

Задачи за контролна работа №2

Задача 1. Да се докаже, че

а) За $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $\mu(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n |x_k|/k$ е норма над $\mathbf{R}^n$.

б) Ако $x_0, \dots, x_n$ са различни числа, то $\mu(p) = \max_{i=0, \dots, n} |p(x_i)|$ е норма над π_n .

в) Ако $\lambda(f)$ и $\mu(f)$ са норми над X , то и $\nu(f) = \sqrt{\lambda^2(f) + \mu^2(f)}$ също е норма над X .

Задача 2. Да се намери ПНДРПр. от първа степен за функциите:

$$f_1(x) = \ln(1+x); \quad f_2(x) = \left|x - \frac{1}{3}\right|; \quad f_3(x) = e^x, \quad x \in [0,1].$$

Задача 3. Ако $E_n(f)$ е грешката при най-добро равномерно приближение на $f(x)$ с полиноми от π_n в интервала $[a,b]$, то докажете свойствата:

а) $E_n(\lambda f) = |\lambda| E_n(f)$;

б) $E_n(f+g) \leq E_n(f) + E_n(g)$;

в) $E_n(f+g) = E_n(f)$, ако $g \in \pi_n$;

г) $E_n(f) \leq \|f\|_{C[a,b]}$.

Задача 4. Да се намери ПНДРПр. от втора степен за $f(x) = x^4$ в $[-1,1]$.

Задача 5. Да се намери полиномът на Бернщайн $B_4(f;x)$ за функцията:

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)_+ \quad \text{и да се докаже, че } B_4(f;x) \geq f(x), \quad \forall x \in [0,1].$$

Задача 6. Да се намери ПНДСрКвПр. от първа степен за функциите по-долу, при дадените скалярни произведения:

$$f_1(x) = \ln(x) \text{ и } f_2(x) = \sqrt{x} \text{ за } (h,g) = \int_0^1 h(x)g(x)dx; \quad f_2(x) \text{ за } (h,g) = \int_0^1 h(x)g(x) \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Задача 7. Покажете, че ако функцията $f(x)$ е четна (нечетна) в интервала $[-a,a]$, то полиномът на най-добро средноквадратично приближение от дадена степен за $f(x)$ на този интервал, с четно тегло $\mu(x)$, е също четен (нечетен).

Задача 8. Да се намери ПНДСрКвПр. за $f(x) = x^4$ в интервала $[-1,1]$ от степен 1,2,3 и 4 без тегло, т.е. при скалярно произведение $(g,h) = \int_{-1}^1 g(x)h(x)dx$.

Задача 9. Да се докаже, че полиномът на най-добро средноквадратично приближение от дадена степен е също и интерполационен.

Задача 10. По метода на най-малките квадрати намерете израз от предложения вид, които приближава данните:

$$p(x) = ax + b, \text{ за } \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline x & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline y & 1 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ \hline \end{array}; \quad p(x) = ax^2 + bx + c, \text{ за } \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline x & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline y & -4 & 15 & -9 & 10 & 7 & 6 \\ \hline \end{array};$$

$$p(x) = A2^{Mx}, \text{ за } \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline x & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline y & 1 & 2 & 4 & 8 & 32 \\ \hline \end{array}; \quad p(x) = a\cos(x) + b\sin(x), \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline x & -3\pi/4 & -\pi/2 & -\pi/4 & \pi/4 & \pi/2 & 3\pi/4 \\ \hline y & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}.$$