ПИСМЕН ИЗПИТ ПО ДИФЕРЕНЦИАЛНА ГЕОМЕТРИЯ, сп. МАТЕМАТИКА – 2 КУРС

Задача 1. Дадена е кривата $c:\begin{cases} x^1 = \cos\alpha\cos q \\ x^2 = \cos\alpha\sin q \\ x^3 = q\sin\alpha \end{cases}$, където $q > 0$ и $\alpha = const \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Нека $\bar{c}$ е геометричното място на прободната точка на тангентата на c в произволна нейна точка с равнината Ox^1x^2. Докажете, че еволютата на $\bar{c}$ съвпада с ортогоналната проекция на на кривата c върху равнината Ox^1x^2.

Задача 2. От всяка точка M на трикратно гладка правилна повърхнина S в положителна посока на главната ú нормала е намесена отсечка $M\overline{M}$ с постоянна дължина a. Когато точката M описва повърхнината S, точката $\overline{M}$ описва повърхнина $\overline{S}$. Докажете, че:

а) Допирателните равнини в съответните точки M и $\overline{M}$ на повърхнините S и $\overline{S}$ са успоредни.

б) На линиите на кривината върху S съответстват линии на кривината върху $\overline{S}$.

в) $\overline{S}$ е развиваема повърхнина тогава и само тогава, когато S е развиваема повърхнина.

Задача 3. Нека M е диференцируемото многообразие $\mathbb{R}^3$, снабдено със стандартната структура, с глобални координати x^1, x^2, x^3 и $\overline{\nabla}$ е каноничната свързаност върху него. С $X \wedge Y$ означаваме векторното произведение в $\mathbb{R}^3$, т.е. ако $X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, то $X \wedge Y = \sum_{i=1}^{3}\left(X^{i+1}Y^{i+2} - X^{i+2}Y^{i+1}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}$, където индексите се редуцират по модул 3. Изображенията $\widetilde{\nabla}, \nabla : \chi(M)\times\chi(M) \to \chi(M)$ се дефинират с: $\widetilde{\nabla}_X Y = \overline{\nabla}_X Y + (X \wedge Y)\wedge Y$ и $\nabla_X Y = \overline{\nabla}_X Y + (X \wedge Y)\wedge\frac{\partial}{\partial x^1}$.

а) Да се докаже, че $\widetilde{\nabla}$ не е линейна свързаност върху M.

б) Да се докаже, че ∇ е линейна свързаност и да се намерят геодезичните ú линии.

в) Да се намери векторно поле $Z(t)$, паралелно по линията $c : t \to (t,0,t)$ такова, че $Z(0) = -\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_0 + \frac{\partial}{\partial x^2}\Big|_0$.

Задача 4. Формулирайте и докажете теоремата на Херглоц.

Задача 5. Формулирайте и докажете теоремата Шур.