ЗАДАЧИ ПО ДИФЕРЕНЦИАЛНА ГЕОМЕТРИЯ - 2

Зад.1 а) Да се докаже , че S^2 в R^3 е гладко многообразие.

б)Да се докаже , че атласът определен от стереографската проекция на сферата е C^∞-съгласуван с атласа, определен от ортогоналната проекция на сферата върху координатните равнини.

Зад.2: Да се докаже , че реалната проективна равнина P^2 е изоморфна на множеството от всички прави в R^3 минаващи през фиксирана точка. Да се докаже , че P^2 е гладко многообразие.

Зад.3: Да се докаже , че множеството от точките в R^n удоволетжоряващти условията:

$f_i(x^1, \dots, x^n)=0 \qquad i=1,\dots, n-k,$

$\mathrm{rang}\, ||\partial f_i/\partial x^j||= n-k,$

е гладко многообразие с размерност k.

Зад.4 Да се докаже, че следните групи образуват диференцируемо многообразие:

а) $GL(n,R)$ - група на матриците в R^n с детерминанта, различна от 0.
б) $SL(n, R)$ - група на матриците в R^n , чиито детерминанти са равни на единица.
в) $O(n, R)$ - група на ортогоналните матрици,
г) $U(n)$ - група на унитарните матрици.

Зад.5. Да се докаже, че множеството $G_{4,2}(R)$={множеството от 2-мерните равнини, в R^4 минаващи през фиксирана точка} е гладко многообразие.

Зад.6. Дадени са гладките многообразия $M=\{R^2,id\}$, $N=\{R^4,id\}$ и изображението $f:M\to N$, дефинирано чрез:

$$f(x^1,x^2)=(x^1+\sin x^2,(x^1)^2,2x^1(x^2)^2,3(x^1)^4x^2)$$

Нека точката $p(1,1)\in M$, $X_p=(x^1\partial/\partial x^2)_p\in T_pM$, $\omega=(y^2dy^3)_{f(p)}\in T^*_{f(p)}N$. Да се намери :
a) rang f ;
b) $f_{*p}X_p$
c) $(f^*\omega)_p$;

Зад.7. :Нека M и N са от зад.~~4~~ 6, като f е дефинирано чрез :

$$f(x^1,x^2)=(x^1+\cos x^2,(x^2)^2,x^1x^2,(x^1)^4x^2).$$

Ако $X=x^1\partial/\partial x^2\in X(M)$ е векторно поле и $\omega=y^2dy^3\in T^*M$ е 1-форма , то
а) да се намери rang f във всяка точка на M.
b) $f_{*(1,-1)}X_{(1,-1)}$.
c) $(f^*\omega)_{(1,-1)}$.

Зад.8. :Нека (U,x) е карта върху M и $X,Y\in X(M)$. Да се намери $[X,Y]$, ako:
а) dimM=2 , $X=x^1\partial/\partial x^1+x^2\partial/\partial x^2$; $Y=-x^2\partial/\partial x^1+x^1\partial/\partial x^2$;
b) dimM=2 , $X=x^1\partial/\partial x^1+2x^2\partial/\partial x^2$; $Y=3\partial/\partial x^1+x^1\partial/\partial x^2$;
c) dimM=3 , $X=2x^1\partial/\partial x^1+x^2\partial/\partial x^2+2x^3\partial/\partial x^3$;
$Y=2x^1x^2\partial/\partial x^1+(x^2)^2\partial/\partial x^2+2x^2x^3\partial/\partial x^3$;

Зад.9. Нека J е тензорно поле от тип (1,1) върху M, така че $J^2= -id$. $J:X(M)\to X(M)$, така че: $J^2X = -X$.
Да се докаже ,че :

$N(X,Y) = [JX,JY]-[X,Y]-J[X,Y]-J[JX,Y]$ е тензорно поле върху M.

Зад.10. Нека M е диференцируемо многообразие с dimM = 3, T - е тензор от тип (1,1) в точка $p\in M$, (U,x) е карта около p.

a) Нека компонентите t^i_j на T спрямо (U,x) са:

$$t^i_j=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ако $u = -\partial/\partial x^1{}_{|p} + 2\partial/\partial x^3{}_{|p} \in T_pM$, а $\omega = 5dx^1{}_{|p} - 2dx^2{}_{|p} + dx^3{}_{|p} \in F^1{}_{|p}(M_{|p})$, то да се намери $T(\omega,u)$.

b) Нека (U,y) е друга карта около p, като:

$\partial/\partial y^1{}_{|p} = \partial/\partial x^1{}_{|p} + \partial/\partial x^2{}_{|p}$, $\partial/\partial y^2 = 2\partial/\partial x^2$, $\partial/\partial y^3 = -\partial/\partial x^2{}_{|p} + \partial/\partial x^3{}_{|p}$;

да се намерят компонентите на T спрямо (U,y).

Зад.11. Нека $\omega \in \Lambda(M^3)$. Да се намери $d\omega$ в случаите:

a) $\omega = (x^3)^2 dx^1 \wedge dx^2 + ((x^3)^2 + 2x^2) dx^1 \wedge dx^3$;

b) $\omega = (x^1 + 2(x^2)^3) dx^3 \wedge dx^1 - 1/2 dx^2 \wedge dx^1$;

c) $\omega = 3x^1 dx^1 + (x^2)^2 x^3 dx^2 + x^1 x^2 x^3 dx^3$;

Зад.12. Върху $M = \{R^3, id\}$ е дадена 1-формата:

$\omega = P(x^1,x^2,x^3)dx^1 + Q(x^1,x^2,x^3)dx^2 + R(x^1,x^2,x^3)dx^3$; $P,Q,R \in FM$.

Да се намери НДУ $d\omega \wedge \omega = 0$.

Зад.13. Нека ∇ е линейна свързаност върху M. Да се докаже, че:

$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$ и

$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$

са тензорни полета. Да се намерят компонентите им: $R^l{}_{ijk}$ и $T^k{}_{ij}$.

Зад.14. Нека $M = (R^m, id)$. Ако $X, Y \in XM$ и $Y = \varphi^i \partial/\partial x^i$, то да се докаже, че изображението: ∇^M : $XM \to XM$, дефинирано чрез: $\nabla^M{}_X Y = X(\varphi^i)\partial/\partial x^i$ е линейна свързаност (стандартна линейна свързаност). Да се намерят R^M и T^M на ∇^M.

Зад.15. Нека ∇ и ∇' са две линейни свързаности върху M. Да се докаже:

~~а) $\nabla - \nabla'$ е тензорно поле от тип (1,2) върху M.~~

б) Ако s е тензорно поле от тип (1,2) то $\nabla^* = \nabla' + s$ е линейна свързаност.

в) Кога ∇' и ∇ имат една и съща торзия.

г) Кога ∇' и ∇ имат общи геодезични линии спрямо общ афинен параметър.

д) Кога ∇' и ∇ имат обща торзия и общи геодезични линии спрямо различни афинни параметри.

Зад.16. Нека $M=(R^m, id)$, g -стандартната метрика дефинирана чрез $g(\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j) = \delta_{ij}$. Да се докаже, че каноничната свързаност ∇^M е свързаността на Леви-Чивита за g.

Зад.17. Нека M е риманово многообразие, ∇ е свързаността на Леви-Чивита, $A(X,Y)$ - антисиметрично тензорно поле от тип (1,2). Да се намери риманова свързаност с торзия $T = A$. Да се докаже, че тази свързаност е единствена.

Зад.18. Нека $M = \{(R^3, id)\}$, $X,Y \in X(M)$, $\nabla_X Y$ е каноничната линейна свързаност за M, дефинирана в зад.12. Ако: $X = X^i \partial/\partial x^i$, $Y = Y^i \partial/\partial x^i$, то дефинираме: $\nabla^v{}_X Y = \nabla_X Y + 1/2 X \wedge Y$, където $X \wedge Y = (X^2Y^3 - X^3Y^2,\ X^3Y^1 - Y^3X^1,\ X^1Y^2 - X^2Y^1)$. Да се докаже, че:

а) ∇^v е линейна свързаност.

б) $T^v(X, Y) = X \wedge Y$, $R^v(X,Y)Z = 1/4(X \wedge Y) \wedge Z$.

в) ∇^v е риманова свързаност за стандартната метрика g_{ij} върху M. — $\nabla g = 0$

г) да се намерят компонентите $(\Gamma^v)^k{}_{ij}$ за ∇^v.

д) да се намерят паралелните векторни полета $Y(t)$ за ∇^v по линията $c(t)$: $x^1(t) = a$, $x^2(t) = b$, $x^3(t) = t$; $a,b = const$, удовлетворяващи $Y(0) = (\partial/\partial x^1)_{|0}$.

е) да се намерят геодезичните линии за ∇^v.