Основни определения

- Скаларно поле U. • Векторно поле $F = (P, Q, R)$.
- Операторът ∇ (набла): $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$.
- Градиент на скаларно поле U. $\mathbf{grad}\, U$ е векторно поле. $\mathbf{grad}\, U = \nabla U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right)$
- Дивергенция на векторно поле F. $\mathbf{div}\, F$ е скаларно поле. $\mathbf{div}\, F = \nabla \,.\, F = P'_x + Q'_y + R'_z$
- Ротор на векторно поле F. $\mathbf{rot}\, F$ е векторно поле.

$$\mathbf{rot}\, F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (R'_y - Q'_z)\,\mathbf{i} + (P'_z - R'_x)\,\mathbf{j} + (Q'_x - P'_y)\,\mathbf{k}$$

- Лапласиан $\Delta = \nabla \,.\, \nabla$. $\Delta U = U''_{xx} + U''_{yy} + U''_{zz}$

Повторни операции –тъждества с две ∇

$\nabla \times (\nabla U) = 0 \longleftrightarrow \mathbf{rot}(\mathbf{grad}\, U) = 0$
$\nabla \,.\, (\nabla \times F) = 0 \longleftrightarrow \mathbf{div}(\mathbf{rot}\, F) = 0$
$\Delta U = \nabla \,.\, (\nabla U) = \nabla^2 U \longleftrightarrow \Delta U = \mathbf{div}(\mathbf{grad}\, U)$
$\nabla \times \nabla \times F = \nabla(\nabla \,.\, F) = \nabla^2 F \longleftrightarrow \mathbf{rot}(\mathbf{rot}\, F) = \mathbf{grad}(\mathbf{div}\, F) - \Delta F$

Диференциране на произведение на полета

$\nabla \,.\, (UF) = F \,.\, \nabla U + U\, \nabla \,.\, F \longleftrightarrow \mathbf{div}(UF) = F\, \mathbf{grad}\, U + U\, \mathbf{grad}\, F$
$\nabla \times (UF) = \nabla U \times F + U\, \nabla \times F \longleftrightarrow \mathbf{rot}(UF) = \mathbf{grad}\, U \times F + U\, \mathbf{rot}\, F$
$\nabla(F \,.\, G) = (F \,.\, \nabla)G + (G \,.\, \nabla)F + F \times (\nabla \times G) + G \times (\nabla \times F) \longleftrightarrow \mathbf{grad}(F.G) = (F \,.\, \nabla)G + (G \,.\, \nabla)F + F \times (\mathbf{rot}\, G) + G \times (\mathbf{rot}\, F)$

Формула на Грин

$$\oint_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D (Q'_x - P'_y) dx dy$$

Формула на Стокс-Келвин

$$\oint_{\partial \Pi} P dx + Q dy + R dz = \iint_{\Pi} (R'_y - Q'_z) dy dz + (P'_z - R'_x) dz dx + (Q'_x - P'_y) dx dy$$

$$\int_{\partial \Pi} F \,.\, t dl = \iint_{\Pi} (R'_y - Q'_z) \cos\alpha + (P'_z - R'_x) \cos\beta + (Q'_x - P'_y) \cos\gamma dS$$

$$\int_{\partial \Pi} F \,.\, t dl = \iint_{\Pi} \mathbf{rot}\, F \,.\, n dS$$

Циркулацията на векторното поле F по затворения контур $\partial\Pi$. Изразява работата на F по $\partial\Pi$.	$=$	Потока на ротора на векторно поле F през повърхнината Π.

• Ако $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$, то $d\omega = (R'_y - Q'_z)dydz + (P'_z - R'_x)dzdx + (Q'_x - P'_y)dxdy$.

Формулата на Стокс се записва така: $\int\limits_{\partial\Pi} \omega = \iint\limits_{\Pi} d\omega$.

• **Определение.** Поле $F = (P, Q, R)$ е потенциално, ако съществува скаларно поле U, за което

$$\mathbf{grad}\, U = \left(U'_x, U'_y, U'_z\right) = (P, Q, R) = F.$$

• **Теорема.** Поле F е потенциално $\Leftrightarrow$ За всеки затворен контур Γ е в сила $\oint\limits_{\partial\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = 0$.

В такъв случай потенциала U може да бъде пресметнат с формулата $U(M) = \int\limits_{M_0}^{M} Pdx + Qdy + Rdz$

(или с техниката от ДУ).

• **Определение.** Поле $F = (P, Q, R)$ е безвихрово, ако $\mathbf{rot}\, F = 0$.

Потенциално векторно поле F, т.е $\exists U$: $\mathbf{grad}\, U = \left(U'_x, U'_y, U'_z\right) = (P, Q, R) = F$.	$\Rightarrow$	Безвихрово поле т.е. $\mathbf{rot}\, F = 0$
Потенциално векторно поле F, т.е $\exists U$: $\mathbf{grad}\, U = \left(U'_x, U'_y, U'_z\right) = (P, Q, R) = F$.	$\Leftarrow$	Безвихрово поле $+$ едносвързана област

Формула на Гаус-Остроградски

$$\iint\limits_{\partial G} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint\limits_{G} \left(P'_x + Q'_y + R'_z\right) dxdydz$$

$$\iint\limits_{\partial G} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS = \iiint\limits_{G} \left(P'_x + Q'_y + R'_z\right) dxdydz$$

$$\iint\limits_{\partial G} F\,.\,n\, dS = \iiint\limits_{G} \mathbf{div}\, F dxdydz$$

Потокът на векторното поле F през повърхнината ∂G.	$=$	Интеграл върху G от дивергенцията на F

• **Определение.** Поле $F = (P, Q, R)$ е соленоидално, ако за всяко тяло G с частично гладка граница ∂G е в сила $\iint\limits_{\partial G} F\,.\,n\, dS = 0$.

Векторно поле F е соленоидално	$\Rightarrow$	$\mathbf{div}\, F = 0$

• **Определение.** Поле A е векторен потенциал на $F = (P, Q, R)$, ако $\mathbf{rot}\, A = F$.

• **Теорема.**(Хелмхолц) Всяко векторно поле е сума на безвихрово поле и соленоидално поле.