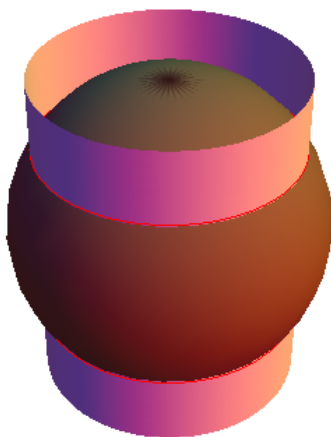


Решение на някои задачи от Упражнение 1

Задача 1. Да се параметризират следните криви:

д) $c : x^2 + y^2 + z^2 = 3, x^2 + y^2 = 2$.

Дадената крива е сечение на сфера $S : x^2 + y^2 + z^2 = 3$ и прав кръгов цилиндър $C : x^2 + y^2 = 2$. От уравнението на цилиндъра полагаме $x = \sqrt{2} \cos t, y = \sqrt{2} \sin t, t \in [0, 2\pi]$. След заместване на уравнението на C в това на S , за z -координатата получаваме $z = \pm 1$. Окончателно имаме $c : \vec{r}(\sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \sin t, \pm 1)$. Кривата (c) е съставена от две окръжности с радиус $\sqrt{2}$ (изобразени в червен цвят), едната лежаща в равнината $z = 1$, а другата – в равнината $z = -1$.



Задача 2. Намерете неявните уравнения на кривата $c : \vec{r}(t, t^2, t^3), t \in \mathbb{R}$.

Тази пространствена крива трябва да бъде зададена като пресечница на две повърхнини. От векторно-параметричното ѝ уравнение знаем, че $x = t, y = t^2$ и $z = t^3$. Тогава търсим две зависимости между x, y и z . Например, веднага се вижда, че $y = x^2$, т.е. кривата лежи върху параболическия цилиндър с уравнение $x^2 = y$. Друга връзка между променливите би могла да бъде например $xy = z$, което е уравнение на хиперболическия параболоид. И така, един неявен начин за задаване на кривата е

$$c : \begin{cases} x^2 = y \\ xy = z. \end{cases}$$



Задача 7. Намерете дължината на дъгата от кривата (c) между точките A и B , ако:

б) $c : \vec{r}(u, \frac{u^3}{3a^2}, \frac{a^2}{2u})$, $a = \text{const.} > 0$, $A(u = a)$, $B(u = 3a)$;

в) $c : \vec{r}(a \cos^3 u, a \sin^3 u)$, $a = \text{const.} > 0$ (астроида), $A(u = 0)$, $B(u = 2\pi)$.

б) Пресмятаме последователно

$$\dot{\vec{r}}(1, \frac{u^2}{a^2}, -\frac{a^2}{2u^2}), \quad \dot{\vec{r}}^2 = \frac{(2u^4 + a^4)^2}{4a^4 u^4}, \quad |\dot{\vec{r}}| = \frac{u^2}{a^2} + \frac{a^2}{2u^2}.$$

Тогава

$$\widehat{AB} = \int_a^{3a} \left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{a^2}{2u^2} \right) du = \left(\frac{u^3}{a^2} - \frac{a^2}{2u} \right) \Big|_a^{3a} = 9a.$$

в) Пресмятаме

$$\dot{\vec{r}}(-3a \cos^2 u \sin u, 3a \sin^2 u \cos u), \quad \dot{\vec{r}}^2 = 9a^2 \sin^2 u \cos^2 u, \quad |\dot{\vec{r}}| = 3a |\sin u \cos u|.$$

За $u \in [0, 2\pi]$ (един пълен оборот) астроидата се състои от четири дъги с равни дължини, всяка от които се описва за стойности на параметъра в интервал с дължина $\frac{\pi}{2}$. Тогава

$$\widehat{AB} = 4 \cdot 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u \cos u du = 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2u d(2u) = -3a \cos 2u \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a.$$

Задача 8. Намерете естествена параметризация за всяка от кривите:

в) *логаритмична спирала* $c : \vec{r}(e^u \cos u, e^u \sin u)$.

Изчисляваме последователно

$$\dot{\vec{r}}(e^u(\cos u - \sin u), e^u(\sin u + \cos u)), \quad \dot{\vec{r}}^2 = 2e^{2u}, \quad |\dot{\vec{r}}| = \sqrt{2}e^u.$$

За естествения параметър s намираме

$$s = \sqrt{2} \int_{u_0=0}^u e^u du = \sqrt{2} e^u \Big|_0^u = \sqrt{2}(e^u - 1).$$

Тогава от горното равенство получаваме

$$e^u = \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \quad \implies \quad u = \ln \left(\frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right).$$

След заместване на израза за u в уравнението на кривата, намираме една нейна естествена параметризация

$$c : \vec{r} \left(\frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cos \left(\ln \left(\frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \right), \frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \sin \left(\ln \left(\frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \right) \right).$$