\alpha}$, $\alpha \geq 1$, и $|f(z)|^{\beta}$, $\beta > 0$, са субхармонични в Ω (първата е непрекъсната, ако $f(z) \neq 0$).

17.40. Нека $u \in C(\Omega)$. Покажете, че u е субхармонична в Ω тогава и само тогава, когато $A(u, x_0, r) \leq L(u, x_0, r)$, за всяка сфера $S(x_0, r)$, $\overline{U(x_0, r)} \subset \Omega$.

Решение. Необходимост. От упътването към зад. 17.12 и предвид зад. 17.6 следва, че

$$A(u, x_0, r) = \lim_{m\to\infty} \Sigma_m \leq L(u, x_0, r) \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \frac{n}{m^n} = L(u, x_0, r),$$

защото последният израз под знака за граничен преход е риманова сума на

$$n \int_0^1 \rho^{n-1} d\rho = 1.$$

Достатъчност. Нека $u \in C^2(\Omega)$. С помощта на формулата на Тейлор намираме

$$L(u, x_0, r) = u(x_0) + \frac{1}{2n} r^2 \cdot \Delta u(x_0) + \sigma_1,$$

$$A(u, x_0, r) = u(x_0) + \frac{1}{2(n+2)} r^2 \cdot \Delta u(x_0) + \sigma_2,$$

където $\frac{\sigma_i}{r^2} \xrightarrow[r\to 0]{} 0$, $i = 1, 2$. Наистина, ако ν е външната нормала към $S(x_0, r)$, то

$$\int_{S(x_0,r)} (x_i - x_i^0) ds = r \int_{S(x_0,r)} \cos(\nu, x_i) ds = r \int_{U(x_0,r)} \frac{\partial}{\partial x_i}(1) dx = 0;$$

$$\frac{1}{\text{mes } S(r)} \int_{S(x_0,r)} (x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) ds_r$$

$$= \frac{r}{\text{mes } S(r)} \int_{U(x_0,r)} \frac{\partial}{\partial x_j}(x_i - x_i^0) dx = \frac{r^2}{n} \delta_{ij};$$

$$\frac{1}{\text{mes } U(r)} \int\limits_{U(x_0,r)} (x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)dx$$

$$= \frac{1}{\text{mes } U(r)} \int\limits_0^r \left[\int\limits_{S(x_0,\rho)} (x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)ds_\rho \right] d\rho = \frac{r^2}{n+2}\delta_{ij}.$$

От неравенството $A(u, x_0, r) \leq L(u, x_0, r)$ следва, че

$$\Delta u(x_0) \geq \frac{n(n+2)}{2r^2}(\sigma_2 - \sigma_1), \text{ откъдето } \Delta u \geq 0.$$

Ако u е само непрекъсната, твърдението следва чрез апроксимации.

17.41. Нека функцията $f(z)$ е аналитична в кръга $|z| < R$ и $\beta = \text{const} > 0$. Докажете, че функцията

$$g(\rho) = \int\limits_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta})|^\beta d\theta$$

е монотонно растяща в интервала $(0, R)$.

Упътване. Вж. зад. 17.6 и 17.39.

§ 18. Класически елиптични потенциали

Навсякъде в този параграф, освен ако не е специално уговорено, ще считаме, че размерността е $n = 3$.

18.1. Пресметнете обемния потенциал на хомогенното кълбо $U(O, R)$ с постоянна плътност μ.

Решение I. Трябва да пресметнем интеграла

$$v(P_0) = \int\int\limits_{U(R)}\int \mu \frac{d\tau}{r(P, P_0)}.$$

Поради симетрията на кълбото функцията $v(P_0)$ зависи само от $r(O, P_0)$. Наистина нека P_0 и Q_0 са две точки от кълбото със свойството $r(O, P_0) = r(O, Q_0)$. Означаваме с A въртенето около началото O, при което Q_0 преминава в P_0, т. е. $P_0 = AQ_0$. Извършваме смяна на променливите $\tau = A\xi$ в интеграла и получаваме

$$v(P_0) = \mu \int\int_{U(R)}\int \frac{d\xi}{r(AP(\xi), P_0)} = \mu \int\int_{U(R)}\int \frac{d\xi}{r(AP(\xi), AQ_0)}$$

$$= \mu \int\int_{U(R)}\int \frac{d\xi}{r(P(\xi), Q_0)} = v(Q_0).$$

При пресмятането използвахме факта, че якобианът на τ спрямо ξ е равен на единица, и запазването на разстоянията при въртене. Следователно $v(P_0) = f(r(O, P_0)) = f(r)$. От свойствата на обемния потенциал $v(P_0)$ знаем, че $v \in C^1(\mathbf{R}^3)$; $\Delta v(P_0) = -4\pi\mu$ за $P_0 \in U(R)$ и $\Delta v(P_0) = 0$ за $P_0 \notin \overline{U(R)}$. По този начин за функцията $f(r)$ плучаваме следните две обикновени диференциални уравнения:

$$f''(r) + \frac{2}{r}f'(r) = -4\pi\mu, r < R,$$

$$f''(r) + \frac{2}{r}f'(r) = 0, r > R.$$

След като ги интегрираме, намираме, че

(1) $$v(P_0) = \frac{C_1}{r(O, P_0)} + C_2 \text{ за } r > R,$$

(2) $$v(P_0) = \frac{C_3}{r(O, P_0)} - \frac{2\pi}{3}\mu r^2(O, P_0) + C_4 \text{ за } r < R,$$

където C_1, C_2, C_3, C_4 са константи. Тъй като $v(P_0) \underset{P_0 \to \infty}{\longrightarrow} 0$, то $C_2 = 0$. Понеже $v \in C^1$, то $C_3 = 0$. За да пресметнете константите C_1 и C_4, възползвайте се от обстоятелството, че $v \in C^1(\mathbf{R}^3)$, т.е. функцията v, зададена с формулите (1) и (2), и първите ѝ производни отвън и отвътре на сферата $S(R)$ трябва да съвпадат при $r \to R$.

Отг. $$v(P_0) = \begin{cases} \dfrac{4\pi\mu R^2}{3} \cdot \dfrac{1}{r(O, P_0)} & \text{за } r(O, P_0) \geq R, \\ 2\pi\mu \left(R^2 - \dfrac{r^2(O, P_0)}{3}\right) & \text{за } r(O, P_0) \leq R. \end{cases}$$

Формулата, получена за $r(O, P_0) \geq R$, може да се тълкува така:

Хомогенното кълбо $U(R)$ и неговият център O, в който допускаме, че е концентрирана масата на цялото кълбо $\frac{4}{3}\pi\mu R^3$, създават еднакъв потенциал извън кълбото (теоремата на Нютон).

Решение II. Нека тук $\mu \equiv 1$. Поради сферичната симетрия е в сила $v(P) = f(r)$. Ако за удобство точката P лежи на права през точката O и успоредна на оста z, като въведем полярни координати, получаваме

$$f(r) = 2\pi \int_0^R \int_0^\pi \frac{\rho^2 \sin\theta d\rho d\theta}{s},$$

където $s^2 = \rho^2 + r^2 - 2\rho r\cos\theta$. Въвеждаме нова променлива s (вместо θ) и предвид $sds = r\rho\sin\theta d\theta$ получаваме

$$f(r) = \frac{2\pi}{r} \int_0^R \rho \left[\int_{|r-\rho|}^{r+\rho} ds \right] d\rho.$$

Ако $r \geq R$, то $r \geq \rho$ и $f(r) = \frac{4\pi R^2}{3r}$, а ако $r < R$, то

$$f(r) = \frac{2\pi}{r} \left[\int_0^r \rho \cdot 2\rho d\rho + \int_r^R \rho \cdot 2r d\rho \right] = 2\pi \left(R^2 - \frac{1}{3} r^2 \right).$$

18.2. Пресметнете обемния потенциал v на кълбо $U(O, R)$ с плътност $\mu(Q)$, зависеща само от $\rho = \mathrm{dist}\ (Q, O)$. Проверете директно, че $\Delta v = -4\pi\mu$ във вътрешността на кълбото.

Отг. $$v(P) = \begin{cases} \frac{4\pi}{r} \int\limits_0^R \rho^2 \mu(\rho) d\rho, & r \geq R, \\ \frac{4\pi}{r} \int\limits_0^r \rho^2 \mu(\rho) d\rho + 4\pi \int\limits_r^R \rho\mu(\rho) d\rho, & r \leq R, \end{cases}$$

където $r = \mathrm{dist}(P, O)$.

18.3. За сферичния слой $\{P | 0 < R_1 < \mathrm{dist}(P, O) < R_2\}$ да се пресметне обемния потенциал, ако плътността μ е:

а) постоянна;

б) $\mu(Q) = \mu(\rho)$, $\rho = \mathrm{dist}(Q, O)$.

Упътване. Както в зад. 18.1, покажете, че в слоя $R_1 < r < R_2$ обемният потенциал има вида (2), а в областите $r > R_2$ и $r < R_1$ има вида (1) съответно с константи C_1, C_2 и C_1', C_2'.

$$\textit{Отг.}\ \text{а)}\ v(P) = \begin{cases} 2\pi\mu(R_2^2 - R_1^2) & \text{за } r < R_1, \\ 2\pi\mu R_2^2 - \dfrac{2\pi\mu}{3}\left(r^2 + \dfrac{2R_1^3}{r}\right) & \text{за } R_1 < r < R_2, \\ \frac{4}{3}\pi\mu(R_2^3 - R_1^3)\frac{1}{r} & \text{за } r > R_2. \end{cases}$$

18.4. Намерете потенциала от прост слой на сферата $S(R)$ с постоянна плътност μ.

Решение. Въз основа на разглежданията от зад. 18.1 е ясно, че потенциалът

$$v(P_0) = \iint\limits_{S(R)} \frac{\mu}{r(P, P_0)} dS_P$$

е функция само на разстоянието $r(O, P_0)$, т.е. $v(P_0) = f(r(O, P_0))$. Знаем, че $v(P_0)$ е хармонична функция извън сферата $S(R)$, $v(P_0) \xrightarrow[P_0 \to \infty]{} 0$ и $v \in C(\mathbf{R}^3)$. Освен това е валидна формулата за скока на нормалната производна върху $S(\mathbf{R})$:

$$\left.\frac{du_2}{dr}\right|_{r=R} - \left.\frac{du_1}{dr}\right|_{r=R} = 4\pi\mu,$$

където $u_1(P_0) = v(P_0)$ за $P_0 \in \overline{U(R)}$, $u_2(P_0) = v(P_0)$ за $P_0 \in U(R)$.

$$\textit{Отг.}\ v(P_0) = \begin{cases} 4\pi R\mu & \text{за } r(O, P_0) \le R, \\ \dfrac{4\pi R^2\mu}{r(O, P_0)} & \text{за } r(O, P_0) \ge R. \end{cases}$$

Дефиниция. Една еднопараметрична фамилия от повърхнини се нарича фамилия от *еквипотенциални* повърхнини за хармоничната функция u, ако стойността на u върху всяка от тях зависи от съответната стойност на параметъра.

18.5. Покажете, че необходимото и достатъчно условие фамилията двукратно гладки повърхнини $F(x, y, z) = c$ (c — параметър за определеност $c \ge a$) да бъдат еквипотенциални повърхнини за някое решение на уравнението на Лаплас е изразът $\Delta F \cdot |\text{grad}\ F|^{-2}$ да бъде функция $\varphi(F)$ само от F. Покажете, че ако това условие е изпълнено, тогава въпросният потенциал е

$$u = c_1 \int_a^F \exp\left(- \int_a^\xi \varphi(t)dt \right) d\xi + c_2, c_i = \text{const}, i = 1, 2.$$

Упътване. Ако $u(P) = f(c)$ върху $F(P) = c$ и $\Delta u = 0$, тогава $0 = \Delta u = f''$, $|\text{grad } c|^2 + f' \cdot \Delta c$, откъдето следва, че

$$\frac{\Delta c}{|\text{grad } c|^2} = -\frac{f''(c)}{f'(c)} \equiv \varphi(c).$$

Обратно, ако това условие е в сила, функцията f може да се възстанови елементарно.

18.6. Покажете, че фамилията елипсоиди

$$\frac{x^2}{a^2+s} + \frac{y^2}{b^2+s} + \frac{z^2}{c^2+s} = 1, \; a > b > c,$$

където параметърът $s > -c^2$, са еквипотенциални повърхнини и съответният потенциал v се дефинира с формулата $v = c_1 \int\limits_0^s \frac{dt}{\sqrt{\varphi(t)}}$ $+c_2$, където $\varphi(t) = \sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}$, а c_1 и c_2 са константи, зависещи от условията при $s \to \infty$ и върху някоя фиксирана повърхнина от фамилията.

Упътване. Най-напред (подобно на предишната задача) установяваме, че фамилията е еквипотенциална чрез пресмятане на $\Delta s \cdot |\text{grad } s|^{-2}$. Ако $q_n \equiv \frac{x^2}{(a^2+s)^n} + \frac{y^2}{(b^2+s)^n} + \frac{z^2}{(c^2+s)^n}$, като диференцираме $q_1 = 1$ по x, y и z, намираме последователно

$$\frac{\partial s}{\partial x} = 2x(a^2+s)^{-1}q_2^{-1}, \ldots, |\text{grad } s|^2 = 4q_2^{-1},$$

$$\Delta s = \frac{2}{q_2}\left(\frac{1}{a^2+s} + \frac{1}{b^2+s} + \frac{1}{c^2+s}\right).$$

Следователно $\psi \equiv \Delta s|\text{grad } s|^{-2}$ зависи само от s. Това позволява да се намери потенциалът $v = f(s)$ чрез интегриране на равенството $\dfrac{f''(s)}{f'(s)} = -\psi$. При условие, че $v(\infty) = 0$, намираме, че

$$c_2 = -c_1 \int\limits_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{\varphi(t)}} \text{ и следователно } v = -c_1 \int\limits_s^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{\varphi(t)}}.$$

18.7. Като се възползвате от предишната задача , намерете хармонична функция u във вътрешността на елипсоида

$$E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

която да удовлетворява условията $u \equiv 1$ върху E и $u(\infty) = 0$. Какво се получава при $a = b = c$?

Отг. $u(x, y, z) = \int\limits_{\lambda}^{\infty} \dfrac{ds}{\sqrt{\varphi(s)}}$, където $A = \left[\int\limits_0^{\infty} \dfrac{ds}{\sqrt{\varphi(s)}}\right]^{-1}$, а $\lambda \geq 0$v е неотрицателният корен на

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1.$$

18.8. За потенциала от прост слой $v(P) = \iint\limits_E \dfrac{\sigma(Q)}{r(Q, P)} ds_Q$, където E е елипсоидът от зад. 18.7, определете плътността $\sigma(Q)$ по такъв начин, че $v \equiv 1$ вътре в E.

Упътване. Използвайте формулата за скока и очевидния факт, че $v(P)$ съвпада извън E с намерената в зад. 18.7 функция u (теорема за единственост на решението на външната задача на Дирихле).

Отг. $\sigma(x, y, z) = \dfrac{A}{2\pi abc} \left(\dfrac{x^2}{a^4} + \dfrac{y^2}{b^4} + \dfrac{z^2}{c^4}\right)^{-\frac{1}{2}}$, където A е константата от зад. 18.6.

18.9. Решете зад. 18.7 за:

а) сплеснат ротационен елипсоид ($a = b > c$);

б) разтеглен ротационен елипсоид ($a > b = c$).

Отг. а) $v(P) = A \int\limits_{\lambda}^{\infty} \dfrac{ds}{(s + a^2)\sqrt{s + c^2}} = \dfrac{2A}{\sqrt{a^2 - c^2}} \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{\dfrac{a^2 - c^2}{\lambda + c^2}}$;

б) $v(P) = \frac{A}{\sqrt{a^2 - b^2}} \ln \frac{\sqrt{\lambda + a^2} + \sqrt{b^2 - a^2}}{\sqrt{\lambda + a^2} + \sqrt{b^2 - a^2}}$, където λ е положителният корен на уравнението

$$\frac{x^2}{a^2 + s} + \frac{y^2}{b^2 + s} + \frac{z^2}{c^2 + s} = 1, P = (x, y, z),$$

а константата A е определена в зад. 18.7.

18.10. Пресметнете обемния потенциал на хомогенен елипсоид $E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ с плътност $\varkappa \equiv 1$.

Решение. Обемът на конично тяло с основа ΔS върху елипсоида и връх в центъра му е

$$V = \frac{1}{3} \int\int_{\Delta S} r \cos(r, \nu) ds = \frac{1}{3} \int\int_{\Delta S} p ds,$$

където r е разстоянието до центъра на E, ν — външна нормала, а p е разстоянието от центъра на E до тангенциалната равнина

$$(\xi - x)\frac{x}{a^2} + (\eta - y)\frac{y}{b^2} + (\zeta - z)\frac{z}{c^2} = 0$$

в интеграционната точка (x, y, z). Очевидно $p = \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{-\frac{1}{2}}$. Тъй като обемът на подобно тяло, получено чрез хомотетия с коефициент u_1, е $u_1^3 V$, обемът на разликата на два такива конуса е равен на $\Delta V = \frac{u_2^3 - u_1^3}{3} \int\int_{\Delta S} p ds$, където u_i, $i = 1, 2$, са съответните коефициенти на хомотетия. Според теоремата за средните стойности за интеграли имаме

$$\Delta V = \overline{u^2} \Delta u \overline{p_0} \Delta S_0$$

(нуличките показват, че съответните величини се отнасят за основния елипсоид). За елипсоида, получен при хомотетия с коефициент $\overline{u}$, имаме съответно $\Delta S = \overline{u^2} \Delta S_0$ и $\overline{p} = \overline{u}\,\overline{p_0}$, т. е. $\Delta V = \frac{1}{\overline{u}} \overline{p} \Delta S \Delta u$. Сега, тръгвайки от риманова сума на обемния потенциал на слой между два хомотетични елипсоида, получени от основния чрез хомотетия с коефициенти u_1 и u_2, намираме

$$u(P) = \lim \sum \frac{\Delta V}{r(P, Q)} = \lim \sum \frac{\overline{p} \Delta S \Delta u}{\overline{u} r} = \int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{u} \left[\int\int \frac{p ds_Q}{r} \right] du.$$

В разглеждания от нас случай $u_1 = 0$ и $u_2 = 1$. Нека точката $a = (x, y, z)$ е външна за елипсоида. Очевидно вътрешният интеграл съвпада с точност до константа с потенциала от задача 18.8 за елипсоида с полуоси au, bu, cu, т.е. е равен на

$$2\pi abcu^3 \int\limits_{\lambda(u)}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{\varphi(u,s)}}, \text{ където } \varphi(u,s) = (a^2u^2 + s)\dots(c^2u^2 + s),$$

а $\lambda(u)$ е положителният корен на

$$f(u,\lambda) \equiv \frac{x^2}{a^2u^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2u^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2u^2+\lambda} = 1.$$

Следователно

$$u(P) = 2\pi\ abc \int\limits_0^1 u^2 \int\limits_{\lambda(u)}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{\varphi(u,s)}} du.$$

След смяна $s = u^2 t$ във вътрешния интеграл (означаваме $v = \frac{\lambda(u)}{u^2}$) и интегриране по части във външния

$$\frac{u(P)}{2\pi\ abc} = \left[\frac{u^2}{2}\int\limits_v^{\infty}\frac{dt}{\sqrt{\varphi(t)}}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 u^2 \frac{1}{\sqrt{\varphi(v)}}\cdot\frac{dv}{du}du.$$

Тъй като v е най-големият корен на $f(1,v) = u^2$, намираме, че при $u = 1$ е изпълнено $v = \lambda$, а при $u \to 0$ — съответно $v \to \infty$. Следователно

$$u(P) = \pi\ abc \int\limits_{\lambda}^{\infty} [1 - f(1,s)] \frac{ds}{\sqrt{\varphi(s)}}.$$

В случай, че P е вътрешна точка за E и $u_0 \in (0,1)$ е числото, характеризиращо елипсоида през нея, като използваме отново зад. 18.8 и предварително разделим основния елипсоид E на две части (за едната от които P е външна), намираме

$$u(P) = 2\pi\ abc \left[\int\limits_0^{u_0} u \int\limits_v^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{\varphi(t)}} du + \int\limits_{u_0}^{1} u \int\limits_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{\varphi(t)}} du\right]$$

$$= \pi\, abc \int_0^\infty [1 - f(1,s)] \frac{ds}{\sqrt{\varphi(s)}},$$

понеже $v = 0$ за $u = u_0$ (точката P лежи именно върху елипсоида $u = u_0$).

Забележка. От предпоследното равенство се вижда, че във вътрешността на един хомогенен слой между два хомотетични елипсоида потенциалът е постоянен (теорема на Нютон).

18.11. Пресметнете обемния потенциал на:

а) сплеснат ротационен елипсоид ($a = b > c$);

б) разтегнат ротационен елипсоид ($a > b = c$).

18.12. Пресметнете потенциала $u(P) = \int\limits_l \frac{1}{r} dl_Q$, $r = \operatorname{dist}(P, Q)$, на хомогенен сегмент l с краища $(0,0,a)$ и $(0,0,b)$.
Отг. За точките от равнината (x,z)

$$u(x,0,z) = \ln \frac{\sqrt{x^2 + (b-z)^2} + b - z}{\sqrt{x^2 + (a-z)^2} + a - z}.$$

18.13. Покажете, че потенциалът от зад. 18.12 може да се представи във вида

$$u(P) = 2\coth^{-1} \frac{r_1 + r_2}{d},$$

където d е дължината на сегмента, а r_1 и r_2 — разстоянията от точка P до краищата му.

а) Какви са еквипотенциалните повърхнини $u = \text{const}$?

б) Покажете, че $\psi(P) \equiv u(P) - u(P_0)$, където P_0 е фиксирана точка на разстояние единица от линията l_1 на сегмента, има крайна граница, когато при фиксирани P и l_1 дължината му нараства и в двете направления (т.е. — a и b клонят независимо към $+\infty$). Покажете, че тази граница е $2\ln\frac{1}{r}$, където $r = \operatorname{dist}(P, l_1)$.

Отг. а) Ротационни елипсоиди с фокуси в краищата на сегмента.

18.14. Покажете, че формулираните по-долу условия (послаби от изискване за хьолдеровост (вж. [8], гл. III, § 7, стр. 181), наложени върху плътността $\varkappa(Q)$ на обемния потенциал

$$v(P) = \int\limits_{\Omega} \frac{\varkappa(Q)}{r} dx\, dy\, dz, r = \operatorname{dist}(P, Q),$$

са достатъчни за съществуване на втори производни относно z. Да означим с $\overline{\varkappa}$ средната стойност на плътността $\varkappa$ по окръжност през точката $Q = (\rho, \theta, \varphi)$ и ос — права, успоредна на оста z и минаваща през точката P_0 (начало на координатната система), т. е.

$$\overline{\varkappa} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \varkappa(\rho \sin\theta \cdot \cos\varphi', \rho \sin\theta \cdot \sin\varphi', \rho\cos\theta) d\varphi'.$$

Тогава две достатъчни условия за съществуване на производните относно z в точката P_0 са:

а) $\overline{\varkappa}$ е хьолдерова в точката P_0;

б) съществува непрекъсната функция $\delta(r)$, дефинирана за $r \in (0, a]$ такава, че $|\overline{\varkappa}| \leq \delta(\rho)$, $\dfrac{\delta(\rho)}{\rho}$ е нестрого монотонно намаляваща функция на ρ и

$$\int\limits_0^a \frac{\delta(r)}{r} dr < +\infty.$$

18.15. Нека Γ е двукратно гладка повърхнина и относно локалната координатна система с начало в точката $O \in \Gamma$ да имаме $Q = (\xi, \eta, \zeta) \in \Gamma$. Означаваме $P = (x, y, z)$, $r = \operatorname{dist}\,(P, Q)$. Покажете, че за потенциала от прост слой

$$u(P) = \iint\limits_{\Gamma} \frac{\sigma(Q)}{r} ds$$

производната $u_x(P)$, пресметнете за точка $P = (0, 0, z)$, $z \neq 0$, има граница при $z \to 0$, ако плътността σ е хьолдерова.

Упътване. Нека Γ' е проекцията върху равнината (x, y) на част от Γ в околност на точката O и γ' е малък кръг около началото. Понеже

$$u_x(P) = \int\!\!\int_{\Gamma} \sigma \frac{\xi}{r^3} ds = \int\!\!\int_{\Gamma'\setminus\gamma'} \cdots + \int\!\!\int_{\gamma'} \cdots \equiv I + J,$$

където I е непрекъсната функция по z, покажете, че $|J|$ става произволно малко с намаляването на γ', откъдето всичко следва. Оценете най-напред $J_1 = \sigma(P) \int\!\!\int_{\gamma'} \frac{\xi}{r^3} ds'$, като го сравните с 0 $= \sigma(P) = \int\!\!\int_{\gamma'} \frac{\xi}{\rho^3} ds'$, където $\rho^2 = \xi^2+\eta^2+z^2$. След това използвайте, че σ е хьолдерова, за да оцените и $|J - J_1|$.

18.16. Покажете, че непрекъснатостта на плътността σ на потенциала от прост слой не осигурява съществуване на границата на тангенциалните производни (вж. зад. 18.15), като се възползвате от следния пример:

Нека Γ е кръг с радиус R и център в началото на равнината (x, y), в която ρ, φ са полярни координати. Нека $\sigma(x, y) = f(\rho)\cos\varphi$, където f е неотрицателна и непрекъсната, $f(0) = 0$ и $f(\rho) \geq \frac{1}{n}$ в $(R \cdot 2^{-n-1},\ R \cdot 2^{-n})$.

Упътване. При означенията от зад. 18.15

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, 0, z) = \int\!\!\int_{\Gamma} \sigma \frac{\xi}{r^3} ds = \int\!\!\int_{\Gamma} \sigma \cdot \frac{\rho \cos\varphi}{r^3} \rho d\rho d\varphi$$

$$\geq \pi \int\limits_{R\cdot 2^{-m}}^{R} \frac{f(\rho)\rho^2 d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = \pi \int \frac{f(\rho)\rho^2 d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}},$$

което става произволно голямо при $m \to \infty$, колкото и малко да бъде $|z|$.

18.17. Нека A е двукратно гладка област в равнината (x, y) и $\Omega = \{(x, y, z) | (x, y) \in A,\ -\beta_1 < z < \beta_2\}$, $\beta_i > 0$. Покажете, че съществува величина $C(\beta_1, \beta_2)$, такава, че за обемния потенциал

$$v(P) = \int_{\Omega} \frac{\varkappa(Q)}{r} dx\ dy\ dz, r = \operatorname{dist}(P, Q),$$

$$P = (x_0, y_0, z_0), Q = (x, y, x), \varkappa(Q) = \varkappa(x, y),$$

да съществува границата

$$\lim_{\substack{\beta_1 \to +\infty \\ \beta_2 \to +\infty}} \left\{ \int\int_A \left[\varkappa \int_{-\beta_1}^{\beta_2} \frac{dz}{r} \right] dx\ dy + C(\beta_1, \beta_2) \right\},$$

като при това C не зависи от P, а само от β_1, β_2 и сходимостта е равномерна, когато P се мени в компактно множество. Намерете тази граница. Сравнете със задача 18.13 б.

Решение. Ако $\rho^2 = (x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2$, тогава

$$v(P) = \int\int_A \varkappa \ln \frac{\beta_2 - z_0 + \sqrt{\rho^2 + (\beta_2 - z_0)^2}}{-\beta_1 - z_0 + \sqrt{\rho^2 + (\beta_2 + z_0)^2}} dx\ dy.$$

Изберете

$$C(\beta_1, \beta_2) = -\ln \frac{\beta_2 + \sqrt{1 + \beta_2^2}}{-\beta_1 + \sqrt{1 + \beta_1^2}} \int\int_A \varkappa\ dx\ dy.$$

Търсената граница е $u = \int\int_A 2\varkappa \ln \rho^{-1} dx\ dy$, т. е. "обемен" логаритмичен потенциал върху A с плътност $2\varkappa$.

18.18. Покажете, че за логаритмичния потенциал

$$u(x, y) = \int\int_A \sigma(\xi, \eta) \ln \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} d\xi\ d\eta,$$

където $\sigma(\xi, \eta)$ е хьолдерова функция в областта $A \subset \mathbf{R}^2$, е в сила $\Delta u = -2\pi\sigma$ във вътрешността на A.

Решение. (Т. Б. Боев.) От зад. 18.17 следва, че функцията $f_{\beta_1\beta_2}(x, y, z) \equiv v(x, y, z) + C(\beta_1, \beta_2)$, където $\varkappa = \frac{\sigma}{2}$, клони равномерно към $u(x, y)$, когато $P = (x, y, z)$ се мени в ограничена тримерна околност B на $(x_0, y_0, 0)$. Нека w е такава, че $w_{xx} + w_{yy} + w_{zz} = -4\pi\varkappa(x, y) \equiv \Delta f$ в B. Функцията w може да се построи напр. чрез обемен (нютонов) потенциал. Следователно $u - w$ е граница на равномерно сходящата редица от хармонични функции $F_{\beta_1\beta_2} - w$, което ни дава $\Delta(u - w) = 0$, т. е.

$$\Delta u = \Delta w = -4\pi\varkappa = -2\pi\sigma.$$

18.19. Формулирайте и докажете аналозите на твърдението от зад. 18.17 за логаритмичните потенциали от прост и двоен слой върху гладка крива L:

$$u_1(x,y) = \int\limits_L \lambda(\xi,\eta) \ln \rho^{-1} dl, u_2(x,y) = \int\limits_L \mu(\xi,\eta) \frac{\partial}{\partial \nu} \ln \frac{1}{\rho} dl,$$

където $\rho^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2$, ν — нормала към L, и интегрирането се извършва върху L. Извлечете техните свойства от свойствата на съответните тримерни потенциали.

§ 19. Функция на Грийн

Нека за простота размерността $n = 3$ и $r(P,Q) = \mathrm{dist}(P,Q)$, P, $Q \in \mathbf{R}^3$. За област Ω с контур, състоящ се от части на сфери и равнини, функцията на Грийн $G(P,P_0)$, $P_0 \in \Omega$, се построява посредством отражения (метод на зарядите). След отразяване (т. е. симетрия относно равнините или инверсия относно сферите) на точката P_0 се получават нови точки, които също отразяваме относно всяка една от частите на $\partial\Omega$ до получаване на нови точки и т. н. За области, при които този процес води до лесно обозрима съвкупност от точки, която е устойчива в смисъл, че всякакви нови отражения водят до вече получени точки, и при това единствено точката P_0 е вътрешна за Ω, функцията $G(P,P_0)$ се изписва съгласно следното правило:

Приписваме на точката P_0 и на всяка от новополучените точки чрез четен брой отражения знак (+), а на останалите знак минус (−). Точките Q, получени само чрез симетрия, пораждат събираеми в $G(P,P_0)$ от вида $\frac{1}{r(P,Q)}$ (със съответен знак). Ако Q е получена и посредством инверсии, пред съответния член се поставя множител (величина на заряда) съобразно с техния брой (вж. [8], гл. III, § 4, стр. 136). Получената алгебрична сума се умножава с $(4\pi)^{-1}$. При всяка конкретна задача трябва да се провери, че полученият израз е наистина функция на Грийн, т. е. че $G = 0$ върху $\partial\Omega$ и $\Delta G = 0$ в $\Omega \setminus \{P_0\}$. В случай, че въпросната съвкупност от точки е крайна, това е почти очевидно.

19.1. Намерете функцията на Грийн за полупространството $\Omega = \{(x,y,z) : z > 0\}$.

Упътване. Нека точката $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Omega$. След като я отразим от равнината $z = 0$, намираме точката $P_0' = (x_0, y_0, -z_0)$. Тогава функцията на Грийн ще има вида

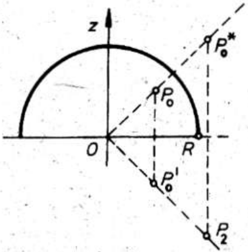
$$G(P,P_0) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r(P,P_0)} - \frac{1}{r(P,P_0')}\right).$$

Проверете!

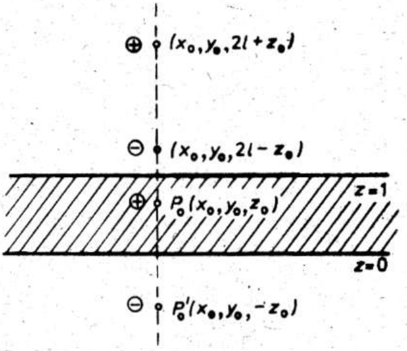
19.2. Постройте функцията на Грийн за полукълбото

$$\Omega = \{P = (x, y, z) : r(O, P) < R, z > 0\}.$$

Упътване. Нека $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Omega$. За да компенсираме "положителния" заряд в точката P_0 върху равнината $z = 0$, трябва да поместим "отрицателен" заряд в точката $P_0' = (x_0, y_0, -z_0)$ със същата големина. Същият процес спрямо сферата $S(R)$ води до поместване на "отрицателен" заряд със съответната големина в инверсната точка P_0^* на P_0 спрямо сферата $S(R)$ и "положителен" в инверсната точка P_2 на P_0' (вж. черт. 19.1).



Черт. 19.1



Черт. 19.2

Отг. $$G(P, P_0) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{r(P, P_0)} - \frac{R}{r(O, P_0)} \cdot \frac{1}{r(P, P_0^*)} - \frac{1}{r(P, P_0')} + \frac{R}{r(O, P_0')} + \frac{1}{r(P, P_2)}\right].$$

19.3. Конструирайте функцията на Грийн за ивицата

$$\Omega = \{(x, y, z) : 0 < z < l\}, l = \text{const}.$$

Решение. Нека точката $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Omega$. Разглеждаме симетричната ѝ точка $P_0' = (x_0, y_0, -z_0)$ спрямо равнината $z = 0$. Функцията $\frac{1}{r(P,P_0)} - \frac{1}{r(P,P_0')}$ се анулира за $P \in \{z = 0\}$ и $\frac{1}{r(P,P_0')}$ е хармонична в Ω. За съжаление обаче тя не се анулира за $P \in \{z = l\}$. Затова извършваме отражението на двете точки P_0, P_0' и спрямо равнината $z = l$. Получаваме точките $(x_0, y_0, 2l - z_0)$ и $(x_0, y_0, 2l + z_0)$ (вж. черт. 19.2). Продължавайки описания по-горе процес на последователно отразяване относно равнините $z = 0$ и $z = l$, получаваме две редици от точки

$$P_n = (x_0, y_0, 2nl + z_0), P_n' = (x_0, y_0, 2nl - z_0),$$

$n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Веднага се съобразява, че в точките P_n трябва да поместим "положителни" заряди (такъв задължително има в P_0!), а в точките P_n' — "отрицателни". Търсената функция на Грийн ще бъде:

$$G(P, P_0) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{r(P, P_n)} - \frac{1}{r(P, P_n')} \right).$$

Да проверим, че това е така. За тази цел ще докажем равномерната сходимост в ивицата Ω на реда $G(P, P_0) - \frac{1}{4\pi r(P, P_0)}$. Въз основа на теоремата за крайните нараствания

$$a_n = \frac{1}{r(P, P_n)} - \frac{1}{r(P, P_n')} = -2z_0 \frac{z - \zeta}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - \zeta)^2]^{3/2}},$$

където $\zeta \in (2nl - z_0, 2nl + z_0)$. И така

$$|a_n| \leq \frac{2l}{|z - \zeta|^2} \leq \frac{1}{(|n| - 1)^2}, |n| = 2, 3, \ldots,$$

понеже $|\zeta - z| \geq 2|n|l - z_0 - z \geq 2|n|l - 2l$. Получената оценка ни учи, че редът $\sum\limits_{|n|>1} a_n$ е абсолютно и равномерно сходящ по критерия на Вайерщрас, защото има сходяща числова мажоранта. Хармоничността на $G(P, P_0) - \frac{1}{4\pi r(P, P_0)}$ в Ω следва незабавно от теоремата на Харнак. Остава да проверим, че $G(P, P_0) = 0$ за

$P_0 \in \{z=0\} \cup \{z=l\}$. За тази цел използваме възможността да разместваме членовете в абсолютно сходящ ред. Незабавно се вижда, че при $P \in \{z=0\}$ имаме $\dfrac{1}{r(P,P_n)} = \dfrac{1}{r(P,P'_{-n})}$, т. е. членовете на реда се унищожават два по два. Проверете същото и за равнината $z=l$.

19.4. Да се построи функцията на Грийн за двустенен ъгъл с големина $\alpha = \frac{\pi}{k}$, k — естествено число.

Решение. Нека полуравнините γ_1, γ_2, образуващи ъгъла, пресичат равнината β през точката P_0, перпендикулярна на оста на ъгъла, в лъчи l_1, l_2. Очевидно всички точки, получени чрез отразяване, лежат на окръжност през P_0 с център общото начало на l_1, l_2. Нека относно полярна координатна система в β с полярна ос l_1 точката P_0 да има ъглова координата ψ. Лесно се проверява, че при отразяване относно правата l_1 (т. е. относно γ_1) на точка от β с ъглова координата φ се получава точка с ъглова координата — φ, а относно l_2 (т. е. относно γ_2) — точка с ъглова координата $2\alpha - \varphi$. Като отразяваме последователно P_0 и получените образи относно l_1 и l_2, започвайки най-напред с l_1, получаваме следните серии от "положителни" и "отрицателни" точки:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
(+) & & \psi, & & 2\alpha & + & \psi, & \ldots, & & 2l\cdot\alpha & +\psi, & \ldots \\
 & & \downarrow & \nearrow & & \downarrow & & \nearrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \\
(-) & - & \psi, & - & 2\alpha & - & \psi, & \ldots, & - & 2l\cdot\alpha & -\psi, & \ldots
\end{array}$$

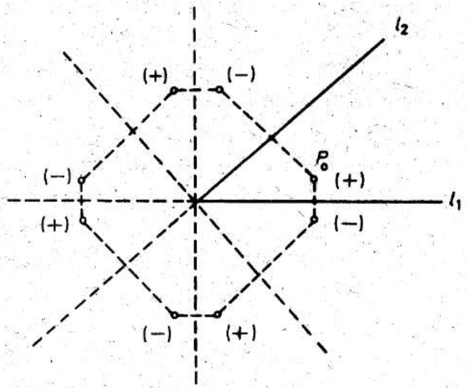
Ако започнем най-напред с l_2, получаваме

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
(+) & & \psi, & & - & 2\alpha & + & \psi, & \ldots, & - & 2l\cdot\alpha & +\psi, & \ldots \\
 & & \downarrow & & \nearrow & \downarrow & & & \nearrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \\
(-) & 2\alpha & - & \psi, & & 4\alpha & - & \psi, & \ldots, & - & 2l\cdot\alpha & -\psi, & \ldots
\end{array}$$

Следователно "положителните" точки са $P'_l = (2l\cdot\alpha+\psi)$, а "отрицателните" — $P''_l = (2l\cdot\alpha-\psi)$, където $l = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ Очевидно е, че получената съвкупност е устойчива в смисъла, изяснен в началото на параграфа. В разглеждания случай $\left(\alpha = \frac{\pi}{k}\right)$ са различни само $2k$ точки: напр. P'_l и P''_l за $l = 0, 1,, \ldots, k-1$, и всички (освен $P'_0 = P_0$) лежат извън ъгъла. Следователно

$$G(P,P_0) = \frac{1}{4\pi}\sum_{l=0}^{k-1}\left(\frac{1}{r(P,P'_l)} - \frac{1}{r(P,P''_l)}\right)$$

е функция на Грийн за ъгъла. (Случаят $k = 4$ е илюстриран на черт. 19.3.)



Черт. 19.3

19.5. Нека Ω е сечение на двустенния ъгъл от предишната задача с кълбо с център върху оста му и радиус R. Да се построи функцията на Грийн за областта Ω.

Упътване. Разгледайте освен точките P_l', P_l'' от зад. 19.4 и техните инверсни образи — съответно P_l''' и P_l^{IV} — относно сферата.

19.6. Да се построи функцията на Грийн за област, представляваща частта от двустенния ъгъл от зад. 19.4, която лежи от едната страна на равнината γ_3, перпендикулярна на оста на ъгъла.

19.7. Да се построи функцията на Грийн за област, представляваща сечение на областта от предишната задача с кълбо, имащо за център пресечната точка на γ_1, γ_2, γ_3 и радиус R.

19.8. Да се построи функция на Грийн за област, която се получава:

а) като се извади от двустенния ъгъл от зад. 19.4 кълбо с център върху оста на ъгъла и радиус R;

б) като се извади от областта от зад. 19.6 кълбо с център пресечната точка на γ_1, γ_2, γ_3 и радиус R.

19.9. Като вземете предвид решението на зад. 7 от [8, стр. 152], напишете функцията на Грийн за:

а) областта, представляваща част от двустенния ъгъл от зад. 19.4, заключен между две успоредни равнини γ_3 и γ_4, пресичащи оста на ъгъла под прав ъгъл;

б) областта, получена при пресичането на две успоредни равнини с втора двойка успоредни равнини, перпендикулярни на първите (цилиндрична област с перпендикулярно сечение правоъгълник);

в) частта от областта от б), намираща се от едната страна на равнина, перпендикулярна на цилиндъра;

г) паралелепипед.

Упътване. б) Нека оста z е насочена по един от ръбовете, а перпендикулярното сечение лежи в равнината x, y и за определеност съвпада с $\{(x,y)|0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b\}$. Покажете, че всички точки се получават от $P_0 = (\xi, \eta, 0)$, $P_1 = (\xi, -\eta, 0)$, $P_2 = (-\xi, \eta, 0)$ и $P_3 = (-\xi, -\eta, 0)$ при транслации на по-големия правоъгълник

$$\{(x,y)| -a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b\}$$

успоредно на осите x, y на разстояния, кратни съответно на $2a$ и $2b$. Следователно точките (m, n — цели числа)

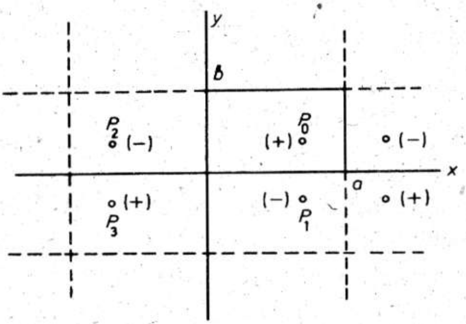
$$P^{(0)}_{m,n} = (\xi + 2ma, \eta + 2nb, 0) \text{ и } P^{(3)}_{m,n} = (-\xi + 2ma, -\eta + 2nb, 0)$$

са "положителни", а точките

$$P^{(1)}_{m,n} = (\xi + 2ma, -\eta + 2nb, 0) \text{ и } P^{(2)}_{m,n} = (-\xi + 2ma, \eta + 2nb, 0)$$

са "отрицателни", т.е. $G(P, P_0)$

$$= \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{r(P, P^{(0)}_{m,n})} + \frac{1}{r(P, P^{(3)}_{m,n})} - \frac{1}{r(P, P^{(1)}_{m,n})} - \frac{1}{r(P, P^{(2)}_{m,n})} \right).$$



Черт. 19.4

г) Ако паралелепипедът е зададен с

$$0 \le x \le a, 0 \le y \le b, 0 \le z \le c,$$

разгледайте обединението на осем подобни паралелепипеда около началото на координатната система.

19.10. Да се построи функция на Грийн:

а) за цилиндрична повърхнина с перпендикулярно сечение, представляващо равнобедрен триъгълник,

б) за частта от областта а), лежаща от едната страна на равнина, перпендикулярна на образуващите на цилиндъра.

Отг. а) Ако сечението през точката P_0 е триъгълник в равнината x, y с върхове (0,0), $(a,0)$, (a,a), а $P_0 = (\xi, \eta, 0)$, $P_1 = (\eta, \xi, 0)$, тогава

$$G(P, P_0) = G_1(P, P_0) - G_1(P, P_1),$$

където G_1 е намерената в зад. 19,9 б) функция на Грийн за цилиндрична повърхнина с квадратно сечение.

19.11. Да се построи функцията на Грийн за област, ограничена от две концентрични сфери с радиуси a, b, $0 < a < b$.

Решение. Нека α е равнина, минаваща през точката P_0, която лежи вътре в разглежданата област, и през центъра O на двете концентрични сфери. В α въвеждаме полярна координатна система с полярна ос $\overrightarrow{OP_0}$. Очевидно е, че всички точки, които участват при построяването на функцията на Грийн, лежат върху полярната ос и се различават помежду си само по разстоянието до центъра O. Нека $P_0 = (\rho_0)$. След първите две отражения се получават "отрицателни" точки

$$P_1' = (\rho_1') = \left(\frac{a^2}{\rho_0}\right) \text{ и } P_1'' = (\rho_1'') = \left(\frac{b^2}{\rho_0}\right)$$

съответно с множители (заряди) във функцията на Грийн: $e_1' = \frac{a}{\rho_0}$ и $e_1'' = \frac{b}{\rho_0}$. Тук и нататък с един или два щриха се означават величини, свързани с инверсии относно вътрешната или съответно външната сфера. След това намираме двойка "положителни" точки

$$\rho_2' = \frac{a^2}{\rho_1''} = \frac{a^2}{b^2}\rho_0 \text{ и } \rho_2'' = \frac{b^2}{\rho_1'} = \frac{b^2}{a^2}\rho_0$$

със заряди с абсолютна големина

$$e_2' = \frac{a}{\rho_1''}e_1'' = \frac{a}{b} \text{ и } e_2'' = \frac{b}{\rho_1'}e_1' = \frac{b}{a}.$$

Продължавайки по същия начин, виждаме, че всички точки с четен номер са "положителни", а тези с нечетен — "отрицателни". Валидни са рекурентните връзки

$$\rho_{2k+1}' = \frac{a^2}{\rho_{2k}''} = \frac{a^2}{b^2}\rho_{2k-1}', \rho_{2k+1}'' = \frac{b^2}{\rho_{2k}'} = \frac{b^2}{a^2}\rho_{2k-1}',$$

$$e_{2k+1}' = \frac{a}{\rho_{2k}''}e_{2k}'' = \frac{a}{\rho_{2k}''} \cdot \frac{b}{\rho_{2k-1}'}, e_{2k-1}' = \frac{a}{b}e_{2k-1}',$$

$$e_{2k+1}'' = \frac{a}{\rho_{2k}'}e_{2k}' = \frac{a}{\rho_{2k}'} \cdot \frac{b}{\rho_{2k-1}''}, e_{2k-1}'' = \frac{b}{a}e_{2k-1}''$$

и аналогични връзки за четните номера. Следователно

$$e'_{2k+1} = \left(\frac{a}{b}\right)^k \frac{a}{\rho_0}, e''_{2k+1} = \left(\frac{b}{a}\right)^k \frac{b}{\rho_0},$$

$$\rho'_{2k+1} = \left(\frac{a^2}{b^2}\right)^k \cdot \frac{a^2}{\rho_0}, \rho''_{2k+1} = \left(\frac{b^2}{a^2}\right)^k \cdot \frac{b^2}{\rho_0},$$

$$e'_{2k} = \left(\frac{a}{b}\right)^k, \rho'_{2k} = \left(\frac{a^2}{b^2}\right)^k \cdot \rho_0, e''_{2k} = \left(\frac{b}{a}\right)^k, \rho''_{2k} = \left(\frac{b^2}{a^2}\right)^k \rho_0.$$

Функцията на Грийн има вида

$$G(P, P_0) = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{\infty} g_k(P),$$

$$g_k(P) = \frac{e'_{2k}}{r(P, P'_{2k})} + \frac{e''_{2k}}{r(P, P''_{2k})} - \frac{e'_{2k+1}}{r(P, P'_{2k+1})} - \frac{e''_{2k+1}}{r(P, P'_{2k+1})}.$$

При това само точката P_0 лежи между двете сфери. За да се провери, че това е действително функция на Грийн, достатъчно е да се докаже, че редът $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k(P)$ е сходящ (равномерно и абсолютно) и да се съобрази, че $G = 0$ върху контура на областта. Като вземем предвид, че за точката $P = (\rho, \theta, \varphi)$ е изпълнено

$$r^2(P, P'_{2k}) = \rho^2 + \rho'^2_{2k} - 2\rho\rho'_{2k} \cdot \cos\gamma, a < \rho < b,$$

където $\cos\gamma = (\rho^2 + \rho_0^2 - r^2(P, P_0))(2\rho\rho_0)^{-1}$, получваме $\lim\limits_{k\to\infty} r(P, P'_{2k}) = \rho$ и аналогично $\lim\limits_{k\to\infty} r(P, P'_{2k+1}) = \rho$. Следователно предвид изразите за e'_{2k} и e'_{2k+1} намираме

$$\left|\frac{e'_{2k}}{r(P, P'_{2k})} - \frac{e'_{2k+1}}{r(P, P'_{2k+1})}\right| \le \frac{1}{a}\left(1 + \frac{a}{\rho_0}\right)\left(\frac{a}{b}\right)^k.$$

От друга страна, понеже точките P''_{2k} и P''_{2k+1} са извън външната сфера, следва

$$\frac{1}{r(P, P''_{2k})} < \frac{1}{2\rho''_{2k}} = \frac{1}{2\rho_0}\left(\frac{a}{b}\right)^{2k},$$

откъдето $\left|\frac{e''_{2k}}{r(P, P''_{2k})}\right| \le \frac{1}{2\rho_0}\left(\frac{a}{b}\right)^k$ и т. н. От равномерната сходимост на $\sum g_k(P)$ следва, че вътре в сферичния венец редът представлява хармонична функция.

19.12. Да се построи функцията на Грийн за:

а) кръг;

б) външност на кръг;

в) сектор с раствор $\alpha = \frac{\pi}{k}$, k — естествено число;

г) венец между две концентрични окръжности.

Отг. г) При означенията от предишната задача

$$G(P, P_0) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \ln \frac{e'_{2k} e''_{2k} r(P, P'_{2k+1}) \cdot r(P, P''_{2k+1})}{e'_{2k+1} e''_{2k+1} r(P, P'_{2k}) \cdot r(P, P''_{2k})}.$$

19.13. Да се построи функцията на Грийн за полупространството $\{P = (x, y, z) | z > 0\}$ за уравнението на Лаплас, в случай че граничното условие е $\frac{\partial u}{\partial z} + hu = 0$ при $z = 0$, където $h = \mathrm{const}$ (т. е. да се построи функцията на Робен за полупространството — вж. [8], зад. 3, стр. 146).

Упътване. Към функцията

$$G(P, P_0) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r(P, P_0)} + \frac{1}{r(P, P_1)}\right),$$

където е означено $P_1 = (\xi, \eta, -\zeta)$, ако $P_0 = (\xi, \eta, \zeta)$, добавете подходящ член от вида $v(x-\xi, y-\eta, z+\zeta)$. Предвид $v_z = v_\zeta$ и условието

$$(v_\zeta + hv)\big|_{z=0} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \zeta^2}}, \rho^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2,$$

се получава

$$v(x-\xi, y-\eta, z+\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_{\zeta+z}^{\infty} e^{-h(\zeta+z-s)} \frac{ds}{\sqrt{\rho^2 + s^2}}.$$

19.14. а) Покажете, че функцията

$$N(P,P_0)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r(P,P_0)}+\frac{R}{r(O,P_0)\cdot r(P,P_0^*)}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{R}\ln\frac{2R^2}{R^2-r(O,P_0)r(O,P)\cos\gamma+r(O,P_0)\cdot r(P,P_0^*)}\right),$$

където P_0^* е инверсната точка на $P_0\in U(O,R)$ и γ е ъгълът между $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{OP_0}$, е функция на Грийн за кълбото $U(O,R)$, в случай че граничното условие върху $S(O,R)$ е $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}=0$, ν — външна нормала (т.е. функция на Нойман за кълбото — вж. [8], зад. 2, стр. 145).

б) Намерете формула за решението на задачата на Нойман за $\Delta u=0$ в кълбото $U(O,R)$ с гранично условие $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}=f$ върху $S(O,R)$, където f е функция със свойството

$$\int\limits_{S(O,R)}\int f\,ds=0.$$

Упътване. а) За да проверите, че логаритмичният член е хармонична функция, използвайте, че функцията, стояща под знака на логаритъма, е равна на

$$\frac{2r(O,P_0^*)}{r(O,P_0^*)-r(O,P_0)\cos\gamma+r(P,P_0^*)}.$$

Следователно изразът в знаменателя е сума на $r(P,P_0^*)$ и проекцията на $\overrightarrow{PP_0^*}$ върху $\overrightarrow{OP_0}$. Ако с помощта на ротация достигнем до положение, при което $P_0^*=(0,0,z_0)$, проблемът се свежда до проверка на хармоничността на функцията

$$\ln\left(z_0^*-z+\sqrt{x^2+y^2+(z-z_0^*)^2}\right),\, z_0^*=\frac{R^2}{z_0},$$

която се извършва директно.

Отг. б) $u(P_0)$

$$=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S(O,R)}\int f(P)\left[\frac{2}{r(P,P_0)}+\frac{1}{R}\ln\frac{2R}{R-r(O,P_0)\cos\gamma+r(P,P_0)}\right]ds.$$

19.15. Решете зад. 19.14 б, като използвате интеграла на Поасон за задачата на Дирихле за кълбото и следното съображение:

Ако $u(r, \varphi, \theta)$ е хармонична функция в кълбото $U(R)$ (r, φ, θ — сферични координати), която се анулира в центъра на кълбото, тогава

$$v(r, \varphi, \theta) = \int\limits_0^r \frac{r(\rho, \varphi, \theta)}{\rho} d\rho$$

е също хармонична функция в $U(R)$.

Упътване. Последното твърдение се проверява непосредствено, като се вземе предвид, че в сферични координати

$$\Delta u \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

19.16. Решете задачата на Дирихле

$$\Delta u = -f(x, y, z), \ z > 0,$$

$$u = u_0(x, y), \ z = 0,$$

при следните данни:

а) $f = 0$, $u_0 = \cos x \cdot \cos y$;

б) $f = e^{-z} \sin x \cos y$, $u_0 = 0$;

в) $f = 0$, $u_0 = (1 + x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}$;

г) $f = 2[x^2 + y^2 + (z+1)^2]^{-2}$, $u_0 = (1 + x^2 + y^2)^{-1}$.

Отг. а) $e^{-\sqrt{2}z} \cos x \cdot \cos y$; б) $(e^{-\sqrt{2}z} - e^{-z}) \sin x \cos y$;
в) $[x^2 + y^2 + (z+1)^2]^{-\frac{1}{2}}$; г) $[x^2 + y^2 + (z+1)^2]^{-1}$.

19.17. Решете задачата на Дирихле за уравнението $\Delta u = 0$ в областта $\{(x, y, z) | y > 0, \ z > 0\}$ при следните данни върху контура:

а) $u|_{y=0} = 0$, $u|_{z=0} = e^{-4x} \sin 5y$;

б) $u|_{y=0} = 0$, $u|_{z=0} = y(x^2 + y^2 + 1)^{-\frac{3}{2}}$.

Отг. а) $e^{-4x-3z}\sin 5y$; б) $y(x^2+y^2+(z+1)^2)^{-\frac{3}{2}}$.

19.18. Решете задачата на Дирихле

$$\Delta u = -f(P) \text{ в кълбото } U(O,R), P=(x,y,z),$$

$$u = u_0 \text{ върху } S(O,R),$$

ако:

а) $f = a = \text{const}$, $u_0 = 0$;

б) $f = |P|^n$, $n = 0,1,\ldots$, $u_0 = a = \text{const}$,
къдeто $|P| = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$;

в) $f = \exp(-|P|)$, $u_0 = 0$.

Отг. а) $\frac{a}{6}(R^2 - |P|^2)$;

б) $a + \dfrac{R^{n+2} - |P|^{n+2}}{(n+1)(n+3)}$;

в) $e^R - e^{|P|} - \frac{2}{R}(e^R - 1) + \frac{2}{|P|}(e^{|P|} - 1)$.

19.19. Нека за областта Ω съществува функция на Грийн $G(P,P_0)$ и $u \in C^3(\overline{\Omega})$ е субхармонична функция. Докажете, че съществуват хармонична функция v и неотрицателна функция $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$, за които

$$u(P_0) = -\int_{\Omega} G(P,P_0)\varphi(P)dx\ dy\ dz + v(P_0).$$

Покажете, че ако $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$ и v е хармонична, то функцията, дефинирана с горното равенство, е субхармонична в Ω.

§ 20. Елиптични уравнения от втори ред. Бихармонично уравнение

Дефиниция. Линейният диференциален оператор

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i} + c(x)u, \tag{1}$$

чиито коефициенти a_{ij}, b_i, c са дефинирани в областта $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ (евентуално комплекснозначни) функции, се нарича елиптичен в точката $x_0 \in \Omega$, ако

$$\forall \xi \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\} : \left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0)\xi_i\xi_j \right| > 0.$$

Казваме, че операторът L е елиптичен в Ω, ако е елиптичен във всяка точка на Ω.

20.1. За оператора (1) проверете, че

а) ако L е елиптичен в точката x_0, тогава

$$a_{ii}(x_0) \neq 0, \; i = 1, \ldots, n;$$

б) ако L е елиптичен в затворената и ограничена област $\overline{\Omega}$ и функциите $a_{ij}(x)$ са непрекъснати в $\overline{\Omega}$, то съществува константа $\mu > 0$, за която

$$\left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \right| \geq \mu|\xi|^2, \forall x \in \overline{\Omega}, \forall \xi \in \mathbf{R}^n.$$

Дефиниция. Операторът L от (1) с реални коефициенти се нарича равномерно елиптичен в Ω, ако

$$(2) \qquad \forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbf{R}^n : \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \mu|\xi|^2, \mu = \text{const} > 0.$$

20.2. Проверете, че

а) операторът $x(u_{xx} + u_{yy}) + u_{zz}$ е елиптичен, но не равномерноелиптичен в отвореното кълбо $(x-1)^2 + y^2 + z^2 < 1$;

б) за елиптичния оператор $Bu \equiv u_{xx} + 2iu_{xy} - u_{yy}$ функцията $\psi(z) \equiv (1 - |z|^2)f(z)$, $z = x + iy$, е решение на уравнението $B\psi = 0$ в единичния кръг $U(1)$ каквато и да бъде аналитичната функция $f(z)$ в $U(1)$ (пример на Бицадзе).

Решение. б) Ако $Ru \equiv \frac{1}{2}(u_x + iu_y)$ е операторът на Коши — Риман, за всяка аналитична функция $g(z)$ е в сила $R(g) \equiv 0$.

Но $B = 4R^2$ и $\psi(z) = f(z) - \overline{z}\cdot zf(z)$ и следователно $B\psi = -4R[R(\overline{z})\cdot zf(z)] = 0$, защото $R(\overline{z}) = 1$ и $zf(z)$ е аналитична функция.

Забележка. Следователно задачата на Дирихле за елиптичен оператор от втори ред може да не бъде коректна (нееднинственост).

По-надолу (задачи 20.3 – 20.14) ще разгледаме равномерно елиптичния оператор L от (1) с реални коефициенти от $C^2(\overline{\Omega})$, за които $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, \ldots, n$.

20.3. Нека $u \in C^2(\Omega)$ достига локален максимум в точката x_0. Покажете, че $\sum\limits_{i,j} a_{ij}(x_0)u_{x_ix_j}(x_0) \leq 0$, където a_{ij} са коефициентите на оператора L.

Упътване. Ортогоналната трансформация $x = \mathbf{C}y$, $\mathbf{C} = \|c_{ij}\|$ — неизродена скаларна матрица, която канонизира оператора L в точката x_0, трансформира горния израз в $\sum \lambda_k \ u_{y_ky_k}(y_0)$, където $\lambda_k = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0)c_{ik}c_{jk}$. Използвайте (2) и необходимите условия за екстремум в точката $y_0 = \mathbf{C}^{-1}x_0$.

20.4. Нека $u \in C^2(\Omega)$, $c(x) \leq 0$ и $L(u) < 0$ или $c(x) < 0$, $Lu \leq 0$. Тогава функцията u не може да притежава отрицателен локален минимум във вътрешността на Ω.

Упътване. Ако допуснем противното, тогава в точката $x_0 \in \Omega$ е изпълнено $u_{x_i} = 0$ и $Lu - cu \geq 0$ (зад. 20.3). Но $u(x_0) < 0$ по допускане и съгласно условието $Lu - cu < 0$ в точката x_0, което противоречи на горното.

20.5. Нека $u \in C^2(\Omega)$ и $c(x) \leq 0$, $Lu > 0$ или $c(x) < 0$, $Lu \geq 0$. Тогава функцията u не може да притежава положителен локален максимум в Ω.

20.6. Нека $\max\limits_{x\in\overline{\Omega}} c(x) < 0$ и $u \in C^2(\Omega)\bigcap C(\overline{\Omega})$ е решение на задачата на Дирихле

$$\begin{aligned} Lu &= f \text{ в } \Omega \text{ (ограничена област)}, \\ u &= \psi \text{ върху } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Докажете неравенството

$$\max_{\overline{\Omega}} |u(x)| \leq \max\left\{\max_{\partial\Omega} |\psi|, \sup_{\Omega} \left|\frac{f(x)}{c(x)}\right|\right\}.$$

Упътване. Разгледайте поотделно случаите, когато $\max\limits_{\overline{\Omega}} u > 0$ или $\min\limits_{\overline{\Omega}} u < 0$ и се достигат вътре в Ω. Приложете зад. 20.3.

20.7. Нека $u \in C^2(\Omega) \bigcap C(\overline{\Omega})$ и $Mu \equiv Lu - cu$. Покажете, че:

а) ако $Mu \geq 0$ в Ω и функцията u достига $\max\limits_{\overline{\Omega}} u$ вътре в Ω, тогава $u = \text{const}$;

б) ако $Mu \geq 0$ в Ω и функцията u достига $\max\limits_{\overline{\Omega}} u$ в точката $x_0 \in \partial\Omega$, за която съществува вътрешнодопираща се сфера до границата $\partial\Omega$, тогава или $u \equiv \text{const}$ в Ω, или $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$ (ν — външна нормала към $\partial\Omega$ в точката x_0).

Упътване. 1. Докажете най-напред б) при допълнителното предположение, че $u(x) < u(x_0)$ в Ω. Нека $S(x_1, R)$ е вътрешно допиращата се сфера, $R_1 < R$ и $G = U(x_1, R) \setminus U(x_1, R_1)$. Проверете, че при достатъчно голямо $\alpha > 0$ функцията

$$g(x) = e^{-\alpha|x-x_1|^2} - e^{-\alpha R^2}$$

има свойствата: $Mg > 0$ в G, $g = 0$ върху $S(x_1, R)$ и $\dfrac{\partial g}{\partial \nu}(x_0) < 0$. За достатъчно малко $\varepsilon > 0$ функцията $v = \varepsilon g + u$ удовлетворява $v < u(x_0)$ върху $S(x_1, R_1)$ и $Mv > 0$ в G. Предвид зад. 20.3 $\max\limits_{\overline{G}} v$ се достига върху $S(x_1, R)$ и следователно в точката x_0, откъдето $\dfrac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) \geq 0$.

2. Докажете а), като установите, че ако $\max\limits_{\overline{\Omega}} u$ се достига в $x_0 \in \Omega$ и $U(x_0, 2\delta) \subset \Omega$, тогава $u = \text{const}$ и $U(x_0, \delta)$. Ако допуснете, че в точката $\overline{x} \in U(x_0, \delta)$ е в сила $u(\overline{x}) < u(x_0)$, тогава съществува кълбо $U(\overline{x}, \rho)$, в което $u < u(x_0)$, а в някоя точка $\overline{\overline{x}} \in S(\overline{x}, \rho)$ съответно: $u(\overline{\overline{x}}) = u(x_0)$. Приложете част 1) от упътването, която в случая води до противоречие с необходимите условия за максимум на функция.

3. Докажете б) без допълнителното предположение, като използвате вече получените резултати.

20.8. Покажете, че друго решение на уравнението

$$u_{xx} + u_{yy} - u^2 = 0$$

в областта Ω освен $u \equiv 0$ не може да достига максимума си във вътрешната точка на Ω.

20.9. Нека $u \in C^2(\Omega) \bigcap C(\overline{\Omega})$. Покажете, че:

а) ако $c(x) \leq 0$, $Lu \geq 0$ в Ω и функцията u достига $\max\limits_{\overline{\Omega}} u > 0$ във вътрешна точка, тогава $u \equiv \mathrm{const}$;

б) условието $c \leq 0$ в точка а) е съществено, като посочите контрапример в случай, че $c > 0$;

в) ако $c(x) \leq 0$, $Lu \geq 0$, функцията u достига $\max\limits_{\overline{\Omega}} u \geq 0$ в точката $x_0 \in \partial\Omega$, за която съществува вътрешно допиращата се сфера, тогава или $u \equiv \mathrm{const}$, или $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$, където ν е външната нормала към $\partial\Omega$ в точката x_0.

Упътване. а) В околност на точката x_0 е изпълнено $cu \leq 0$ и следователно $Mu \geq 0$. От зад. 20.7 а) следва, че множеството от точки, в които $u = u(x_0)$, е отворено.

б) Функцията $u = e^{-|x|^2}$ има абсолютен максимум при $x = 0$ и е решение на уравнението

$$\Delta u + (2n - 4|x|^2)u = 0$$

в $\mathbf{R}^n$.

в) Приложете задачи 20.7 б) и 20.9 а).

20.10. Докажете обобщенията на твърденията от задачи 20.7 б) и 21.9 в), получаващи се със замяна на външната нормала ν, с произволно векторно поле β върху $\partial\Omega$, насочено навън от Ω, което никъде не е тангенциално към границата (т.е. скаларното произведение $\beta \cdot \nu$ е строго положително). Проверете, че такива свойства има т.нар. конормала с компоненти $\beta_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\nu_j$, където функциите a_{ij} имат свойството (2).

20.11. Покажете, че задачата

$$\Delta u = -1 \text{ в } \{(x,y) |\ |x| < 1, |y| < 1\},$$

$$\begin{aligned} u = 0 \quad &\text{за } |x| = 1, \\ u_x - u_y = 0 \quad &\text{за } |y| = 1 \end{aligned}$$

има най-много едно решение.

20.12. Нека $u \in C^2(\Omega)\bigcap C(\overline{\Omega})$ е решение на задачата на Дирихле

$$\begin{aligned} Lu &= f \text{ в } \Omega, \\ u &= \varphi \text{ върху } \partial\Omega, \end{aligned}$$

където f и φ са дадени ограничени функции. Докажете, че ако $c(x) \leq 0$, то решението u удовлетворява

$$|u| \leq \max_{\partial\Omega} |\varphi| + (e^{\alpha d} - 1) \max |f|,$$

където $\alpha = \text{const}$ и $d = \text{diam}\, \Omega$.

Упътване. След подходяща транслация можем да считаме, че областта Ω лежи в ивицата $H = \{x | 0 \leq x_1 \leq d\}$. Означаваме $g(x) = e^{\alpha d} - e^{\alpha x_1}$, $\alpha = \frac{1}{2\mu}\left[K + (K + 4\mu)^{\frac{1}{2}}\right]$, където числото μ е от (2), а $K = \max\limits_{\overline{\Omega}}\{|a_{ij}|, |b_i|\}$. Покажете, че ако $0 \leq g \leq e^{\alpha d} - 1$ в H и $Lg \leq -1$ (използвайте $a_{11}(x) \geq \mu$), и приложете зад. 20.9 а) към функцията $v = u - h$, където $h(x) = \max |\varphi| + g(x) \max |f|$ в ивицата H. Оттук следва, че $a \leq h$. Аналогично се проверява и $u \geq -h$.

20.13. Нека при означенията от предишната задача $c(x) \leq c_0$, $c_0 = \text{const} > 0$ и диаметърът d на областта Ω е толкова малък, че $e^{\alpha d} - 1 < c_0^{-1}$. Покажете, че

$$|u| \leq \frac{\max |\varphi| + (e^{\alpha d} - 1) \max |f|)}{1 - c_0(e^{\alpha d} - 1)}.$$

Упътване. Означете $c^+ = \frac{1}{2}(c(x) + |c(x)|)$ и $c^- \equiv c - c^+$. Предвид $c^- \leq 0$, $0 \leq c^+ \leq c_0$ и $Mu + c^- \cdot u = f_1$, $Mu \equiv Lu - cu$, $f_1 \equiv f - c^+ \cdot u$, като се приложи зад. 20.12, се получава неравенство, еквивалентно на търсеното, понеже

$$\max |f_1| \leq \max |f| + c_0 \cdot \max |u|.$$

20.14. Нека $u \in C^2(\Omega)\bigcap C^1(\overline{\Omega})$, Ω — ограничена област, е решение на

$$Lu = 0 \text{ в } \Omega,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0 \text{ върху } \partial\Omega,$$

където $\alpha = \alpha(x)$, $x \in \partial\Omega$ и направление, което никъде не се допира до $\partial\Omega \in C^2$. Тогава при условие, че $c(x) \leq 0$, следва $u \equiv \text{const}$.

Упътване. Нека $\max\limits_{\overline{\Omega}} u = u(x_0) > 0$. Ако $x_0 \in \Omega$, приложете зад. 20.9 а). Ако $x_0 \in \partial\Omega$ и $u \not\equiv \text{const}$, лесно се стига до противоречие (зад. 20.7 б)), като се вземе предвид, че производните на u по тангенциалните направления са равни на нула (защо?) и следователно $\frac{\partial u}{\partial \alpha}(x_0) \neq 0$.

20.15. Нека функцията $u \in C^2(\Omega) \bigcap C(\overline{\Omega})$ удовлетворява

$$Lu = 0 \text{ в ограничената област } \Omega,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + h(x)u = 0 \text{ върху } \Gamma_1,$$

$$u = 0 \text{ върху } \Gamma_2,$$

където ν е външната нормала към $\partial\Omega$, а Γ_1 и Γ_2 са непресичащи се множества, за които $\partial\Omega = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$ и освен това за Γ_1 е изпълнено условието за вътрешно допиращата се сфера. Покажете, че ако $c(x) \leq 0$ и $h(x) \geq 0$, то $u \equiv 0$ (освен когато $c \equiv h \equiv 0$ и $\Gamma_2 = \emptyset$, в който случай $u \equiv \text{const}$).

Упътване. Ако решението u приема положителни стойности, то $\max\limits_{\overline{\Omega}} u > 0$ се достига в точка от Γ_1 (зад. 20.9 а)). Ако $u \not\equiv \text{const}$, се стига до противоречие (зад. 20.9 в)). Същите разсъждения за $(-u)$ водят до твърдението $u \equiv \text{const}$. Освен в изрично посочения случай тази константа е равна на нула.

20.16. (обобщен принцип за максимума; срв. зад. 20.9):

а) Нека $u \in C^2(\Omega) \bigcap C(\overline{\Omega})$ удовлетворява $Lu \geq 0$ в Ω и да съществува функция $w(x) \in C^2(\Omega)$, за която $w(x) > 0$ в $\overline{\Omega}$ и $Lw \leq 0$ в Ω. Тогава:

1) функцията $v \equiv u \cdot w^{-1}$ не може да достига неотрицателен максимум в Ω, освен ако е тъждествено равна на константа;

2) ако v достига неположителен максимум в точка $P \in \partial\Omega$, за която съществува вътрешно допираща се сфера и ако $v \not\equiv \text{const}$, то $\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{u}{w}\right) > 0$ в точка P, където β е векторно поле върху $\partial\Omega$, насочено навън от Ω (вж. зад. 20.10).

б) Докажете теорема за единственост за граничната задача

$$\begin{aligned} Lu &= f \text{ в } \Omega, \\ u &= g \text{ върху } \partial\Omega \end{aligned}$$

при условие, че съществува функция w със свойствата от а).

в) При условие, че областта Ω се съдържа в достатъчно тясна ивица $\{x \in \mathbf{R}^n | a < x_1 < b\}$, покажете, че функцията $w(x) = 1 -\beta e^{(x_1-a)}$ има свойствата от а) при подходящ избор на константите α и β.

г) Покажете, че за $\Omega = \{(x,y)|0 < x,\ y < \pi\}$ и оператора $Lu \equiv u_{xx} + u_{yy} + 2u$ не съществува функция w със свойствата, описани в точка а).

Упътване. а) $\frac{1}{w}L(u) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} v_{x_i x_j}$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{2}{w}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_j} + b_i\right\} v_{x_i} + \frac{1}{w}L(w)v \geq 0.$$

г) Използвайте решението $u = \sin x \sin y$.

20.17. Нека $\partial\Omega = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_3$, както в задача 20.15, и да съществува функция $w > 0$, дефинирана в $\overline{\Omega}$, за която $Lw \leq 0$ в Ω и $\frac{\partial w}{\partial \nu}$ $+h(x)w \geq 0$ върху Γ_1. Докажете теоремата за единственост за задачата

$$Lu = f \text{ в } \Omega,\ \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + h(x)u\right)\bigg|_{\Gamma_1} = g_1 \text{ и } u\bigg|_{\Gamma_2} = g_2$$

(освен в случай, че $Lw \equiv 0$ в Ω, $\frac{\partial w}{\partial \nu} + h(x)w \equiv 0$ върху Γ_1 и $\Gamma_2 = \emptyset$, когато u се определя с точност до произведение на w с константа).

20.18. Нека $Lu \equiv u_{xx} + u_{yy} + 2u$ и

$$\Omega = \{(x,y)|\ |x| < a, |y| < a\}.$$

Ако $w(x) \equiv 1 - \beta e^{\alpha(x+b)}$, намерете тези стойности на константите α, β, a и b, за които от $Lu \geq 0$ в Ω следва, че функцията $\frac{u}{w}$ удовлетворява принципа за максимума в Ω. Решете същата задача в случай, че

$$w(x,y) = 1 - \beta e^{\alpha[(x+b)^2+(y+b)^2]}.$$

20.19. За решението $u \in C^3(\overline{\Omega})$ на елиптичното уравнение

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} = 0, ac - b^2 > 0,$$

където $a, b, c \in C^1(\Omega)$, покажете, че производните u_x и u_y не могат да достигат максимумите си в $\overline{\Omega}$ във вътрешна точка на областта Ω (освен ако са константи).

Упътване. Разделете уравнението на $c(a)$ и диференцирайте по $x(y)$.

20.20. Нека $u \in C^1(\overline{\Omega})$, Ω — ограничена област, са в сила условията:

1) $u \geq 0$ върху $\partial\Omega$,

2) за всяка неотрицателна функция $\varphi \in C_0^1(\Omega)$:

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i} \varphi_{x_j} dx \geq 0.$$

Докажете, че $u \geq 0$ в Ω.

Упътване. Нека $m = \min\limits_{\overline{\Omega}} u < 0$ и $F = \{x | u(x) = m\}$ (затворено множество). Очевидно $F \subset \Omega$ и нека x_0 е най-близката точка от F до границата $\partial\Omega$. Покажете, че ако функцията $\lambda \in C^1(\mathbf{R}^1)$ има свойствата

$$\lambda'(t) < 0 \text{ за } t < \frac{m}{2} \text{ и } \lambda(t) = 0 \text{ за } t \geq \frac{m}{2}, \text{ тогава } \varphi(x) \equiv \lambda(u(x))$$

$\in C_0^1(\Omega)$ и е неотрицателна. Проверете, че $J = \int\limits_{\Omega} \sum a_{ij}(x) u_{x_i} \varphi_{x_j} dx = 0$. Като вземете предвид

$$0 = -J \geq \int\limits_{\Omega} [-\lambda'(u)] \cdot \mu \cdot \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 dx \geq 0,$$

покажете, че $u \equiv m$ в околност на точката x_0, което е невъзможно.

20.21. Докажете, че задачата на Дирихле за бихармоничното уравнение

$$\Delta\Delta u = f \text{ в } \Omega,$$
$$u = h \text{ върху } \partial\Omega,$$
$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g \text{ върху } \partial\Omega,$$

има единствено решение в класа $C^4(\Omega) \cap C^3(\overline{\Omega})$.

Упътване. Ако u е разлика на две решения, то симетричната формула на Грийн (формула (2) от § 16) за двойката функции u и Δu следва, че $\int\limits_{\Omega}(\Delta u)^2 dx = 0$.

20.22. Нека функциите u_1 и u_2 са хармонични в областта Ω. Покажете, че $u = x_1 u_1 + u_2$ е бихармонична функция в Ω, т. е. $\Delta\Delta u = 0$.

20.23. Нека областта Ω е такава, че всяка права, успоредна на оста x_1, пресича $\partial\Omega$ най-много в две точки. Покажете, че ако функцията u е бихармонична в Ω, т. е. $\Delta\Delta u = 0$, тогава съществуват такива хармонични функции u_1 и u_2 в Ω, за които $u = x_1 u_1 + u_2$.

Упътване. Покажете, че съществува функция u_1, за която $\Delta u_1 = 0$ и $\Delta(u - x_1 u_1) = 0$. Второто условие показва, че $\Delta u = 2\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}$. Нека

$$\overline{u}_1(x) = \int\limits_{x_1^0}^{x_2} \frac{1}{2}\Delta u(\xi, x_2, \ldots, x_n) d\xi.$$

Понеже $\dfrac{\partial}{\partial x_1}\Delta\overline{u}_1 = \Delta\dfrac{\partial}{\partial x_1}\overline{u}_1 = 0$, то $\Delta\overline{u}_1$ зависи само от $(x_2, \ldots, x_n)$. Нека $\overline{\overline{u}}_1(x_2, \ldots, x_n)$ е такава, че $\Delta\overline{\overline{u}}_1 = -\Delta\overline{u}_1$. Тогава функцията $u_1 = \overline{u}_1 + \overline{\overline{u}}_1$ е търсената.

20.24. Нека числото на координатната система е вътре в областта Ω и нека всеки лъч, започващ от него, пресича $\partial\Omega$ само в една точка. Покажете, че всяка бихармонична функция u в Ω се представя във вида $u = (|x|^2 - R^2)u_1 + u_2$ с помощта на две хармонични функции u_1, $u_2 (R = \text{const})$.

20.25. Решете задачата на Дирихле за бихармоничното уравнение $\Delta\Delta u = 0$ в кълбото $U(R)$ с център в началото на координатната система при следните гранични условия:

$$u = g \text{ върху } S(R),$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = h \text{ върху } S(R).$$

Упътване. Търсете решението u във вида $u = (|x|^2 - R^2)u_1 + u_2$, u_1, u_2 — хармонични. Очевидно $u_2 = g$ върху $S(R)$ и, следователно u_2 може да се построи с интеграла на Поасон.

От второто условие следва, че и функцията $2Ru_1 + \frac{\partial u_2}{\partial |x|}$ е известна върху $S(R)$ и следователно може да се изрази посредством интеграла на Поасон. Оттук определяме u_1.

§ 21. Параболични уравнения

Ще означаваме с (x,t), $x \in \mathbf{R}^n$, произволна точка от $(n+1)$-мерното пространство. Ако $\Omega \subset \mathbf{R}^n_x$ е област, означаваме

$$C_T = \{(x,t) | x \in \Omega, 0 < t \leq T\},$$

$$S_T = \{(x,t) | x \in \partial\Omega, 0 \leq t \leq T\},$$

$$\Omega_a = \{(x,t) | x \in \Omega, t = a\}, (a = 0, T),$$

$\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n, 0)$ — външна нормала към S_T.
Разглеждаме оператора на топлопроводността

$$Lu \equiv u_t - \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}$$

и неговия формално спрегнат оператор

$$L^* u \equiv -u_\tau - \sum_{i=1}^{n} u_{\xi_i \xi_i}.$$

С $C^{k,l}(0)$ ще означаваме класа на функциите, които са k пъти диференцируеми по x и l пъти по t в областта $O \subset \mathbf{R}^{n+1}$.

21.1. Докажете, че са в сила формулите на Грийн:

а) $$\int_{C_T} v \, Lu \, dx \, dt = \int_{C_T} \left(\sum_{j=1}^{n} u_{x_j} v_{x_j} - u v_t \right) dx \, dt$$

$$- \int_{S_T} v \frac{\partial u}{\partial \nu} ds + \int_{\Omega_T} uv \, dx - \int_{\Omega_0} uv \, dx;$$

б) $$\int_{C_T} (v \, Lu - u L^* v) dx \, dt$$

$$= \int_{S_T} \left(\frac{\partial v}{\partial \nu} u - \frac{\partial u}{\partial \nu} v \right) ds + \int_{\Omega_T} vu \, dx - \int_{\Omega_0} vu \, dx,$$

където ds е елемент на лицето на S_T, а u, $v \in C^{2,1}(\overline{C_T})$.

21.2. Нека

$$K(x,t;\xi,\tau) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}\right)^n \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right\}$$

(фундаментално решение на оператора на топлопроводността). Проверете, че $LK = 0$ при фиксирани ξ, τ и $L^*K = 0$ при фиксирани x, t. Докажете, че

$$\lim_{\substack{\tau \to t \\ \tau < t}} \int_\Omega K(x,t;\xi,\tau)u(\xi,\tau)d\xi = u(x,t)$$

за всяка функция $u \in C_0^{0,0}(\overline{C_T})$, $x \in \Omega$.

Упътване. Вж. [8], гл. VII, § 4, стр. 325.

21.3. Нека $u \in C^{2,1}(\overline{C_T})$. Докажете формулата

$$u(x_0,t_0) = \int_{C_{t_0}} K(x_0,\xi;t_0,\tau)Lu(\xi,\tau)d\xi\ d\tau$$

$$+ \int_{S_{t_0}} \left[K(x_0,\xi;t_0,\tau)\frac{\partial u}{\partial\nu}(\xi,\tau) - u(\xi,\tau)\frac{\partial K}{\partial\nu}(x_0,\xi;t_0,\tau)\right] ds$$

$$+ \int_\Omega u(\xi,0)K(x_0,\xi;t_0,0)d\xi.$$

Упътване. Приложете зад. 21.1 б) за функциите $u(\xi,\tau)$ и $v(\xi,\tau) = K(x_0,\xi;t_0,\tau)$ в цилиндъра $C_{t_0-\varepsilon}$ и оставете $\varepsilon \to 0$.

21.4. Нека $u \in C^{2,1}(G)$ удовлетворява $Lu = 0$ в областта $G \subset \mathbf{R}^{n+1}$. Докажете, че $u \in C^\infty(G)$.

Упътване. Вж. решение I на зад. 16.11.

Ще въведем следните допълнителни означения, свързани с ограничената област $C \subset \mathbf{R}^{n+1}$, лежаща в слоя $\{(x,t)|\ t_1 < t < t_2\}$

$$(1)\quad \begin{cases} S = \overline{\partial G \bigcap \{(x,t) | t_1 < t < t_2\}}; \\ \Omega_1 = \overline{G} \bigcap \{(x,t) | t = t_1\}; \\ \Omega_2 \text{ — отвореното ядро на множеството} \\ \overline{G} \bigcap \{(x,t) | t = t_2\} \text{ в топологията на хиперравнината } t = t_2; \\ \Gamma = S \bigcup \Omega_1, G_0 = G \bigcup \Omega_2. \end{cases}$$

21.5. (принцип за максимума). Нека при означенията 1) функцията $u \in C^{2,1}(G_0) \bigcap C^0(\overline{G})$. Покажете, че от $Lu \geq 0$ в G_0 (съответно $Lu \leq 0$ в G_0) следва

$$\min_{\Gamma} u \leq u(x,t), \forall (x,t) \in G_0$$

(съответно: $u(x,t) \leq \max\limits_{\Gamma} u$, $\forall (x,t) \in G_0$).

Упътване. За функцията $v \equiv u - M < 0$ (M — горна граница на u) е изпълнено $Lv \geq 0$ в G_0. Нека $v = e^{\alpha t} w$, $\alpha = \text{const} > 0$. От $Lv \equiv e^{\alpha t}(Lw + \alpha w) \geq 0$ следва, че в точките от G_0 функцията w не достига отрицателен минимум (тъй като тогава $w_t \leq 0$ и $w_{x_i x_i} \geq 0$). Следователно $\min\limits_{\overline{G_0}} w$ (отрицателно число!) се достига върху Γ, т.е. $\min\limits_{\Gamma} w \leq w(x,t)$, откъдето при $\alpha \to 0$ се получава $\min\limits_{\Gamma}(u - M) \leq u - M$. За да докажете второто твърдение, разгледайте функцията $-u$.

21.6. а) Нека при означенията (1) $u \in C^{2,1}(G_0) \bigcap C^0(\overline{G})$ и $Lu = 0$ в G. Тогава за всяка точка $(x,t) \in G_0$

$$\min_{\Gamma} u \leq u(x,t) \leq \max_{\Gamma} u.$$

б) Нека $u \in C^{2,1}(H_T) \bigcap C^0(\overline{H_T})$, $H_T = \{(x,t)\ | 0 < t \leq T\}$. Покажете, че ако $Lu = 0$ и $|u| \leq M = \text{const}$ в H_T, тогава за x, $t \in H_T$

$$\inf_{R^n_x} u(x,0) \leq u(x,t) \leq \sup_{R^n_x}(x,0).$$

Упътване. б) Използвайте помощната функция $w = |x|^2 + 2nt$ (вж. [8], гл. VII, § 3, стр. 321).

21.7. (строг принцип за максимума). Нека $u \in C^{2,1}(\overline{C_T}) \bigcap C^0(\overline{C_T})$, $Lu = 0$ в цилиндъра C_T и $u(x_0, t_0) = \max\limits_{\overline{C_T}} u = M$, $(x_0, t_0) \in C_T$. Докажете, че

$$u \equiv u(x_0, t_0) \text{ в } \overline{C_{t_0}}.$$

Упътване. Ако се допусне съществуването на точка (x^1, t^1), за която $t^1 \in (0, t_0)$ и $u(x^1, t^1) < M - \varepsilon$, може да се покаже, че $u(x_0, t_0) < M$, което е абсурдно. За целта съединете двете точки с начупена линия с върхове (x^1, t^1), (x^2, t^2), …, (x^k, t^k), $(x^{k+1}, t^{k+1}) = (x_0, t_0)$, $t^1 < t^2 < \cdots < t^k < t_0$, и покажете, че от $u(x^i, t^i) < M$ следва $u(x^{i+1}, t^{i+1}) < M$. Точките (x^i, t^i) и (x^{i+1}, t^{i+1}) лежат на правата

$$x_j = k_j t + a_j, j = 1, \ldots, n,$$

където $k_j = \dfrac{x_j^{i+1} - x_j^i}{t^{i+1} - t^i}$, $a_j = x_j^{i+1} - k_j t^{i+1}$. Нека $P(x,t) = \sum\limits_{j=1}^{n} (x_j - k_j t - a_j)^2$ и $v(x,t) = (\rho^2 - P(x,t))^2 \cdot \exp(-\gamma t)$, където γ и ρ са положителни константи. Константата ρ избираме така, че в кълбото $P(x, t^i) \leq \rho^2$, лежащо в $\{(x,t) | t = t^i\}$, да бъде в сила $u(x,t) < M - \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 > 0$. Константата γ се избира така, че в областта G между повърхнините $P(x,t) = \rho^2$, $t = t^i$ и $t = t^{i+1}$ да бъде изпълнено $Lv < 0$. (Като използвате

$$Lv = e^{-\gamma t} \left[-\gamma(\rho^2 - P)^2 - 2(\rho^2 - P)\frac{\partial P}{\partial t} + 4n(\rho^2 - P) - 8P \right],$$

разгледайте най-напред околност на $P(x,t) = \rho^2$, а след това и множеството $\{(x,t) | P(x,t) \leq \rho^2 - \delta$, δ — достатъчно малко.) Предвид зад. 21.5 за функцията $w = M - \varepsilon_2 v - u$, $\varepsilon_2 > 0$, получаваме

$$w(x,t) \geq \min_{\Gamma} w, \tag{2}$$

където $\Gamma = \{(x,t) | P(x,t) = \rho^2\} \bigcup (G \bigcap \{t = t_i\})$. Ако изберем ε_2 така, че да имаме $\varepsilon_2 v < \varepsilon_1$ в G, тогава $w \geq 0$ върху Γ. От (2) следва: $M - \varepsilon_2 v - u \geq 0$ в точката (x^{i+1}, t^{i+1}), откъдето $u(x^{i+1}, t^{i+1}) < M$.

21.8. Нека при означенията (1) да имаме $t_1 = 0$, $t_2 = T$ и $u \in C^{2,1}(G_0) \bigcap C^0(\overline{G})$ и $Lu = f(x,t)$ в G. Покажете, че за всяка точка $(x,t) \in \overline{G}$:

а) $\min\limits_{\Gamma} u - T \sup\limits_{G} |f| \le u(x,t) \le \max\limits_{\Gamma} u + T \sup\limits_{G} |f|$;

б) $|u(x,t)| \le \max\limits_{\Gamma} |u| + T \sup\limits_{G} |f|$.

Упътване. а) Използвайте зад. 21.5 за функциите

$$v_{\pm}(x,t) \equiv u(x,t) \pm tK, K = \sup_{G} |f|.$$

21.9. Нека $u \in C^{2,1}(H_T) \bigcap C^0(\overline{H_T})$, $H_T = \{(x,t)|0 < t \le T\}$ е решение на $Lu = f$ в H_T, за което $|u| \le \text{const}$. Покажете, че

$$m - TK \le u(x,t) \le M + TK,$$

където

$$m = \inf_{R^n} \ u(x,0), M = \sup_{R^n} \ u(x,0), K = \sup_{H_T} |f|.$$

Упътване. Разсъждавайки, както в зад. 21.6 б) за функциите

$$w_1 = u - M - tK + \varepsilon v \text{ и } w_2 = u - m + tK + \varepsilon v,$$

където $v = |x|^2 + 2nt, \varepsilon > 0$.

21.10. Нека $u \in C^{2,1}(\overline{C_T})$ е решение на $Lu = f$ в цилиндъра C_T и удовлетворява условието $u = 0$ $\left(\text{или } \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0\right)$ върху S_T. Покажете, че съществува константа $K = K(T)$, такава, че при всяко $\tau \in (0,T)$

$$\int\limits_{C_\tau} \left(\sum_{j=1}^{n} u_{x_j}^2 + u^2 \right) dx \ dt + \int\limits_{\Omega_\tau} u^2 dx$$

$$\le K \left(\int\limits_{\Omega_0} u^2 dx + \int\limits_{C_\tau} f^2 dx \ dt \right).$$

Упътване. От зад. 21.1 а) за цилиндъра C_s, $s \in (0,\tau)$ и за функциите u и $v = u$ следва

$$\int\limits_{C_S} uf \ dx \ dt = \int\limits_{C_S} \left(\sum_{j=1}^{n} u_{x_j}^2 \right) dx \ dt$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_S} u^2(x,s)dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} u^2(x,0)dx.$$

Оттук $\int\limits_{\Omega_S} u^2(x,s)dx \le \int\limits_{\Omega} u^2(x,0)dx + 2\int\limits_{C_S} |u||f|dx\, dt.$
След интегриране по s от 0 до τ и прилагане на неравенството $2|uf| \le \frac{1}{2\tau}u^2 + 2\tau f^2$ намираме оценка за $\int\limits_{C_\tau} u^2 dx\, dt$. Сега лесно се оценява и интегралът, съдържащ производните.

21.11. Докажете единственост на решението на смесената задача

$$Lu = f \text{ в } C_T,$$

$$u = \varphi \text{ върху } \Omega_0,$$

$$u = \psi \left(\text{или } \frac{\partial u}{\partial \nu} = \psi\right) \text{ върху } S_T$$

в класа $C^{2,1}(\overline{C_T})$. Докажете теоремата за единственост в случая на условието $u = \psi$ върху S_T в класа $C^{2,1}(C_T)\bigcap C^0(\overline{C_T})$.

21.12. При условията от зад. 21.10 и $f \equiv 0$ покажете, че за всяко $\tau \in (0,T)$

$$\int\limits_{\Omega_\tau} u^2(x,\tau)dx \le \int\limits_{\Omega} u^2(x,0)dx.$$

21.13. Нека $u \in C^{2,1}(C_T)$ е решение на $Lu = 0$ в C_T, за което $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{S_T} = 0$. Докажете, че

$$\int\limits_{\Omega_\tau} u(x,\tau)dx = \int\limits_{\Omega} u(x,0)dx.$$

Упътване. Приложете резултата от зад. 21.1 а) за функциите u и $v \equiv 1$.

21.14. Нека $u \in C^{2,1}(C_\infty)\bigcap C^0(\overline{C_\infty})$, $C_\infty = \Omega \times (0,\infty)$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ — ограничена област, удовлетворява $Lu = 0$ в C_∞ и $u = 0$ върху $S_\infty = \partial\Omega \times [0,\infty)$. Покажете, че $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t) = 0$ равномерно по $x \in \Omega$.

Упътване. Нека $0 \in \Omega$ и $b > 0$ е толкова малко, че

$$\overline{\Omega} \subset B = \left\{x|\ |x_j| \le \frac{\pi}{4b}, j = 1, \ldots, n\right\}.$$

Очевидно функцията $v(x,t) = e^{-nb^2t} \prod\limits_{j=1}^{n} \cos bx_j$ удовлетворява $Lv = 0$ и $v(x,0) > 0$ в B. С помощта на принципа за максимума за функциите $w_\pm = Mv \pm u (M = \text{const}$ е такава, че $Mv(x,0) > |u(x,0)|$ за $x \in \Omega)$ установете неравенството $|u| \le Mv$ в C_∞.

21.15. Нека $u \in C^{2,1}(Q) \bigcap C^0(\overline{Q})$, $Q = \mathbf{R}^n_x \times (0,\infty)$, е решението на $Lu = 0$ в Q, за което $|u(x,t)| \le M = \text{const}$ в Q и $\lim\limits_{|x|\to\infty} u(x,0) = 0$. Докажете, че $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t) = 0$ равномерно по $x \in \mathbf{R}^n_x$.

Упътване. Нека $v(x,t) = K(x,0,t,-\delta)$, $\delta > 0$ (вж. зад. 22.2). Понеже $v(x,0) > 0$, то за всяко $\varepsilon > 0$ може да се намери $M(\varepsilon) = \text{const}$, такава, че

$$|u(x,0)| \le \varepsilon + M(\varepsilon)v(x,0),$$

откъдето следва, че $|u(x,t)| \le \varepsilon + M(\varepsilon)v(x,t)$ в C_∞ (зад. 21.6 б)). Възползвайте се от $\lim\limits_{t\to\infty} v(x,t) = 0$ (равномерно по $x \in \mathbf{R}^n_x$) и произволността на ε.

21.16. Нека $G_m = \{(x,t)|\ |x|^2 + |t| \le m^2,\ t < 0\}$, $m > 0$. Докажете, че ако $u \in C^{2,1}(\overline{G_{R+\rho}})$ удовлетворява $Lu = 0$ в областта $G_{R+\rho}$, тогава в G_R

$$\sum_{j=1}^{n} u^2_{x_j}(x,t) \le \frac{c}{\rho^2} \max_{\overline{G}_{R+\rho}} |u|^2, c = \text{const}(n).$$

Упътване. Изберете константата ε така, че за функцията

$$v = [(R+\rho)^2 - |x|^2 - |t|]^2 \sum_{j=1}^{n} u^2_{x_j} + \varepsilon u^2$$

да бъде изпълнено условието $Lv \le 0$ в $G_{R+\rho}$. (Достатъчно е да се вземе $\varepsilon = (2n+10)(R+\rho)^2$.) От зад. 21.5 следва, че $v(x,t) \le \max\limits_{\Gamma} v$, където $\Gamma = \partial G_{R+\rho} \bigcap \{(x,t)|\ |x|^2 + |t| = (R+\rho)^2\}$, т.е. $v(x,t) \le \varepsilon \max\limits_{\overline{G}_{R+\rho}} u^2$. (Задачата илюстрира т. нар. *метод на Бернщайн* за получаване на априорни оценки.)

21.17. Покажете, че при условията от предишната задача за всяка точка $(x,t) \in G_R$ и за всеки мултииндекс α с $|\alpha| = k$ е валидна оценката

$$|D_x^\alpha u(x,t)|^2 \leq \left(\frac{ck^2}{\rho^2}\right)^k \max_{G_{R+\rho}} |u|^2,$$

където $c = 2n + 10$.

Упътване. Вж. зад. 21.4. Разгледайте редицата от вложени области $G_{R+j_k\rho^2}$, $j = 0, 1, \ldots, k$. Вж. зад. 16.34.

21.18. Покажете, че при условията от зад. 21.16 за всяка точка $(x,t) \in G_{R+\rho}$ е в сила неравенството

$$\left|\frac{\partial^p}{\partial t^p} D_x^\alpha u\right|^2 \leq n^{2p} \left(\frac{c(k+2p)}{\rho^2}\right)^{k+2p} \cdot \max_{\overline{G}_{R+\rho}} |u|^2,$$

където $k = |\alpha|$, $p \geq 0$ — цяло число, $c = 2n + 10$.

Упътване. Използвайте, че $\frac{\partial^p}{\partial t^p} D^\alpha u = D^\alpha \cdot \Delta^p u$ и предишната задача.

21.19. Нека $u \in C^{2,1}(G)$ е решение на $Lu = 0$ в G. Тогава $u(x,t)$ е аналитична функция по променливите x.

Упътване. Вж. решението на зад.16.38.

21.20. Аналитична ли е по променливата t функцията (вж. зад. 21.2)

$$v(x,t) = \begin{cases} K(x,x_0;t,t_0), & t \geq t_0, \\ 0, & t < t_0, \end{cases}$$

в околност V на точка (x_1, t_0), $x_1 \neq x_0$, която удовлетворява във V уравнението $Lv = 0$ (и следователно $v \in C^\infty(V)$)?
Отг. Не.

21.21. Нека $u \in C^{2,1}(Q)$, $Q = \mathbf{R}_x^n \times (-\infty, T)$ и $Lu = 0$ в Q, като $|u(x,t)| \leq \text{const}(1 + |x|^2 + |t|)^{q/2}$, $q = \text{const} \geq 0$. Покажете, че функцията има вида

$$u(x,t) \equiv \sum_{|\alpha|+2p \leq |q|} c_{\alpha,p} x^\alpha t^p,$$

т. е. u е полином от степен, ненадминаваща $[q]$.

Упътване. С помощта на зад. 21.18 намираме, че в G_R, $R > 0$ винаги когато $|\alpha| + 2p \geq [q] + 1$, е изпълнено

$$\max_{G_R} \left| \frac{\partial^p}{\partial t^p} D_x^\alpha u \right| \leq \text{const} \rho^{-(k+2p)} (1 + (R+\rho)^2 + |T|)^{\frac{q}{2}}$$

с константа, която не зависи от ρ.

21.22. Нека $\{u_m\}$ е редица от решения на $Lu = 0$ от класа $C^{2,1}(G_0) \bigcap C^0(\overline{G})$ (вж. означенията (1)), която е равномерно сходяща върху Г. Покажете, че $\{u_m\}$ е равномерно сходяща в $\overline{G}$ и границата ѝ u е решение на $Lu = 0$ в G_0.

Упътване. Сходимостта в $\overline{G}$ следва от принципа за максимума. Използвайте зад. 21.18 и теоремата на Арцела — Асколи, за да намерите подредица $\{u_{m_k}\}$, равномерно сходяща заедно с производните си от първи и от втори ред.

21.23. Нека $\{u_m\}$ е ограничена фамилия от решения на уравнението $Lu = 0$ в цилиндъра C_T. Покажете, че за всеки цилиндър

$$\Omega_1 \times \{\varepsilon_1 \leq t \leq T\}, \overline{\Omega}_1 \subset \Omega, \varepsilon_1 > 0,$$

може да се намери равномерно сходяща в него подредица $\{u_{m_k}\}$.

Упътване. Както в зад. 21.22, намерете подредица с равномерно ограничени първи производни.

Глава VI

ХИПЕРБОЛИЧНИ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМИ

§ 22. Характеристики. Привеждане на системите в каноничен вид

В двумерната област G разглеждаме системата уравнения

$$A\frac{\partial u}{\partial t} + B\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,t,u), \tag{1}$$

където $A = (a_{ik})$ и $B = (b_{ik})$ $(i,k = 1,\dots,n)$ са $n \times n$ квадратни матрици, а $u = (u_1,\dots,u_n)'$ и $f = (f_1,\dots,f_n)'$ са вектор-стълбове. Нека гладката крива Γ лежи в G и е зададена параметрично: $x = x(s)$, $t = t(s)$, като $dx = x'ds$, $dt = t'ds$. Казваме, че Γ е *характеристика* на системата (1), ако върху нея е изпълнено равенството

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ dtE & dxE \end{pmatrix} = \det(Adx - Bdt) = 0, \tag{2}$$

където E е единичната $n \times n$ матрица. Нека функцията u е решение на системата (1) в G. Тогава върху характеристиката Γ компонентите $u_1,\dots,u_n$ на u не могат да бъдат произволни, а ще са свързани с определени връзки. Ако означим $du = u_x dx + u_t dt$, равенството

$$\text{ранга на } \begin{pmatrix} A & B \\ dtE & dxE \end{pmatrix} = \text{на ранга на } \begin{pmatrix} A & B & f \\ dtE & dxE & du \end{pmatrix} \tag{3}$$

дава връзките (условията), които u ще удовлетворява върху Γ.

Системите, които нямат реални характеристики, се наричат *елиптични*.

Навсякъде по-долу ще предполагаме, че матрицата A е неособена. Тогава уравненията (1) и (2) могат да се запишат във вида

$$u_t + Cu_x = f_1(x,t,u), \tag{4}$$

$$\det(C - kE) = 0, \tag{5}$$

където $C = A^{-1}B$ и $k = \frac{dx}{dt}$. Нека T е гладка и неособена матрица, за която матрицата $T^{-1}CT$ е диагонална. Тогава след смяната $u = Tv$ и умножаване отляво с матрицата T^{-1} системата (4) приема каноничния вид

$$v_t + K(x,t)v_x = f_2(x,t,v). \tag{6}$$

Компонентите $v_i(x,t)$ се наричат *риманови инварианти* на системите (1) и (4). Нека вектор-стълбът $z_i = (z_{1i}, \dots, z_{ni})'$ е гладък собствен вектор на C, отговарящ на корена $k_i(x,t)$. Ако матрицата C има n линейно независими собствени вектора $z_1, \dots, z_n$, за матрица T може да се вземе

$$T = \begin{pmatrix} z_{11} & \dots & z_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ z_{n1} & \dots & z_{nn} \end{pmatrix} = (z_1, \dots, z_n).$$

От линейната алгебра се знае, че база от собствени вектори сигурно има в два случая: а) ако всички собствени числа на матрицата C са различни; б) ако матрицата C е симетрична. Системите, на които всички корени $k_i(x,t)$ на характеристичното уравнение (5) са реални и различни, се наричат *строго хиперболични*. Системите, на които всички корени са реални, се наричат *хиперболични*.

Да разгледаме в тримерна област системата уравнения

$$A\frac{\partial u}{\partial t} + B\frac{\partial u}{\partial x} + C\frac{\partial u}{\partial y} = f(x,y,t,u). \tag{7}$$

Повърхнините $\varphi(x,y,t) = \text{const}$ с $\text{grad}\,\varphi = (\varphi_x, \varphi_y, \varphi_t) \neq 0$, върху които

$$\det(\varphi_t A + \varphi_x B + \varphi_y C) = 0,$$

или, което е същото,

$$\det(\tau A + \xi B + \eta C) = 0, \tag{8}$$

където (τ, ξ, η) е векторът на нормалата към повърхнината, се наричат характеристики на (7). Векторът (τ, ξ, η) се нарича характеристична нормала, а уравнението (8) — конус на характеристичните нормали.

Системата (7) се нарича *симетрична t-хиперболична* система, ако матриците A, B и C са симетрични и матрицата A е положително дефинитна (вж. по-горе двумерния случай).

С всички въпроси, разгледани в глава VI, по-подробно можете да се запознаете в книгата на С. К. Годунов "Уравнения математической физики", гл. I, § 5 и 6; гл. II, § 11, 12 и 15.

22.0. Припомнете си линейната алгебра!

22.1. Нека $k_i(x,t)$, $i = 1, \dots, n$, са компонентите на матрицата K в (6). Покажете, че върху която и да е характеристика $\frac{dx}{dt} = k_{i_0}$ за съответния риманов инвариант v_{i_0} е изпълнено $v_{i_0} = \text{const}$, ако $f_2(x,t,v) = 0$.

Упътване. Пресметнете $\frac{d}{dt}[v_i(x(t),t)]$.

22.2. Покажете, че характеристиките в равнината, дефинирани с (2), са частен случай от характеристиките в $\mathbf{R}^3$, дефинирани с (8).

22.3. Намерете характеристиките на уравненията на Белтрами

$$\begin{cases} u_x - bv_x - cv_t = 0, \\ u_t + av_x + bv_t = 0. \end{cases}$$

Сведете системата до едно уравнение от втори ред. Сравнете неговите характеристики с тези на системата.

Упътване. Запишете системата в матричен вид.

Отг. И в двата случая $\frac{dt}{dx} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$.

22.4. Намерете условията за строга хиперболичност и за хиперболичност на системата

$$\begin{cases} u_t + \alpha u_x + \beta v_x = 0, \\ v_t + \gamma u_x + \delta v_x = 0. \end{cases}$$

Отг. $(\alpha - \delta)^2 + 4\gamma\beta > 0$; $(\alpha - \delta)^2 + 4\gamma\beta \geq 0$.

22.5. Определете от какъв тип е системата на Коши — Риман

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \\ \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Отг. Елиптична система.

22.6. Напишете уравнението на конуса на характеристичните нормали на системата

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \\ \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

където ρ_0 и c_0 са константи. Тази система описва разпространението на звуковите вълни в двумерния случай. Функциите

$u(x,y,t)$ и $v(x,y,t)$ са компонентите на вектора на скоростта в точка (x,y) в момента време t; $p(x,y,t)$ характеризира налягането в точка (x,y).

Отг. $\tau[\tau^2 - c_0^2(\xi^2+\eta^2)] = 0.$

22.7. Запишете в матрична форма и приведете в каноничен вид системата уравнения на Максуел

$$
\begin{gathered}
\frac{\mu}{c_0}\frac{\partial H_2}{\partial t} = \frac{\partial E_3}{\partial x}, \quad \frac{\mu}{c_0}\frac{\partial H_3}{\partial t} = -\frac{\partial E_2}{\partial x}, \\
\frac{\varepsilon}{c_0}\frac{\partial E_2}{\partial t} = -\frac{\partial H_3}{\partial x}, \quad \frac{\varepsilon}{c_0}\frac{\partial E_3}{\partial t} = \frac{\partial H_2}{\partial x},
\end{gathered}
\tag{9}
$$

където константите c_0, ε и μ са положителни.

Упътване. Системата (9) е хиперболична, но не е строго хиперболична, понеже има два двойни характеристични корена (проверете!). Въпреки това я приведете в каноничен вид, който е симетрична t-хиперболична система. За целта намерете два линейно независими собствени вектора на всеки характеристичен корен.

Забележка. Тук $\vec{H} = (H_1, H_2, H_3)$ е векторът на напрежението на магнитното поле, а $\vec{E} = (E_1, E_2, E_3)$ — векторът на напрежението на електричното поле. Константите μ и ε са магнитната и диелектричната проницаемост. В зад. 22.7 са разгледани уравненията, описващи разпространението на плоските вълни по оста x, когато $E_1 = 0$ и $H_1 = 0$. Вижте и (9) в § 24 (системата уравнения на Максуел в R^3).

22.8. Намерете връзките, които удовлетворява върху характеристиките решението на системата (вж. зад: 22.6)

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0, \\[2ex]
\dfrac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0.
\end{cases}
\tag{10}
$$

Напишете диференциалното уравнение от втори ред за функциите u и p. Сравнете характеристиките на това уравнение и на системата (10).

Решение. Матричната форма на системата (10) е

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho_0} \\ \rho_0 c_0^2 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Покажете, че характеристиките са правите $x + c_0 t = \text{const}$, $x - c_0 t = \text{const}$. Според равенството (3) рангът на матрицата

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/\rho_0 & 0 \\ 0 & 1 & \rho_0 c_0^2 & 0 & 0 \\ dt & 0 & dx & 0 & du \\ 0 & dt & 0 & dx & dp \end{pmatrix}$$

трябва да е равен (върху характеристиките) на ранга на матрицата от първите четири стълба, чиято детерминанта е нула (защо?). Следователно детерминантата на произволни четири стълба трябва да е нула. Покажете оттук, че $dx\, dp + \rho_0 c_0^2 du\, dt = 0$. Следователно върху характеристиките $dx = c_0 dt$ е изпълнено $d(\rho_0 c_0 u + p) = 0$, т. е. $\rho_0 c_0 u + p = \text{const}$. Върху $dx = -c_0 dt$ имаме $\rho_0 c_0 u - p = \text{const}$. Корените на характеристичното уравнение са прости и други връзки нямаме (докажете!). Всяка от функциите u и p е решение на уравнението на струната $v_{tt} = c_0^2 v_{xx}$.

22.9. Намерете връзките, които удовлетворява върху характеристиките решението на системата

$$\begin{cases} u_t + 2u_x + v = 0, \\ v_t - \ v_x + u = 0. \end{cases}$$

Отг. $dv + u dt = 0$ върху $x + t = C_1$; $du + v dt = 0$ върху $x - 2t = C_2$.

22.10. Намерете връзките, които удовлетворява върху характеристиките решението на системата $u_t + B u_x = 0$, където

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3t^2 \end{pmatrix}.$$

Упътване. Използвайте, че ако A, B, C и D са матрици и $AC = CA$, то

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB).$$

Отг. $u_1 = c_1$, ако $x - t = c_2$; $u_2 = c_3$, ако $3x - t^3 = c_4$;

$u_3 = c_5$, ако $x + t = c_6$; $u_4 = c_7$, ако $x + t^3 = c_8$.

22.11. Намерете връзките, които удовлетворява върху характеристиките решението на системата

$$(11) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + \dfrac{\partial u_1}{\partial x} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial u_2}{\partial t} + 2\dfrac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial u_3}{\partial t} - \dfrac{\partial u_3}{\partial x} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial u_4}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

Отг. $du_1 = 0$ върху $\dfrac{dx}{dt} = 1$; $du_2 = 0$ върху $\dfrac{dx}{dt} = 2$; $du_3 = 0$ върху $\dfrac{dx}{dt} = -1$; $du_4 = 0$ върху $\dfrac{dx}{dt} = 0$.

В задачи 22.12 – 22.14 приведете в каноничен вид системите.

22.12. $\begin{cases} u_t - v_x = 0, \\ v_t - u_x = 0. \end{cases}$

Упътване. Направете това по два начина. Първия — като намерите матрицата T — вж. увода към § 22. Втория — като по подходящ начин преобразувате уравненията на системата (например, като ги съберете или извадите).

Отг. $\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + \dfrac{\partial u_1}{\partial x} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial u_2}{\partial t} - \dfrac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \end{cases}$

където $u_1 = u - v$, $u_2 = u + v$.

22.13. $\begin{cases} 2u_t + (2t - 1)u_x - (2t + 1)v_x = 0, \\ 2v_t - (2t + 1)u_x + (2t - 1)v_x = 0. \end{cases}$

Отг. $\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} - \dfrac{\partial u_1}{\partial x} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial u_2}{\partial t} + 2t\dfrac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \end{cases}$

където $u_1 = u + v$, $u_2 = u - v$.

22.14. $\begin{cases} 2u_t + 4v_x + 2w_x = 2w - 2u - v, \\ v_t + 8u_x = 2w - 2u - v, \\ w_t + 3w_x = 2u + v + 2w. \end{cases}$

Отг. $\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + 3\dfrac{\partial u_1}{\partial x} = u_2, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} + 4\dfrac{\partial u_2}{\partial x} = 8u_1, \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial t} - 4\dfrac{\partial u_3}{\partial x} = 2u_2, \end{cases}$

където $u_1 = w$, $u_2 = 2u + v + 2w$, $u_3 = -14u + 7v + 2w$.

22.15. Може ли да се приведе в каноничен вид системата $u_t + Cu_x = f$, където

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}.$$

Отг. Не; понеже жордановата нормална форма на матрицата не е диагонална (няма три линейно независими собствени вектора).

22.16. Намерете общото решение на уравнението $u_t + u_x = 0$.

Упътване. Припомнете си как се решават частни диференциални уравнения от първи ред!

Отг. $u = f(x - t)$.

Общото решение на някои системи се намира лесно след привеждането им в каноничен вид.

22.17. Намерете общото решение на системата (10).

Упътване. Канонизирайте я и я решете спрямо новите променливи u_1 и p_1 (вж. зад. 22.16). Върнете се към променливите u и p.

Отг. $u = \frac{1}{2}[f(x - c_0t) + g(x + c_0t)]$, $p = \frac{\rho_0 c_0}{2}[f(x - c_0t) - g(x + c_0t)]$.

22.18. Намерете общото решение на системата

$$\begin{cases} (x-1)u_t - (x+1)v_t + u_x = 0, \\ (x+1)u_t - (x-1)v_t - v_x = 0. \end{cases}$$

Отг. $u = g(t+2x) + f(t-x^2)$, $v = g(t+2x) - f(t-x^2)$.

22.19. Намерете общото решение на системата

$$\begin{cases} u_t + 4u_x + 5v_x = 0, \\ v_t + 5u_x + 4v_x = 0, \\ w_t + 3u_x - 2w_x = 0. \end{cases}$$

Отг. $u = f(9t-x) + g(t+x)$, $v = f(9t-x) - g(t+x)$,

$$w = \frac{3}{11} f(9t-x) + 3g(t+x) + h(2t+x).$$

22.20. Докажете, че всяко хиперболично уравнение от втори ред може да се сведе до симетрична хиперболична система от първи ред.

Упътване. Нека уравнението е

$$u_{tt} + 2\sum_{i=1}^{n} a^i u_{tx_i} - \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} u_{x_i x_k} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_{xi} + \alpha_0 u_t + \alpha u = f, \tag{12}$$

където матрицата (a_{ik}) е симетрична $(a_{ik} = a_{ki})$ и положително дефинитна (определена). След смяната $v^0 = u_t$, $v^i = u_{x_i} (i = 1, \dots, n)$ за функцията $v = (v^0, v^1, \dots, v^n, u)$ се получава системата

$$\begin{cases} v^0_t + 2\sum_{i=1}^{n} a^i v^0_{x_i} - \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} v^i_{x_k} + \cdots = f, \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ik}(v^i_t - v^0_{x_i}) = 0, \\ u_t - v^0 = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Запишете я в матричен вид и проверете, че това е симетрична t-хиперболична система.

§ 23. Гранични задачи

Ще започнем със задачата на Коши.

23.1. Намерете решение на системата (E, $\rho = \text{const} \neq 0$)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{1}{E}\dfrac{\partial v}{\partial t} = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} - \rho\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0, \end{cases}$$

което удовлетворява началните условия: $u(x,0) = \varphi(x)$, $v(x,0) = \psi(x)$.

Упътване. Намерете общото решение.

23.2. Решете задачата на Коши:

$$\left\{\begin{array}{l} 2u_t - u_x - v_x = 0, \\ 2v_t - u_x - v_x = 0, \end{array}\right. \left| \begin{array}{l} u(x,0) = 0, \\ v(x,0) = 2x. \end{array}\right.$$

Отг. $u = t$, $v = 2x + t$.

23.2а. Намерете решение на системата уравнения на акустиката от зад. 22.6, което удовлетворява началните условия:

$$p|_{t=0} = p_0(x,y), u|_{t=0} = u_0(x,y), v|_{t=0} = v_0(x,y).$$

Упътване. Покажете, че функцията p е решение на задачата:

$$p_{tt} = c_0^2(p_{xx} + p_{yy}),\ p|_{t=0} = p_0,\ p_t|_{t=0} = -\rho_0 c_0^2(u_{0x} + v_{0y}).$$

Знаете ли формула, по която се решава тази задача?

23.2б. Докажете, че ако функцията $v = (v^0, v^1, \ldots, v^n, u)$ е решение на системата (13) от § 22 и удовлетворява начални условия, за които е изпълнено $u_{x_i}|_{t=0} = v^i|_{t=0}$ за $i = 1, \ldots, n$, тогава функцията u е решение на уравнението (12). Това показва, че двете задачи на Коши са еквивалентни при съответната връзка между началните условия.

Упътване. Покажете, че от системата следва $(u_{x_i} - v^i)_t = 0$. Как можете да използвате сега даденото начално условие?

Забележка. Задачата на Коши за хиперболичното уравнение от втори ред след полагането от задача 23.20 се свежда до задачата на Коши за съответната система от първи ред. Така че например оценките, които ще изведем в § 25 за симетрични системи от първи ред, се пренасят за хиперболични уравнения от втори ред.

Да разгледаме смесената задача в полуивицата $0 < x < l$, $t > 0$, при начални данни при $t = 0$.

23.3. Каква подходяща гранична задача може да се постави за системата (11)?

Решение. Тази система има (зад. 22.11) две фамилии характеристики с положителен наклон $dx = dt$, $du_1 = 0$; $dx = 2dt, du_2$

$= 0$; една фамилия с отрицателен наклон $dx = -dt, du_3 = 0$ и една вертикална $dx = 0, du_4 = 0$. За определяне на u_4 са достатъчни началните данни

$$(1) \qquad u_4(x,0) = \varphi_4(x),$$

понеже функцията u_4 е константа върху всяка вертикална характеристика (вж. черт. 23.1). От черт. 23.2, на който характеристиките са $dx = dt$ (върху тях u_1 е константа), е ясно, че условията

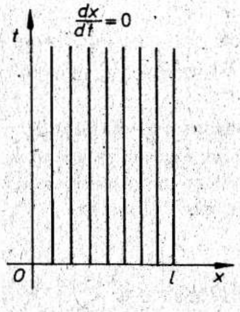
$$(2) \qquad u_1(x,0) = \varphi_1(x), 0 \leq x \leq l; u_1(x,t) = \psi_1(t), t > 0,$$

определят решението u_1 навсякъде в поливицата. Аналогично за определянето на u_2 е достатъчно да се зададе

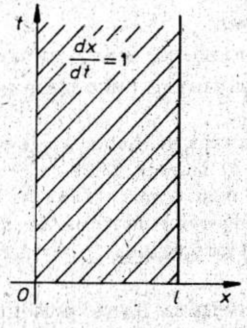
$$(3) \qquad u_2(x,0) = \varphi_2(x), u_2(0,t) = \psi_2(t).$$

Функцията $u_3(x,t)$ се определя от стойностите си върху отсечката $\{0 \leq x \leq l, t = 0\}$ и върху дясната граница $x = l$, $t > 0$. Това е ясно от черт. 23.3, където са изобразени линиите, върху които u_3 е константа (характеристиките $dx = -dt$). Полагаме

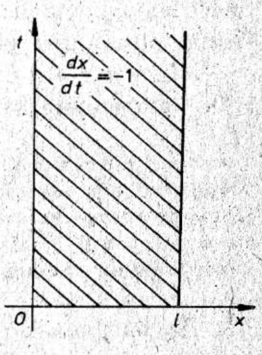
$$(4) \qquad u_3(x,0) = \varphi_3(x), u_3(l,t) = \psi_3(t).$$



Черт. 23.1



Черт. 23.2



Черт. 23.3

И така, решението на системата се определя еднозначно при задаване на условията (1) — (4).

Забележка. Върху различните части на границата се наложи да задаваме различен брой условия. Върху лявата граница трябва да се задават толкова условия, колкото характеристики с положителен наклон $\frac{dx}{dt}$ има системата. С нарастването на t тези характеристики се отдалечават от лявата граница, пренасяйки стойностите на съответните риманови инварианти (в случая u_1 и u_2). Ще казваме, че за лявата граница характеристиките с положителен наклон са "заминаващи" (за $t > 0$), а тези с отрицателен наклон — "пристигащи". За дясната граница характеристиките, за които $\frac{dx}{dt} > 0$, са "пристигащи" (идват откъм по-малки t), а с $\frac{dx}{dt} < 0$ — "заминаващи". Относно границата $t = 0$ всички характеристики са заминаващи.

Правило. За произволна хиперболична система броят на условията се определя аналогично. На всяка граница се задават толкова условия, колкото семейства характеристики "заминават" от нея. Тези условия трябва да са такива, че да могат да се решат спрямо римановите инварианти на съответната характеристика (вж. зад. 23.5).

23.4. Каква гранична задача може да се постави в полуивицата $\{0 \leq x \leq l,\, t \geq 0\}$ за системата

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + 5\dfrac{\partial u}{\partial x} + 16\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + 5\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Отг. Задават се $u(x,0)$, $v(x,0)$ и две условия при $x = 0$. При $x = l$ не се задават никакви условия.

23.5. Каква гранична задача може да се постави в полуивицата $\{0 \leq x \leq l,\, t \geq 0\}$ за системата

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + 3\dfrac{\partial u}{\partial x} + 16\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + 3\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Може ли да се зададат гранични условия във вида $u = 0$ при $x = 0$ и $u = 0$ при $x = l$? А може ли да се зададе $u + 4v = 0$ при $x = l$?

Отг. Задават се $u(x,0)$ и $v(x,0)$; едно условие при $x = 0$ и едно при $x = l$. Системата може да се приведе (покажете!) в следния каноничен вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(u+4v) + 7\dfrac{\partial}{\partial x}(u+4v) = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial t}(u-4v) - \dfrac{\partial}{\partial x}(u-4v) = 0. \end{cases}$$

Следователно римановите инварианти са: $u + 4v$ върху характеристиките $dx = 7dt$ и $u - 4v$ върху $dx = -dt$. Докажете оттук, че може да се зададе $u = 0$ при $x = 0$ и $x = l$, а не може да се зададе $u + 4v = 0$ при $x = l$, понеже стойността на $u + 4v$ "идва" от $t = 0$ по характеристиките $dx = 7dt$.

23.6. Посочете кои от следните гранични задачи са правилно поставени за системата

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + 2\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial x} = v + w, \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial t} + 8\dfrac{\partial u}{\partial x} = w - v, \\[2ex] \dfrac{\partial w}{\partial t} + 3\dfrac{\partial w}{\partial x} = u + v + w \end{cases}$$

в $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$. Началните условия са

$$u(x,0) = \varphi(x), v(x,0) = \psi(x), w(x,0) = h(x).$$

Граничните условия са:

а. $u(0,t) = t$, $v(l,t) - w(l,t) = t^2$, $u(l,t) = 1$.

б. $u(0,t) = t$, $w(0,t) = t^2$, $v(l,t) + 2u(l,t) = 0$.

в. $u(0,t) = t$, $w(0,t) = t^2$, $v(l,t) - w(l,t) = t$.

г. $u(0,t) - 3v(0,t) - 3w(0,t) = \sin\, t$.

$$v(l,t) - w(l,t) = t, \qquad 3v(0,t) - 8u(0,t) = 0.$$

Отг. а — неправилно; б, в, г — правилно.

В задачи 23.7 и 23.8 дайте примери за правилно поставени гранични задачи в посочените области.

23.7.
$$\begin{cases} 2\frac{\partial u}{\partial t} - 6\frac{\partial v}{\partial t} - 8\frac{\partial v}{\partial x} - 3\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ -\frac{\partial u}{\partial t} + 3\frac{\partial u}{\partial x} - 4\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \end{cases}$$
$$0 \le t \le 1 - |x|,\ |x| \le 1.$$

23.8.
$$\begin{cases} 6\frac{\partial u}{\partial x} + 4\frac{\partial v}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} - 4\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ 2\frac{\partial u}{\partial x} + 8\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} - 2\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \end{cases}$$
$$0 \le y \le x,\ 0 \le y \le 1 - x,\ 0 \le x \le 1.$$

23.9. В системата

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \gamma\frac{\partial u}{\partial x} + \delta\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

подберете параметрите α, β, γ и δ така, че системата да е строго хиперболична, и:

а) граничните условия да се задават при $x = 0$ и $x = l$ (по едно на всяка граница);

б) две гранични условия да се задават при $x = 0$;

в) две гранични условия да се задават при $x = l$.

Отг. За строга хиперболичност трябва $(\alpha - \delta)^2 + 4\gamma\beta > 0$;

а) $\alpha\delta - \gamma\beta < 0$; б) $\alpha\delta - \gamma\beta > 0$; $\alpha + \delta > 0$;

в) $\alpha\delta - \gamma\beta > 0$, $\alpha + \delta < 0$.

§ 24. Интеграл на енергията. Задача на Коши

Разглеждаме линейната симетрична t-хиперболична система

$$A\frac{\partial u}{\partial t} + B\frac{\partial u}{\partial x} + C\frac{\partial u}{\partial y} + Qu = f(x, y, t), \tag{1}$$

т.е. A, B и C са симетрични матрици, като A е положително дефинитна. За матрицата Q не предполагаме, че е симетрична. Нека G е ограничена област с частично гладка граница S и (τ, ξ, η) е външният нормален вектор към S. Предполагаме, че $A, B, C \in C^1(\overline{G})$; $Q \in C(\overline{G})$.

24.1. Докажете, че е в сила интегралното тъждество

$$(2)\qquad \int\!\!\int\limits_S ([\tau A + \xi B + \eta C]u, u)ds = \int\!\!\int\limits_G\!\!\int [(Du, u) + 2(f, u)]dtdxdy,$$

където (u, v) е скаларното произведение в $\mathbf{R}^n$, а с D сме означили матрицата

$$D = A_t + B_x + C_y - (Q + Q^*).$$

Упътване. Умножете (1) скаларно с вектора $2u$:

$$2\left(A\frac{\partial u}{\partial t}, u\right) + 2\left(B\frac{\partial u}{\partial x}, u\right) + 2\left(C\frac{\partial u}{\partial y}, u\right) + 2(Qu, u) = 2(f, u).$$

Използвайки, че $A = A^*$, получете

$$2\left(A\frac{\partial u}{\partial t}, u\right) = \left(A\frac{\partial u}{\partial t}, u\right) + \left(Au, \frac{\partial u}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}[Au], u\right)$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial t}[A]u, u\right) + \left(Au\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(Au, u) - (A_t u, u).$$

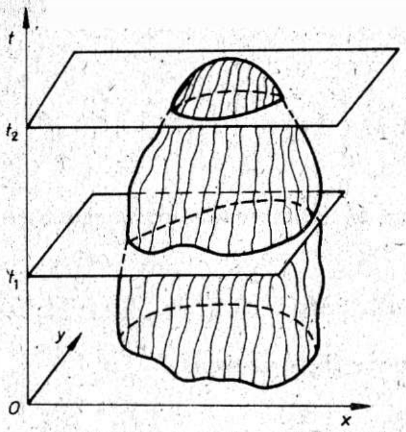
Аналогично преработете останалите изрази и покажете, че

$$\frac{\partial}{\partial t}(Au, u) + \frac{\partial}{\partial x}(Bu, u) + \frac{\partial}{\partial y}(Cu, u) = (Du, u) + 2(f, u).$$

Интегрирайте това тъждество върху областта G. Получете (2), използвайки формулата на Гаус — Остроградски.

Тъждеството (2) се нарича *интеграл на енергията* за симетричната система (1). В частност, ако броят на независимите променливи е равен на две и хиперболичната система не е симетрична, ние можем да я приведем в каноничен вид и за него да напишем интеграла на енергията.

Нека областта G е ограничена от повърхнина, която се състои от две части. Едната от тези части е ограничена област от равнината $t = 0$, а другото е като "шапка" над първата, като се опира в границата ѝ и е в полупространството $t > 0$ (черт. 24.1). Да означим с G_τ сечението $G \cap \{t = \tau\}$ и с $\|\vec{u}(t)\|$ — L_2-нормата на вектор-функцията $\vec{u}(t) = u(x, y, t)$ върху G_t:



Черт. 24.1

$$\|\vec{u}(t)\| = \left\{ \iint\limits_{G_t} |u(x,y,t)|^2 dx\, dy \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

24.2. Нека върху "шапката" квадратичната форма $([\tau A + \xi B + \eta C]u,\, u)$ е неотрицателна. Тогава е изпълнено

$$\|\vec{u}(t)\| \le C\left(\|\vec{u}(0)\| + \max_{0\le\lambda\le t} \|\vec{f}(\lambda)\|\right), 0 \le t \le T, \tag{3}$$

където константата C не зависи от функциите u и f.

Решение. Нека $t \in (0,T]$. В интеграла на енергията (2) за областта $G \cap \{0 < \lambda < t\}$ изпускаме неотрицателния интеграл по околната повърхнина (по "шапката") и получаваме

$$\begin{aligned} \iint\limits_{G_t} (Au,u)dx\, dy &\le \iint\limits_{G_0} (Au,u)dxdy \\ &+ \int_0^t \left\{ \iint\limits_{G_\lambda} [|(Du,u)| + 2|(f,u)|]dx\, dy \right\} d\lambda. \end{aligned} \tag{4}$$

Да означим $I(t) = \|\vec{u}(t)\|^2$. Използвайки, че $(u,u) \leq \mathrm{const}(Au,u)$, от (4) получаваме

$$I(t) \leq M \left\{ I(0) + \int\limits_0^t \left[I(\lambda) + \|\vec{f}(\lambda)\|^2 \right] d\lambda \right\}, \tag{5}$$

където константата M зависи само от коефициентите A, B, C и Q. Тук използвахме, че

$$|(Du,u)| \leq M_1(u,u), |(f,u)| \leq (f,f) + (u,u)$$

(докажете!).Запишете (5) във вида

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-Mt} \int\limits_0^t I(\lambda) d\lambda \right] \leq Me^{-Mt} \left[I(0) + \int\limits_0^t \|\vec{f}(\lambda)\|^2 d\lambda \right].$$

Интегрирайте и покажете, че

$$\int\limits_0^t I(\lambda) d\lambda \leq (e^{Mt} - 1) \left[I(0) + \int\limits_0^t \|\vec{f}(\lambda)\|^2 d\lambda \right].$$

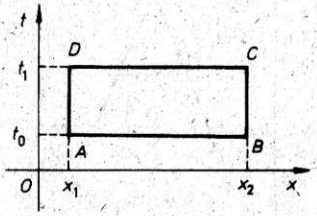
Замествайки в дясната страна на (5), получете

$$\|\vec{u}(t)\|^2 \leq Me^{Mt} \left[\|\vec{u}(0)\|^2 + \int\limits_0^t \|\vec{f}(\lambda)\|^2 d\lambda \right].$$

Забележка. От (3) следва, че ако $u = 0$ при $t = 0$ и ако $f(x,y,t) = 0$ в G, то $\|\vec{u}(t)\| = 0$ и следователно навсякъде в G, т. е. под "шапката", имаме $u = 0$. Това е *теорема за единственост* за задачата на Коши. Области G, за които повърхнинният интеграл върху "шапката" е неотрицателен, има. За "шапка" можем да вземем повърхнина, върху която $\tau = \cos(n,t)$ е достатъчно близко до единица. Тогава квадратичната форма $([\tau A + \xi B + \eta C]u, u)$ ще бъде дори положително определена, понеже A е такава. За "шапка" можем да вземем и характеристична повърхнина (вж. зад. 24.5 – 24.7).

24.3. Разгледайте едномерната система уравнения на акустиката от зад. 22.8:

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0. \end{cases}$$



Черт. 24.2

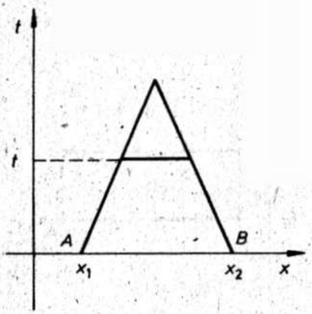
Приведете я в симетричен вид чрез умножаване на едното уравнение с подходящ множител. За получената система напишете интеграла на енергията (2). За област G вземете правоъгълника $ABCD$ от черт. 24.2.

Отг.

$$(7)\quad \int_D^C \left(\rho_0\frac{u^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2}\right) dx = \int_A^B \left(\rho_0\frac{u^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2}\right) dx + \int_A^D pudt - \int_B^C pudt.$$

Забележка. В (7) изразът $\int_A^B \rho_0 \frac{u^2}{2} dx$ дава кинетичната енергия на газа в "обема" $x_1 < x < x_2$ в началния момент t_0; $\int_A^B \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2} dx$ дава потенциалната енергия от свиването на този газ. Интегралът $\int_D^C \left(\rho_0 \frac{u^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2}\right) dx$ дава пълната енергия в момента t_1. Разликата $\int_A^D pudt - \int_B^C pudt$ представлява работата, извършена над газа в интервала време (t_0, t_1). По тази причина интегралното тъждество (7) и по-общото от него тъждество (2) се наричат закони за запазване на енергията или интеграли на енергията (вж. и (8) от зад. 24.8).

24.4. Приведете двумерната система уравнения на акустиката от зад. 23.6 в симетричен вид и напишете за нея интеграла на енергията (закон за запазване на енергията на звуковите вълни).



Черт. 24.3

24.5. Докажете теорема за единственост на задачата на Коши за едномерната система уравнения на акустиката (6) при начални условия $u(x,0) = \varphi(x)$, $p(x,0) = \psi(x)$, $x_1 < x < x_2$, в характеристичния триъгълник ABC (вж. черт. 24.3) ограничен отляво и отдясно от характеристиките

$$AC(x - c_0 t = x_1)$$

и

$$BC(x + c_0 t = x_2).$$

Упътване. Вж. зад. 24.2. Каква оценка получавате за $\|\vec{u}(t)\|$?

24.6. Докажете, че следната задача на Коши има най-много едно решение в характеристичния триъгълник $\{t > 0, 2t < x < 1 - t\}$:

$$\begin{cases} u_t + 2u_x + v = 0, \\ v_t - v_x + u = 0, \end{cases} \quad \left| \quad \begin{aligned} & u(x,0) = \varphi(x), \\ & v(x,0) = \psi(x). \end{aligned} \right.$$

Упътване. Вж. зад. 24.2. Каква оценка получавате за $\|\vec{u}(t)\|$?

Отг. $\int\limits_{2t}^{1-t} [u^2(x,t) + v^2(x,t)]dx \le e^{2t} \int\limits_0^1 [\varphi^2(x) + \psi^2(x)]dx, \ 0 \le t \le \frac{1}{3}.$

24.7. Докажете теоремата за единственост за задачата на Коши

$$\begin{cases} u_t + v = 0, \\ v_t + \dfrac{1}{2(2 - x)} v_x + u = 0, \end{cases} \quad \left| \quad \begin{aligned} & u(x,0) = \varphi(x), \\ & v(x,0) = \psi(x), \end{aligned} \right.$$

в областта $\{0 \le x \le 1, 0 \le t \le 4x - x^2\}$. Намерете характеристиките на системата. Как расте $\|\vec{u}(t)\|$ в зависимост от t?

Отг. $\|\vec{u}(t)\| \le e^{\frac{5}{4}t} \|\vec{u}(0)\|, \ 0 \le t \le 3.$

24.8. Разгледайте системата

$$3u_{1t} + u_{3x} = 0,$$
$$u_{2t} + 2tu_{2x} + u_3 = 0,$$
$$3u_{3t} + u_{1x} - 3u_2 = 0.$$

а) Намерете характеристиките ѝ.

б) Напишете интеграла на енергията за тази система в областта $G \cap \{0 < t < \tau\}$, където $G = \{t > 1, t^2 < x < 3 - t/3\}$.

в) Докажете единствеността на решението в G на задачата на Коши за тази система при начално условие $u(x, 1) = f(x), 1 < x < 5/3$.

24.9. За едномерната система уравнения на Максуел от зад. 22.7 напишете закона за запазване на енергията. Формулирайте и докажете теорема за единственост.

Упътване. Системата не е симетрична. Вж. зад. 24.3 и 24.4.

Отг.

$$\int\limits_S \left\{ \left[\mu \frac{H_2^2 + H_3^2}{2} + \varepsilon \frac{E_2^2 + E_3^2}{2}\right] \xi + c_0[E_3H_2 - E_2H_2]\tau \right\} ds = 0. \tag{8}$$

Да въведем означенията на векторния анализ за векторна функция $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$; $u_k = u_k(x, y, z)$: скалара дивергенция от $\vec{u}$: $\operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}$, вектора ротация от $\vec{u}$: $\operatorname{rot} \vec{u} = \left\{ \frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z}, \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right\}$. Тогава тримерната система уравнения на Максуел във вакуум има вида (вж. забележката след зад. 22.7)

$$\frac{\varepsilon}{c_0}\frac{\partial E}{\partial t} - \operatorname{rot} H = 0, \quad \frac{\mu}{c_0}\frac{\partial H}{\partial t} + \operatorname{rot} E = 0, \tag{9}$$

където $E = (E_1, E_2, E_3)$, $H = (H_1, H_2, H_3)$, $E_k = E_k(x, y, z, t)$, $H_k = H_k(x, y, z, t)$.

24.10. Напишете системата (9) в матричен вид и намерете конуса на характеристичните нормали за нея. Има ли кратни корени характеристичното уравнение?

Упътване. Системата (9), записана по друг начин, е

$$\frac{\mu}{c_0}\frac{\partial H_1}{\partial t}+\frac{\partial E_3}{\partial y}-\frac{\partial E_2}{\partial z}=0,\quad \frac{\varepsilon}{c_0}\frac{\partial E_1}{\partial t}-\frac{\partial H_3}{\partial y}+\frac{\partial H_2}{\partial z}=0,$$

$$\frac{\mu}{c_0}\frac{\partial H_2}{\partial t}+\frac{\partial E_1}{\partial z}-\frac{\partial E_3}{\partial x}=0,\quad \frac{\varepsilon}{c_0}\frac{\partial E_2}{\partial t}-\frac{\partial H_1}{\partial z}+\frac{\partial H_3}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\mu}{c_0}\frac{\partial H_3}{\partial t}+\frac{\partial E_2}{\partial x}-\frac{\partial E_1}{\partial y}=0,\quad \frac{\varepsilon}{c_0}\frac{\partial E_3}{\partial t}-\frac{\partial H_2}{\partial x}+\frac{\partial H_3}{\partial y}=0.$$

Напишете съответната детерминанта от шести ред спрямо (τ,ξ,η,ζ), която дава конуса на характеристичните нормали. За пресмятането ѝ вижте упътването към зад. 22.10. Преработете я във вида

$$\det\left[\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c_0}\tau & 0 & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c_0}\tau & 0\\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c_0}\tau\end{pmatrix}^2+\begin{pmatrix}0 & -\zeta & \eta\\ \zeta & 0 & -\xi\\ -\eta & \xi & 0\end{pmatrix}^2\right]=0,$$

откъдето получете $\tau_{1,2}=0$, $\tau_{3,4}=\frac{c_0}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$, $\tau_{5,6}=-\tau_{3,4}$.

В задачите дотук предварително беше посочена областта на единственост. Естествена задача е да се определи област на единственост G при зададена област на началните условия G_0, лежаща в равнината $t=0$ (вж. зад. 24.2). Тоест търсим "шапка" Г над областта G_0 такава, че върху Г квадратичната форма $([\tau A+\xi B+\eta C]u,u)$ да е неотрицателна. Нека за простота приемем, че коефициентите A,B и C са постоянни. Нека векторът (ξ,η) е ненулев. Да означим с $\tau_0(\xi,\eta)$ най-големия от корените $\tau_k(\xi,\eta)$ на характеристичното уравнение, т.е. $\tau_0(\xi,\eta)=\max\limits_{1\le k\le n}\tau_k(\xi,\eta)$. Тогава върху всяка равнина от вида

$$\tau(t-t_0)+\xi(x-x_0)+\eta(y-y_0)=0$$

при $\tau\ge\tau_0(\xi,\eta)$ квадратичната форма е неотрицателна (вж. [9], стр. 162), т.е. тази равнина може да служи за част от Г. С помощта на няколко такива равнини определяме област на единственост G, която е "под" Г. Може да се получат и по-сложни области на единственост (вж. зад. 24.13).

24.11. Опишете област на единственост за системата

$$(10)\qquad \begin{aligned} &3u_{1t} + u_{2t} + 6u_{3x} = 0,\\ &3u_{2t} + u_{1t} + 9u_{3y} = 0,\\ &3u_{3t} + 6u_{1x} + 9u_{2y} = 0, \end{aligned}$$

ако началните данни са зададени в областта $G_0 = \{t = 0, y > 3|x|\}$.

Р е ш е н и е. Системата (10) в матричен запис има вида

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6\\ 0 & 0 & 0\\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\right.$$

$$\left.+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 9\\ 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}\right]\begin{pmatrix} u_1\\ u_2\\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}.$$

Понеже коефициентът пред $\partial/\partial t$ е положително определена матрица (според критерия на Силвестър) и всички матрици са симетрични, системата (10) е симетрична t-хиперболична в смисъл на Фридрихс. Да пресметнем корените на характеристичното уравнение. От

$$\det\begin{vmatrix} 3\tau & \tau & 6\xi\\ \tau & 3\tau & 9\eta\\ 6\xi & 9\eta & 3\tau \end{vmatrix} = 0$$

получаваме : $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = \sqrt{\dfrac{81\eta^2 + 36\xi^2 - 36\xi\eta}{8}}$, $\tau_3 = -\tau_2$. Равнините през правата $y = 3x$ са от вида $\tau t + 3x - y = 0$, т.е. за нормалния вектор имаме $\xi = 3$, $\eta = -1$. Съответният корен $\tau_0(\xi,\eta)$ очевидно ще бъде $\tau_0(\xi,\eta) \equiv \tau_2(\xi,\eta)$, т.е. $\tau_0(3,-1) = \sqrt{\dfrac{513}{8}}$. За другата равнина, която минава през правата $y = -3x$, имаме

$$\sqrt{\frac{297}{8}}t - 3x - y = 0.$$

Следователно една област на единственост ще бъде

$$\{t > 0, \sqrt{\frac{513}{8}}t + 3x - y \le 0,\ \sqrt{\frac{297}{8}}t - 3x - y \le 0.$$

24.12. Опишете област на единственост за системата

$$3u_{1t} + 2u_{2t} + 12u_{3x} = 0,$$
$$3u_{2t} + 2u_{1t} + 3u_{3y} = 0,$$
$$3u_{3t} + 12u_{1x} + 3u_{2y} = 0,$$

ако началните условия са зададени в $xy > 0$.

24.13. За системата

$$u_t + u_x = 0,$$
$$v_t + v_y = 0,$$
$$w_t + w_x + w_y = 0$$

опишете области на единственост, ако началните условия са зададени в следните области:

а) $x > 0,\ y > 0,\ x + y < 1$; б) $x > 0,\ y < 0,\ x - y > 1$;

в) $x < 0,\ y > 0,\ x - y < 1$; г) $x > 0,\ y > 0,\ x^2 + y^2 < 1$;

д) $x < 0,\ y > 0,\ x^2 + y^2 < 1$; е) $x > 0,\ y < 0,\ x^2 + y^2 < 1$.

Упътване. г) Корените на характеристичното уравнение са: $\tau_1 = -\xi$, $\tau_2 = -\eta$, $\tau_3 = -\xi - \eta$. Понеже върху частта от окръжността имаме $\xi > 0$, $\eta > 0$, то е ясно, че $\tau_0 = -\xi$ за $0 < x < y$, $\tau_0 = -\eta$ за $0 < y < x$. Намерете, че сътвената равнина през точката $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ при $\pi/4 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ще бъде

$$(x - t)\cos\alpha + y\sin\alpha - 1 = 0, \quad \pi/4 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Покажете, че обвивката на тази фамилия от равнини е частта от цилиндър

$$(x - t)^2 + y^2 = 1, \quad 0 < x < y.$$

Върху нея характеристичната форма също ще бъде неотрицателна (защо?). Покажете, че за $0 < y < x$ съответната повърхнина ще бъде $x^2 + (y - t)^2 = 1$.

Отг. а) $t \leq x,\ t \leq y,\ t - x - y + 1 \geq 0$;

б) $t \leq x,\ y \leq 0,\ t + x - y \leq 1$;

в) $x \leq 0,\ t \leq y,\ t - x + y \leq 1$;

г) $t \leq x$, $t \leq y$, $(x-t)^2 + y^2 \leq 1$, $x^2 + (y-t)^2 \leq 1$;

д) $x \leq 0$, $t \leq y$, $(x-t)^2 + y^2 \leq 1$;

е) $t \leq x$, $y \leq 0$, $x^2 + (y-t)^2 \leq 1$.

24.14. За системата (9) намерете характеристичния конус K в четиримерното пространство от точки (x, y, z, t), с връх в точка $P_0(x_0, y_0, z_0, t_0)$ и основа върху равнината $t = 0$. Докажете теорема за единственост в K за системата (9) с начални данни върху $K \cap \{t = 0\}$. За целта използвайте общата схема от зад. 24.2, или че е в сила тъждеството

$$(E, \text{rot } H) - (H, \text{rot } E) = \text{div}[H \times E].$$

Получете закона на запазване на енергията за уравненията на Максуел (вж. зад. 24.9).

Упътване. Вж. корена $\tau_3(\xi, \eta)$ от задача 24.10.

§ 25. Смесена задача за симетрични системи. Дисипативни гранични условия

Ще разгледаме смесената задача в равнината: търси се решение на симетричната t-хиперболична система

$$A\frac{\partial u}{\partial t} + B\frac{\partial u}{\partial x} + Qu = f, \quad u = (u_1, u_2, \ldots, u_n), \tag{1}$$

в полуивицата $0 < x < l$, $t > 0$, при зададено начално условие

$$u(x, 0) = u_0(x) \tag{2}$$

и гранични условия

$$u(0, t) \in N_1(t); \quad u(l, t) \in N_2(t), t > 0. \tag{3}$$

Тук $N_1(t)$ и $N_2(t)$ са линейни подпространства на $\mathbf{R}^n$, които могат да се менят от точка в точка. Например пространството $N_1(t_0)$ може да се зададе с връзките

$$N_1(t_0) = \{u \in \mathbf{R}^n : (u, m_j) = 0, \quad j = 1, \ldots, p\},$$

което очевидно е $(n-p)$-мерно, ако векторите m_j са линейно независими.

Ще казваме, че условията (3) са дисипативни, ако

$$-(u, B(0, t)u) \geq 0, \forall u \in N_1(t); \quad (u, B(l, t)u) \geq 0, \forall u \in N_2(t), t > 0.$$

Ползата от това определение става ясна от следващия резултат.

25.1. Докажете, че при дисипативни гранични условия всяко решение на задача (1) — (3) удовлетворява априорната оценка:

$$\|u\|_{L_2(0,l)} \le C(\|u(x,0)\|_{L_2(0,l)} + \max_{0<\lambda<t} \|\vec{f}(x,\lambda)\|_{L_2(0,l)}),$$

където константата C не зависи от u.

Упътване. Да означим с G_τ областта $G_\tau = \{0 < x < l, 0 < t < \tau\}$. За системата (1) интегралът на енергията (2) от § 24 дава

$$\int\limits_{\partial G_\tau} ([\tau A + \xi B]u, u)ds = \int\int\limits_{G_\tau} [(Du, u) + 2(f, u)]dx\, dt,$$

където $D = A_t + B_x - Q - Q^*$. За интеграла вляво получаваме

$$\int\limits_0^l (Au,u)|_{t=\tau} - \int\limits_0^l (Au,u)|_{t=0} - \int\limits_0^\tau (Bu,u)|_{x=0} + \int\limits_0^\tau (Bu,u)|_{x=l} dt$$

$$\ge \int\limits_0^l (Au,u)|_{t=\tau} dx - \int\limits_0^l (Au,u)|_{t=0} dx$$

от условието за дисипативност. По-нататък вижте зад. 24.2.

25.2. Нека матрицата B има вида

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Определете кои гранични условия са дисипативни.

Отг. $u_1(0,t) = \sigma(t)u_2(0,t)$, $u_2(l,t) = \lambda(t)u_1(l,t)$, където

$|\sigma(t)| \le 1$ и $|\lambda(t)| \le 1$ за $t \ge 0$.

Забележка 1. Задача 25.1 дава теорема за единственост при дисипативни гранични условия.

Забележка 2. Задача 25.2 показва, че граничните пространствта $N_1(t)$ и $N_2(t)$ не са еднозначно определени от условието за дисипативност.

25.3. За системата

$$u_t - v_x = 0,$$
$$v_t - u_x = 0$$

определете кои от следните гранични условия са дисипативни:

а) $u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0$; б) $u(0,t) = 0,\ v(l,t) = 0$;

в) $u(0,t) = v(0,t),\ v(l,t) = -2u(l,t)$;

г) $u(0,t) + v(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0$;

д) $u(0,t) = v(0,t)\quad,\ u(l,t) = 3v(l,t)$.

Отг. Условията а), б) и в) са дисипативни, а г) и д) не са.

Да разгледаме случая, когато системата (1) е в каноничен вид (вж. (6) от § 22):

$$(4)\qquad Ev_t + Kv_x + Qv$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} v_t + \begin{pmatrix} k_1(x,t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k_n(x,t) \end{pmatrix} v_x + Qv = f,$$

спрямо римановите инварианти v_i, $i = 1,\dots,n$. За простота предполагаме, че $k_i(x,t) > 0$ за $i = 1,\dots,n_0$ и $k_i(x,t) < 0$ за $i = n_0 + 1,\dots,n$.

25.4. Напишете как изглеждат условията за дисипативност в този случай.

Отг.

$$(5)\qquad \begin{aligned} -\sum_{k=1}^{n_0} |k_i|v_i^2 + \sum_{i=n_0+1}^{n} |k_i|v_i^2 \geq 0,\ v \in N_1(t), \\ \sum_{i=1}^{n_0} |k_i|v_i^2 - \sum_{i=n_0+1}^{n} |k_i|v_i^2 \geq 0,\ v \in N_2(t). \end{aligned}$$

25.5. Разгледайте граничните условия за системата (4):

$$(6)\qquad v_i(0,t) = \sum_{k=n_0+1}^{n} \alpha_{ik} v_k(0,t),\ i = 1,\dots,n_0;$$

$$v_i(l,t) = \sum_{k=1}^{n_0} \alpha_{ik} v_k(l,t),\ i = n_0 + 1,\dots,n.$$

Докажете теорема за единственост за смесената задача (4), (2), (6).

Решение. Сменете функциите $v_i (i = 1, \dots, n)$ по формулите $\widetilde{v}_i = \mu_i v_i$ с гладки множители $\mu_i(x,t) > 0$. Получаваме системата

$$E\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial t} + K\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x} + Q_1\widetilde{v} = \widetilde{f}, \quad \widetilde{f} = (\mu_1 f_1, \dots, \mu_n f_n).$$

Граничните условия (6) приемат вида

$$\widetilde{v}_i(0,t) = \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{\mu_i}{\mu_k}\alpha_{ik}\widetilde{v}_k(0,t), \ i = 1, \dots, n_0;$$

$$(6') \qquad \widetilde{v}_i(l,t) = \sum_{k=1}^{n_0} \frac{\mu_i}{\mu_k}\alpha_{ik}\widetilde{v}_k(l,t), \ i = n_0 + 1, \dots, n.$$

За лявата граница например след заместване в (5) получаваме неравенството

$$-\sum_{i=1}^{n_0} |k_i| \left[\sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{\mu_i}{\mu_k}\alpha_{ik}\widetilde{v}_k\right]^2 + \sum_{i=n_0+1}^{n} |k_i|\widetilde{v}_i \geq 0,$$

което сигурно ще е изпълнено, ако при фиксирани коефициенти μ_k, $k = n_0 + 1, \dots, n$, изберем достатъчно малки коефициенти μ_i, $i = 1, \dots, n$, върху $x = 0$. Аналогично постъпваме за дясната граница. Като изберем функциите μ_i при $x = 0$ и $x = l$ и ги продължим гладко за всяко $x \in [0, l]$, получаваме, че функциите $\widetilde{v}$ удовлетворяват дисипативни гранични условия. Оттук веднага следва априорната оценка и теорема за единственост. Уточнете детайлите!

25.6. За системата

$$u_t + 2u_x + v = 0,$$
$$v_t - v_x + u = 0$$

напишете интеграл на енергията и проверете дисипативни ли са условията

$$u(0,t) = 3v(0,t), \quad u(1,t) + 7v(1,t) = 0.$$

Могат ли да бъдат направени дисипативни?

Отг. Не са дисипативни. Могат да бъдат направени такива чрез смяната $\widetilde{u} = \mu_1 u$, $\widetilde{v} = \mu_2 v$. Можем да изберем $\mu_1 = e^{\alpha\left(x-\frac{1}{2}\right)}$, $\mu_2 = e^{-\alpha\left(x-\frac{1}{2}\right)}$ за $\alpha \geq \frac{1}{2}\ln 18$.

25.7. При какви стойности на константите α и β граничните условия

$$u = \alpha v \text{ при } x = -1, \quad v = \beta u \text{ при } x = 1$$

ще бъдат дисипативни за системата

$$\begin{aligned} u_t + au_x &= 0, \\ v_t - bv_x &= 0 \end{aligned} \quad (a > 0, b > 0)?$$

Оценете интеграла на енергията $I(t)$, ако началните условия са:

$$u(x,0) = 0, v(x,0) = x^2 - 1.$$

Отг. $\beta^2 \leq \frac{a}{b}$, $\alpha^2 \leq \frac{b}{a}$, $I(t) \leq \frac{16}{15}$.

25.8. За системата

$$\begin{aligned} u_t + 2u_x &= 0, \\ v_t - v_x &= 0 \end{aligned}$$

с гранични условия $u(-1,t) = 2v(-1,t)$, $v(1,t) = u(1,t)$ намерете подходящ интеграл на енергията и получете оценка на

$$\int_{-1}^{1} [u^2(x,t) + v^2(x,t)]dx \text{ чрез } \int_{-1}^{1} [u^2(x,0) + v^2(x,0)]dx.$$

Упътване. Условията не са дисипативни. Направете например смяната $\widetilde{u} = e^x u$, $\widetilde{v} = e^{-x} v$. За функциите $\widetilde{u}$ и $\widetilde{v}$ дадените гранични условия водят до $\widetilde{u}(-1,t) = 2e^{-2}\widetilde{v}(-1,t)$, $\widetilde{v}(1,t) = e^{-2}\widetilde{u}(1,t)$. След смяната системата приема вида

$$\widetilde{u}_t + 2\widetilde{u}_x - 2\widetilde{u} = 0, \quad \widetilde{v}_t - \widetilde{v}_x - \widetilde{v} = 0,$$

т. е. в съответствие със зад. 25.5 матриците от коефициентите пред производните не се променят. Лесно се вижда, че условията за $\widetilde{u}$ и $\widetilde{v}$ са вече дисипативни. Използвайки интеграла на енергията, получете оттук, че

$$\int_{-1}^{1}[\widetilde{u}^2(x,t)+\widetilde{v}^2(x,t)]dx \le e^{4t}\int_{-1}^{1}[\widetilde{u}^2(x,0)+\widetilde{v}^2(x,0)]dx.$$

Замествайки $\widetilde{u}$ и $\widetilde{v}$ с равните им и оценявайки дясната страна отгоре, а лявата отдолу, получете оценката

$$\int_{-1}^{1}[u^2(x,t)+v^2(x,t)]dx \le e^{4t+4}\int_{-1}^{1}[u^2(x,0)+v^2(x,0)]dx.$$

За задачи 25.9 – 25.12 направете същото, както в зад. 25.8.

25.9. $u_t + u_x = 0,\ v_t - 3v_x = 0,$

$$u = v \text{ при } x = -1,\ 3v = u \text{ при } x = 1.$$

Отг. Граничните условия са дисипативни. Оценката е $I(t) \le I(0)$.

25.10. $u_t + 8u_x = 0, v_t - v_x = 0,$

$$u = v \text{ при } x = -1;\ v = 9u \text{ при } x = 1.$$

Отг. Смяната може да бъде: $\widetilde{u} = e^x u,\ \widetilde{v} = e^{-x}v.$

Оценка: $I(t) \le I(0)e^{16t}$.

25.11. $u_t + u_x = 0,\ v_t - 3v_x = 0,$

$$u = 2v \text{ при } x = -1,\ u = v \text{ при } x = 1.$$

25.12. $u_t + 2u_x = 0,\ v_t - 7v_x = 0,$

$$u = 4v \text{ при } x = -1,\ u = v \text{ при } x = 1.$$

25.13. Приведете системата

$$u_t + 2u_x + v = 0,$$
$$v_t - v_x + u = 0$$

с гранични условия $u(0,t) = 5v(0,t)$, $v(1,t) = 3u(1,t)$ до дисипативен вид и оценете интеграла на енергията.

Отг. $\widetilde{u}_1 = e^{3(x-\frac{1}{2})}u,\ \widetilde{v} = e^{-3(x-\frac{1}{2})}v,\ I(t) \le e^{25t+6}I(0).$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Аргирова**, Т., Т. **Генчев**. Сборник от задачи по теория на аналитичните функции. С., 1968.

2. **Берс**, Л., Ф. **Джон**, М. **Шехтер**. Уравнения с частными производными. М., 1965.

3. **Брело**, М. Основы классической теории потенциала. М., 1964.

4. **Будак**, Б., А. **Самарский**, А. **Тихонов**. Сборник задач по уравнениям математической физики. М., 1972.

5. **Владимиров**, В. Уравнения математической физики. М., 1967.

6. **Владимиров**, В. Обобщенные функции в математической физике. М., 1976.

7. **Владимиров**, В. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. М., 1974.

8. **Генчев**, Т. Частни диференциални уравнения, II изд. С., 1976.

8а. **Генчев**, Т. Разпределения и трансформация на Фурие. С., 1983.

9. **Годунов**, С. Уравнения математической физики. II изд. М., 1979.

10. **Годунов**, С., Е. **Золоторева**. Сборник задач по уравнениям математической физики. Новосибирск, 1974.

11. **Денчев**, Р. Лекции по диференциални и интегрални уравнения (записки), С.

12. **Князев**, П. Интегральные преобразования. М., 1969.

13. **Колмогоров**, А., С. **Фомин**. Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1972.

14. **Краснов**, М. и др. Интегральные уравнения. М., 1976.

15. **Курант**, Р. Уравнения с частными производными. М., 1964.

16. **Олейник**, О. Лекции об уравнениях с частными производными. Ч. I. М.

17. **Смирнов**, М. Задачи по уравнениям математической физики. М., 1968.

18. **Тиман**, А., В. **Трофимов**. Введения в теорию гармонических функций. М., 1968.

19. Тихонов, А., А. Самарский. Уравнения математической физики. М., 1972.

20. Шварц, Л. Математические методы для физических наук. М., 1965.

21. Шилов, Г. Математический анализ (второй специальный курс). М, 1965.

21a Шилов, Г. Е. Математический анализ (специальный курс). М., 1961.

22. Choquet-Bruhat, Y. Distributions. Théorie et problèmes. Paris, 1973.

23. Miranda, C. Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico. Berlin, 1955.

24. Kellogg, O. Foundations of potential theory. Berlin, 1929.

25. Protter, M., H. Weinberger. Maximum principles in differential equations. Prentice-Hall Inc., 1967.

26. Radó, T. On the problem of Plateau. Subharmonic functions. Berlin, 1971.

27. Vo-Khak, Khoan. Distributions Analyse de Fourier. Opérateurs aux dérivées partielles, I. II. Paris, 1972.

28. Weinberger. Remark on the preceding paper of Serrin. — Arch. Rat. Mech. Anal., 43 (4), 1971.

29. Carslaw, H. S., J. C. Jaeger. Operational methods in applied mathematics. Oxford, 1941.

30. Смирнов, В. Курс высшей математики. Том IV, часть вторая. М., 1981.

31. Толстов, Г. Ряды Фурье. М., 1960.

32. Хейман, У., П. Кеннеди. Субгармонические функции. М., 1980.

СЪДЪРЖАНИЕ

Глава V

Елиптични и параболични уравнения

Глава VI

Хиперболични уравнения и системи

Петър Попиванов, Недю Попиванов
Йордан Йорданов

РЪКОВОДСТВО ПО ЧАСТНИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ

Българска
Трето стереотипно издание

Рецензент Веселин Петков
Редактор Тодор Генчев
Художник на корицата Пенчо Мутафчиев
Технически редактор Емилия Дончева

Издателски индекс 592
Подписана за печат май 1991 г.
Формат 59 × 84/16
Печатни коли 22 Изд. коли 17,5

Университетско издателство "Св. Климент Охридски"