

Домашна работа №1

Задача 1. Да се намери интерполационния полином за таблицата:

x	0	1	2	3	4	5
y	1	3	5	7	9	71

Задача 2. Да се опрости изразът:

$$-\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3) + x(x-2)(x-3) - \frac{3}{2}x(x-1)(x-3) + \frac{2}{3}x(x-1)(x-2).$$

Задача 3. Ако $l_{kn}(x)$, $k = 0, 1, \dots, n$, са базисните лагранжеви полиноми, съответни на възлите $x_0, \dots, x_n$, то да се докаже, че $\sum_{k=0}^n l_{kn}(x) = 1$ за всяко x .

Задача 4. Нека $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Да се докаже формулата:

$$f[x_0, \dots, x_n] = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^{n-1} & f(x_0) \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} & f(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} & f(x_n) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

Задача 5. Да се докаже, че:

$$\frac{1}{x+a}[x_0, \dots, x_n] = \frac{(-1)^n}{(x_0+a)(x_1+a)\dots(x_n+a)}.$$

Задача 6. Нека $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ и $\omega(x) = (x-x_0)\dots(x-x_n)$. Да се докаже, че:

$$\sum_{k=0}^n \frac{x_k^i}{\omega'(x_k)} = \begin{cases} 0, & i = 0, \dots, n-1; \\ 1, & i = n. \end{cases}$$

Задача 7. За $n \geq 1$ да се докажат тъждествата:

$$\text{а) } \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (x+k)^n = (-1)^n n!; \quad \text{б) } \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{k}{k+1} = -\frac{1}{n+1}.$$

Задача 8. Да се намери сумата: $S_n = \sum_{k=1}^n k^2(k-1)^2$.

Задача 9. Да се намери интерполационния полином на Нютон за функцията $f(x)$ в точките $x_0 = -2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$ и да се оцени грешката в интервала $[-1,1]$, ако: а) $f(x) = \cos(\pi x/2)$, б) $f(x) = \sin(\pi x/2)$.

Задача 10. Нека $f(x) = \int_0^x \arctan(t) dt$. Да се намери полинома $P(x)$ за който $P(0) = f(0)$, $P'(0) = f'(0)$, $P''(0) = f''(0)$ и $P(1) = 0.439 \approx f(1)$. Да се оцени грешката на приближение в интервала $[0,1]$.

Задача 11. Да се намери полинома на Ермит, интерполиращ таблицата:

а)	x_i	-1	0	1
	$f(x_i)$	1	0	1
	$f'(x_i)$	0	*	4
	$f''(x_i)$	*	*	16

, б)

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	0	6	18
$f'(x_i)$	*	8	17
$f''(x_i)$	*	*	12

Задача 12. Нека $\xi_k = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$, $k=1, \dots, n$ са нулите на полинома на Чебишов от първи род $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$. Да се намерят $\sum_{k=1}^n \xi_k$ и $\prod_{k=1}^n \xi_k$.

Задача 13. Да се докаже, че ако $x_0, x_1, \dots, x_n$, са $n+1$ произволни различни точки в интервала $[a, b]$, то интерполационния полином $L_n(e^x; x)$ клони равномерно към e^x в този интервал, при $n \rightarrow \infty$.

Задача 14. Да се докаже, че ако един полином $p(x)$ от π_n , получава в $n+1$ последователни цели стойности на x цели значения, то това е така за всяко цяло x . (Забележете, че не е необходимо коефициентите да са цели числа.)