Глава II. Числени методи на математическия анализ

1. Приближаване на функции

Постановка на задачата

Нека са дадени две множества M и P от функции, дефинирани в една и съща ДО (дефиниционна област), за които е изпълнено $P \subset M$. Множеството M съдържа и функции, с които се работи "трудно" (намиране на стойност, диференциране, интегриране и т.н.), докато P съдържа "лесни" за работа функции (непрекъснати, полиноми). За всяка функция $f(x)$ от множеството M търсим онази функция $p(x)$ от множеството P, която е "най-близка" до $f(x)$. След като $p(x)$ е "близка" до $f(x)$, може да се надяваме, че резултатите от действията с $p(x)$ ще бъдат "близки" до резултатите от същите действия с $f(x)$ и могат да ги заместват. Като прецизираме понятието "близост", получаваме различните начини за приближаване (апроксимиране) на функции.

5.1. Интерполация

Разглеждаме функции $f(x)$, зададени таблично:

x_i	x_0	x_1	$\dots$	x_n
$y_i = f(x_i)$	y_0	y_1	$\dots$	y_n

и множеството $P \equiv \prod_n(x)$- полиномите от $\boldsymbol{n}$ -та степен на променливата x. Ако $x_i \neq x_j$ за $i \neq j$, съществува единствен полином от $\boldsymbol{n}$ -та степен, който приема в x_i стойност y_i. Този полином се нарича **интерполационен полином на Лагранж** и има вида:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

В този случай под близост между $f(x)$ и $L_n(x)$ ще разбираме:

$L_n(x_i) = f(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n$ - съвпадане на стойностите в $(n+1)$ различни точки.

Ако: $x_0 < x_1 < ... < x_n$ и $x \in [x_0, x_n]$ процесът е **интерполация** на $f(x)$ с $L_n(x)$ и ако $x \notin [x_0, x_n]$ процесът е **екстраполация** на $f(x)$ с $L_n(x)$. Ако $f(x)$ има непрекъсната $(n+1)$ - ва производна, грешката се оценява така:

$$|R_n(x)| = |f(x) - L_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|(x-x_0)...(x-x_n)|,$$

където $M_{n+1} = \max\limits_{[p,q]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$ и $[p,q] \equiv [x_0, x_n]$ при интерполация;

$[p,q] \equiv [\min(x, x_0), \max(x, x_n)]$ при екстраполация.

Пример 1. Като се използват стойностите на $f(x) = \sqrt{x}$ за стойностите на аргумента 100, 121, 144 да се намери приближената стойност на $\sqrt{115}$ (без да се използва операцията коренуване) и се оцени грешката.

Решение:

По таблицата

x	100	121	144
$y = \sqrt{x}$	10	11	12

построяваме интерполационния полином от втора степен:

$$L_2(x) = 10\frac{(x-121)(x-144)}{(100-121)(100-144)} + 11\frac{(x-100)(x-144)}{(121-100)(121-144)} + 12\frac{(x-100)(x-121)}{(144-100)(144-121)} =$$

$$= \frac{10}{21.44}(x-121)(x-144) - \frac{11}{21.23}(x-100)(x-144) + \frac{12}{44.23}(x-100)(x-121)$$

Тогава за $x = 115$ получаваме:

$$L_2(115) = 10\frac{(115-121)(115-144)}{21.144} + 11\frac{(115-100)(115-144)}{21.23} + 12\frac{(115-100)(115-121)}{44.23}$$

или $L_2(115) = 10{,}7227555...$

За да оценим грешката (точността) на получения резултат, намираме

последователно: $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$; $y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$; $y'' = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$; $y''' = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$;

$$M_3 = \max_{[100,144]} \left| \frac{3}{8} x^{-\frac{5}{2}} \right| = \frac{3}{8\sqrt{100^5}} = \frac{3}{8.10^5};$$

$$\left| R_2(115) \right| \le \frac{1}{3!}\left(\frac{3}{8.10^5}\right).\left|(115-100)(115-121)(115-144)\right| = 0,00163125...$$

т.е грешката не надвишава 0,002.

Забележка. Ако искаме (или се налага) да извършваме междинните изчисления като закръгляме получените резултати, най-добре е да започнем с оценка на грешката и след това да закръгляме така, че грешката от закръгляне да не влияе върху точността на получения резултат. В горния пример е достатъчно да работим с точност 10^{-4}, т.е. закръгляйки до четвъртия знак след десетичната запетая, тъй като грешката на метода е в третия знак.

Пример 2. С каква точност трябва да се табулират (пресметнат) стойностите $\ln(100)$, $\ln(101)$, $\ln(102)$ и $\ln(103)$, че тя да не влияе върху грешката при интерполация на $\ln(100,5)$?

Решение:

По четирите стойности $\ln(100)$, $\ln(101)$, $\ln(102)$ и $\ln(103)$ можем да построим интерполационен полином от трета степен. Тогава грешката при интерполация на $\ln(100,5)$ може да се оцени така:

$$\left| R_3(100,5) \right| \le \frac{M_4}{4!} \left|(100,5-100).(100,5-101).(100,5-102).(100,5-103)\right|.$$

За да определим M_4 намираме последователно:

$$y = \ln x, \quad y' = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad y'' = -x^{-2},$$

$$y''' = 2x^{-3}, \quad y^{IV} = -6x^{-4}, \quad M_4 = \max_{[100,144]} \left| \frac{-6}{x^4} \right| = \frac{6}{100^4} = 6.10^{-8}.$$

След заместване в R_3 получаваме: $R_3(100,5) \le 2,3.10^{-9}$ т.е. стойностите на $\ln(100)$, $\ln(101)$, $\ln(102)$ и $\ln(103)$ трябва да се табулират поне до деветия знак след десетичната запетая.

Пример 3. Дадена е таблицата:

x	10	15	17	20
$y = f(x)$	3	7	11	17

Като се използва интерполационния полином на Лагранж, да се намери приближено решение на уравнението $y = f(x) = 10$.

Решение:

При решаване на задачата може да постъпим по два начина.

I: Да построим $L_3(x)$ по горната таблица и след това да решаваме (точно или приближено) уравнението $L_3(x) = 10$.

II: Да "обърнем" таблицата и да вземем втория ред за първи, а първия за втори. По такъв начин ще получим таблица от стойностите на обратната функция $x = x(y)$. По тази таблица построяваме интерполационен полином и стойността му при $y = 10$ е решението на задачата. Този метод може да се използва само, ако $y_i \neq y_j$ за $i \neq j$ (Защо?) и се нарича обратно интерполиране. Ще решим задачата така, т.к. в този случай не се решава полиномно уравнение.

Построяваме интерполационния полином на Лагранж по таблицата:

y	3	7	11	17
$x = x(y)$	10	15	17	20

$$L_3(x) = 10\frac{(y-7)(y-11)(y-17)}{(3-7)(3-11)(3-17)} + 15\frac{(y-3)(y-11)(y-17)}{(7-3)(7-11)(7-17)} +$$

$$+17\frac{(y-3)(y-7)(y-17)}{(11-3)(11-7)(11-17)} + 20\frac{(y-3)(y-7)(y-11)}{(17-3)(17-7)(17-11)} =$$

$$= -\frac{5}{224}(y-7)(y-11)(y-17) + \frac{3}{32}(y-3)(y-11)(y-17) -$$

$$= -\frac{17}{192}(y-3)(y-7)(y-17) + \frac{1}{42}(y-3)(y-7)(y-11)\,.$$

Стойността му при $y = 10$ е $L_3(10) = 16{,}640625$, която приемаме за решение на задачата.

Пример 4. Функцията $y = \sin(x)$ се табулира със стъпка 1^0 в интервала $[0,\pi]$ ($1^0 = \pi/180$). Да се оцени грешката при линейната интерполация на тази функция за $\forall x \in [0,\pi]$.

Решение:

Нека $x \in [x_k, x_{k+1}]$ - k -тия интервал от делението на $[0, \pi]$ със стъпка $h = 1^0 =$ 0,01745329…Тогава за грешката при линейна интерполация ще имаме

$$|R_1(x)| \le \frac{M_2}{2!}|(x - x_k)(x - x_{k+1})| .$$

За функцията $y = \sin(x)$ имаме $y'' = -\sin x \Rightarrow M_2 = 1$, $\forall x \in [0, \pi]$. Ако положим $t = x - x_k$, $x - x_{k+1} = x - (x_k + h) = x - x_k - h = t - h$, имаме $|R_1(x)| \le \frac{1}{2}|t(t-h)|$. Ще намерим най-голямата абсолютна стойност на функцията $\varphi(t) = t(t-h)$, когато $t \in [0, h]$ (тъй като при интерполация $x \in [x_k, x_{k+1}]$).

$$\varphi'(t) = 2t - h, \qquad \varphi'(h/2) = 0, \qquad \varphi(h/2) = -h^2/4 ,$$

$$\varphi(0) = \varphi(h) = 0 \Rightarrow \max_{[0,h]}|\varphi(t)| = \frac{h^2}{4}$$

Окончателно $|R_1| \le \frac{1}{2}\frac{h^2}{4} = \frac{h^2}{8} = 0{,}000038... \approx 0{,}00004$.

Пример 5. Да се намерят онези възли в $[1, 2]$, които минимизират грешката при интерполация на произволна функция с полином от трета степен. Да се оцени тази грешка за $\mathrm{f(x)} = \sqrt{\mathrm{x}}$.

Решение:

Знаем [1-2], че възлите, минимизиращи грешката в произволен интервал $[a,b]$ са: $t_k^* = \frac{b-a}{2}x_k^* + \frac{b+a}{2}$, където $x_k^* = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}$, $k = 0 \div n$ са нулите на полинома на Чебишов от I род, и оценката за грешката в този случай е:

$$|R_n| \le \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}} . \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} .$$

$$n = 3 \Rightarrow x_0^* = \cos\frac{\pi}{8},\ x_1^* = \cos\frac{3\pi}{8},\ x_2^* = \cos\frac{5\pi}{8},\ x_3^* = \cos\frac{7\pi}{8}$$

$$t_0^* = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{8} + \frac{3}{2} = 1{,}961939765...,\ t_1^* = \frac{1}{2}\cos\frac{3\pi}{8} + \frac{3}{2} = 1{,}691341715...,$$

$$t_2^* = \frac{1}{2}\cos\frac{5\pi}{8} + \frac{3}{2} = 1{,}308658285... = 3 - t_1^*,\ t_3^* =$$

$$= \frac{1}{2}\cos\frac{7\pi}{8} + \frac{3}{2} = 1{,}038060235... = 3 - t_0^* .$$

За функцията $f(x)=\sqrt{x}$ имаме $y^{IV}=-\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}}$, тогава $M_4=\max\limits_{[1,2]}\left|-\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}}\right|=\frac{15}{16}$,

$$|R_3|\le\frac{(2-1)^4}{2^7}.\frac{M_4}{4!}=\frac{15/16}{2^7.24}=\frac{5}{2^{14}}=0{,}000305\ldots$$

Пример 6. Да се построи интерполационен полином с разделени разлики за таблицата:

x	-3	2	-1	-6	0
$y=f(x)$	38	-7	-4	281	-7

и с негова помощ да се приближат $y(1)$ и $y(-2)$.

Решение:

Построяваме таблицата от разделените разлики:

n	x	$f[\,]$	$f[\,,\,]$	$f[\,,\,,\,]$	$f[\,,\,,\,,\,]$	$f[\,,\,,\,,\,,\,]$
0	-3	**38**				
1	2	-7	**-9**			
2	-1	-4	-1	**4**		
3	-6	281	-57	7	**-1**	
4	0	-7	-48	9	-1	**0**

$f[x_0,x_1]=(-7-38)/(2-(-3))=-9;\quad f[x_1,x_2]=(-4-(-7))/(-1-2)=-1;$

$f[x_2,x_3]=(281-(-4))/(-6-(-1))=-57;\quad f[x_3,x_4]=(-7-281)/(0-(-6))=-48;$

$f[x_0,x_1,x_2]=(-1-(-9))/(-1-(-3))=4;\quad f[x_1,x_2,x_3]=(-57-(-1))/(-6-2)=7;$

$f[x_2,x_3,x_4]=(-48-(-57))/(0-(-1))=9;\quad f[x_0,x_1,x_2,x_3]=(7-4)/(-6-(-3))=-1;$

$f[x_1,x_2,x_3,x_4]=(9-7)/(0-2)=-1;\quad f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]=(-1-(-1))/(0-(-3))=0.$

По формулата на Нютон за интерполиране с разделени разлики имаме:

$$L_n(x)=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+\ldots+f[x_0,\ldots,x_n](x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})$$

$$L_4(x)=38-9(x+3)+4(x+3)(x-2)-(x+3)(x-2)(x+1)+0(x+3)(x-2)(x+1)(x+6).$$

Тъй като четвъртата разделена разлика е нула, интерполационният полином е от трета степен и може да се запише като (схема на Хорнер):

$$L_4(x)=[(-(x+1)+4)(x-2)-9](x+3)+38.$$

Тогава

$y(1) \approx L_4(1) = [(-(1+1)+4)(1-2)-9](1+3)+38 = -6$;

$y(-2) \approx L_4(-2) = [(-(-2+1)+4)(-2-2)-9)](-2+3)+38 = 9$

Пример 7. С помощта на интерполационен полином с крайни разлики да се намерят приближени стойности на lg(2,15) и lg(3,1), ако се знаят стойностите:

x	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
$y = \lg x$	0,3010	0,3424	0,3802	0,4150	0,4472	0,4771

Решение:

Построяваме таблицата от крайни разлики, като използваме връзката: $\Delta^{k+1}y_i = \Delta^k y_{i+1} - \Delta^k y_i$; $\Delta^0 y_i = y_i$;

x	$y = \lg x$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
2,0 x_0 за I	**0,3010**					
2,2	0,3424	**0,0414**				
2,4	0,3802	0,0378	**-0,0036**			
2,6	0,4150	0,0348	-0,0030	**0,0006**		
2,8	0,4472	0,0322	-0,0026	0,0004	**-0,0002**	
3,0 x_0 за II	**0,4771**	**0,0299**	**-0,0023**	**0,0003**	**-0,0001**	**0,0001**

I . Тъй като точката 2,15 се намира в началото на таблицата, ще използваме формулата на Нютон за интерполиране напред. По правилото "предходната или ако няма такава - най-близката" избираме $x_0 = 2$. От равенството $x = x_0 + th$, което в случая е: $2{,}15 = 2 + 0{,}2t$ определяме $t = 0{,}75$. Последователно пресмятаме събираемите от формулата:

$$L(x_0 + th) = \sum_{k=0}^{n} \binom{t}{k} \Delta^k y_0 .$$

При $k = 0$ получаваме стойността на интерполационния полином от нулева степен:

$$L_0(2{,}15)=\binom{0{,}75}{0}.0{,}3010=0{,}3010.$$

При $k = 1$ получаваме стойността на интерполационния полином от първа степен:

$$L_1(2{,}15) = L_0(2{,}15)+ \binom{0{,}75}{1}0{,}0414 = 0{,}3010 + (0{,}75).(0{,}0414) = 0{,}3010 + 0{,}03105 =$$

$$= 0{,}33205.$$

Тук второто събираемо можем да го считаме като “коригиращо” при преминаването от интерполационен полином от нулева степен към полином от първа степен.

При $k=2$: $L_2(2{,}15) = L_1(2{,}15) + \binom{0{,}75}{3}$. (-0,0036) = 0,33205+

(-0,09375)(-0,0036) = 0,33205 + 0,00034 = 0,33239.

При $k=3$: $L_3(2{,}15) = L_2(2{,}15) + \binom{0{,}75}{3}$.(0,0006) = 0,33239 + (-0,03906). (0.0006) =

= 0,33239 – 0,00002 = 0,33237.

Тъй като поправката за преминаване от полином от втора към полином от трета степен е по-малка от точността на данните в изходната таблица, няма смисъл да изчисляваме стойността на интерполационния полином от по-висока степен. При тях поправките ще са по-малки и няма да имат практическа стойност. За това приемаме

$\lg(2{,}15) \approx L_3(2{,}15) = 0{,}33237 \approx 0{,}3324$.

Забележка 1. Междинните изчисления са извършвани с точност до пет знака предвид точността в изходната таблица.

Забележка 2. За пресмятане на псевдобиномните коефициенти може да се използва рекурентната формула: $\binom{t}{k+1} = \binom{t}{k}\frac{t-k}{k+1}$ за по-лесно намиране на следващия коефициент.

II. За точката $3{,}1$, която се намира в края на таблицата ще използваме формулата на Нютон за интерполиране назад. По правилото “следващата или ако няма такава – най-близката” определяме $x_0 = 3$. След това от равенството $3{,}1 = 3 + 0{,}2h$ намираме t = 0,5 и по формулата $L(x_0 + th) = \sum_{k=0}^{n} \binom{t+k-1}{k} \Delta^k y_{-k}$ намираме:

$L_0(3{,}1) = \binom{0{,}5-1}{0}.0{,}4771 = 0{,}4771$;

$L_1(3{,}1) = L_0(3{,}1) + \binom{0{,}5}{1}0{,}0299 = 0{,}4771 + 0{,}5.0{,}0299 = 0{,}4771 + 0{,}01495 = 0{,}49205$;

$L_2(3{,}1) = L_1(3{,}1) + \binom{1{,}5}{2}(-0{,}0023) = 0{,}49205 + 0{,}375.(-0{,}0023) = 0{,}49205 - 0{,}00086 = =0{,}49119$;

$L_3(3{,}1) = L_2(3{,}1) + \binom{2{,}5}{3} 0{,}0003 = 0{,}49119+(0{,}3125).(0{,}0003) = 0{,}49119 + 0{,}00009 = =0{,}49128.$

Тъй като поправката за преминаване от L_2 към L_3 е по-малка от 0,0001 спираме. За стойност на lg(3,1) приемаме $L_3(3{,}1) = 0{,}49128 \approx 0{,}4913$.

Забележка 3. При пресмятане на псевдобиномните коефициенти може да се използва формулата: $\binom{t+k}{k+1} = \binom{t+k-1}{k} . \frac{t+k}{k+1}$, която ни позволява да изчислим следващия коефициент като използваме стойността на предишния.

Пример 8. Да се намери $S_n = 1^2 + 2^2 + ... + n^2$.

Решение:

При решаване на тази задача ще постъпим по следния начин:

I. Ще предположим, че търсената сума S_n е полином по степените n, за който трябва да установим от коя степен е, ако предположението се окаже вярно.

II. Ще "възстановим" полинома, като построим интерполационен полином от същата степен. От теоремата за единственост на интерполационния полином следва, че той ще съвпада с търсения.

I: От равенството $\Delta^n f_i = h^n f^{(n)}(\xi)$ следва, че ако $f(x)$ е полином от ***n***-та степен ($f(x) = a_0 x^n + ...$), то n-тата крайна разлика $\Delta^n f_i = h^n n! a_0$ и не зависи от точката, в която се изчислява, а всички следващи разлики са нули. Пресмятаме последователно:

$$\Delta S_n = S_{n+1} - S_n = [1^2 + 2^2 + ... + (n+1)^2] - [1^2 + 2^2 + ... + n^2] = (n+1)^2,$$

$$\Delta^2 S_n = \Delta S_{n+1} - \Delta S_n = (n+2)^2 - (n+1)^2 = (2n+3),$$

$$\Delta^3 S_n = \Delta^2 S_{n+1} - \Delta^2 S_n = [2(n+1)+3] - (2n+3) = (2n+5) - (2n+3) = 2,$$

$$\Delta^4 S_n = 2 - 2 = 0.$$

т.е. третата крайна разлика не зависи от ***n*** и всички следващи разлики са нули, следователно $S_n \in \prod_3(n)$.

II: За да построим интерполационния полином от трета степен, който ще съвпада с търсената сума, са ни необходими четири стойности на S_n.

За по-удобно записваме $S_n = 0 + 1^2 + 2^2 + ... + n^2$ и пресмятаме стойностите $S_0 = 0$; $S_1 = 1$; $S_2 = 1 + 4 = 5$; $S_3 = 5+9 = 14$.

За построяване на интерполационния полином ще използваме формулата на Нютон за интерполиране напред с крайни разлики.

n	S_n	ΔS_n	$\Delta^2 S_n$	$\Delta^3 S_n$
$0 \equiv x_0$	**0**			
1	1	**1**		
2	5	4	**3**	
3	14	9	5	**2**

От равенството $n = x_0 + th,\ (h = 1)$ определяме $t = n$ и тогава:

$$L_3(n) = \binom{n}{0}.0 + \binom{n}{1}.1 + \binom{n}{2}.3 + \binom{n}{3}.2 = n + 3\frac{n(n-1)}{2} + 2\frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Забележка. Същият отговор ще се получи и ако се използва формулата за интерполиране назад (тогава $x_0 = 3;\ n = 3 + t.1 \Rightarrow t = n - 3$), или се вземат други четири стойности (равноотдалечени !) на S_n.

Задачи за упражнения

1) Като се използва интерполационен полином, построен по таблицата:

x	0	1	3	5
y	-5	0	2	8

да се намери приближената стойност на функцията за $x = 1,5$.

Отговор: $f(1,5) \approx 1,0875$.

2) Да се построи интерполационен полином по таблицата

x	0	1/27	1/8	1
$\sqrt[3]{x}$	0	1/3	1/2	1

С негова помощ да се пресметне $\sqrt[3]{0,5}$ и $\sqrt[3]{1,5}$. Може ли да се оцени грешката в този случай?

3) Функцията $y = \sqrt[3]{x}$ се табулира във възлите 1; 1,1; 1,3; 1,5 и 1,6. Като се използва $L_2(x)$ построен по получената таблица да се пресметне $\sqrt[3]{1,15}$ и се оцени грешката. Кои възли трябва да се използват?

4) Дадена е таблицата

x	-1	0	1	2	4
$f(x)$	-7	-4	-2	4	8

Като се използва обратно интерполиране да се намери приближено решение на уравнението:

а) $f(x) = 6$; Отговор: $x \approx 2,388$

б) $f(x) = 0$; Отговор: $x \approx 1,690$.

в) $y(x) = 0$ по таблицата:

x	1	2	2,5	3
y	-6	-1	5,625	16

Отговор: $x \approx 2,122$.

5) Функцията $y = \sqrt{x}$ се табулира в $[1,2]$ със стъпка h. Колко голяма трябва да е стъпката (в колко точки трябва да се пресметне функцията, $h = (b\text{-}a)/N$), че грешката при интерполация с полином от втора степен да не надвишава 10^{-6}.

Отговор: $h \leq \sqrt{3}/50$; $N \geq 29$.

6) Да се намери минималната степен на интерполационния полином и разположението на интерполационните възли, че грешката при интерполация на $y = \sqrt{x}$ в [1,2] да не надвишава 10^{-5}.

Отговор: $n = 6$, упътване: $M_{n+1} = (2n\text{-}1)!!/2^{n+1}$.

7) Да се намерят всички разделени разлики за функцията $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 1$ по възлите $x_k = x_0 + kh,\ k = \overline{-2,2}$.

8) Да се покаже, че

$$f[x_0, x_1, ..., x_n] = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & ... & x_0^{n-1} & f_0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & ... & x_1^{n-1} & f_1 \\ . & . & . & ... & . & . \\ 1 & x_n & x_n^2 & ... & x_n^{n-1} & f_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & ... & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & ... & x_1^{n-1} & x_1^n \\ . & . & . & ... & . & . \\ 1 & x_n & x_n^2 & ... & x_n^{n-1} & x_n^n \end{vmatrix}} .$$

9) Да се построи интерполационен полином с крайни/разделени разлики за таблицата и с негова помощ да се изчисли $y(0,5)$:

а)

x	-1	0	1	2
y	1	1	1	7

Отговор: $y(0,5) \approx 0,625$

б)

x	-1	0	1	2
y	-3	-1	1	8

Отговор: $y(0,5) \approx -0,3125$

10) С помощта на интерполационен полином с крайни разлики да се намерят сумите:

а) $S_n = 1^2 + 2^2 + ... + n^2 + (n+1)^2$

б) $S_n = 1^3 + 2^3 + ... + n^3$

в) $S_n = 4 + 7 + ...(3n+1)$

г) $S_n = 5 + 9 + ... + (4n+1)$

д) $S_n = 1^2 + 3^2 + ... + (2n-1)^2$

е) $S_n = 2^2 + 4^2 + ... + (2n+2)^2$