Домашна работа № 1

Задача 1. Да се намери интерполационния полином за таблицата:

x	0	1	2	3	4	5
y	1	3	5	7	9	71

Задача 2. Да се опрости изразът:

$$-\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3)+x(x-2)(x-3)-\frac{3}{2}x(x-1)(x-3)+\frac{2}{3}x(x-1)(x-2).$$

Задача 3. Ако $l_{kn}(x),\ k=0,1,\dots,n$, са базисните лагранжеви полиноми, съответни на възлите $x_0,\dots,x_n$, то да се докаже, че $\sum_{k=0}^{n} l_{kn}(x)=1$ за всяко x.

Задача 4. Нека $x_0<x_1<\dots<x_n$. Да се докаже формулата:

$$f[x_0,\dots,x_n]=\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^{n-1} & f(x_0) \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} & f(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} & f(x_n) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^{n} \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n} \end{vmatrix}.$$

Задача 5. Да се докаже, че:

$$\frac{1}{x+a}[x_0,\dots,x_n]=\frac{(-1)^n}{(x_0+a)(x_1+a)\dots(x_n+a)}.$$

Задача 6. Нека $x_0<x_1<\dots<x_n$ и $\omega(x)=(x-x_0)\dots(x-x_n)$. Да се докаже, че:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{x_k^i}{\omega'(x_k)}=\begin{cases}0, & i=0,\dots,n-1;\\ 1, & i=n.\end{cases}$$

Задача 7. За $n\geq 1$ да се докажат тъждествата:

а) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(x+k)^n=(-1)^n n!$; б) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{k}{k+1}=-\frac{1}{n+1}$.

Задача 8. Да се намери сумата: $S_n=\sum_{k=1}^{n}k^2(k-1)^2$.

Задача 9. Да се намери интерполационния полином на Нютон за функцията $f(x)$ в точките $x_0=-2,\ x_1=-1,\ x_2=0,\ x_3=1,\ x_4=2$ и да се оцени грешката в интервала $[-1,1]$, ако: а) $f(x)=\cos(\pi x/2)$, б) $f(x)=\sin(\pi x/2)$.

Задача 10. Нека $f(x)=\int_0^x \arctan(t)dt$. Да се намери полинома $P(x)$ за който $P(0)=f(0)$, $P'(0)=f'(0)$, $P''(0)=f''(0)$ и $P(1)=0.439\approx f(1)$. Да се оцени грешката на приближение в интервала $[0,1]$.

Задача 11. Да се намери полинома на Ермит, интерполиращ таблицата:

а)

x_i	-1	0	1
$f(x_i)$	1	0	1
$f'(x_i)$	0	*	4
$f''(x_i)$	*	*	16

, б)

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	0	6	18
$f'(x_i)$	*	8	17
$f''(x_i)$	*	*	12

.

Задача 12. Нека $\xi_k=\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right), k=1,\dots,n$ са нулите на полинома на Чебишов от първи род $T_n(x)=\cos(n\arccos(x))$. Да се намерят $\sum_{k=1}^{n}\xi_k$ и $\prod_{k=1}^{n}\xi_k$.

Задача 13. Да се докаже, че ако $x_0,x_1,\dots,x_n$, са $n+1$ произволни различни точки в интервала $[a,b]$, то интерполационния полином $L_n(e^x;x)$ клони равномерно към e^x в този интервал, при $n\to\infty$.

Задача 14. Да се докаже, че ако един полином $p(x)$ от π_n, получава в $n+1$ последователни цели стойности на x цели значения, то това е така за всяко цяло x. (Забележете, че не е необходимо коефициентите да са цели числа.)