6.2. Числено интегриране

Постановка на задачата

Нека $y = f(x)$ е функция, дефинирана и интегруема в Риманов смисъл в интервала $[a,b]$. По зададена таблица от стойностите $y_i = f(x_i)$ на функцията в точките (възлите) $x_0, x_1, x_2, ..., x_n \in [a,b]$, да се намери приближено стойността на интеграла $I = \int_a^b f(x)dx$.

Квадратурни формули на Нютон-Коутс

Ако n е естествено число и $h = \dfrac{b-a}{n}$ е стъпка, с чиято помощ интервалът на интегриране е разделен на n равни подинтервала, при което $x_0 = a$, $x_{i+1} = x_i + h$, $i = 0,1,...,n-1$, то най-често използваните обобщени квадратурни формули на Нютон-Коутс са дадени в следващата таблица. Тук $M_k = \max\limits_{x\in[a,b]} \left|f^{(k)}(x)\right|$, при условие, че съществува непрекъсната k-та производна на $y = f(x)$.

Название	Квадратурна формула за числено интегриране	Оценка на грешката $\left|R(f,x)\right|$
Формула на левите правоъгълници	$I_1 \approx h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$	$\frac{(b-a)^2}{2n}M_1$, т.е. $\frac{(b-a)M_1}{2}h$
Формула на десните правоъгълници	$I_2 \approx h\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$	$\frac{(b-a)^2}{2n}M_1$, т.е. $\frac{(b-a)M_1}{2}h$
Формула на средните правоъгълници	$I_3 \approx h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i + \frac{h}{2})$	$\frac{(b-a)^2}{4n}M_1$, т.е. $\frac{(b-a)M_1}{4}h$
Формула на трапеците	$I_T \approx \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right)$	$\frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2$, т.е. $\frac{(b-a)M_2}{12}h^2$
Формула на Симпсън	$n = 2m$, $I_S \approx \frac{h}{3}\left(f(a) + 4\sum_{i=1}^{m} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + f(b)\right)$	$\frac{(b-a)^5}{180n^4}M_4$, т.е. $\frac{(b-a)M_4}{180}h^4$

Пример 1. Стойностите на функцията $y = f(x) = \ln(x^2)$ в интервала $[2,3]$ са зададени в първите две колонки на таблица 1. Да се пресметнат приближените стойности на интеграла $I = \int_2^3 f(x)\,dx$, по всички квадратурни формули от горната таблица.

Решение:

В случая имаме стъпка $h = 0{,}1$ и брой на подинтервалите $n = 10$.

Таблица 1

i	x_i	y_i
0	2,0	1,38629
1	2,1	1,48387
2	2,2	1,57691
3	2,3	1,66582
4	2,4	1,75094
5	2,5	1,83258
6	2,6	1,91102
7	2,7	1,98650
8	2,8	2,05924
9	2,9	2,12942
10	3,0	2,19722

Таблица 2

i	$x_i + \frac{h}{2}$	$y_{i+\frac{1}{2}}$
0	2,05	1,43568
1	2,15	1,53094
2	2,25	1,62186
3	2,35	1,70883
4	2,45	1,79218
5	2,55	1,87219
6	2,65	1,94912
7	2,75	2,02320
8	2,85	2,09464
9	2,95	2,16361

а) По формулата за левите правоъгълници трябва да сумираме стойностите от y_0 до y_9 и полученото число да умножим по *h*. Получаваме

$$I_1 \approx h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = h\sum_{i=0}^{9} y_i = 0{,}1.(17{,}7826) = 1{,}77826\,.$$

б) По формулата за десните правоъгълници намираме сумата от y_1 до y_{10} и полученото число да умножаваме по *h*. Получаваме

$$I_2 \approx h\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = h\sum_{i=1}^{10} y_i = 0{,}1.18{,}5935 = 1{,}85935\,.$$

в) В случая на формулата на средните правоъгълници с помощта на таблица 2 изчисляваме:

$$I_3 \approx h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i + \frac{h}{2}) = h\sum_{i=0}^{9} y_{i+\frac{1}{2}} = 0{,}1\ .\ 18{,}1923 = 1{,}81923.$$

г) Съответно по трапеците имаме

$$I_T \approx \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right) = \frac{h}{2}\left(y_0 + 2\sum_{i=1}^{9} y_i + y_{10}\right) = 0{,}05(y_0 + 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_9) + y_{10})$$
$$= 0{,}05(1{,}38629 + 2.(16{,}39631) + 2{,}19722) = 0{,}05.(36{,}37615) = 1{,}818807\,;$$

д) По формулата на Симпсън:

$$I_S \approx \frac{h}{3}\left(f(a) + 4\sum_{i=1}^{m} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{m} f(x_{2i}) - f(b) \right)$$

$$= \frac{0{,}1}{3}(y_0 + 4(y_1 + y_3 + ... + y_9) + 2(y_2 + y_4 + ... + y_8) + y_{10})$$

$$= \frac{0{,}1}{3}\left(1{,}38629 + 4.(9{,}09820) + 2.(7{,}29812) + 2{,}19722\right) = \frac{0{,}1}{3}.(54{,}57254) = 1{,}819085\,.$$

Пример 2. Да се оцени грешката на численото интегриране за $I_1,\ I_T,\ I_S$ от пример 1.

Решение:

Намираме последователно производните на $f(x) = \ln(x^2)$:

$$f'(x) = \frac{2}{x},\quad f''(x) = \frac{-2}{x^2},\quad f'''(x) = \frac{4}{x^3},\quad f^{(4)}(x) = \frac{-12}{x^4}.$$

Тогава $M_1 = \max\limits_{2 \le x \le 3} |f'(x)| = f'(2) = 1$, $M_2 = \max\limits_{2 \le x \le 3} |f''(x)| = |f''(2)| = \frac{1}{2}$,

$$M_4 = \max_{2 \le x \le 3} \left|f^{(4)}(x)\right| = \left|f^{(4)}(2)\right| = \frac{3}{4}.$$

Като заместим във формулата за грешката на метода на левите правоъгълници, получаваме: $|R_1(f,h)| \le \dfrac{M_1(b-a)h}{2} = \dfrac{0{,}1}{2} = 0{,}05$, т.е верен е първи-втори знак на резултата. Следователно след закръгляване до втори знак имаме $I_1 \approx 1{,}78$.

За формулата на трапеците пресмятаме: $|R_T(f,h)| \le \dfrac{M_2(b-a)h^2}{12} = \dfrac{0{,}01}{24} \le 0{,}005$ или верни са два-три знака след десетичната запетая. Тогава $I_T \approx 1{,}819$.

За квадратурната формула на Симпсън:

$|R_S(f,h)| \le \dfrac{M_4(b-a)h^4}{180}$, т.е. всички знаци са верни и $I_S = \int_2^3 \ln(x^2)dx \approx 1{,}819085$.

Забележка. По принцип не винаги е зададена формула на функцията, или намирането на производните е сложно, или дори може да не съществуват производни от даден ред. Тогава се прилагат по-простите формули, които дават малка степен на грешката. Точността в такива случаи се постига за сметка на намаляването на стъпката h.

Пример 3. Да се определи големината на стъпката на численото интегриране h така, че приближеното пресмятане на интеграла $\int_{-1}^{3} \sqrt{1+x^2}\, dx$ по метода на трапеците да гарантира точност на резултата $\varepsilon = 0{,}000001$.

Решение:

Тук a = -1, b = 3. За производните имаме: $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $f''(x)=\dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$.

Очевидно $0 \le f''(x) \le 1$ за всяко x, откъдето следва, че $M_2 \le 1$. Като заместим във формулата за грешката на метода на трапеците, намираме:

$$\left|R_T(f,h)\right| \le \frac{M_2(b-a)h^2}{12} = \frac{(3-(-1))}{12}h^2 = \frac{h^2}{3}.$$

За да се гарантира исканата точност налагаме условието $\dfrac{h^2}{3} \le \varepsilon$, или $h \le \sqrt{3\varepsilon} = \sqrt{0{,}000003} \approx 0{,}00173$. Удобно е да вземем стъпка h = 0,001 и съответно да разделим интервала $[-1,3]$ на n = 4000 равни подинтервала. За провеждане на изчисленията очевидно трябва да се използва компютър и междинна точност 10^{-8}.

Задачи за упражнения

1) С квадратурните формули на правоъгълниците пресметнете приближената стойност на интеграла $\int_4^5 \sqrt{2+x^3}\,dx$ като разделите интервала на n = 10 подинтервала. Оценете грешката. С колко знака междинна точност трябва да работите? Отговор: $I_1 = 9{,}51$; $I_2 = 9{,}82$.

2) По метода на трапеците изчислете приближената стойност на следните интеграли при зададени n или h:

а) $\int_0^1 \sqrt[3]{x+3}\,dx$, $n = 10$

г) $\int_{-2}^0 \dfrac{1}{p+x^2}dx$, $h = 0{,}2$, $p = 5$

б) $\int_2^4 \dfrac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx$, $n = 20$

д) $\int_0^{\pi/2} \cos(x^2)\,dx$, $n = 10$

в) $\int_{-1}^1 \ln(5+x)\,dx$, $n = 20$

е) $\int_1^{1{,}5} e^{\sqrt{x}}\,dx$, $h = 0{,}05$.

Отговори: а) 1,5171; б) 2,92187; в) 3,20531; г) 0,326; д) 0,845; е) 1,52975; $n = 10$.

3) По метода на Симпсън пресметнете приближено интегралите от задача 2. Определете с колко знака точност трябва да работите и каква е точността на получените резултати. Закръглете правилно крайните отговори.

4) Изчислете интеграла $\int_{0,5}^{1} \sin(\frac{x}{1+x})dx$ по метода на трапеците с точност $\varepsilon = 0{,}0001$ при начално n=5. Отговор: 0,2056.

5) Изчислете интеграла $\int_{1}^{2} \sqrt{\frac{1}{x}}\,dx$ по метода на Симпсън с точност $\varepsilon = 0{,}000001$.

Отговор: 0,828428.

6) Съставете компютърна програма за изчисляване на приближената стойност на следните интеграли по метода на трапеците и метода на Симпсън. Сравнете резултатите:

а) $\int_{1}^{2} \sqrt[3]{x+\ln(x)}\,dx$, $\varepsilon = 0{,}0001$

б) $\int_{0}^{1} \frac{x^2-\sqrt{x}+2}{1+x}dx$, $\varepsilon = 0{,}00001$

в) $\int_{0}^{1} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$, $\varepsilon = 0{,}0000001$

г) $\int_{0}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$, $\varepsilon = 0{,}00001$

д) $\int_{1}^{2} \frac{\arctan(x+1)}{xe^x}\,dx$, $\varepsilon = 0{,}000001$

е) $\int_{0}^{1} \frac{\arcsin(x)}{1+x}dx$, $\varepsilon = 10^{-6}$

ж) $\int_{0}^{\pi/6} \ln(\cos(x))\,dx$, $\varepsilon = 10^{-7}$

з) $\int_{1}^{4} \frac{x^3}{e^{x^2}+1}dx$, $\varepsilon = 10^{-3}$

и) $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}dx$, $\varepsilon = 10^{-4}$

й) $\int_{0}^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+1}dx$, $\varepsilon = 10^{-9}$

Отговори: а) 1,2259; б) 1,15024 ; в) 0,946083; г) 1,57257; Упътване: Представете интеграла като сумата $\int_a^{\infty} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^{\infty} f(x)dx$. Чрез подходяща горна оценка на подинтегралната функция изберете такова b, че вторият интеграл да е по-малък от $\varepsilon/2$, а първия изчислете също с точност $\varepsilon/2$; д) 0,198912; е) 0,345655; ж) –0,0246171; з) 0,326; и) 1,5708; й) 0.

Изпитни тестове

Тест 1-1

1 задача. Уравнението

группа А: $x^3-8x^2-70x+77=0$ има единствен корен в [0,2],

група В: $2x-(1,3)^x=0$ има единствен корен в [0,1].

С метода на последователните приближения да се намери този корен с точност $\varepsilon=10^{-2}$. Да се намери достатъчният брой итерации, за да се достигне точност $\varepsilon=10^{-5}$.

2 задача. По метода на квадратния корен да се реши системата:

група А: $\left|\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=0\\ x_1+3x_2+3x_3&=2\\ x_1+3x_2+6x_3&=5\end{aligned}\right.$, група В: $\left|\begin{aligned} 3x_1+3x_2+3x_3&=0\\ 3x_1+5x_2+5x_3&=2\\ 3x_1+5x_2+6x_3&=3\end{aligned}\right.$.

Да се намери детерминантата на матрицата от коефициентите пред неизвестните на същата система.

3 задача. Да се формулира и докаже необходимото и достатъчно условие за матрицата В, така че редът:

група А: $(E - B) + (E - B)(E + B) + (E - B)(E + B)^2 + \ldots$ да е сходящ ,

група В: $(E + B) + (E + B)(E - B) + (E + B)(E - B)^2 + \ldots$ да е сходящ.

Тест 1-2

1 задача. За функцията $f(x)=3^x$ да се построи интерполационен полином на Нютон с крайни разлики и да се пресметне приближената стойност на функцията в точката x^* и се оцени грешката:

група А: интерполиране назад с възли 0, 1, 2, 3 и $x^*=2{,}7$; $|R(2{,}7)|<?$

група В: интерполиране напред с възли 1, 2, 3, 4 и $x^*=1{,}2$; $|R(1{,}2)|<?$

Да се работи с два знака след десетичната запетая. Защо?

2 задача. По метода на най-малките квадрати (МНМК) да се решат преопределените системи:

група А: $\begin{vmatrix} x+y=3 \\ 2x-y=0{,}2 \\ x+3y=7 \\ 3x+y=5 \end{vmatrix}$, група В: $\begin{vmatrix} x+y=2 \\ x-y=0 \\ 3x+y=3 \\ 3x+5y=6 \end{vmatrix}$.

3 задача. Да се направи оценка на грешката за квадратурната формула:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} c_k f(x_k),$$

когато:

група А: $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)$ не сменя знака си в $[a,b]$,

група В: $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)$ сменя знака си в $[a,b]$ само в една точка $z \in (a,b)$.

Тест 2-1

1 задача. За системата:

$$\begin{vmatrix} 10x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 10x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 10x_3 = 11 \end{vmatrix}$$

да се избере подходящият итерационен процес за решаването й.

а) Да се намери необходимият брой итерации за постигане на точност $\varepsilon = 10^{-5}$

група А: в I-ва норма,

група В: във II-ра норма.

б) Да се направят три итерации по:

група А: метода на проста итерация,

група В: метода на Зайдел

с начално приближение $x^{(0)} = (0,0,0)^T$. Работете с три знака след десетичната запетая.

Отговор: $x_{точно} = (1,0,-1)^T$, $k \ge 9$.

2 задача. Даден е полиномът $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 92$. Да се провери има ли уравнението $f(x) = 0$ корен в интервала [-3,0]. Да се уточни този корен по метода на хордите, като се направят три итерации. Работете с четири знака след десетичната запетая.

Отговор: $x^{(3)} \approx -1{,}983$

3 задача. Да се формулира и докаже необходимото и достатъчно условие за матрицата B, така че редът

$$E + (E - B^2) + (E - B^2)^2 + \dots$$

да е сходящ.

Тест 2-2

1 задача. Каква трябва да бъде стъпката *h*, за да се пресметне интегралът $\int_0^{1,4} \frac{dx}{1+2x}$ по формулата на трапеците с точност $\varepsilon = 10^{-4}$?

Отговор: $n \approx 135,\ h \approx 0{,}01$

2 задача. По МНМК да се приближи таблицата с полином от II-ра степен:

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-4	15	1	10	7	6

Отговор: $P_2 = -x^2 + 2x + 8$

3 задача. Да се направи оценка на грешката при интерполиране на $y = f(x)$ с възли: $x_2, x_3, \dots, x_k$ и стойности: $f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_k)$ с алгебричен полином от максимална степен.

Тест 3-1

1 задача. Да се реши системата по метода на Гаус-Жордан и да се пресметнат A^{-1}, det$A$:

група А: $A = \left| \begin{array}{l} -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 19 \\ x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 42 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 15 \end{array} \right.$, група В: $A = \begin{array}{l} x_1 + -2x_2 + 4x_3 = 11 \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 = -2 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = -1 \end{array}$

(работете с обикновени дроби).

2 задача. Дадено е уравнението $x^4 + 3x - 20 = 0$.

а) графически да се локализира

група А: отрицателен

група В: положителен

корен на уравнението в интервал с дължина 1.

б) да се направят три итерации по

група А: метода на Нютон

група В: метода на хордите

с пет знака след десетичната запетая.

в) да се оцени грешката на $x^{(3)}$.

3 задача. Да се формулира и докаже необходимото и достатъчно условие за матрицата В за сходимост на матричния ред:

група А: $E + (E + B)(E - 2B) + [(E + B)(E - 2B)]^2 + \ldots$

група В: $E + (E - B)(E + 2B) + [(E - B)(E + 2B)]^2 + \ldots$

Тест 3-2

1 задача. Да се изчисли приближено интегралът $\int_1^3 \sqrt{3x-2}\,dx$:

група А: по съставната формула на трапеците при $n = 8$,

група В: по съставната формула на Симпсън при $2n = 8$.

Работете с три знака след десетичната запетая. Направете оценка на грешката на получения резултат.

2 задача. Дадена е функцията

група А: $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$,   група В: $f(x) = e^x$

за $x \in [-1,1]$. Да се построи интерполационният полином на Лагранж за $f(x)$ с възли -1, 0, 1 и се оцени максималната грешка в целия интервал $[-1,1]$.

3 задача. Да се направи оценка на грешката при изчисляване на $f'(x)$ с помощта на стойностите на $f(x)$ във възлите $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$

група А: когато $x \equiv x_k$

група В: когато $x \neq x_k$

при $k = \overline{0, n}$.

Литература

1. Боянов Б., Х.Семерджиев, Числени методи, Изд. на ПУ.
2. Б.Сендов, В.Попов, Числени методи, Първа част, С., Наука и изкуство, 1976.
3. Б.Сендов, В.Попов, Числени методи, Втора част, С., Наука и изкуство, 1978.
4. Дж. Форсайт, М.Малкъм, К.Молър, Компютърни методи за математически пресмятания, С., Наука и изкуство, 1986.
5. Дж. Ортега, У.Пул, Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений, М., Наука, 1986.