П ъ р в а   ч а с т

ЛИНИИ

§ 1. ОСНОВНИ ТЕОРЕТИЧНИ СВЕДЕНИЯ

Аналитично представяне на линия

Уравненията на геометричните обекти (точки, прави, криви, равнини и др.) ще разглеждаме спрямо ортонормирана координатна система $Oe_1e_2e_3$ в пространството с единични координатни вектори e_1, e_2, e_3. Радиус-вектора на една точка спрямо O ще означаваме с малка латинска буква без допълнителни знаци, например $x, y, z, \ldots$

Аналитично линията c от пространството ще задаваме с векторната функция

$$x = x(q) \tag{1}$$

на скаларния аргумент q, който приема стойности в определен интервал J, като $\dfrac{dx}{dq} = \dot{x} \neq o$. Ще предполагаме, че векторната функция $x(q)$ е непрекъсната и многократно гладка за всяко $q \in J$. Степента на гладкост ще зависи от третираните проблеми.

На векторното представяне (1) в тримерното пространство съответстват скаларните координатни уравнения

$$x_1 = x_1(q), \quad x_2 = x_2(q), \quad x_3 = x_3(q), \tag{2}$$

което ще записваме и така:

$$x = x_1(q).e_1 + x_2(q).e_2 + x_3(q).e_3. \tag{3}$$

Нека $F(x_1, x_2, x_3)$ и $G(x_1, x_2, x_3)$ са функции на реалните аргументи x_1, x_2, x_3 и те са дефинирани в дадена пространствена област J, непрекъснати са в J, притежават непрекъснати частни производни от даден ред за всяка точка M от J и поне една от функционалните детерминанти

$$\frac{D(F,G)}{D(x_1,x_2)} = \begin{vmatrix} F_1 & F_2 \\ G_1 & G_2 \end{vmatrix}, \quad \frac{D(F,G)}{D(x_2,x_3)} = \begin{vmatrix} F_2 & F_3 \\ G_2 & G_3 \end{vmatrix}, \quad \frac{D(F,G)}{D(x_3,x_1)} = \begin{vmatrix} F_3 & F_1 \\ G_3 & G_1 \end{vmatrix}$$

(тук $F_i = \dfrac{\partial F}{\partial x_i}$, $G_i = \dfrac{\partial G}{\partial x_i}$) е различна от нула. При посочените условия уравненията

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad G(x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{4}$$

представят спрямо дадена ортонормирана координатна система $Oe_1e_2e_3$ в пространството линия c.

Една линия се нарича *равнинна*, ако всичките ѝ точки лежат в равнина. Равнинната линия подобно на пространствената има различни аналитични представяния, като:

$$F(x_1, x_2) = 0, \tag{5}$$

$$x = x(q), \tag{6}$$

$$x = x_1(q).e_1 + x_2(q).e_2, \tag{7}$$

$$x_2 = x_2(x_1), \tag{8}$$

$$r = r(\theta). \tag{9}$$

Уравненията (5), (7) и (8) са взети спрямо ортонормирана координатна система в равнината. Уравнението (9) е определено спрямо равнинна полярна координатна система с полярен радиус-вектор r и полярен ъгъл θ. Ще предполагаме, че полярната координатна система е свързана с ортонормирана координатна система по традиционния начин. Следователно връзката между двете системи се определя чрез

$$x = r\cos\theta.e_1 + r\sin\theta.e_2. \tag{10}$$

Функциите, определени с (5) — (9), са непрекъснати и притежават непрекъснати производни най-малко от първи ред в даден интервал J.

Допирателна в дадена точка на линия

На гладката линия, представена чрез уравнението (1), се съпоставя правата с уравнение

$$y = x + \lambda.\dot{x}, \tag{11}$$

която се нарича *допирателна* (*тангента*) на линията в точката $x(q)$. В (11) векторът $\dot{x} = \dfrac{dx}{dq}$ е тангенциален вектор на линията в нейната точка $x(q)$.

На (11) съответстват координатните параметрични уравнения

$$y_1 = x_1 + \lambda\dot{x}_1, \quad y_2 = x_2 + \lambda\dot{x}_2, \quad y_3 = x_3 + \lambda\dot{x}_3, \tag{12}$$

което често ще записваме така:

$$y = (x_1 + \lambda\dot{x}_1).e_1 + (x_2 + \lambda\dot{x}_2).e_2 + (x_3 + \lambda\dot{x}_3).e_3. \tag{13}$$

От (12) чрез изключване на параметъра λ се получават следните уравнения на допирателната:

$$\frac{y_1 - x_1}{\dot{x}_1} = \frac{y_2 - x_2}{\dot{x}_2} = \frac{y_3 - x_3}{\dot{x}_3}. \tag{14}$$

Допирателната на линията c, зададена с уравненията (14), в произволна неособена точка (x_1, x_2, x_3) се представя с уравненията

$$\frac{y_1 - x_1}{\begin{vmatrix} F_2 & F_3 \\ G_2 & G_3 \end{vmatrix}} = \frac{y_2 - x_2}{\begin{vmatrix} F_3 & F_1 \\ G_3 & G_1 \end{vmatrix}} = \frac{y_3 - x_3}{\begin{vmatrix} F_1 & F_2 \\ G_1 & G_2 \end{vmatrix}}. \tag{15}$$

Детерминантите $\begin{vmatrix} F_i & F_j \\ G_i & G_j \end{vmatrix} = \dfrac{D(F,G)}{D(x_i, x_j)}$ $(i, j = 1, 2, 3$ при $i \neq j)$ са функционалните детерминанти на F и G.

Аналогично на всяко аналитично представяне на равнинна линия съответства определено уравнение на допирателната:

	Уравнение на линията	*Уравнение на допирателната в произволна точка на линията*
(16)	$x = x(q)$,	$y = x + \lambda.\dot{x}$,
(17)	$y = x_1(q).e_1 + x_2(q).e_2$,	$y = x_1.e_1 + x_2.e_2 + \lambda(\dot{x}_1.e_1 + \dot{x}_2.e_2)$,
(18)	$F(x_1, x_2) = 0$,	$(y_1 - x_1)\dfrac{\partial F}{\partial x_1} + (y_2 - x_2)\dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 0$,
(19)	$x_2 = x_2(x_1)$	$y_2 - x_2 = \dfrac{dx_2}{dx_1}(y_1 - x_1)$.

Оскулачна равнина

Оскулачната равнина на правилната поне двукратно гладка крива $c:\ x = x(q)$ се представя с уравненията

$$\dot{x}\ddot{x}(y - x) = 0, \tag{20}$$

$$y = x + \lambda.\dot{x} + \mu.\ddot{x}, \tag{21}$$

в които y е текущ радиус–вектор, а λ и μ са параметри.

На уравненията (20) и (21) съответстват координатните уравнения

$$\begin{vmatrix} y_1 - x_1 & y_2 - x_2 & y_3 - x_3 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \dot{x}_3 \\ \ddot{x}_1 & \ddot{x}_2 & \ddot{x}_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{22}$$

$$y_1 = x_1 + \lambda\dot{x}_1 + \mu\ddot{x}_1, \quad y_2 = x_2 + \lambda\dot{x}_2 + \mu\ddot{x}_2, \quad y_3 = x_3 + \lambda\dot{x}_3 + \mu\ddot{x}_3. \tag{23}$$

Векторът $\dfrac{dx}{dq} \wedge \dfrac{d^2x}{dq^2} = \dot{x} \wedge \ddot{x} \neq o$ е нормален на оскулачната равнина на поне двукратно гладката линия $c : x = x(q)$ в произволна нейна неособена точка.

Дължина на дъга и естествен параметър на линия

Ако поне еднократно гладката линия c е представена с уравнението (1), то *дължината s на дъгата* ѝ от точка $x(a)$ до точка $x(b)$ е

$$s = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2}\,dq. \tag{24}$$

В уравнението (24), като се заместят координатите на $\dot{x}$, се получава

$$s = \int_a^b \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2}\,dq. \tag{25}$$

Дължината s на дъгата може да се използва за параметрично представяне на линията c. В този случай s се нарича *естествен параметър* на линията.

Когато уравненията на линията са отнесени към естествения си параметър s, производните ще означаваме накратко, както следва:

$$x' = \frac{dx}{ds}, \quad x'' = \frac{d^2x}{ds^2}, \ldots, \quad x_i' = \frac{dx_i}{ds}, \quad x_i'' = \frac{d^2x_i}{ds^2}, \ldots$$

Придружаващ триедър на линия. Кривина и торзия. Формули на Френе

В произволната точка $M : x = x(s)$ на поне двукратно гладката правилна линия c съществува инвариантно свързан с линията ортонормиран и дясно ориентиран триедър $Mtnb$, за който: t е единичен вектор върху допирателната, n — единичен вектор върху главната нормала на c в M и b — единичен вектор върху бинормалата в същата точка.

Равнините, определени от точката M и съдържащи две от правите: допирателна, главна нормала и бинормала, носят следните имена: Mtn — *оскулачна*, Mnb — *нормална*, Mtb — *ректифицираща*.

Нормалният вектор n е компланарен с оскулачната равнина на c в M, а векторът b е нормален на същата равнина.

Въведените обекти, инвариантно свързани с линията, имат векторно представяне, както следва:

(26)	допирателната	—	$y = x + \lambda.t$	или	$y = x + \lambda.\dot{x}$;
(27)	бинормалата	—	$y = x + \lambda.b$	или	$y = x + \lambda.\dot{x} \wedge \ddot{x}$;
(28)	главната нормала	—	$y = x + \lambda.n$	или	$y = x + \lambda.(\dot{x} \wedge \ddot{x}) \wedge \dot{x}$;
(29)	оскулачната равнина	—	$(y - x)b = 0$	или	$(y - x)\dot{x} \wedge \ddot{x} = 0$;
(30)	нормалната равнина	—	$(y - x)t = 0$	или	$(y - x)\dot{x} = 0$;
(31)	ректифициращата равнина	—	$(y - x)n = 0$	или	$(y - x)(\dot{x} \wedge \ddot{x}) \wedge \dot{x} = 0$.

На уравненията (26) — (31) съответстват координатни уравнения, а също така и други параметрични представяния, които се получават от горните уравнения по познати методи.

Кривината κ и *торзията* τ в произволна точка на достатъчно гладката линия c се дефинират чрез равенствата

$$\kappa = \sqrt{x''^2}, \tag{32}$$

$$\tau = \frac{x'x''x'''}{x''^2}, \tag{33}$$

когато линията c е отнесена към естествения си параметър s, и чрез равенствата

$$\kappa = \frac{\sqrt{(\dot{x} \wedge \ddot{x})^2}}{(\sqrt{\dot{x}^2})^3}, \tag{34}$$

$$\tau = \frac{\dot{x}\ddot{x}\dddot{x}}{(\dot{x} \wedge \ddot{x})^2}, \tag{35}$$

в случай че параметърът е произволен.

Ако торзията τ в произволна точка P_0 на правилната трикратно гладка крива е нула, то P_0 се нарича равнинна точка на кривата. Когато τ е нула за всяка точка P от дефиниционния интервал на c, кривата е равнинна.

С всяка поне трикратно гладка линия са свързани фундаменталните *формули на Френе*:

$$x' = t, \quad t' = \kappa.n, \quad n' = -\kappa.t + \tau.b, \quad b' = -\tau.n. \tag{36}$$

Моментното изменение на триедъра на Френе в околност на точка M може да се разглежда като *хеликоидално движение* около ос (*хеликоидална ос*), която минава през точката

$$y = x + \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2} n \tag{37}$$

и съдържа вектора

$$w = \tau.t + \kappa.b, \tag{38}$$

въведен от Поасон и Дарбу и носещ техните имена.

Правата, която минава през точката $M : x = x(s)$ и съдържа вектора w, се нарича *моментна ротационна ос* за линията в M.

Транслационната скорост при посочените моментни движения има големина

$$v = \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}\,^{*}. \tag{39}$$

Естествени уравнения на правилна крива

Нека c е ориентирана трикратно гладка правилна крива и s е дъгата ѝ, мерена от фиксирана нейна точка P_0 до произволна точка P. Уравненията

$$\kappa = \varphi(s), \quad \tau = \psi(s),$$

в които $\varphi(s)$ е непрекъснато диференцируема, а $\psi(s)$ — непрекъсната функция на s в дадена околност s_0 на P_0, се наричат *естествени уравнения* на линията c.

Естествените уравнения, подчинени на посочените условия, определят правилна крива с точност до движение.

Витлови линии

Една трикратно гладка правилна крива c се нарича *витлова линия*, ако допирателните ѝ във всяка нейна точка сключват постоянен ъгъл с една постоянна посока. Линията c лежи върху цилиндрична повърхнина ξ, образуващите на която са успоредни на постоянната посока и минават през точките на витловата линия. Когато ξ е ротационен цилиндър, кривата c се нарича *обикновена витлова линия*, а ако ξ не е ротационен цилиндър, c е *обща витлова линия*.

Необходимо и достатъчно условие трикратно гладката правилна крива c да бъде обикновена витлова линия е кривината κ и торзията τ да са константи, а за общата витлова линия — отношението $\dfrac{\tau}{\kappa}$ да бъде константа, като $\kappa \neq \text{const}$ и $\tau = \text{const}$.

---

* По-подробно запознаване с тези кинематични понятия може да се направи в учебника [3] — § 5, т. 28, и в [5] — § 11.

Втора част

ЕДНОПАРАМЕТРИЧНИ СИСТЕМИ ОТ ПРАВИ И РАВНИНИ

§ 5. ОСНОВНИ ТЕОРЕТИЧНИ СВЕДЕНИЯ

Еднопараметрична система от прави, или както накратко ще наричаме тази система — *рой прави*, означаваме символично с G. Тя се определя с точката

$$x = x(q) \tag{1}$$

и единичния вектор $e = e(q)$, за които $e \wedge \dot{e} \neq o$, $e \wedge \dot{x} \neq o$.

Предполагаме, че функциите $x(q)$ и $e(q)$ притежават гладкост от степента, необходима за третираните проблеми.

Дължината на дъгата на $e(q)$ означаваме със σ и наричаме *естествен параметър* на роя.

С правите на роя G може да се свърже инвариантен ортонормиран триедър, който притежава единичните вектори

$$e = e(\sigma), \quad g = \frac{de}{d\sigma}, \quad h = e \wedge g. \tag{2}$$

Централната точка на роя се определя със

$$z = x - \frac{\dot{e}\dot{x}}{\dot{e}^2} \cdot e. \tag{3}$$

Ако роят е зададен с точката $x(q)$ и вектора $p(q)$, който не е единичен, то централната точка се определя с равенството $z = x - \dfrac{(p \wedge \dot{p})(p \wedge \dot{x})}{(p \wedge \dot{p})^2}.p$.

Роят G е развиваем при

$$e\dot{e}\dot{x} = 0. \tag{4}$$

За достатъчно гладкия рой G са в сила следните формули за производните, аналогични на формулите на Френе за правилна крива:

$$z' = a.e + c.h, \quad e' = g, \quad g' = -e + \alpha.h, \quad h' = -\alpha.g. \tag{5}$$

Скаларните инварианти в (5) се определят с

$$a = ez', \quad c = ee'z', \quad \alpha = ee'e''. \tag{6}$$

Диференцирането в (5) и (6) е извършено спрямо естествения параметър σ. Инвариантата c се нарича *разпределителен параметър* на G, a — хлъзгане, α — ротация на роя. От (6) се вижда, че ако разпределителният параметър е нула, G е развиваем рой. Хлъзгането a е нула, когато правите на роя са бинормали на правилна крива; ротацията α е нула, когато правите на роя са успоредни на постоянна равнина.

Трета част

ДИФЕРЕНЦИАЛНА ГЕОМЕТРИЯ НА ПОВЪРХНИНИ

§ 7. ОСНОВНИ ТЕОРЕТИЧНИ СВЕДЕНИЯ

Повърхнините ще представяме аналитично чрез следните уравнения:

$$x = x(u,v), \quad (u,v) \in J; \tag{1}$$

$$x = x_1(u,v).e_1 + x_2(u,v).e_2 + x_3(u,v).e_3; \tag{2}$$

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = 0; \tag{3}$$

$$x_3 = F(x_1, x_2). \tag{4}$$

В (1) и (2) $x(u,v)$ е векторна функция на скаларните променливи u, v и е дефинирана за u и v в дадена равнинна област J. При задачите ще предполагаме, че функцията $x(u,v)$ е достатъчно гладка за успешно третиране на съответните проблеми.

Аналогична бележка важи за координатните функции $x_1(u,v)$, $x_2(u,v)$, $x_3(u,v)$, а също така и за функциите в уравненията (3) и (4).

На съответното представяне на повърхнината се съпоставят уравнения на допирателните равнини и нормалните прави в техни неособени точки. Ще използваме следните уравнения за споменатите геометрични обекти:

$$y = x + \lambda.x_u + \mu.x_v \tag{5}$$

е векторно параметрично уравнение на допирателната равнина в обикновена точка $x(u,v)$ на повърхнината и аналогичните му координатни параметрични уравнения са

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + \lambda\frac{\partial x_1}{\partial u} + \mu\frac{\partial x_1}{\partial v}, \\ y_2 &= x_2 + \lambda\frac{\partial x_2}{\partial u} + \mu\frac{\partial x_2}{\partial v}, \\ y_3 &= x_3 + \lambda\frac{\partial x_3}{\partial u} + \mu\frac{\partial x_3}{\partial v}; \end{aligned} \tag{6}$$

общото координатно уравнение е

$$\begin{vmatrix} y_1 - x_1 & y_2 - x_2 & y_3 - x_3 \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u} & \dfrac{\partial x_3}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v} & \dfrac{\partial x_2}{\partial v} & \dfrac{\partial x_3}{\partial v} \end{vmatrix} = 0. \tag{6'}$$

В (5) x_u и x_v са частните производни $\dfrac{\partial x(u,v)}{\partial u}$, $\dfrac{\partial x(u,v)}{\partial v}$ на радиус–вектора $x(u,v)$ съответно относно параметрите u и v, които удовлетворяват неравенството $x_u \wedge x_v \neq o$.

На (3) и (4) съответстват следните представяния на допирателните равнини:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(y_1 - x_1) + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}(y_2 - x_2) + \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}(y_3 - x_3) = 0; \tag{7}$$

$$y_3 - x_3 = \frac{\partial F}{\partial x_1}(y_1 - x_1) + \frac{\partial F}{\partial x_2}(y_2 - x_2). \tag{8}$$

Нормалните прави в точка на повърхнината се представят със следните уравнения:

$$y = x + \lambda . x_u \wedge x_v; \tag{9}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + \lambda\left(\frac{\partial x_2}{\partial u}\frac{\partial x_3}{\partial v} - \frac{\partial x_2}{\partial v}\frac{\partial x_3}{\partial u}\right),\\ y_2 &= x_2 + \lambda\left(\frac{\partial x_3}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} - \frac{\partial x_3}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial u}\right),\\ y_3 &= x_3 + \lambda\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial v} - \frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial x_2}{\partial u}\right); \end{aligned} \tag{10}$$

$$\frac{y_1 - x_1}{\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1}} = \frac{y_2 - x_2}{\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_2}} = \frac{y_3 - x_3}{\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_3}}. \tag{12}$$

$$\frac{y_1 - x_1}{p} = \frac{y_2 - x_2}{q} = \frac{y_3 - x_3}{-1} \qquad \left(p = \frac{\partial F(x_1, x_2)}{\partial x_1},\ q = \frac{\partial F(x_1, x_2)}{\partial x_2}\right). \tag{11}$$

Ако повърхнината е дадена с (1), за коефициентите на първата квадратична форма ще използваме традиционните коефициенти:

$$E = (x_u)^2, \quad F = x_u x_v, \quad G = (x_v)^2, \tag{13}$$

където x_u и x_v са съответните частни производни $\dfrac{\partial x}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial x}{\partial v}$. При третиране на проблеми от вътрешната диференциална геометрия на повърхнините ще използваме координатите на метричния тензор на повърхнината със следните означения:

$$\begin{aligned} g_{11} &= \left(\frac{\partial x}{\partial u^1}\right)^2,\\ g_{12} &= \frac{\partial x}{\partial u^1}.\frac{\partial x}{\partial u^2},\\ g_{22} &= \left(\frac{\partial x}{\partial u^2}\right)^2, \end{aligned} \tag{14}$$

където u^1 и u^2 означават криволинейните координати, които по-горе са записани с класическите означения u и v.

Дължината на дъгата на произволна гладка крива върху повърхнината се определя чрез

$$ds^2 = E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2. \tag{15}$$

В (15) е взето предвид, че линията върху повърхнината е определена с уравненията $u = u(q)$, $v = v(q)$. Параметърът q се изменя в интервал от областта J.

Нека $c_1 : u_1 = u_1(q)$, $v_1 = v_1(q)$ и $c_2 : u_2 = u_2(q)$, $v_2 = v_2(q)$ са две линии върху дадена повърхнина, които се пресичат в определена точка. Ъгълът θ, който допирателните на c_1 и c_2 образуват помежду си, се определя с равенството

$$\cos\theta = \frac{E\dot{u}_1\dot{u}_2 + F(\dot{u}_1\dot{v}_2 + \dot{u}_2\dot{v}_1) + G\dot{v}_1\dot{v}_2}{\sqrt{E\dot{u}_1^2 + 2F\dot{u}_1\dot{v}_1 + G\dot{v}_1^2}\sqrt{E\dot{u}_2^2 + 2F\dot{u}_2\dot{v}_2 + G\dot{v}_2^2}}. \tag{16}$$

От (16) непосредствено се получава условието за перпендикулярност на c_1 и c_2, а така също и за ортогоналност на параметричната мрежа върху повърхнината.

Нормалната кривина ν в произволна точка $x(u(q), v(q))$ на кривата c, определена с направлението $\dot{u}$, $\dot{v}$, се дава със

$$\nu = \frac{L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2}{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}. \tag{17}$$

Ако вместо параметъра q се постави дължината s на дъгата на c, то (17) се преобразува във

$$\nu = L(u')^2 + 2Mu'v' + N(v')^2, \tag{18}$$

където с $'$ е означена производната на съответната функция спрямо s.

Кривите $c_1 : u_1 = u_1(q)$, $v_1 = v_1(q)$ и $c_2 : u_2 = u_2(q)$, $v_2 = v_2(q)$ върху повърхнината S са спрегнати, ако е изпълнено условието

$$L\dot{u}_1\dot{u}_2 + M(\dot{u}_1\dot{v}_2 + \dot{u}_2\dot{v}_1) + N\dot{v}_1\dot{v}_2 = 0. \tag{19}$$

Коефициентите L, M и N на втората диференциална форма на S се определят по следния начин:

$$L = \frac{(x_u \wedge x_v)x_{uu}}{W}, \quad M = \frac{(x_u \wedge x_v)x_{uv}}{W}, \quad N = \frac{(x_u \wedge x_v)x_{vv}}{W}, \tag{20}$$

тук с W е означено $\sqrt{EG - F^2}$.

Когато е даден единичният нормален вектор l на повърхнината, L, M и N се намират чрез

$$L = -l_u x_u, \quad M = -l_u x_v = -l_v x_u, \quad N = -l_v x_v. \tag{21}$$

Уравнението за линиите на кривината на повърхнината е

$$\begin{vmatrix} Edu + Fdv & Fdu + Gdv \\ Ldu + Mdv & Mdu + Ndv \end{vmatrix} = 0, \tag{22}$$

а това, от което се получават асимптотичните линии, е

$$L(du)^2 + 2M\,du\,dv + N(dv)^2 = 0. \tag{23}$$

Главните радиуси на кривината за произволна точка на повърхнината се определят чрез

$$(LN - M^2)R^2 - (GL - 2FM + EN)R + EG - F^2 = 0. \tag{24}$$

Съгласно една теорема на Белтрами — Енепер торзията τ на неправолинейна асимптотична линия на двукратно гладка повърхнина S е определена чрез

$$\tau = \pm\sqrt{-K},$$

където K е гаусовата кривина на S.

От (24) за гаусовата кривина K и средната кривина H следват изразите

$$K = \frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{R_2} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}. \tag{25}$$

Главните центрове на кривината за произволна точка на повърхнината $x = x(u, v)$ се определят чрез радиус-векторите z и $\overline{z}$ по следния начин:

$$z = x + R_1 l, \quad \overline{z} = x + R_2 l. \tag{26}$$

В общия случай z и $\overline{z}$ дефинират две повърхнини, които се наричат еволюти на повърхнината $x = x(u, v)$.

Геодезичната торзия α на крива линия $c : u = u(q),\ v = v(q)$ най-често се намира от релацията

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} E\dot{u} + F\dot{v} & F\dot{u} + G\dot{v} \\ L\dot{u} + M\dot{v} & M\dot{u} + N\dot{v} \end{vmatrix}}{W(E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2)}. \tag{27}$$

Геодезичните линии на повърхнината се представят със системата диференциални уравнения

$$\frac{d^2u^k}{dq^2} + \Gamma^k_{ij}\frac{du^i}{dq}\frac{du^j}{dq} = 0, \quad k, i, j = 1, 2. \tag{28}$$

В (28) криволинейните координати, спрямо които са дадени параметричните уравнения на повърхнината, са означени с u^1 и u^2, т.е. вместо u е поставено u^1 и вместо v имаме u^2. С Γ^k_{ij} са означени символите на Кристофел от втори ред за съответната повърхнина. Те се изразяват чрез g_{ij} и символите $\Gamma_{i,jk}$ от първи ред по следния начин:

$$\Gamma^k_{ij} = g^{kl}\Gamma_{l,ij} = \frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right). \tag{29}$$

В (28) за $\Gamma^k_{ij}\frac{du^i}{dq}\frac{du^j}{dq}$ е възприетото правило за кратко записване на сумата $\sum\limits_{i=1}^{2}\sum\limits_{j=1}^{2}\Gamma^k_{ij}\frac{du^i}{dq}\frac{du^j}{dq}$. Аналогична бележка важи и за $g^{kl}\Gamma_{l,ij}$, в която сумирането е извършено относно l. Този метод за кратко записване на определени суми ще използваме и занапред.

Да означим детерминантата

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix},$$

която се нарича дискриминанта на матричния тензор g_{ij}, с g. Контравариантите координати на матричния тензор g^{ij} се изразяват чрез ковариантните, както следва:

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g}, \quad g^{12} = g^{21} = -\frac{g_{12}}{g}, \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g}. \tag{30}$$

Символите на Кристофел от първи и втори ред са определени със следващите равенства:

$$\Gamma_{1,11} = \frac{1}{2}.\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1}, \quad \Gamma_{1,12} = \Gamma_{1,21} = \frac{1}{2}.\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}, \quad \Gamma_{2,22} = \frac{1}{2}.\frac{\partial g_{22}}{\partial u^2}, \tag{31}$$

$$\Gamma_{1,22} = \frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} - \frac{1}{2}.\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}, \quad \Gamma_{2,12} = \Gamma_{2,21} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}, \quad \Gamma_{2,11} = \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}.$$

От (31) и (30), като се вземе предвид, че

$$\Gamma^k_{ij} = g^{kl}\Gamma_{l,ij},$$

се намират изрази за Γ^k_{ij} чрез g_{ij} и производните им. За ортогонална параметрична мрежа тези символи на Кристофел се изразяват чрез g_{ij} по следния начин:

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1}, \quad \Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}, \quad \Gamma^1_{12} = \frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}; \\ \Gamma^2_{11} &= -\frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}, \quad \Gamma^2_{22} = \frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^2}, \quad \Gamma^2_{12} = \frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}. \end{aligned} \tag{31'}$$

За поне двукратно гладка повърхнина са валидни формулите за производните — на Гаус:

$$x_{ij} = \Gamma^k_{ij}.x_k + h_{ij}.l, \tag{32}$$

и на Вайнгартен:

$$l_i = -g^{km}h_{ik}.x_m \quad (i,\ j,\ k,\ m = 1,\ 2). \tag{33}$$

В (32) и (33) съкратените означения x_k и x_{ij} са съответно за частните производни: $x_k = \dfrac{\partial x}{\partial u^k}$ и $x_{ij} = \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j}$.

Поради по-широкото използване на формулата на Вайнгартен за решаване на задачи ще я представим по-подробно чрез E, F, G и L, M, N:

$$l_u = \frac{1}{EG - F^2}\left((FM - GL).x_u + (FL - EM).x_v\right), \tag{34}$$

$$l_v = \frac{1}{EG - F^2}\left((FN - GM).x_u + (FM - EN).x_v\right).$$

От (34) следва

$$l_u^2 = L2H - EK,\ l_v^2 = N2H - GK, \tag{35}$$

където $2H$ и K са съответно средната и гаусовата кривина на повърхнината.

Гаусовата кривина на повърхнината при $F = 0$ се определя с

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)\right], \tag{36}$$

а в общия случай

$$K = -\frac{1}{4W^4}\begin{vmatrix} E & E_u & E_v \\ F & F_u & F_v \\ G & G_u & G_v \end{vmatrix} - \frac{1}{2W}\left(\frac{\partial}{\partial v}.\frac{E_v - F_u}{W} - \frac{\partial}{\partial u}.\frac{F_v - G_u}{W}\right). \tag{37}$$

За намиране на геодезични линии ще използваме и системата диференциални уравнения

$$2\frac{d}{ds}\left(g_{11}\frac{du^1}{ds} + g_{12}\frac{du^2}{ds}\right) = \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1}\left(\frac{du^1}{ds}\right)^2 + 2\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1}\frac{du^1}{ds}\frac{du^2}{ds} + \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}\left(\frac{du^2}{ds}\right)^2, \tag{38}$$

$$2\frac{d}{ds}\left(g_{12}\frac{du^1}{ds} + g_{22}\frac{du^2}{ds}\right) = \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}\left(\frac{du^1}{ds}\right)^2 + 2\frac{\partial g_{12}}{\partial u^2}\frac{du^1}{ds}\frac{du^2}{ds} + \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2}\left(\frac{du^2}{ds}\right)^2 \tag{39}$$

при $g_{11}\left(\frac{du^1}{ds}\right)^2 + 2g_{12}\frac{du^1}{ds}\frac{du^2}{ds} + g_{22}\left(\frac{du^2}{ds}\right)^2 = 1.$

Геодезичната кривина на параметричните линии е съответно

$$\gamma_1 = -\frac{1}{2g_{11}\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}, \tag{40}$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{2g_{22}\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \tag{40'}$$

при ортогонална мрежа, а на произволна линия с върху повърхнината също при $g_{12} = 0$ —

$$\gamma = \frac{d\theta}{ds} + \frac{1}{2\sqrt{g_{11}g_{22}}}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}\frac{du^2}{ds} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}\frac{du^1}{ds}\right), \tag{41}$$

където θ е ориентираният ъгъл $\left(\frac{\partial x}{\partial u^1}, t\right)$, а t е единичният тангенциален вектор на c.

За геодезичната кривина на линията $\varphi(u,v) = 0$ е в сила следната формула на Боне:

$$\gamma = \frac{1}{W}\left(\left(\frac{F\varphi_v - G\varphi_u}{\sqrt{E\varphi_v^2 - 2F\varphi_u\varphi_v + G\varphi_u^2}}\right)_u + \left(\frac{F\varphi_u - E\varphi_v}{\sqrt{E\varphi_v^2 - 2F\varphi_u\varphi_v - G\varphi_u^2}}\right)_v\right). \tag{42}$$