

Задачи за контролна работа №3

Задача 1. Да се намери порядъка на точност на формулата за числено диференциране:

$$f''(a) \approx \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}.$$

Задача 2. Ако $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$, то колко стойности на подинтегралната функция е достатъчно да се пресметнат, така че съставната квадратурна формула на: а) трапеците; б) правоъгълниците; в) Симпсън, да гарантира точност 10^{-4} ?

Задача 3. Да се пресметне приближено интегралът $I = \int_0^2 \frac{\sin(\pi x)}{x+2} dx$ посредством съставната квадратурна формула на Симпсън с 5 възела и да се оцени грешката.

Задача 4. Да се намерят коефициентите A и B така, че квадратурната формула:

$$\int_0^h f(x) dx \approx A(f(0) + f(h)) + B(f'(0) + f'(h))$$

да има максимална алгебрична степен на точност (АСТ). Колко е тази АСТ?

Задача 5. Определете параметрите A , B , x_1 и x_2 така, че квадратурната формула:

а) $\int_{-1}^1 f(x) dx \approx A f(x_1) + B f(x_2)$; б) $\int_{-1}^1 x^2 f(x) dx \approx A f(x_1) + B f(x_2)$; в) $\int_0^1 x^a f(x) dx \approx A f(0) + B f(x_2)$

да има максимална алгебрична степен на точност.

Задача 6. Да се докаже, че коефициентите $\{A_k\}$ в гаусовата квадратурна формула

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$$
 са положителни.

Задача 7. Използвайки съставната квадратурна формула на трапеците да се намери

приближено $S_n = \sum_{k=1}^n \sqrt[k]{k}$ и да се оцени грешката.

Задача 7. Да се докаже, че уравнението $x^5 - 100x^3 + 20x + 1 = 0$ има два положителни корена и намерете интервали, които ги съдържат. Предложете сходящ итерационен метод за намирането на по-големия от тях. Колко итерации по този метод са достатъчни за да осигурят точност 10^{-6} ?

Задача 8. За $k=2,3,4,\dots$ да се намери броя на реалните корени на уравнението $x^k - kx + 3 = 0$. За всяко $k \geq 4$ да се докаже, че итерационния процес $x_0 = 1$, $x_n = \sqrt[k]{kx_{n-1} - 3}$; е сходящ към най-големия корен на това уравнение.

Задача 9. Да се докаже, че уравнението $e^x - x - 3 = 0$ има един положителен корен. Да се избере подходящо начално приближение x_0 и по метода на Нютон да се намери x_1 .

Задача 10. Нека $\varphi(x): [a,b] \rightarrow [a,b]$ е свиващо изображение с константа q . Ако $\eta \in [a,b]$ е неподвижна точка за $\varphi(x)$, $x_0 \in [a,b]$ и $x_n = \varphi(x_{n-1})$, то да се докаже оценката: $|\eta - x_n| \leq \frac{q^n}{1-q} |x_0 - x_{n-1}|$.

Задача 11. Нека $f(x)$ е непрекъснато диференцируема в $[a,b]$, като $f'(x)$ има постоянен знак и $f(a)f(b) < 0$. Тогавя, ако η е единственото решение на $f(x) = 0$ в $[a,b]$, а $x_n \in [a,b]$ е приближение на η , то да се докаже оценката: $|\eta - x_n| \leq \frac{|f(x_n)|}{m}$, където $m > 0$; $|f'(x)| \geq m \forall x \in [a,b]$.