Домашна работа No 2

Задача 1. Напишете интерполационната формула на Лагранж с възли, съвпадащи с нулите на полинома на Чебишов от втори род

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

който е алгебричен полином от n-та степен.

Задача 2. Да се докаже, че

$$\min_{-1\le x_n<\cdots<x_0\le 1}\left\{\max_{x\in[-1,1]}|P(x)|\colon P\in\pi_n, P(x_k)=(-1)^k\right\}=1$$

и този минимум се достига само за $P=\pm T_n$.

Задача 3. Нека $\max_{x\in[a,b]}|f^{(k)}(x)|= M_k$ и $M_k\le A^k$ за $k=0,1,\ldots$, където A е константа. Да се докаже, че

$$\max_{x\in[a,b]}|L_n(f;x)-f(x)|\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

при произволна таблица $\{x_{kn}\}_{k=0,n=0}^{n,\ \infty}$, $a\le x_{k0}\le\cdots\le x_{kn}\le b$ от интерполационни възли.

Задача 4. Нека $f\in C^2[0,1]$ и $|f''(x)|\le x^2$, $\forall x\in[0,1]$. Да означим с $p_\xi(x)$ линейната в $[0,\xi]$ и $[\xi,1]$ непрекъсната функция, която интерполира f в точките $0,\xi,1$. Да се определи ξ така, че $|f(x)-p_\xi(x)|$ да бъде по-малко от 0.02 в $[0,1]$.

Задача 5. Да се напише в Mathematica функция $ChebyshevInterpolation[f\_, n\_, x\_]$ със сложност $O(n)$, която построява интерполационния полином на Лагранж $L_n(f;x)$ с възли – нулите на полинома на Чебишов от първи род. Да се направи сравнение между грешката в интервала $[-1,1]$, която се получава по този начин и грешката, която се получава с полинома, построен с равноотдалечени възли в същия интервал.

Задача 6. Да се напише функция в Mathematica approxRunge[n_], която апроксимира функцията на Рунге

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$$

в интервала [-1,1] по следния начин. Интервалът се разделя на n равни подинтервала с възлите $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ и в i-тия от тези подинтервали $[x_{i-1}, x_i]$ функцията на Рунге се апроксимира с интерполационния полином от втора степен с възли $\{x_{i-1}, (x_{i-1}+x_i)/2, x_i\}$. Да се построят графиките на функцията на Рунге и апроксимиращата функция за $n = 1, n = 5, n = 10, n = 20, n = 200$, както и графиката на абсолютната грешка при тези приближения.

Упътване. Една възможност е да използвате вградената функция Piecewise – вижте я в документацията. Освен това, при решението използвайте функцията LagrangePolynomial, която написахме.