

**Решени изпитни теми по Висша Математика I
за Технически Университет — София**

Николай Икономов

1 юни 2010 г.

Съдържание

Указател	3
1 Първа тема	4
2 Втора тема	20
3 Трета тема	30
4 Четвърта тема	42
5 Пета тема	49
6 Шеста тема	56
7 Седма тема	70
Литература	85

Темите са взети от форума на ТУ–София и от студенти. Научните степени на преподавателите са взети от тук. За контакти: nike32@abv.bg

- Първа тема — доц. д-р Д. Симеонова (за Юли 2009)
- Втора тема — доц. д-р Л. Гърневска (за Януари 2008)
- Трета, четвърта, пета тема — доц. д-р Ю. Пешева (за Юли 2008)
- Шеста, седма тема — доц. д-р А. Георгиева (за Януари 2010)

Означения: тангенс $\tan(x)$, котангенс $\cot(x)$, аркус тангенс $\arctan(x)$.

Указател

- Линейна алгебра
 - Комплексни числа — II-1a, VI-1a
 - Полиноми (правило на Хорнер) — VI-1б+теория, VII-1a
 - Ранг на матрица — IV-4, VI-2a, VII-1б
 - Матрични уравнения — II-1б+теория, III-5, V-4
 - Матрични уравнения (символно) — VI-2б+теория, VII-2б
 - Метод на Гаус — I-1a, VI-3a+теория, VII-2a
- Математически анализ
 - Граници — IV-1a, V-1a
 - Граници (правило на Лопитал) — I-4a+теория, III-1a, IV-1б, V-1б, VII-4a
 - Функции — I-5a, II-2, III-3, IV-2б, V-2б, VII-4б!
 - Диференциали — I-4б, III-1б, III-1в, V-2a
 - Интеграли — I-6a, II-3, IV-3a, V-3a, V-3б, VII-5б!
 - Интеграли (със субституция) — I-6б, III-2a, III-2в, IV-3б, VII-5a!
 - Интеграли (специални) — III-2б, IV-3в, V-3в, V-6
- Аналитична геометрия
 - Триъгълници — I-2, V-5, VI-4б, VII-3a
 - Приви и равнини в пространството — I-1б, I-3+теория, III-6+теория, IV-5, VI-5, VII-3б
 - Повърхнини — VI-6a, VII-6a

1 Първа тема

Задача 1а. Решете системата при $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x + y - az = 0 \\ x - (a + 2)y + 3z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

Задача 1б. Докажете, че точките $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$ и $D(2, 1, 3)$ лежат в една равнина. Намерете дължината на ортогоналната проекция на $\overrightarrow{AB}$ върху $\overrightarrow{AC}$.

Задача 2. За триъгълник ABC са дадени: $A(3, -1)$, медиана $m : 6x + 10y - 59 = 0$ и ъглополовяща $l : x - 4y + 10 = 0$ (медианата и ъглополовящата са през различни върхове на триъгълника). Намерете уравненията на страните AB и BC .

Задача 3. Дадени са правите

$$p : \begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0 \\ x - y - z - 22 = 0 \end{cases}, \quad q : \frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}$$

(а) Докажете, че p и q са успоредни.

(б) Намерете разстоянието между тях.

Задача 4а.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\cot(x)}$$

Задача 4б.

$$y = x^{\ln(x)}, \quad dy = ?$$

Задача 5а. Намерете локалните екстремуми на функцията $y = \frac{\ln^2(x)}{x}$

Задача 5б. Докажете необходимите условия за съществуване на локален екстремум на диференцируема функция $y = f(x)$

Задача 6а.

$$\int x \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) dx$$

Задача 6б.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 \sin(x) + \cos(x) + 3}$$

Всяка подточка е по 5 точки.

Задача 1а. Решете системата при $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + y - az = 0 \\ x - (a + 2)y + 3z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

Решение. Метод на Гаус. Виж Тема 6, задача 3а. Разменяме първо и трето уравнение.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & -(a+2) & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -a & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{P1} - \text{P3}]{\text{P1} - \text{P2}} \\ & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & a+4 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & a-3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{P2} - (a+4)\text{P3}} \\ & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & a+4 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 - (a+4)(a-3) & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Сега трябва да изследваме третия ред.

$$\begin{aligned} -6 - (a+4)(a-3) &= 0 \quad / \cdot (-1) \\ 6 + (a+4)(a-3) &= 0 \\ 6 + a^2 - 3a + 4a - 12 &= 0 \\ a^2 + a - 6 &= 0 \\ a_1 = -3, \quad a_2 = 2 \end{aligned}$$

I случай: $a = -3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Имаме два реда с три неизвестни, $3 - 2 = 1$ параметър. Той ще е $z = p$.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ y - 6z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x + 2y - 3p = 0 \\ y - 6p = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -9p \\ y = 6p \end{cases}$$

Решението на I случай:

$$\begin{cases} x = -9p \\ y = 6p \\ z = p \end{cases}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} p$$

II случай: $a = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Пак имаме два реда с три неизвестни, $3 - 2 = 1$ параметър, $z = p$.

$$\left| \begin{array}{l} x + 2y - 3z = 0 \\ 6y - 6z = 0 \end{array} \right| \implies \left| \begin{array}{l} x + 2y - 3p = 0 \\ 6y - 6p = 0 \end{array} \right| \implies \left| \begin{array}{l} x = p \\ y = p \end{array} \right|$$

Решението на II случай:

$$\begin{array}{l} x = p \\ y = p \\ z = p \end{array}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} p$$

III случай: $a \neq -3$, $a \neq 2$

Този случай е доста завъртян, може и да се прескочи.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & a+4 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+a-6 & 0 \end{array} \right)$$

Разглеждаме третия ред $(a^2 + a - 6)z = 0$. Казали сме, че $a \neq -3$, $a \neq 2$, тогава остава единствено z да е равно на нула, $z = 0$. Сега преписваме матрицата като нулираме z , също така третия ред може да се изтрие (той става изцяло нулев).

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & a+4 & 0 \end{array} \right)$$

Получихме нова матрица, чието второ уравнение е с едно ненулево неизвестно, т.е. трябва да изследваме втория ред.

$$(a+4)y = 0$$

1 под-случай: $a = -4$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \implies (1 \ 2 \mid 0)$$

Имаме един ред с две неизвестни, $2 - 1 = 1$ параметър, $y = p$.

$$x + 2y = 0 \implies x + 2p = 0 \implies x = -2p$$

Решението на 1 под-случай:

$$\begin{array}{l} x = -2p \\ y = p \\ z = 0 \end{array}, A_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} p$$

2 под-случай: $a \neq -4$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & a+4 & 0 \end{array} \right)$$

Тогава решението на $(a+4)y = 0$ е $y = 0$. Остава само първото уравнение $x + 2y = 0 \implies x + 0 = 0$. Решението на 2 под-случай:

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ z &= 0 \end{aligned}$$

Получихме нулевото решение, няма нужда да го записваме в отговора.

Отговор:

$$\begin{aligned} a = -3 : \quad & \begin{aligned} x &= -9p \\ y &= 6p \\ z &= p \end{aligned}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} p \\ a = 2 : \quad & \begin{aligned} x &= p \\ y &= p \\ z &= p \end{aligned}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} p \\ a = -4 : \quad & \begin{aligned} x &= -2p \\ y &= p \\ z &= 0 \end{aligned}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} p \end{aligned}$$

□

Задача 16. Докажете, че точките $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$ и $D(2, 1, 3)$ лежат в една равнина. Намерете дължината на ортогоналната проекция на $\overrightarrow{AB}$ върху $\overrightarrow{AC}$.

Решение. За да го докажем, трябва да образуваме три вектора. Записваме ги като детерминанта, ако тя е нула, то векторите лежат в една равнина.

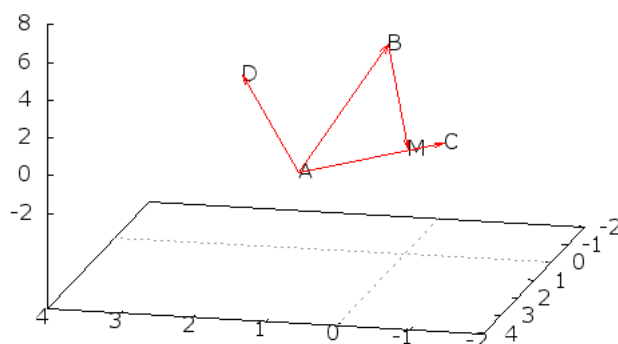
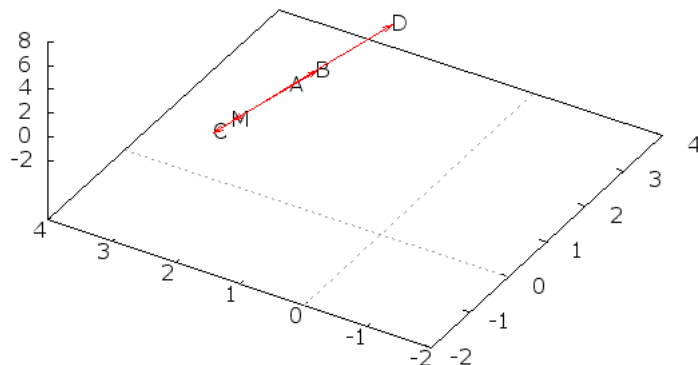
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= B - A = (0 - 1, 1 - 2, 5 - (-1)) = (-1, -1, 6) \\ \overrightarrow{AC} &= C - A = (-1 - 1, 2 - 2, 1 - (-1)) = (-2, 0, 2) \\ \overrightarrow{AD} &= D - A = (2 - 1, 1 - 2, 3 - (-1)) = (1, -1, 4) \\ \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

Това се нарича линейна комбинация на вектори. Следователно детерминантата ще е нула. Но нека проверим.

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 2 + 12 - 0 - 2 - 8 = 0$$

Сега да намерим дължината на проекцията на $\overrightarrow{AB}$ върху $\overrightarrow{AC}$, т.е. търсим дължината на AM . Ще припомним скалярно произведение на два вектора.

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |a||b| \cos(\varphi), \quad \cos(\varphi) = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|a||b|}$$



Ще са ни необходими $\overrightarrow{AB}(-1, -1, 6)$, $\overrightarrow{AC}(-2, 0, 2)$. Трябва да изчислим косинуса на $\angle CAB$, отбелязваме с $\cos(\varphi)$.

$$\cos(\varphi) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{(-1, -1, 6) \cdot (-2, 0, 2)}{\sqrt{1+1+36} \sqrt{4+0+4}} = \frac{2+0+12}{\sqrt{38} \sqrt{8}} = \frac{14}{4\sqrt{19}} = \frac{7}{2\sqrt{19}}$$

Триъгълник ABM е правоъгълен, следователно можем да напишем:

$$\cos(\varphi) = \frac{|AM|}{|AB|} \implies |AM| = |AB| \cos(\varphi)$$

Пишем модули, за да отбележим, че това е дължината, а не самия вектор.

$$|AM| = \sqrt{1+1+36} \frac{7}{2\sqrt{19}} = \sqrt{38} \frac{7}{2\sqrt{19}} = \frac{7}{\sqrt{2}}$$

Дължината на ортогоналната проекция е $7/\sqrt{2}$. □

Задача 2. За триъгълник ABC са дадени: $A(3, -1)$, медиана $m : 6x + 10y - 59 = 0$ и ъглополовяща $l : x - 4y + 10 = 0$ (медианата и ъглополовящата са през различни върхове на триъгълника). Намерете уравненията на страните AB и BC .

Решение. Виж чертежа. За да намерим уравненията на AB и BC ни трябва координатите на $A(3, -1)$, $B(x_1, y_1)$ и $C(x_2, y_2)$. Вече имаме A . В случая нека започнем с B . (Ако медианата е прекарана през B , ще започнем с C .)

Точката M е с координати $M\left(\frac{3+x_1}{2}, \frac{-1+y_1}{2}\right)$, тъй като разполюва страната AB . Заместваме M в уравнението на медианата, заместваме B в уравнението на ъглополовящата, за да намерим координатите на точка B .

$$\begin{cases} 6\frac{3+x_1}{2} + 10\frac{-1+y_1}{2} - 59 = 0 \\ x_1 - 4y_1 + 10 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 9 + 3x_1 + 5y_1 - 5 - 59 = 0 \\ x_1 = 4y_1 - 10 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 + 5y_1 - 55 = 0 \\ x_1 = 4y_1 - 10 \end{cases}$$

$$3(4y_1 - 10) + 5y_1 - 55 = 0$$

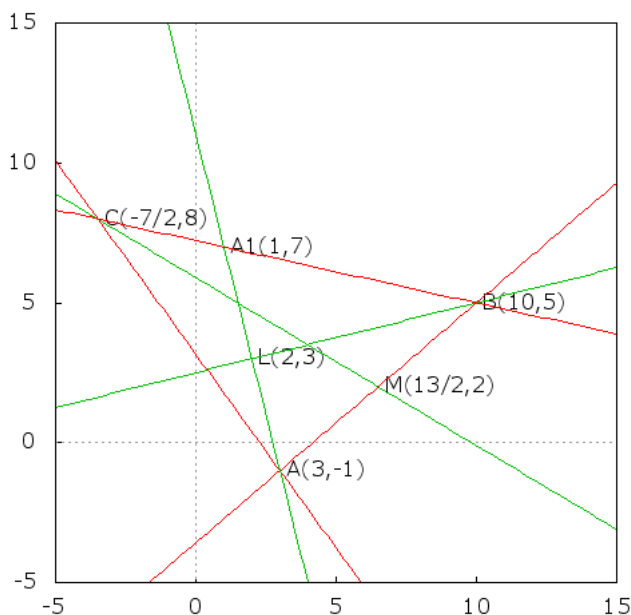
$$12y_1 - 30 + 5y_1 - 55 = 0$$

$$17y_1 - 85 = 0$$

$$y_1 = 5$$

$$x_1 = 10$$

Следователно имаме $B(10, 5)$.



Сега трябва да изчислим уравнението на правата AA_1 . Нека да обърнем внимание на следното: за триъгълник AA_1B правата BL се явява височина, тъй като BL е ъглополовяща на $\angle ABC$. Тъй като $\angle ALB = 90^\circ$, то $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BL} = 0$ (скаларното произведение е нула).

Въвеждаме понятие нормален вектор, нормалният вектор на BL е $(1, -4)$ (това са коефициентите пред x и y от $x - 4y + 10 = 0$). Трябва да намерим нормалния вектор на AA_1 . Най-лесно е да разменим тези две цифри и на едната да сменим знака, примерно $(4, 1)$. Сега $(1, -4)(4, 1) = 0$. Следователно $(4, 1)$ е нормалният вектор на AA_1 .

Образуваме уравнението на AA_1 по следния начин: $4x + y + c = 0$. Трябва да намерим c . Точката A принадлежи на правата AA_1 , следователно можем да я заместим в нейното уравнение.

$$4 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) + c = 0 \implies 12 - 1 + c = 0 \implies c = -11$$

Тогава уравнението на AA_1 е $4x + y - 11 = 0$. Точката L принадлежи и на двете прави, AA_1 и BL . Ако ги пресечем, ще намерим координатите на L .

$$\begin{cases} 4x + y - 11 = 0 / \cdot (4) \\ x - 4y + 10 = 0 \end{cases}$$

$$16x + x - 44 + 10 = 0$$

$$17x - 34 = 0$$

$$x = 2$$

$$y = 3$$

Следователно $L(2, 3)$. Правата BL се явява и медиана за триъгълник AA_1B , тогава за $A_1(x^*, y^*)$ имаме:

$$\frac{3 + x^*}{2} = 2, \quad \frac{-1 + y^*}{2} = 3, \quad x^* = 1, \quad y^* = 7, \quad A_1(1, 7).$$

Сега намираме уравнението на A_1B по формулата за уравнение на права по две точки, $A_1(1, 7)$, $B(10, 5)$:

$$\begin{aligned} A_1B : \frac{x-1}{10-1} &= \frac{y-7}{5-7} \\ A_1B : \frac{x-1}{9} &= \frac{y-7}{-2} \\ A_1B : -2x+2 &= 9y-63 \\ A_1B : 2x+9y-65 &= 0 \end{aligned}$$

Най-после можем да намерим координатите на точката C . Това става чрез пресичане на правите A_1B и CM (медианата).

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{l} 2x+9y-65=0/ \cdot (-3) \\ 6x+10y-59=0 \end{array} \right. \\ -27y+10y+3.65-59=0 \\ -17y=-136 \\ y=8 \\ x=-\frac{7}{2} \end{aligned}$$

Следователно $C(-7/2, 8)$. Сега намираме уравненията на AB и BC по две точки. $A(3, -1)$, $B(10, 5)$, $C(-7/2, 8)$.

$$\begin{aligned} AB : \frac{x-3}{10-3} &= \frac{y-(-1)}{5-(-1)} \\ AB : \frac{x-3}{7} &= \frac{y+1}{6} \\ AB : 6x-18 &= 7y+7 \\ AB : 6x-7y-25 &= 0 \\ BC : \frac{x-10}{-7/2-10} &= \frac{y-5}{8-5} \\ BC : \frac{x-10}{-27/2} &= \frac{y-5}{3} \\ BC : 3x-30 &= -\frac{27}{2}y + \frac{27}{2}5 \\ BC : 6x-60 &= -27y+135 \\ BC : 6x+27y-195 &= 0 \end{aligned}$$

Отговор: $AB : 6x - 7y - 25 = 0$, $BC : 6x + 27y - 195 = 0$. □

Задача 3. Дадени са правите

$$p : \begin{cases} 2x+2y-z-10=0 \\ x-y-z-22=0 \end{cases}, \quad q : \frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}$$

- (а) Докажете, че p и q са успоредни.
(б) Намерете разстоянието между тях.

Решение. Правата q е записана чрез каноничното си уравнение, правата p — като пресечница на две равнини. Трябва да намерим каноничното уравнение на правата p . Разглеждаме системата уравнения.

$$\begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0 \\ x - y - z - 22 = 0 \end{cases}$$

Избираме две неизвестни от трите които имаме, x, y, z , и взимаме коефициентите пред тях. В случая x и z . Ако детерминантата е нула, ще трябва да вземем други две.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - (-1) = -1 \neq 0$$

Тези две неизвестни които сме взели остават отляво; другото неизвестно и свободния коефициент отдясно, неизвестното се записва като параметър λ .

$$\begin{cases} 2x - z = 10 - 2y \\ x - z = 22 + y \end{cases}, y = \lambda$$
$$\begin{cases} 2x - z = 10 - 2\lambda \\ x - z = 22 + \lambda \end{cases}$$

От второто уравнение изразяваме z и го заместваем в първото.

$$2x + 22 + \lambda - x = 10 - 2\lambda \implies x = -3\lambda - 12 \implies \lambda = \frac{x + 12}{-3}$$

Заместваем x в първото или второто уравнение (в случая във второто).

$$-3\lambda - 12 - z = 22 + \lambda \implies z = -4\lambda - 34 \implies \lambda = \frac{z + 34}{-4}$$

За y имаме

$$y = \lambda \implies \lambda = \frac{y - 0}{1}$$

Сега приравняваме λ и получаваме каноничното уравнение на правата p .

$$p: \frac{x + 12}{-3} = \frac{y - 0}{1} = \frac{z + 34}{-4}$$

Сравняваме с уравнението на q .

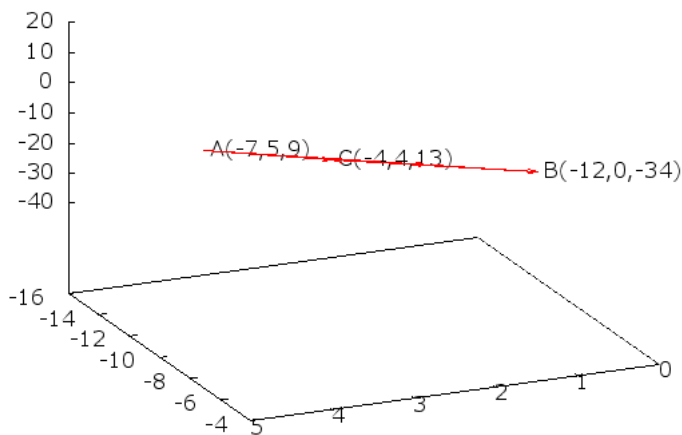
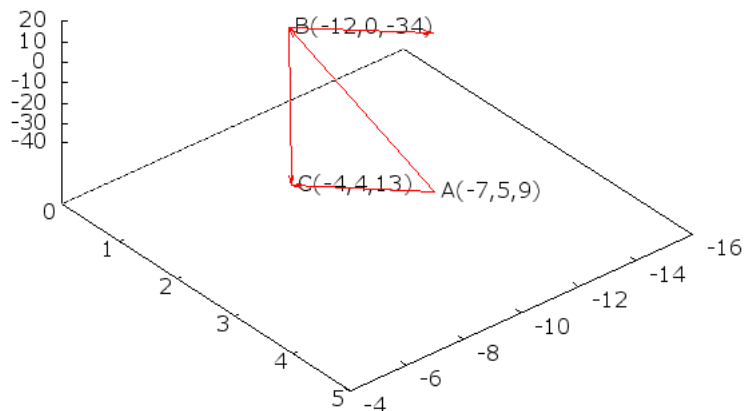
$$q: \frac{x + 7}{3} = \frac{y - 5}{-1} = \frac{z - 9}{4}$$

За да са успоредни правите, числата в знаменател (това е вектор) трябва да са равни или да са линейна комбинация.

$$(3, -1, 4) = -1(-3, 1, -4)$$

В случая двата вектора са линейна комбинация, следователно правите са успоредни.

Сега трябва да намерим разстоянието между двете прави. Виждаме, че точка $A(-7, 5, 9)$ принадлежи на правата q , а точка $B(-12, 0, -34)$ принадлежи на p . Това са числата от числителя на правите със знак минус :) Чертежа е подобен на този от задача 16. Ъгъл $\angle ACB = 90^\circ$.



Образуваме вектор $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-12, 0, -34) - (-7, 5, 9) = (-12 + 7, 0 - 5, -34 - 9) = (-5, -5, -43)$$

Вектор $\vec{a}$ е успореден и на двете прави, p и q (в случая е взет от p).

$$\vec{a}(-3, 1, -4)$$

Сега намираме косинуса на ъгъла между векторите $\overrightarrow{AB}(-5, -5, -43)$ и $\vec{a}(-3, 1, -4)$ чрез скаларното им произведение.

$$\overrightarrow{AB}\vec{a} = |AB||a| \cos(\varphi)$$

$$\cos(\varphi) = \frac{(-5, -5, -43)(-3, 1, -4)}{\sqrt{25 + 25 + 43^2}\sqrt{9 + 1 + 16}} = \frac{15 - 5 + 172}{\sqrt{1899}\sqrt{26}} = \frac{182}{3\sqrt{211}\sqrt{26}}$$

Нека да отбележим, че $|AB| = 3\sqrt{211}$. Триъгълник ABC е правоъгълен, така че можем да използваме нормалната формула за косинус.

$$\cos(\varphi) = \frac{|AC|}{|AB|} \implies |AC| = |AB| \cos(\varphi)$$

$$|AC| = 3\sqrt{211} \frac{182}{3\sqrt{211}\sqrt{26}} = \frac{182}{\sqrt{26}}$$

Прилагаме Питагоровата теорема за триъгълник ABC и намираме дължината на BC , което е разстоянието между правите p и q .

$$|BC|^2 + |AC|^2 = |AB|^2$$

$$|BC|^2 + \frac{182^2}{26} = 9.211$$

$$|BC|^2 = 9.211 - \frac{7^2 \cdot 26^2}{26}$$

$$|BC|^2 = 9.211 - 49.26$$

$$|BC|^2 = 625$$

$$|BC| = 25$$

Разстоянието между правите е 25. □

Задача 4а.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\cot(x)}$$

Решение. Правило на Лопитал. Диференцират се числителя и знаменателя поотделно, когато имаме основна неопределена форма.

$$\left[\frac{0}{0} \right], \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

Тези две форми се наричат основни неопределени форми и само за тях важи правилото на Лопитал. Другите форми се свеждат до тези.

$$[0.\infty] = \left[\frac{0}{1/\infty} \right] = \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$[0.\infty] = \left[\frac{\infty}{1/0} \right] = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

Следните форми се свеждат до $[0, \infty]$.

$$[0^0] = e^{[0, (-\infty)]}, [1^\infty] = e^{[\infty, 0]}, [\infty^0] = e^{[0, \infty]}$$

Забележка: Тези неща се получават щом заместим със стойността към която клони x в границата (нарича се граничен преход). Ако получим нещо от горните видове, трябва да използваме правилото на Лопитал. Ако получим число, нула, безкрайност — задачата е решена.

Тук ще използваме правилото на Лопитал за диференциране на граници.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\cot(x)} = [1^\infty] \implies \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(1+x^2)\cot(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x^2)\cot(x)}$$

Когато имаме 1^∞ , се повдига на степен e и се логаритмува. Няма да пишем e -то засега, но не трябва да го забравяме накрая.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + x^2)^{\cot(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \cot(x) \ln(1 + x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) \ln(1 + x^2)}{\sin(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{\tan(x)} = \left[\frac{0}{0} \right] \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} 2x}{\frac{1}{\cos^2(x)}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos^2(x)}{1+x^2} = \frac{0 \cos(0)}{1+0} = 0 \end{aligned}$$

Когато имаме нула върху нула, числителя и знаменателя *поотделно* се диференцират. Щом вече нямаме неопределеност, т.е. имаме нула върху единица, можем да направим граничен преход като заменим всяка поява на x с границата му, т.е. $x = 0$.

Не трябва да забравяме e -то, тъй като цялата граница беше повдигната на степен $e \implies e^0 = 1$. Отговорът е единица. $\square$

Задача 4б.

$$y = x^{\ln(x)}, \quad dy = ?$$

Решение. Функция на степен функция се решава само чрез повдигане на степен e и логаритмуване (т.е. за диференциране и търсене на граници). Целта е да диференцираме степента на e -то, самото e ще се върне в оригиналната функция.

$$dy = (x^{\ln(x)})' = (e^{\ln(x)\ln(x)})' = (e^{\ln(x)\ln(x)})' = (e^{\ln^2(x)})' = e^{\ln^2(x)} (\ln^2(x))'$$

Сега тук има един трик — $e^{\ln^2(x)}$ се връща откъдето е дошло, т.е. $e^{\ln^2(x)} = x^{\ln(x)}$. Целта на това беше да диференцираме степента на e -то. Нека да диференцираме отделно $\ln^2(x)$.

$$(\ln^2(x))' = 2 \ln(x) \frac{1}{x} 1 = \frac{2 \ln(x)}{x}$$

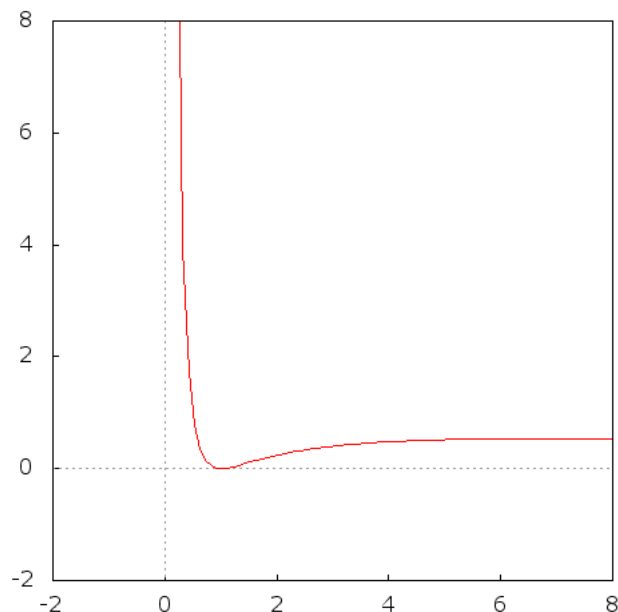
Като комбинираме двете неща получаваме

$$dy = (x^{\ln(x)})' = e^{\ln^2(x)} (\ln^2(x))' = x^{\ln(x)} \frac{2 \ln(x)}{x}$$

и това е отговора на задачата. $\square$

Задача 5а. Намерете локалните екстремуми на функцията $y = \frac{\ln^2(x)}{x}$

Решение. Графиката на функцията.



Екстремумите се намират чрез първа производна.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \left(\frac{\ln^2(x)}{x} \right)' = \frac{2 \ln(x) \frac{1}{x} x - \ln^2(x) 1}{x^2} = \frac{2 \ln(x) - \ln^2(x)}{x^2}$$

Задължително $x \neq 0$. Първата производна се приравнява на нула и се намират корените. Тъй като $x \neq 0$, ще изследваме само числителя.

$$2 \ln(x) - \ln^2(x) = 0 \implies \ln(x)(2 - \ln(x)) = 0$$

Сега имаме че или $\ln(x) = 0$, или $2 - \ln(x) = 0$.

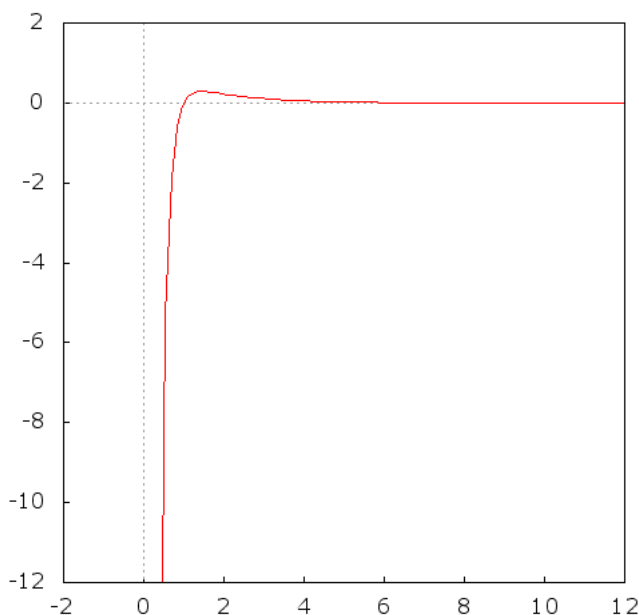
$$\ln(x) = 0 \implies x_1 = e^0 = 1$$

$$\ln(x) = 2 \implies x_2 = e^2$$

Трябва да вземем две точки, отляво и отдясно на предполагаемия локален екстремум, и ако знака на първата производна е различен, то имаме екстремум.

$$x = 0.5 : y'(0.5) = \frac{\ln(0.5)(2 - \ln(0.5))}{0.025}, \ln(0.5) < 0 \implies y'(0.5) < 0$$

$$x = 1.5 : y'(1.5) = \frac{\ln(1.5)(2 - \ln(1.5))}{2.25}, \ln(1.5) > 0 \implies y'(1.5) > 0$$



Следователно $x_1 = 1$ е локален минимум. Знака на логаритмичната функция се сменя при $x = 1$, а знака на експоненциалната функция се сменя при $x = 0$. Т.е. $\ln(e^2) > 0$ в някаква околност на $x = e^2$, следователно при $x_2 = e^2$ няма екстремум (вижда се и на графиката).

Отговор: Локален минимум в $x_1 = 1$. □

Задача 5б. Докажете необходимите условия за съществуване на локален екстремум на диференцируема функция $y = f(x)$.

Решение. От лекциите: Необходимо условие — ако $f(x)$ има локален екстремум, то или $f'(x_0) = 0$, или $f'(x_0)$ не съществува.

Доказателствата се прескачат. □

Задача 6а.

$$\int x \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) dx$$

Решение. Разрешени стойности за x .

$$\frac{1-x}{1+x} > 0 \implies x \in (-1, 1)$$

Логаритъм в интеграл има само едно решение: диференциране по части.

$$\begin{aligned} \int x \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) dx &= \frac{1}{2} \int \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) d(x^2) = \\ &= \frac{1}{2} \left[x^2 \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) - \int x^2 d \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \right] = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) - \int \frac{x^2}{2} d \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \end{aligned}$$

Няма да записваме първото събираемо, само интеграла. Накрая на задачата ще ги обединим.

$$\begin{aligned}
 - \int \frac{x^2}{2} d \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) &= - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{\frac{1-x}{1+x}} \frac{-1(1+x) - (1-x)1}{(1+x)^2} dx = \\
 &= - \int \frac{x^2}{2} \frac{1+x}{1-x} \frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} dx = - \int \frac{x^2}{2} \frac{-2}{(1-x)(1+x)} = \\
 &= \int \frac{x^2}{1-x^2} dx = \int \frac{x^2+1-1}{1-x^2} dx = \int \frac{dx}{1-x^2} + \int \frac{x^2-1}{1-x^2} dx = \\
 &= \int \frac{dx}{1-x^2} - \int \frac{1-x^2}{1-x^2} dx = \int \frac{dx}{1-x^2} - \int dx = \int \frac{dx}{1-x^2} - x
 \end{aligned}$$

Относно интеграла. Разлагаме $1-x^2$ на $(1-x)(1+x)$, корените са $1, -1$.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1-x^2} &= \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} \\
 1 &= A(1+x) + B(1-x)
 \end{aligned}$$

Заместваме с $x = 1$.

$$1 = A(1+1) \implies A = \frac{1}{2}$$

Сега с $x = -1$.

$$1 = B(1-(-1)) \implies B = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{1-x^2} &= \int \frac{1/2 dx}{1-x} + \int \frac{1/2 dx}{1+x} = \frac{1}{2} \left(- \int \frac{d(1-x)}{1-x} + \int \frac{d(1+x)}{1+x} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} (-\ln |1-x| + \ln |1+x|) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)
 \end{aligned}$$

Защото имаме $x \in (-1, 1)$. Записваме решението.

$$\begin{aligned}
 \int x \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) dx &= \frac{x^2}{2} \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) - x + C = \\
 &= \frac{x^2}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{-1} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) - x + C = \\
 &= -\frac{x^2}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) - x + C = \\
 &= \frac{1-x^2}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) - x + C
 \end{aligned}$$

Интегралът е неопределен, затова се добавя константа накрая (защото това са семейство интегрални криви). $\square$

Задача 66.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 \sin x + \cos x + 3}$$

Решение. Щом интеграла има само синуси и косинуси, най-лесно е да се направи универсалната субституция $\tan(x/2)$.

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = t, \quad x = 2 \arctan(t), \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$x = 0 \implies t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \tan(0) = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} \implies t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

Сега като сме изчислили границите, можем да заместим всичко. Привеждаме знаменателя под общ знаменател $1+t^2$, което се съкращава с $1+t^2$ от dx .

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 \sin x + \cos x + 3} &= \int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2 \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + 3} = \\ &= \int_0^1 \frac{2dt}{4t + 1 - t^2 + 3 + 3t^2} = \int_0^1 \frac{2dt}{2t^2 + 4t + 4} = \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + 2t + 2} = \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{1 + (t^2 + 2t + 1)} = \int_0^1 \frac{d(t+1)}{1 + (t+1)^2} = \\ &= \arctan(t+1)|_0^1 = \arctan(2) - \arctan(1) = 1.107 - 0.785 = 0.322 \end{aligned}$$

Това е в радиани. В градуси: $\arctan(2) - \arctan(1) = 63.43 - 45 = 18.43^\circ$. Можем да добавяме константи към диференциала, тъй като тяхната производна е нула.

Отговор: 0.322, 18.43°

□

2 Втора тема

Задача 1а. Да се намери стойността на детерминантата при $z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & z^3 & z^6 \\ 1 & z^6 & z^3 \end{vmatrix}$$

Задача 1б. Да се реши матричното уравнение.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Задача 2. Да се изследва и да се построи графиката на функцията.

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(x) - 1}$$

Задача 3. Да се реши интегралът.

$$\int_0^1 \frac{x e^{\arctan(x)} dx}{(1+x^2)^{3/2}}$$

Задача 4а. Докажете необходимото и достатъчно условие за съществуване на обратна матрица.

Задача 4б. Докажете, че всяка непрекъсната функция в затворен интервал е равномерно непрекъсната.

Задача 5. Докажете, че ако функцията $f(x)$ е интегрируема в интервала $[a, b]$ и $x \in (a, b]$, то функцията

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

е непрекъсната в точката x .

Задача 6а. Напишете различните видове уравнения на права в равнината.

Задача 6б. На правата

$$g : \frac{x+25}{9} = \frac{y}{-1} = \frac{z-26}{-7}$$

да се намери точката P , намираща се на равни разстояния от две дадени точки $A(3, 11, 4)$ и $B(-5, -13, -2)$.

Всяка подточка е по 5 точки.

Задача 1а. Да се намери стойността на детерминантата при $z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & z^3 & z^6 \\ 1 & z^6 & z^3 \end{vmatrix}$$

Решение. Лесният начин.

$$z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$$

Тогава да видим колко е z^3 .

$$\begin{aligned} z^3 &= \left(-\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})\right)^3 = -\frac{1}{8}(1 + i\sqrt{3})^3 \\ (1 + i\sqrt{3})^3 &= (1 + i\sqrt{3})^2(1 + i\sqrt{3}) = \\ &= (1 + 2i\sqrt{3} + 3i^2)(1 + i\sqrt{3}) = (2i\sqrt{3} - 2)(i\sqrt{3} + 1) = \\ &= 2(i\sqrt{3} - 1)(i\sqrt{3} + 1) = 2(3i^2 - 1^2) = 2(-3 - 1) = -8 \\ z^3 &= -\frac{1}{8}(-8) = 1 \\ z^6 &= (z^3)^2 = 1^2 = 1 \\ D &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 + 1 - 1 - 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Детерминанта с два равни реда е равна на нула.

Трудният начин.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & z^3 & z^6 \\ 1 & z^6 & z^3 \end{vmatrix} = z^6 + z^6 + z^6 - z^3 - z^3 - z^{12} = -z^{12} + 3z^6 - 2z^3$$

Сега трябва да намерим тригонометричния вид на z .

$$z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad |z| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

Да припомним.

$$z = a + ib, \quad \cos(\varphi) = \frac{a}{|z|}, \quad \sin(\varphi) = \frac{b}{|z|}, \quad z = |z|(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$$

Тогава намираме ъгъла φ .

$$\cos(\varphi) = -\frac{1}{2}, \quad \sin(\varphi) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \varphi = \frac{4\pi}{3} \quad (\varphi = 240^\circ)$$

Сега записваме z в тригонометричен вид.

$$z = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

Припомняме формулата за тригонометричен вид на комплексно число z на степен n : $z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$.

$$z^3 = \cos\left(3\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(3\frac{4\pi}{3}\right) = \cos(4\pi) + i \sin(4\pi) = 1$$

$$z^6 = \cos\left(6\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(6\frac{4\pi}{3}\right) = \cos(8\pi) + i \sin(8\pi) = 1$$

$$z^{12} = \cos\left(12\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(12\frac{4\pi}{3}\right) = \cos(16\pi) + i \sin(16\pi) = 1$$

Това е така, защото $\cos(n\pi) = (-1)^n$, $\sin(n\pi) = 0$.

$$D = -z^{12} + 3z^6 - 2z^3 = -1 + 3 - 2 = 0$$

Отговорът е нула. □

Задача 16. Да се реши матричното уравнение.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Решение. Това е матрично уравнение от вида $A.X = B$, чието решение е

$$\cdot (A^{-1}) \quad A.X = B \implies A^{-1}.A.X = A^{-1}.B \implies X = A^{-1}.B$$

Тоест търсим обратната матрица на A , това става чрез намиране на нейната детерминанта, и после адюнгираните количества на всеки елемент.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 6 - 0 - 0 - 0 = 6 \neq 0$$

Сега адюнгираните количества.

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 & A_{12} &= (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-3) = 3 \\ A_{13} &= (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 & A_{21} &= (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ A_{22} &= (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 & A_{23} &= (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-6) = 6 \\ A_{31} &= (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 & A_{32} &= (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)1 = -1 \\ A_{33} &= (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \end{aligned}$$

Тогава записваме матрицата от адюнгираните количества и я транспонираме.

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{ij}^t = A_{ji} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Формулата за обратна матрица е: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A_{ji}$.

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Сега изчисляваме X .

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Матрици се умножават по следния начин: от лявата се взима ред, от дясната стълб, и се умножават поелементно.

$$\begin{aligned} c_{11} &= [A1row \times B1column] = 0.2 + 0.(-1) + 2.6 = 12 \\ c_{12} &= [A1row \times B2column] = 0.(-1) + 0.(-1) + 2.3 = 6 \\ c_{13} &= [A1row \times B3column] = 0.3 + 0.1 + 2.3 = 6 \\ c_{21} &= [A2row \times B1column] = 3.2 + 0.(-1) + (-1).6 = 6 - 6 = 0 \\ c_{22} &= [A2row \times B2column] = 3.(-1) + 0.(-1) + (-1).3 = -3 - 3 = -6 \\ c_{23} &= [A2row \times B3column] = 3.3 + 0.1 + (-1).3 = 9 - 3 = 6 \\ c_{31} &= [A3row \times B1column] = (-3).2 + 6.(-1) + 3.6 = -6 - 6 + 18 = 6 \\ c_{32} &= [A3row \times B2column] = (-3).(-1) + 6.(-1) + 3.3 = 3 - 6 + 9 = 6 \\ c_{33} &= [A3row \times B3column] = (-3).3 + 6.1 + 3.3 = -9 + 6 + 9 = 6 \end{aligned}$$

Записваме отговора.

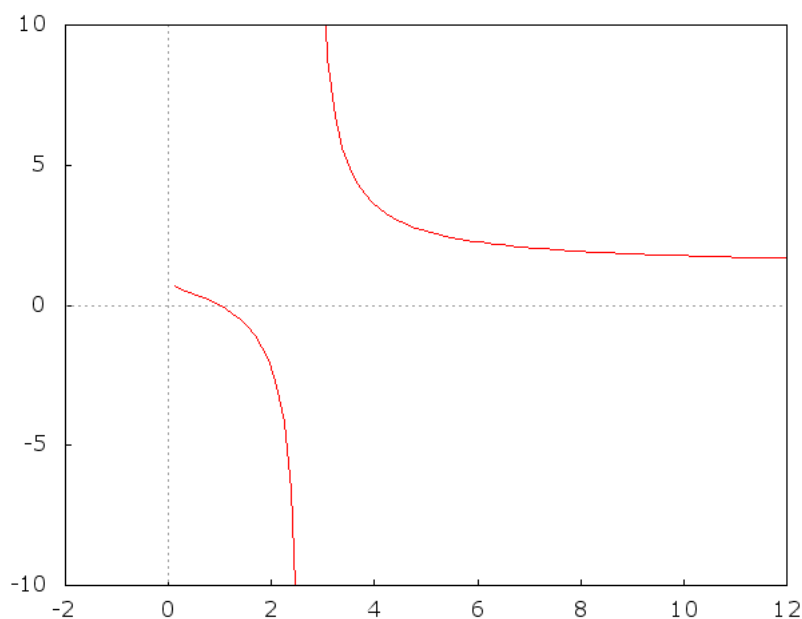
$$X = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 12 & 6 & 6 \\ 0 & -6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

□

Задача 2. Да се изследва и да се построи графиката на функцията.

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(x) - 1}$$

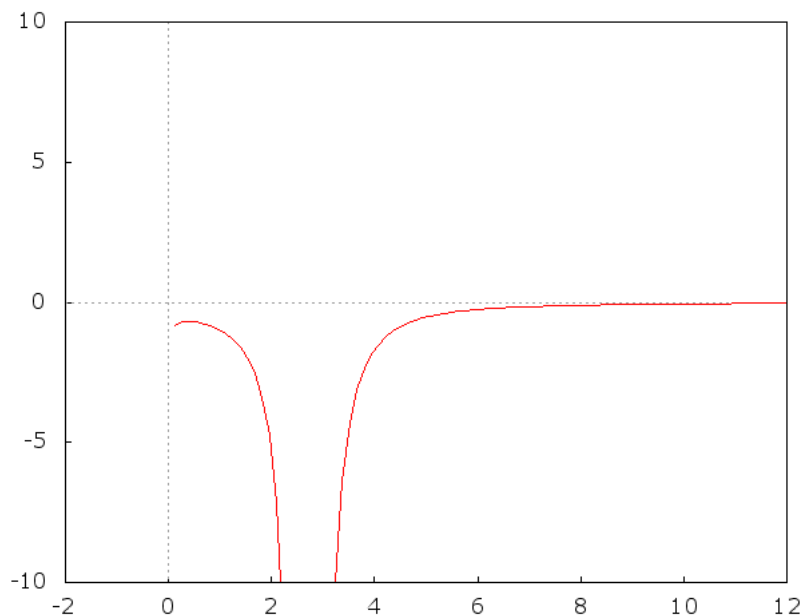
Решение. Графиката на функцията.



Първо знаменателя: $\ln(x) - 1 \neq 0 \rightarrow \ln(x) \neq 1 \rightarrow x \neq e$. Вижда се, че $x = 1$ е корен, при $\ln(x) = 0$. Изчисляваме първата производна.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\ln(x)}{\ln(x) - 1} \right)' = \frac{\frac{1}{x}(\ln(x) - 1) - \ln(x)\frac{1}{x}}{(\ln(x) - 1)^2} = \\ &= \frac{\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x}}{(\ln(x) - 1)^2} = -\frac{1}{x(\ln(x) - 1)^2} \end{aligned}$$

Ограниченията са $x \neq 0$, Първата производна няма корени, т.е няма екстремуми, защото знаменателя не може да е равен на нула.

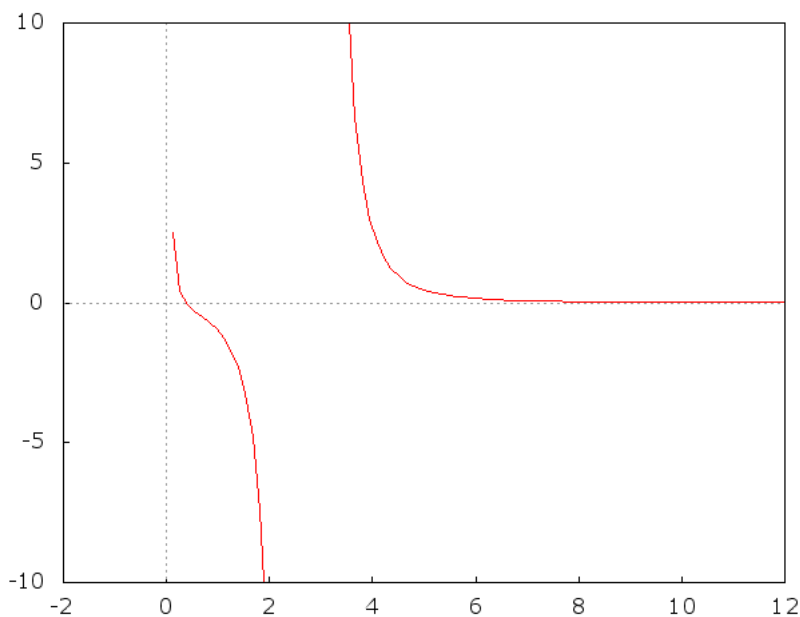


Намираме и втората производна.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(-\frac{1}{x(\ln(x) - 1)^2} \right)' = -\frac{0 - ((\ln(x) - 1)^2 + x2(\ln(x) - 1)\frac{1}{x})}{x^2(\ln(x) - 1)^4} = \\ &= \frac{(\ln(x) - 1)^2 + 2(\ln(x) - 1)}{x^2(\ln(x) - 1)^4} = \frac{\ln(x) - 1 + 2}{x^2(\ln(x) - 1)^3} = \frac{\ln(x) + 1}{x^2(\ln(x) - 1)^3} \end{aligned}$$

Знаменателя не може да е равен на нула, следователно $\ln(x) + 1 = 0$.

$$\ln(x) = -1 \implies x = e^{-1}$$



Проверява се знака на втората производна в околност на $x = e^{-1}$, за изпъкналост и вдлъбнатост. Отляво на точката $x = e^{-1}$ знака на втората производна е положителен, т.е. там функцията е изпъкнала, отдясно знака е отрицателен, функцията е вдлъбната, и точката се нарича инфлексна.

Проверката за асимптоти се извършва в ограниченията, т.е. за $x = 0$ и $x = e$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{\ln(x) - 1} = \frac{\infty}{\infty} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln(x)}{\ln(x) - 1} = \frac{1}{0} = \infty$$

Имаме вертикални асимптоти в $x = 0$ и $x = e$

□

Задача 3. Да се реши интегралът.

$$\int_0^1 \frac{x e^{\arctan(x)} dx}{(1 + x^2)^{3/2}}$$

Решение.

$$I = \int_0^1 \frac{x e^{\arctan(x)} dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \int_0^1 \frac{x e^{\arctan(x)} dx}{(1+x^2)^{1/2}(1+x^2)}$$

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2} \implies \arctan(x) \text{ влиза под диференциала}$$

$$I = \int_0^1 \frac{x e^{\arctan(x)} d(\arctan(x))}{(1+x^2)^{1/2}}$$

$$(e^{\arctan(x)})' = e^{\arctan(x)} (\arctan(x))' = e^{\arctan(x)} \frac{1}{1+x^2} \implies e^{\arctan(x)} \text{ влиза под диференциала}$$

$$I = \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^{1/2}} d(e^{\arctan(x)})$$

Сега вече диференцираме по части.

$$I = \left. \frac{x e^{\arctan(x)}}{(1+x^2)^{1/2}} \right|_0^1 - \int_0^1 e^{\arctan(x)} d\left(\frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}\right)$$

Нека да сметнем нещата поотделно.

$$\left. \frac{x e^{\arctan(x)}}{(1+x^2)^{1/2}} \right|_0^1 = \frac{1 e^{\arctan(1)}}{(1+1^2)^{1/2}} - \frac{0 e^{\arctan(0)}}{(1+0^2)^{1/2}} = \frac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} d\left(\frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}\right) &= \frac{1(1+x^2)^{1/2} - x \frac{1}{2}(1+x^2)^{-1/2} 2x}{((1+x^2)^{1/2})^2} dx = \\ &= \frac{(1+x^2)^{1/2} - x^2(1+x^2)^{-1/2}}{1+x^2} dx = \left(\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\right) \frac{dx}{1+x^2} = \\ &= \frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Сега обединяваме тези неща.

$$I = \frac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}} - \int_0^1 e^{\arctan(x)} \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}$$

Сега пак $e^{\arctan(x)}$ влиза под диференциала

$$I = \frac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}} - \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^{1/2}} d(e^{\arctan(x)})$$

И диференцираме по части.

$$I = \frac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}} - \left(\left. \frac{e^{\arctan(x)}}{(1+x^2)^{1/2}} \right|_0^1 - \int_0^1 e^{\arctan(x)} d\left(\frac{1}{(1+x^2)^{1/2}}\right) \right)$$

Нека пак да сметнем нещата поотделно.

$$\left. \frac{e^{\arctan(x)}}{(1+x^2)^{1/2}} \right|_0^1 = \frac{e^{\arctan(1)}}{(1+1^2)^{1/2}} - \frac{e^{\arctan(0)}}{(1+0^2)^{1/2}} = \frac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}} - \frac{e^0}{1} = \frac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}} - 1$$

$$d\left(\frac{1}{(1+x^2)^{1/2}}\right) = d((1+x^2)^{-1/2}) = -\frac{1}{2}(1+x^2)^{-3/2}2xdx = \frac{-xdx}{(1+x^2)^{3/2}}$$

Сега ги обединяваме.

$$I = \frac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}} - \left(\frac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}} - 1 - \int_0^1 e^{\arctan(x)} \frac{-xdx}{(1+x^2)^{3/2}} \right)$$

$$I = \frac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}} - \frac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}} + 1 - \int_0^1 \frac{xe^{\arctan(x)}dx}{(1+x^2)^{3/2}}$$

Тъй като получихме началния интеграл, можем да напишем следното:

$$I = 1 - I \implies 2I = 1 \implies I = \frac{1}{2}$$

И отговора е:

$$I = \int_0^1 \frac{xe^{\arctan(x)}dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{1}{2}$$

□

Задача 4а. Докажете необходимото и достатъчно условие за съществуване на обратна матрица.

Решение. Необходимото и достатъчно условие квадратната матрица A да има обратна, е детерминантата на A да е различна от нула.

Доказателствата се прескачат.

□

Задача 4б. Докажете, че всяка непрекъсната функция в затворен интервал е равномерно непрекъсната.

Решение. Теорема на Кантор: ако $f(x)$ е непрекъсната в $[a, b]$, то тя е равномерно непрекъсната в $[a, b]$.

Доказателствата се прескачат.

□

Задача 5. Докажете, че ако функцията $f(x)$ е интегрируема в интервала $[a, b]$ и $x \in (a, b]$, то функцията

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

е непрекъсната в точката x .

Решение. Трябва да се докаже, че $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta F = 0$.

Доказателствата се прескачат.

□

Задача 6а. Напишете различните видове уравнения на права в равнината.

Решение. Уравнение на права през две точки, $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$, образуваме правата AB :

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

Канонично уравнение на права, чрез точка $A(x_0, y_0)$ и успореден вектор $\vec{v}(\alpha, \beta)$:

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta}$$

Общото уравнение на права, получава се като се умножи на кръст каноничното уравнение:

$$ax + by + c = 0$$

Пример: $A(1, 2)$, $B(-3, 4)$. Да се напишат и трите уравнения на правата AB .
Уравнение през две точки:

$$\frac{x - 1}{-3 - 1} = \frac{y - 2}{4 - 2}$$

Канонично уравнение:

$$\frac{x - 1}{-4} = \frac{y - 2}{2}$$

Това означава, че успоредния на правата вектор е $(-4, 2)$.

$$2(x - 1) = -4(y - 2)$$

$$2x - 2 = -4y + 8$$

$$2x + 4y - 10 = 0$$

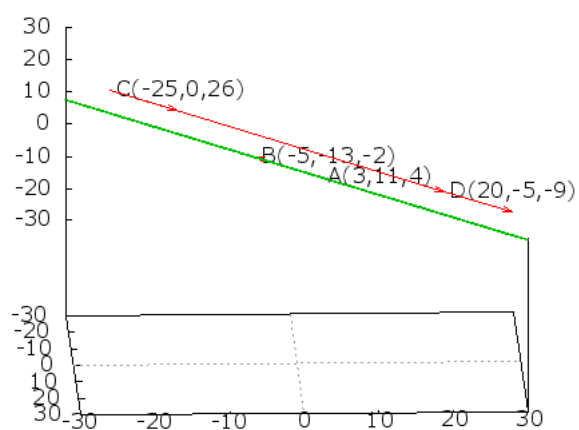
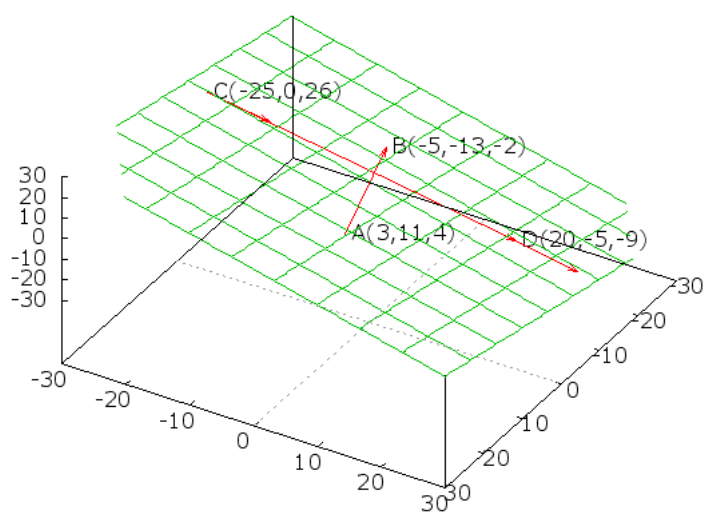
Общото уравнение е $2x + 4y - 10 = 0$. □

Задача 6б. На правата

$$g : \frac{x + 25}{9} = \frac{y}{-1} = \frac{z - 26}{-7}$$

да се намери точката P , намираща се на равни разстояния от две дадени точки $A(3, 11, 4)$ и $B(-5, -13, -2)$.

Решение. Равнината α е успоредна на g и минава през $\overrightarrow{AB}$. $\alpha : 81x - 55y + 112z - 86 = 0$, $D(20, -5, -9) \in g$.



Без решение.

□

3 Трета тема

Задача 1а.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right)$$

Задача 1б.

$$y = \tan \left(\frac{1}{2x-1} \right) + e^{\arctan(\sqrt{2x+3})}, \quad y' = ?$$

Задача 1в.

$$y = (1+x)^{\frac{1}{\cos(x)}}, \quad y' = ?$$

Задача 2а.

$$\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x-2}{x}} dx$$

Задача 2б.

$$I = \int e^{5x-1} \cos(2-3x) dx$$

Задача 2в.

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin(x) - \cos(x) + 1}$$

Задача 3. Намерете интервалите на растене и намаляване, интервалите на вдлъбнатост и изпъкналост, локалните екстремуми и инфлексните точки на функцията.

$$y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$$

Задача 4. Докажете теоремата: Нека функциите $f(x)$ и $\varphi(x)$ са непрекъснати в $[a, b]$, диференцируеми в (a, b) и $\varphi'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$. Тогава съществува точка $\xi \in (a, b)$, в която $\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}$.

Задача 5. Решете матричното уравнение.

$$X \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 6. Напишете уравнението на равнина, минаваща по правата g и успоредна на правата p .

$$g : \begin{cases} 2x - y + 3z - 5 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}, \quad p : \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z}{-2}$$

Точки: 1: 4+4+3т, 2: 6+7+6т, 3: 7т, 4: 6т, 5: 9т, 6: 8т.

Задача 1а.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right)$$

Решение. Привежда се под общ знаменател и се прилага два пъти правилото на Лопитал.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{x \sin(x)} = \left[\frac{0}{0} \right] \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x) + x \cos(x)} = \\ &= \left[\frac{0}{0} \right] \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\cos(x) + \cos(x) - x \sin(x)} = \frac{0}{1 + 1 - 0} = 0 \end{aligned}$$

□

Задача 1б.

$$y = \tan \left(\frac{1}{2x-1} \right) + e^{\arctan(\sqrt{2x+3})}, \quad y' = ?$$

Решение.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{\cos^2 \left(\frac{1}{2x-1} \right)} \frac{-2}{(2x-1)^2} + e^{\arctan(\sqrt{2x+3})} \frac{2}{1 + (2x+3)} = \\ &= \frac{-2}{(2x-1)^2 \cos^2 \left(\frac{1}{2x-1} \right)} + \frac{e^{\arctan(\sqrt{2x+3})}}{x+2} \end{aligned}$$

□

Задача 1в.

$$y = (1+x)^{\frac{1}{\cos(x)}}, \quad y' = ?$$

Решение. (1в, 3т) Функция на степен функция се решава само чрез повдигане на степен e и логаритмуване (т.е. за диференциране и търсене на граници). Целта е да диференцираме степента на e -то, самото e ще се върне в оригиналната функция.

$$\begin{aligned} y &= (1+x)^{\frac{1}{\cos(x)}}, \quad y' = ? \\ y' &= \left(e^{\ln(1+x) \frac{1}{\cos(x)}} \right)' = \left(e^{\frac{\ln(1+x)}{\cos(x)}} \right)' = e^{\frac{\ln(1+x)}{\cos(x)}} \left(\frac{\ln(1+x)}{\cos(x)} \right)' = \\ &= (1+x)^{\frac{1}{\cos(x)}} \left(\frac{\ln(1+x)}{\cos(x)} \right)' = (1+x)^{\frac{1}{\cos(x)}} \frac{\frac{1}{1+x} \cos(x) - \ln(1+x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \\ &= (1+x)^{\frac{1}{\cos(x)}} \frac{\frac{\cos(x)}{1+x} + \sin(x) \ln(1+x)}{\cos^2(x)} \end{aligned}$$

□

Задача 2а.

$$\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x-2}{x}} dx$$

Решение. При такива интеграли целия корен се полага на t . И се определя dx .

$$\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x-2}{x}} dx, \quad \sqrt{\frac{x-2}{x}} = t, \quad x \neq 0, \quad t \neq 1$$

$$\frac{x-2}{x} = t^2 \implies x-2 = xt^2 \implies x = \frac{2}{1-t^2}$$

$$dx = d\left(\frac{2}{1-t^2}\right) = d(2(1-t^2)^{-1}) = 2(-1)(1-t^2)^{-2}(-2t)dt = \frac{4tdt}{(1-t^2)^2}$$

Заместваме в интеграла.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\frac{2}{1-t^2}} t \frac{4tdt}{(1-t^2)^2} &= \int \frac{4t^2(1-t^2)dt}{2(1-t^2)^2} = \int \frac{2t^2dt}{1-t^2} = 2 \int \frac{1-1+t^2dt}{1-t^2} = \\ &= 2 \left(\int \frac{dt}{1-t^2} + \int \frac{-1+t^2}{1-t^2} dt \right) = 2 \left(\int \frac{dt}{1-t^2} - \int \frac{1-t^2}{1-t^2} dt \right) = \\ &= 2 \left(\int \frac{dt}{1-t^2} - \int dt \right) = 2 \left(\int \frac{dt}{1-t^2} - t \right) \end{aligned}$$

Относно интеграла. Разлагаме $1-t^2$ на $(1-t)(1+t)$, корените са 1, -1.

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t}$$

$$1 = A(1+t) + B(1-t)$$

Заместваме с $t = 1$.

$$1 = A(1+1) \implies A = \frac{1}{2}$$

Сега с $t = -1$.

$$1 = B(1-(-1)) \implies B = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{1-t^2} &= \int \frac{1/2dt}{1-t} + \int \frac{1/2dt}{1+t} = \frac{1}{2} \left(-\int \frac{d(1-t)}{1-t} + \int \frac{d(1+t)}{1+t} \right) = \\ &= \frac{1}{2} (-\ln|1-t| + \ln|1+t|) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| \end{aligned}$$

Записваме отговора.

$$I = 2 \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| - t \right) + C = \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| - 2t + C$$

□

Задача 26.

$$I = \int e^{5x-1} \cos(2-3x) dx$$

Решение. Интеграл от експоненциална функция и тригонометрична функция е изключително тежък за решаване.

Решава се чрез два пъти диференциране по части, няма значение коя функция ще вкараме под диференциала, след втория път ще получим началния интеграл и ще намерим стойността му. Тези интеграл, като са неопределени стоят на функции, определените стават на число.

$$\begin{aligned} I &= \int e^{5x-1} \cos(2-3x) dx = \frac{1}{5} \int \cos(2-3x) d(e^{5x-1}) = \\ &= \frac{1}{5} \left(e^{5x-1} \cos(2-3x) - \int e^{5x-1} d(\cos(2-3x)) \right) = \\ &= \frac{1}{5} \left(C_1 - \int e^{5x-1} (-\sin(2-3x)) (-3) dx \right) = \\ &= \frac{1}{5} \left(C_1 - \frac{3}{5} \int \sin(2-3x) d(e^{5x-1}) \right) = \\ &= \frac{1}{5} \left(C_1 - \frac{3}{5} \left(e^{5x-1} \sin(2-3x) - \int e^{5x-1} d(\sin(2-3x)) \right) \right) = \\ &= \frac{1}{5} \left(C_1 - \frac{3}{5} C_2 + \frac{3}{5} \int e^{5x-1} \cos(2-3x) (-3) dx \right) = \\ &= \frac{1}{5} \left(C_1 - \frac{3}{5} C_2 - \frac{9}{5} \int e^{5x-1} \cos(2-3x) dx \right) \\ I &= \frac{1}{5} \left(C_1 - \frac{3}{5} C_2 - \frac{9}{5} I \right) \\ I &= \frac{1}{5} C_1 - \frac{3}{25} C_2 - \frac{9}{25} I \implies I + \frac{9}{25} I = \frac{1}{5} C_1 - \frac{3}{25} C_2 \\ \frac{34}{25} I &= \frac{1}{5} C_1 - \frac{3}{25} C_2 \implies I = \frac{1}{34} (5C_1 - 3C_2) \\ I &= \frac{1}{34} (5e^{5x-1} \cos(2-3x) - 3e^{5x-1} \sin(2-3x)) \end{aligned}$$

□

Задача 26.

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin(x) - \cos(x) + 1}$$

Решение. Интеграл от само синуси и косинуси се решава чрез универсална субсти-

туция за този тип интеграли. Изчисляват се dx и границите на t .

$$\begin{aligned} & \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin(x) - \cos(x) + 1}, \quad \tan\left(\frac{x}{2}\right) = t, \quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ & x = 2 \arctan(t), \quad dx = d(2 \arctan(t)) = \frac{2dt}{1+t^2} \\ & x = \frac{\pi}{3} : \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = t \implies t = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad x = \frac{\pi}{2} : \tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = t \implies t = 1 \\ & \int_{\sqrt{3}/3}^1 \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1} \frac{2dt}{1+t^2} = \int_{\sqrt{3}/3}^1 \frac{2dt}{2t - 1 + t^2 + 1 + t^2} = \\ & = \int_{\sqrt{3}/3}^1 \frac{2dt}{2t + 2t^2} = \int_{\sqrt{3}/3}^1 \frac{dt}{t + t^2} \end{aligned}$$

Сега обаче трябва да разложим полинома $t + t^2$. Корените му са 0 и -1 . Разлага се на $t(1 + t)$. Трябва да разложим и цялата дроб. Ето как.

$$\frac{1}{t(1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+t}$$

Полиномите в числител, A и B , трябва да са със степен една по-ниска от знаменателя, в случая знаменателите са от първа степен, t и $1 + t$, така че полиномите в числител са константи. (Ако в знаменател имаме примерно $t^2 + 1$, в числител ще стои $Ax + B$.) Сега просто привеждаме под общ знаменател и заместваем с корените на полинома $t + t^2$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{t(1+t)} &= \frac{A(1+t)}{t(1+t)} + \frac{Bt}{t(1+t)} \\ 1 &= A(1+t) + Bt \\ t = 0 : 1 &= A(1+0) + 0 \implies A = 1 \\ t = -1 : 1 &= 0 + B(-1) \implies B = -1 \end{aligned}$$

Това означава, че дробта се разлага така:

$$\frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}$$

Методът важи за всички случаи. Интегралът добива следния вид.

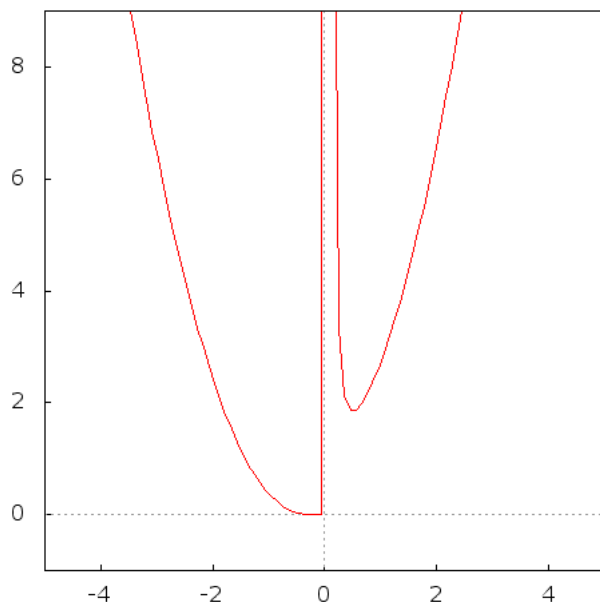
$$\begin{aligned} & \int_{\sqrt{3}/3}^1 \frac{dt}{t + t^2} = \int_{\sqrt{3}/3}^1 \frac{dt}{t} - \int_{\sqrt{3}/3}^1 \frac{dt}{1+t} = \ln(t)|_{\sqrt{3}/3}^1 - \ln(1+t)|_{\sqrt{3}/3}^1 = \\ & = \ln(1) - \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0 - \ln\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \ln\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \\ & = \ln\left(\frac{3 + \sqrt{3}}{3}\right) - \ln\left(\frac{6 + \sqrt{3}}{3}\right) = \ln\left(\frac{\frac{3 + \sqrt{3}}{3}}{\frac{6 + \sqrt{3}}{3}}\right) = \ln\left(\frac{3 + \sqrt{3}}{6 + \sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

□

Задача 3. Намерете интервалите на растене и намаляване, интервалите на вдлъбнатост и изпъкналост, локалните екстремуми и инфлексните точки на функцията.

$$y = x^2 e^{\frac{1}{x}}, \quad x \neq 0$$

Решение. Графиката на функцията.



Това означава да изчислим първа и втора производна, и корените им. Първата производна е за локалните екстремуми и интервалите на растене и намаляване, втората — за инфлексните точки и интервалите на вдлъбнатост и изпъкналост.

Ограничението е $x \neq 0$. Функцията има вертикална асимптота при $x = 0$.

$$y' = (x^2 e^{1/x})' = 2x e^{1/x} + x^2 e^{1/x} \left(\frac{1}{x}\right)' = 2x e^{1/x} + x^2 e^{1/x} \frac{-1}{x^2} = 2x e^{1/x} - e^{1/x}$$

Намираме корените на y' .

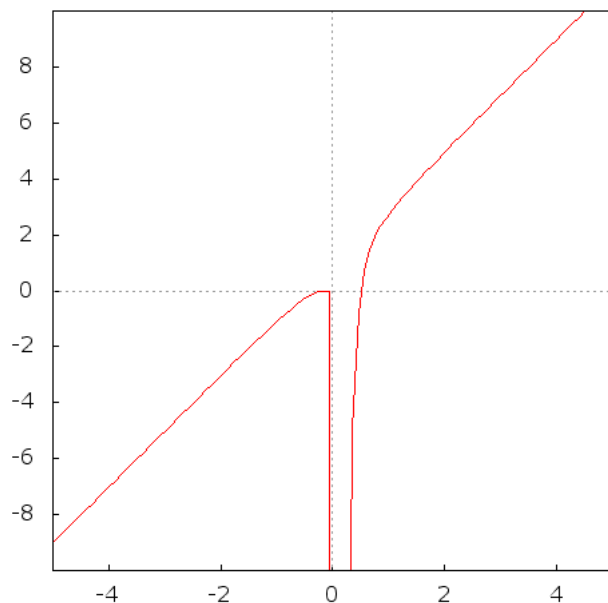
$$e^{1/x}(2x - 1) = 0 \implies e^{1/x} \neq 0 \implies 2x - 1 = 0 \implies x = \frac{1}{2}$$

За да е екстремум точката $x = 1/2$, трябва знакът на първата производна отляво и отдясно да е различен.

$$x = 0.3 : y'(0.3) = e^{3.33}(2(0.3) - 1) = -11.21$$

$$x = 0.8 : y'(0.8) = e^{1.25}(2(0.8) - 1) = 2.09$$

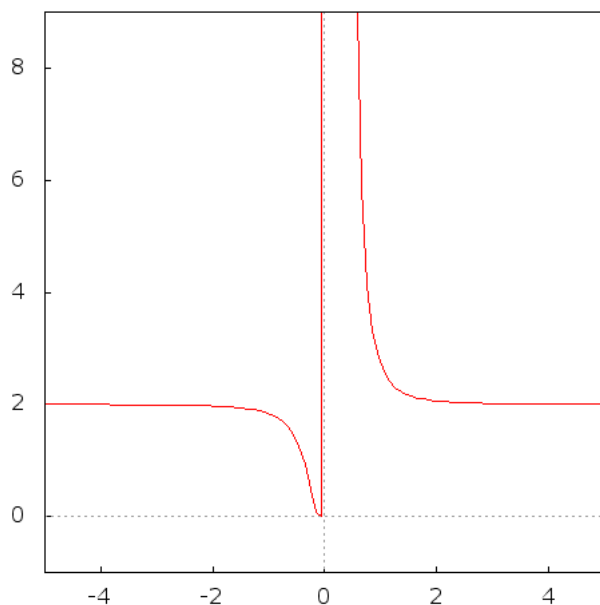
Следователно $x = 1/2$ е локален минимум. Функцията расте в $x \in (1/2, +\infty)$ и намалява в $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1/2)$ (прекъсване в нулата).



Сега втора производна.

$$\begin{aligned} y'' &= (2xe^{1/x} - e^{1/x})' = 2e^{1/x} + 2xe^{1/x} \left(\frac{-1}{x^2} \right) - e^{1/x} \left(\frac{-1}{x^2} \right) = \\ &= 2e^{1/x} - \frac{2}{x}e^{1/x} + \frac{1}{x^2}e^{1/x} = \frac{e^{1/x}}{x^2}(2x^2 - 2x + 1) \end{aligned}$$

Корените на втората производна са комплексни числа: $1 \pm i$. Не ни вършат работа. Няма инфлексни точки.



Отговор: Локален минимум в $x = 1/2$. Функцията расте в $x \in (1/2, +\infty)$ и намалява в $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1/2)$. $\square$

Задача 4. Докажете теоремата: Нека функциите $f(x)$ и $\varphi(x)$ са непрекъснати в $[a, b]$, диференцируеми в (a, b) и $\varphi'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$. Тогава съществува точка $\xi \in (a, b)$, в която $\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}$.

Решение. Това е една от основните теореми на Коши.

Доказателствата се прескачат. □

Задача 5. Решете матричното уравнение.

$$X \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение. Това е матрично уравнение от вида $X.A = B$, чието решение е

$$X.A = B/.(A^{-1}) \implies X.A.A^{-1} = B.A^{-1} \implies X = B.A^{-1}$$

Трябва да намерим обратната матрица на A , това става чрез намирането на нейната детерминанта и адюнгираните количества на всеки елемент.

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -15 + 30 + 2 - 15 + 20 - 3 = 19 \neq 0$$

Сега адюнгираните количества.

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 4 = 1$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(1 - 10) = 9$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 15 = -13$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(3 - 2) = -1$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 5 = 10$$

$$A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(10 + 15) = -25$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 3 = -3$$

$$A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1)(-10 - 1) = 11$$

$$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -15 - 3 = -18$$

Тогава записваме матрицата от адюнгираните количества и я транспонираме.

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -13 \\ -1 & 10 & -25 \\ -3 & 11 & -18 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{ij}^t = A_{ji} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 9 & 10 & 11 \\ -13 & -25 & -18 \end{pmatrix}$$

Формулата за обратна матрица е: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A_{ji}$.

$$A^{-1} = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 9 & 10 & 11 \\ -13 & -25 & -18 \end{pmatrix}$$

Сега изчисляваме X .

$$X = B.A^{-1} = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 9 & 10 & 11 \\ -13 & -25 & -18 \end{pmatrix}$$

Матрици се умножават по следния начин: от лявата се взема ред, от дясната стълб, и се умножават поелементно.

$$\begin{aligned} c_{11} &= [B1row \times A1column] = 1.1 + (-1).9 + 0.(-13) = -8 \\ c_{12} &= [B1row \times A2column] = 1.(-1) + (-1).10 + 0.25 = -11 \\ c_{13} &= [B1row \times A3column] = 1.(-3) + (-1).11 + 0.(-18) = -14 \\ c_{21} &= [B2row \times A1column] = 2.1 + 3.9 + 0.(-13) = 29 \\ c_{22} &= [B2row \times A2column] = 2.(-1) + 3.10 + 0.(-25) = 28 \\ c_{23} &= [B2row \times A3column] = 2.(-3) + 3.11 + 0.(-18) = 27 \\ c_{31} &= [B3row \times A1column] = (-1).1 + 0.9 + 1.(-13) = -14 \\ c_{32} &= [B3row \times A2column] = (-1).(-1) + 0.10 + 1.(-25) = -24 \\ c_{33} &= [B3row \times A3column] = (-1).(-3) + 0.11 + 1.(-18) = -15 \end{aligned}$$

Записваме отговора.

$$X = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} -8 & -11 & -14 \\ 29 & 28 & 27 \\ -14 & -24 & -15 \end{pmatrix}$$

□

Задача 6. Напишете уравнението на равнина, минаваща по правата g и успоредна на правата p .

$$g : \begin{cases} 2x - y + 3z - 5 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}, \quad p : \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z}{-2}$$

Решение. Правата p е записана чрез каноничното си уравнение, правата g — като пресечница на две равнини. Трябва да намерим каноничното уравнение на правата g . Разглеждаме системата уравнения.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 5 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

Избираме две неизвестни от трите които имаме, x, y, z , и взимаме коефициентите пред тях. В случая x и y . Ако детерминантата е нула, ще трябва да вземем други две.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5 \neq 0$$

Тези две неизвестни които сме взели остават отляво; другото неизвестно и свободния коефициент отдясно, неизвестното се записва като параметър λ .

$$\begin{cases} 2x - y = 5 - 3z \\ x + 2y = z - 2 \end{cases}, \quad z = \lambda$$

$$\begin{cases} 2x - y = 5 - 3\lambda \\ x + 2y = \lambda - 2 \end{cases}$$

От второто уравнение изразяваме x и го заместваем в първото.

$$2(\lambda - 2 - 2y) - y = 5 - 3\lambda \implies -5y = -5\lambda + 9 \implies y = \lambda - \frac{9}{5} \implies \lambda = \frac{y + 9/5}{1}$$

Заместваме y в първото или второто уравнение (в случая във второто).

$$x + 2\lambda - \frac{18}{5} = \lambda - 2 \implies x = -\lambda + \frac{8}{5} \implies \lambda = \frac{x - 8/5}{-1}$$

За z имаме

$$z = \lambda \implies \lambda = \frac{z - 0}{1}$$

Сега приравняваме λ и получаваме каноничното уравнение на правата g .

$$g : \frac{x - 8/5}{-1} = \frac{y + 9/5}{1} = \frac{z - 0}{1}$$

Уравнение на равнина се намира чрез точка и два вектора (записани като детерминанта). Точката $A(8/5, -9/5, 0)$ принадлежи на правата g (в числител), вектора $(-1, 1, 1)$ е успореден на g (в знаменател). Трябва ни още един вектор.

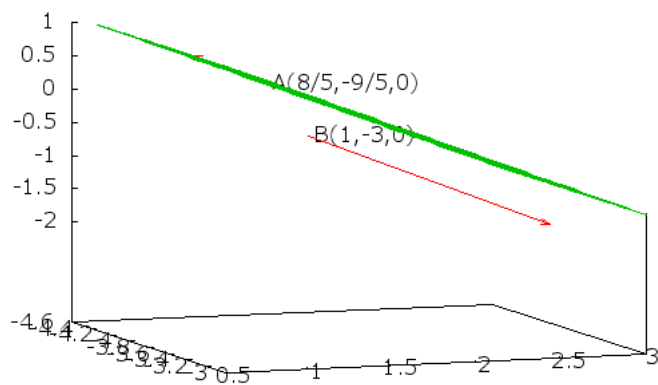
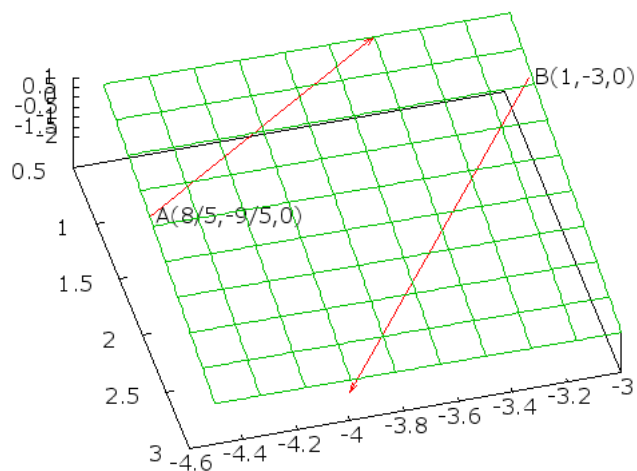
$$p : \frac{x - 1}{2} = \frac{y + 3}{-1} = \frac{z}{-2}$$

По условие искаме равнината да е успоредна на правата p . Ще вземем нейния вектор, който е $(2, -1, -2)$. Този вектор е успореден на p , като го включим в детерминантата ще е успореден и на равнината.

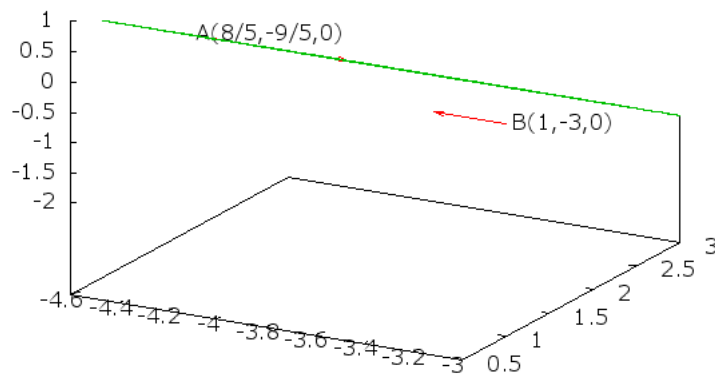
Записваме детерминантата и я развиваме по първи ред.

$$\begin{vmatrix} x - 8/5 & y + 9/5 & z - 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (x - 8/5)(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + \\ + (y + 9/5)(-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + z(-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \\ = (x - 8/5) \cdot (-1) + (y + 9/5) \cdot 0 + z \cdot (-1) = -x + 8/5 - z$$

Уравнението на равнината е: $-x + 0y - z + 8/5 = 0$.



Не е казано, че правите g и p са успоредни, само че равнината и правата p са успоредни. $A(8/5, -9/5, 0) \in g$, $B(1, -3, 0) \in p$.



Отговор: Равнината е с уравнение $x + z - 8/5 = 0$.

□

4 Четвърта тема

Задача 1а.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+3} \right)^{n+2}$$

Задача 1б.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$$

Задача 2а.

$$y = (1+x)^{\frac{1}{\sin(x)}}, \quad y' = ?$$

Задача 2б. Интервали?

$$y = (x^2 + 1)e^x$$

Задача 3а.

$$\int_0^{1/2} \arcsin(x) dx$$

Задача 3б.

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+1} + x+1}$$

Задача 3в.

$$I = \int e^{3x-1} \cos(2x+1) dx$$

Задача 4. Намерете ранга на матрицата.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Задача 5. Дадена е права g .

$$g : \begin{cases} 2x - y + 3z - 5 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

(а) Намерете точка $M_0 \in g$ и запишете g в канонична форма.

(б) Намерете уравнението на равнината α минаваща през правата g и успоредна на правата p .

$$p : \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z}{-2}$$

Задача 3в. Докажете, че ако $f(x)$ е интегрируема в $[a, b]$, то функцията

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in (a, b],$$

е непрекъсната в $[a, b]$.

Точки: 1: 4+4+3т, 2: 3+7+5т, 4: 8т, 5: 5+3т, 6: 5т.

Задача 1а.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+3} \right)^{n+2}$$

Решение. За да решим това, ще ни трябват малко пояснения.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+x}{n} \right)^n = \exp(x) = e^x \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1+2}{n-1} \right)^{n-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n-1} \right)^{n-1} = \exp(2) = e^2 \end{aligned}$$

Тогава, нека да разгледаме степените.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+3} \right)^{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+3} \right)^{n+3-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+3} \right)^{n+3} \left(\frac{n-1}{n+3} \right)^{-1}$$

Разделяме границите. Лявата ще стане експоненциална функция.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+3} \right)^{n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3-4}{n+3} \right)^{n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-4}{n+3} \right)^{n+3} = \exp(-4) = e^{-4}$$

Дясната граница — ако $n \rightarrow \infty$ изнасяме най-високата степен на n , ако $n \rightarrow 0$, изнасяме най-ниската степен на n .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+3} \right)^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(1+3/n)}{n(1-1/n)} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

Това е така, защото $3/\infty = 0$ (число върху безкрайност е нула). Сега умножаваме двете граници и получаваме отговора.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+3} \right)^{n+2} = 1e^{-4} = e^{-4} = \frac{1}{e^4}$$

□

Задача 1б.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$$

Решение. Привежда се под общ знаменател и се прилага два пъти правилото на Лопитал.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{xe^x - x} = \left[\frac{0}{0} \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x + xe^x - 1} &= \left[\frac{0}{0} \right] \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x} = \frac{1}{1+1+0} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

□

Задача 2а.

$$y = (1+x)^{\frac{1}{\sin(x)}}, \quad y' = ?$$

Решение. Функция на степен функция се решава само чрез повдигане на степен e и логаритмуване (т.е. за диференциране и търсене на граници). Целта е да диференцираме степента на e -то, самото e ще се върне в оригиналната функция.

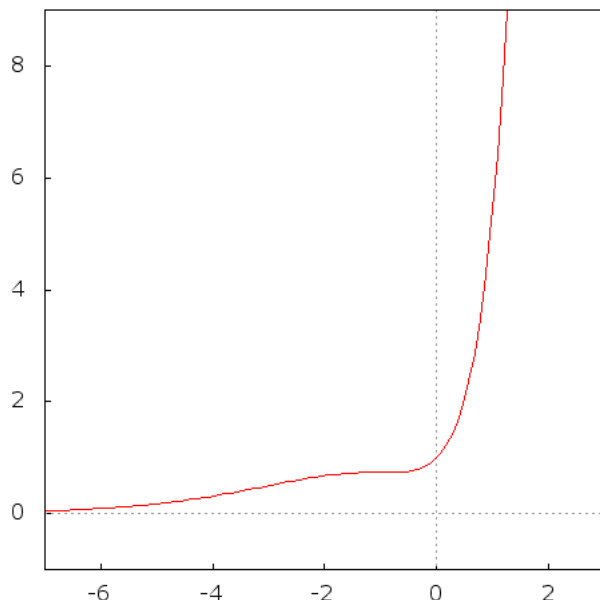
$$\begin{aligned} y' &= \left((1+x)^{\frac{1}{\sin(x)}} \right)' = \left(e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{\sin(x)}}} \right)' = e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{\sin(x)}}} \left(\ln(1+x)^{\frac{1}{\sin(x)}} \right)' = \\ &= (1+x)^{\frac{1}{\sin(x)}} \left(\frac{\ln(1+x)}{\sin(x)} \right)' = (1+x)^{\frac{1}{\sin(x)}} \left(\frac{\frac{\sin(x)}{1+x} - \cos(x) \ln(1+x)}{\sin^2(x)} \right) \end{aligned}$$

□

Задача 2б. Интервали?

$$y = (x^2 + 1)e^x$$

Решение. Трябва да се намерят интервалите на растене и намаляване, и знака на функцията в тези интервали.



Функцията няма корени, $y > 0$ за $x \in (-\infty, +\infty)$. Проверяваме за някои стойности около $x = 0$.

$$x = -2 : y = (4 + 1)e^{-2} = \frac{1}{4e^2} < 1$$

$$x = -1 : y = (1 + 1)e^{-1} = \frac{1}{2e} < 1$$

$$x = 0 : y = (0 + 1)e^0 = 1$$

$$x = 1 : y = (1 + 1)e^1 = 2e > 1$$

$$x = 2 : y = (4 + 1)e^2 = 5e^2 > 1$$

Което означава, че $y \in (0, 1)$ за $x \in (-\infty, 0)$ и $y \in (1, +\infty)$ за $x \in (0, +\infty)$. Функцията е растяща в $(-\infty, +\infty)$. $\square$

Задача 3а.

$$\int_0^{1/2} \arcsin(x) dx$$

Решение. Функция, която не може да бъде получена чрез производна, се интегрира само чрез диференциране по части.

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \arcsin(x) dx &= x \arcsin(x) \Big|_0^{1/2} - \int_0^{1/2} x d(\arcsin(x)) = \\ &= \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) - \int_0^{1/2} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \int_0^{1/2} \frac{d(x^2)}{(1-x^2)^{1/2}} = \\ &= \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} \int_0^{1/2} (1-x^2)^{-1/2} d(-x^2) = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} \int_0^{1/2} (1-x^2)^{-1/2} d(1-x^2) = \\ &= \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} (1-x^2)^{1/2} \Big|_0^{1/2} = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{4}\right)^{1/2} - (1-0)^{1/2} \right] = \\ &= \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\square$

Задача 3б.

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+1}+x+1}$$

Решение.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+1}+x+1}, \quad \sqrt{x+1} = t, \quad x = t^2 - 1, \quad dx = 2t dt \\ x = 0 : t = \sqrt{1+0} = 1, \quad x = 1 : t = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \\ \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2t dt}{(t^2 - 1 + 1)t + t^2 - 1 + 1} = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2t dt}{t^3 + t^2} = 2 \int_1^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t^2 + t} \end{aligned}$$

Сега обаче трябва да разложим полинома $t + t^2$. Корените му са 0 и -1 . Разлага се на $t(1+t)$. Трябва да разложим и цялата дроб. Ето как.

$$\frac{1}{t(1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+t}$$

Полиномите в числител, A и B , трябва да са със степен една по-ниска от знаменателя, в случая знаменателите са от първа степен, t и $1+t$, така че полиномите в числител са константи. (Ако в знаменател имаме примерно $t^2 + 1$, в числител ще

стои $Ax + B$.) Сега просто привеждаме под общ знаменател и заместваем с корените на полинома $t + t^2$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{t(1+t)} &= \frac{A(1+t)}{t(1+t)} + \frac{Bt}{t(1+t)} \\ 1 &= A(1+t) + Bt \\ t=0 : 1 &= A(1+0) + 0 \implies A = 1 \\ t=-1 : 1 &= 0 + B(-1) \implies B = -1\end{aligned}$$

Това означава, че дробта се разлага така:

$$\frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}$$

Тогава интеграла добива следния вид.

$$\begin{aligned}2 \int_1^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t^2+t} &= 2 \int_1^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} \right) dt = 2 \left(\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t} - \int_1^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t+1} \right) = \\ &= 2 \left(\ln(t)|_1^{\sqrt{2}} - \ln(t+1)|_1^{\sqrt{2}} \right) = 2 \left(\ln(\sqrt{2}) - \ln(1) - \ln(\sqrt{2}+1) + \ln(2) \right) = \\ &= 2 \left(\ln(2^{1/2}) + \ln(2) - \ln(\sqrt{2}+1) \right) = 2 \left(\frac{1}{2} \ln(2) + \ln(2) - \ln(\sqrt{2}+1) \right) = \\ &= 2 \left(\frac{3}{2} \ln(2) - \ln(\sqrt{2}+1) \right) = 2 \left(\ln(2^{3/2}) - \ln(\sqrt{2}+1) \right) = 2 \ln \left(\frac{2^{3/2}}{\sqrt{2}+1} \right) = \\ &= \ln \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \right)^2 = \ln \frac{8}{(\sqrt{2}+1)^2}\end{aligned}$$

□

Задача 36.

$$I = \int e^{3x-1} \cos(2x+1) dx$$

Решение. Интеграл от експоненциална функция и тригонометрична функция е изключително тежък за решаване. Решава се чрез два пъти диференциране по части, няма значение коя функция ще вкараме под диференциала, след втория път ще

получим началния интеграл и ще намерим на колко е равен.

$$\begin{aligned}
 I &= \int e^{3x-1} \cos(2x+1) dx = \frac{1}{3} \int \cos(2x+1) d(e^{3x-1}) = \\
 &= \frac{1}{3} \left(e^{3x-1} \cos(2x+1) - \int e^{3x-1} d(\cos(2x+1)) \right) = \\
 &= \frac{1}{3} \left(C_1 - \int e^{3x-1} (-\sin(2x+1)) 2 dx \right) = \\
 &= \frac{1}{3} \left(C_1 + \frac{2}{3} \int \sin(2x+1) d(e^{3x-1}) \right) = \\
 &= \frac{1}{3} \left(C_1 + \frac{2}{3} \left(e^{3x-1} \sin(2x+1) - \int e^{3x-1} d(\sin(2x+1)) \right) \right) = \\
 &= \frac{1}{3} \left(C_1 + \frac{2}{3} C_2 - \frac{2}{3} \int e^{3x-1} \cos(2x+1) 2 dx \right) = \\
 &= \frac{1}{3} \left(C_1 + \frac{2}{3} C_2 - \frac{4}{3} \int e^{3x-1} \cos(2x+1) dx \right) \\
 I &= \frac{1}{3} \left(C_1 + \frac{2}{3} C_2 - \frac{4}{3} I \right) \\
 I &= \frac{1}{3} C_1 + \frac{2}{9} C_2 - \frac{4}{9} I \implies I + \frac{4}{9} I = \frac{1}{3} C_1 + \frac{2}{9} C_2 \\
 \frac{13}{9} I &= \frac{1}{3} C_1 + \frac{2}{9} C_2 \implies I = \frac{1}{13} (3C_1 + 2C_2) \\
 I &= \frac{1}{13} (3e^{3x-1} \cos(2x+1) + 2e^{3x-1} \sin(2x+1))
 \end{aligned}$$

□

Задача 4. Намерете ранга на матрицата.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Решение. Изчисляваме минорите (детерминанти от горния ляв ъгъл).

$$\begin{aligned}
 \Delta_1 &= \begin{vmatrix} 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \\
 \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -9 - (-5) = 4 \neq 0 \\
 \Delta_3 &= \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 45 - 2 - 45 + 9 + 18 - 25 = 27 - 27 = 0
 \end{aligned}$$

Докато стигнем до детерминанта равна на нула. Това означава, че ранга на матрицата е равен на размера на предишната детерминанта, т.е. ранга е равен на две, $r(A) = 2$.

Тези детерминанти се наричат минори, рангът е ненулев минор от най-висок ред. Рангът има смисъл да се търси само на не-квадратни матрици, тъй като на квадратните директно можем да намерим детерминантата. $\square$

Задача 5. Дадена е права g .

$$g : \begin{cases} 2x - y + 3z - 5 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

(а) Намерете точка $M_0 \in g$ и запишете g в канонична форма.

(б) Намерете уравнението на равнината α минаваща през правата g и успоредна на правата p .

$$p : \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z}{-2}$$

Решение. Виж задача 6 от тема 3 (задачата е същата). $\square$

Задача 6. Докажете, че ако $f(x)$ е интегрируема в $[a, b]$, то функцията

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in (a, b],$$

е непрекъсната в $[a, b]$.

Решение. Доказателствата се прескачат. $\square$

5 Пета тема

Задача 1а.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-2}{2n+1} \right)^{4n+2}$$

Задача 1б.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right)$$

Задача 2а.

$$y = x^{\sqrt{x}}, \quad x > 0, \quad y' = ?$$

Задача 2б. Интервали?

$$y = (x-2)e^{1/x}$$

Задача 3а.

$$\int_{1/2}^1 (x^2 e^{-2x} + \tan(x)) dx$$

Задача 3б.

$$I = \int_1^e \sin(\ln(x)) dx$$

Задача 3в.

$$I = \int e^{4x-1} \sin(3x-1) dx$$

Задача 4. Решете матричното уравнение.

$$X \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача 5. В правоъгълен триъгълник са дадени координатите на един от острите върхове $A(5, 7)$ и уравнението на противоположния катет $BC : 6x + 4y - 9 = 0$. Да се намери общото уравнение на катета AC и дължината му. Направете чертеж.

Задача 6. Изведете формула за редукция по n за интеграл

$$I_n = \int \sin^n(x) dx$$

Точки: 1: 4+4+3т, 2: 3+7т, 3: 9+6+8т, 4: 9т, 5: 5т, 6: 5т.

Задача 1а.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-2}{2n+1} \right)^{4n+2}$$

Решение. За да решим това, ще ни трябват малко пояснения.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+x}{n} \right)^n = \exp(x) = e^x \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1+2}{n-1} \right)^{n-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n-1} \right)^{n-1} = \exp(2) = e^2 \end{aligned}$$

Тогава, нека да разгледаме степените.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-2}{2n+1} \right)^{4n+2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-2}{2n+1} \right)^{2(2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{2n-2}{2n+1} \right)^{2n+1} \right)^2 = \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1-3}{2n+1} \right)^{2n+1} \right)^2 = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-3}{2n+1} \right)^{2n+1} \right)^2 = \\ &= (\exp(-3))^2 = (e^{-3})^2 = e^{-6} \end{aligned}$$

□

Задача 1б.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right)$$

Решение. Привежда се под общ знаменател и се прилага два пъти правилото на Лопитал.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{x \sin(x)} = \left[\frac{0}{0} \right] \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{1 \sin(x) + x \cos(x)} = \\ &= \left[\frac{0}{0} \right] \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\cos(x) + \cos(x) - x \sin(x)} = \frac{0}{1 + 1 - 0} = 0 \end{aligned}$$

□

Задача 2а.

$$y = x^{\sqrt{x}}, \quad x > 0, \quad y' = ?$$

Решение. Функция на степен функция се решава само чрез повдигане на степен e и логаритмуване (т.е. за диференциране и търсене на граници). Целта е да диференцираме степента на e -то, самото e ще се върне в оригиналната функция.

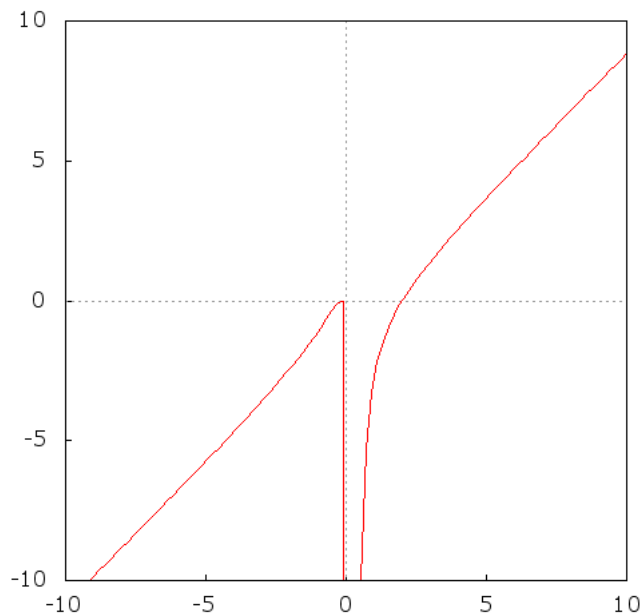
$$\begin{aligned} y' &= \left(x^{\sqrt{x}} \right)' = \left(e^{\ln(x^{\sqrt{x}})} \right)' = e^{\ln(x^{\sqrt{x}})} \left(\ln(x^{\sqrt{x}}) \right)' = x^{\sqrt{x}} \left(\ln(x^{\sqrt{x}}) \right)' = \\ &= x^{\sqrt{x}} \left(\sqrt{x} \ln(x) \right)' = x^{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln(x) + \sqrt{x} \frac{1}{x} \right) = x^{\sqrt{x}} \left(\frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = \\ &= x^{\sqrt{x}} \left(\frac{\ln(x) + 2}{2\sqrt{x}} \right) \end{aligned}$$

□

Задача 26. Интервали?

$$y = (x - 2)e^{1/x}$$

Решение. Трябва да се намерят интервалите на растене и намаляване, и знака на функцията в тези интервали.



Ограничението е $x \neq 0$. Функцията има вертикална асимптота (прекъсване) в $x = 0$. Вижда се, че $x = 2$ е корен на функцията, разглеждаме стойностите на функцията около $x = 2$.

$$x = 1 : y = (1 - 2)e^1 = -e < 0$$

$$x = 3 : y = (3 - 2)e^{1/3} = e^{1/3} > 0$$

Което значи, че при $x = 2$ функцията сменя знака си, т.е. $y < 0$ за $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 2)$ и $y > 0$ за $x \in (2, +\infty)$. Функцията е растяща в $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, с прекъсване в нулата. $\square$

Задача 3а.

$$\int_{1/2}^1 (x^2 e^{-2x} + \tan(x)) dx$$

Решение.

$$\int_{1/2}^1 (x^2 e^{-2x} + \tan(x)) dx = \int_{1/2}^1 x^2 e^{-2x} dx + \int_{1/2}^1 \tan(x) dx$$

Първият интеграл се решава чрез два пъти диференциране по части. При такива интегрални под диференциала се вкарва експоненциалната функция (синусова, косинусова, каквато има), иначе ще се увеличи степента на x .

$$\begin{aligned}
\int_{1/2}^1 x^2 e^{-2x} dx &= -\frac{1}{2} \int_{1/2}^1 x^2 d(e^{-2x}) = -\frac{1}{2} \left(x^2 e^{-2x} \Big|_{1/2}^1 - \int_{1/2}^1 e^{-2x} d(x^2) \right) = \\
&= -\frac{1}{2} \left(1e^{-2} - \frac{1}{4}e^{-1} \right) + \frac{1}{2} \int_{1/2}^1 2xe^{-2x} dx = -\frac{1}{2e^2} + \frac{1}{8e} + \int_{1/2}^1 xe^{-2x} dx = \\
&= \frac{e-4}{8e^2} - \frac{1}{2} \int_{1/2}^1 xd(e^{-2x}) = \frac{e-4}{8e^2} - \frac{1}{2} \left(xe^{-2x} \Big|_{1/2}^1 - \int_{1/2}^1 e^{-2x} dx \right) = \\
&= \frac{e-4}{8e^2} - \frac{1}{2} \left(1e^{-2} - \frac{1}{2}e^{-1} \right) + \frac{1}{2} \int_{1/2}^1 e^{-2x} dx = \\
&= \frac{e-4}{8e^2} - \frac{1}{2e^2} + \frac{1}{4e} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) \int_{1/2}^1 d(e^{-2x}) = \frac{e-4-4+2e}{8e^2} - \frac{1}{4} e^{-2x} \Big|_{1/2}^1 = \\
&= \frac{3e-8}{8e^2} - \frac{1}{4} (e^{-2} - e^{-1}) = \frac{3e-8}{8e^2} - \frac{1}{4e^2} + \frac{1}{4e} = \frac{5e-10}{8e^2} = 0.06
\end{aligned}$$

Вторият интеграл се решава чрез разлагане на функцията $\tan(x)$.

$$\begin{aligned}
\int_{1/2}^1 \tan(x) dx &= \int_{1/2}^1 \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = - \int_{1/2}^1 \frac{d(\cos(x))}{\cos(x)} = - \ln |\cos(x)| \Big|_{1/2}^1 = \\
&= -(\ln |\cos(1)| - \ln |\cos 1/2|) = -\ln |0.540| + \ln |0.877| = 0.616 - 0.130 = 0.486
\end{aligned}$$

Отговор: $0.06 + 0.486 = 0.546$. □

Задача 36.

$$I = \int_1^e \sin(\ln(x)) dx$$

Решение. Решава се чрез два пъти диференциране по части.

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^e \sin(\ln(x)) dx = x \sin(\ln(x)) \Big|_1^e - \int_1^e x d(\sin(\ln(x))) = \\
&= e \sin(1) - 1 \sin(0) - \int_1^e x \cos(\ln(x)) \frac{1}{x} dx = e \sin(1) - \int_1^e \cos(\ln(x)) dx = \\
&= e \sin(1) - x \cos(\ln(x)) \Big|_1^e + \int_1^e x d(\cos(\ln(x))) = \\
&= e \sin(1) - e \cos(1) + 1 \cos(0) + \int_1^e x (-\sin(\ln(x))) \frac{1}{x} dx = \\
&= e(\sin(1) - \cos(1)) + 1 - \int_1^e \sin(\ln(x)) dx = \\
&= e(\sin(1) - \cos(1)) + 1 - I \\
I &= e(\sin(1) - \cos(1)) + 1 - I \implies 2I = e(\sin(1) - \cos(1)) + 1 \\
I &= \frac{e}{2}(\sin(1) - \cos(1)) + \frac{1}{2} \implies I \sim 0.909
\end{aligned}$$

□

Задача 36.

$$I = \int e^{4x-1} \sin(3x-1) dx$$

Решение. Интеграл от експоненциална функция и тригонометрична функция е изключително тежък за решаване. Решава се чрез два пъти диференциране по части, няма значение коя функция ще вкараме под диференциала, след втория път ще получим началния интеграл и ще намерим на колко е равен.

$$\begin{aligned} I &= \int e^{4x-1} \sin(3x-1) dx = \frac{1}{4} \int \sin(3x-1) d(e^{4x-1}) = \\ &= \frac{1}{4} \left(e^{4x-1} \sin(3x-1) - \int e^{4x-1} d(\sin(3x-1)) \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(C_1 - \int e^{4x-1} \cos(3x-1) 3 dx \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(C_1 - \frac{3}{4} \int \cos(3x-1) d(e^{4x-1}) \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(C_1 - \frac{3}{4} \left(e^{4x-1} \cos(3x-1) - \int e^{4x-1} d(\cos(3x-1)) \right) \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(C_1 - \frac{3}{4} C_2 + \frac{3}{4} \int e^{4x-1} (-\sin(3x-1)) 3 dx \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(C_1 - \frac{3}{4} C_2 - \frac{9}{4} \int e^{4x-1} \sin(3x-1) dx \right) = \frac{1}{4} \left(C_1 - \frac{3}{4} C_2 - \frac{9}{4} I \right) \\ I &= \frac{1}{4} C_1 - \frac{3}{16} C_2 - \frac{9}{16} I \implies I + \frac{9}{16} I = \frac{1}{4} C_1 - \frac{3}{16} C_2 \\ \frac{25}{16} I &= \frac{1}{4} C_1 - \frac{3}{16} C_2 \implies I = \frac{1}{25} (4C_1 - 3C_2) \\ I &= \frac{1}{25} (4e^{4x-1} \sin(3x-1) - 3e^{4x-1} \cos(3x-1)) \end{aligned}$$

□

Задача 4. Решете матричното уравнение.

$$X \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. Матрицата B има нулев стълб, не можем да го махнем както правим при детерминантите, или при метода на Гаус. Стълба стои. Това е матрично уравнение от вида $X.A = B$, чието решение е

$$X.A = B \cdot (A^{-1}) \implies X.A.A^{-1} = B.A^{-1} \implies X = B.A^{-1}$$

Трябва да намерим обратната матрица на A , това става чрез намирането на нейната детерминанта и адюнгираните количества на всеки елемент.

Виж задача 5 от тема 3 (задачата е подобна).

□

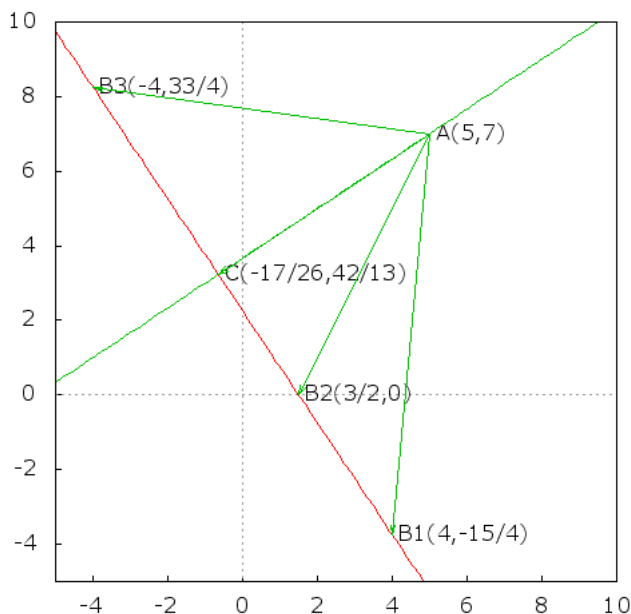
Задача 5. В правоъгълен триъгълник са дадени координатите на един от острите върхове $A(5, 7)$ и уравнението на противоположния катет $BC : 6x + 4y - 9 = 0$. Да се намери общото уравнение на катета AC и дължината му. Направете чертеж.

Решение. Правите AC и BC са катети, т.е. скаларното им произведение е нула. Взимаме нормалния вектор на BC , който е $\vec{v}(6, 4)$, и записваме нормалния вектор на AC . Избираме си да е $\vec{w}(4, -6)$, тъй като $(6, 4)(4, -6) = 0$.

Тогава уравнението на правата AC ще е $4x - 6y + c = 0$. Точката $A(5, 7)$ принадлежи на AC , можем да я заместим в уравнението.

$$4(5) - 6(7) + c = 0 \implies 20 - 42 + c = 0 \implies c = 22$$

Уравнението на AC е $4x - 6y + 22 = 0$, т.е. $AC : 2x - 3y + 11 = 0$.



Нямаме координатите на точката B , т.е. тази точка може да е навсякъде по правата $BC : 6x + 4y - 9 = 0$. Задачата ще е валидна където и на правата да се намира B (ако не съвпада с точка C разбира се).

За да намерим дължината на AC са ни необходими координатите на точка C . Пресичаме правите AC и BC за да я намерим.

$$\begin{cases} 6x + 4y - 9 = 0 \\ 2x - 3y + 11 = 0 \end{cases} \cdot (-3) \\ 4y + 9y - 9 - 33 = 0 \\ 13y = 42 \\ y = \frac{42}{13} \\ x = -\frac{17}{26}$$

Точка $C(-17/26, 42/13)$. Намираме координатите на вектора $\overrightarrow{AC}$ като извадим координатите на началната точка A от координатите на крайната точка C .

$$\overrightarrow{AC} \left(-\frac{17}{26} - 5, \frac{42}{13} - 7 \right) \Rightarrow \overrightarrow{AC} \left(-\frac{147}{26}, -\frac{49}{13} \right)$$

Сега намираме дължината на AC .

$$|AC| = \sqrt{\frac{147^2}{26^2} + \frac{49^2}{13^2}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 49^2}{26^2} + \frac{4 \cdot 49^2}{26^2}} = \frac{\sqrt{13 \cdot 49^2}}{26} = \frac{49\sqrt{13}}{26}$$

Отговор: $AC : 2x - 3y + 11 = 0$, $|AC| = (49\sqrt{13})/26$. □

Задача 6. Изведете формула за редукция по n за интеграл

$$I_n = \int \sin^n(x) dx$$

Решение. Вкарваме един $\sin(x)$ под диференциала, диференцираме по части, и после внимаваме за степените на синуса.

$$\begin{aligned} I_n &= \int \sin^n(x) dx = \int \sin^{n-1}(x) \sin(x) dx = - \int \sin^{n-1}(x) d(\cos(x)) = \\ &= - \left(\cos(x) \sin^{n-1}(x) - \int \cos(x) d(\sin^{n-1}(x)) \right) = \\ &= - \cos(x) \sin^{n-1}(x) + \int \cos(x) (n-1) \sin^{n-2}(x) \cos(x) dx = \\ &= - \cos(x) \sin^{n-1}(x) + (n-1) \int \sin^{n-2}(x) \cos^2(x) dx = \\ &= - \cos(x) \sin^{n-1}(x) + (n-1) \int \sin^{n-2}(x) (1 - \sin^2(x)) dx = \\ &= - \cos(x) \sin^{n-1}(x) + (n-1) \left(\int \sin^{n-2}(x) dx - \int \sin^n(x) dx \right) = \\ &= - \cos(x) \sin^{n-1}(x) + (n-1) (I_{n-2} - I_n) \\ I_n &= - \cos(x) \sin^{n-1}(x) + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \\ n I_n &= - \cos(x) \sin^{n-1}(x) + (n-1) I_{n-2} \\ I_n &= \frac{1}{n} (- \cos(x) \sin^{n-1}(x) + (n-1) I_{n-2}) \end{aligned}$$

□

6 Шеста тема

Задача 1а. Да се пресметне стойността на комплексното число z и $|z|$.

$$z = \frac{(1+i)(2i+3)}{1-i} + i^6 + (2-i)^3$$

Задача 1б. Като се използва правилото на Хорнер, да се намери каноничният вид на полинома: $P(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9$.

Задача 2а. Да се изследва ранга на матрицата A в зависимост от стойността на параметъра λ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & \lambda \end{pmatrix}$$

Задача 2б. Да се определи кога матричното уравнение $A \cdot B \cdot X = C$ има решение и да се изрази решението, ако матриците A , B и C са дадени.

Задача 3а. (3а, 7т) Да се реши системата по метода на Гаус.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \\ 9x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$$

Задача 3б. Да се определят ранговете на основната и разширената матрица от (3а).

Задача 4а. Да се изведе формулата за ъгъл между две прави в равнината: $g_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $g_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Да се разгледат всички случаи на взаимно положение на двете прави g_1 и g_2 .

Задача 4б. Точките $A(1, 2)$, $B(-1, -1)$ и $C(2, 1)$ са върхове на триъгълник. Да се намерят уравненията на трите страни на триъгълник ABC и на височината от върха B към страната AC .

Задача 5. В пространството са дадени точката $P(4, 3, 10)$ и правите

$$p : \begin{cases} x = 1 + 4k \\ y = 1 + 8k \\ z = 1 + 10k \end{cases}, \quad g : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$$

(а) Да се определи взаимното положение на правите p и g и да се провери дали те лежат в една равнина.

(б) Да се намерят координатите на симетричната точка P' на точката P спрямо правата g .

Задача 6а. Каква повърхнина е представена с уравнението $x^2 = -6y$. Да се опишат основните характеристики на съответната крива в равнината, която представя същото уравнение.

Задача 6б. Да се намери областта на решенията на системата неравенства.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1 - x_2 \leq 0 \\ 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \leq 2 \end{cases}$$

Да се определи какво множество представлява областта на решенията и коя е опорната права.

Всяка подточка е по 5 точки, освен задача 3: 7+3т.

Задача 1а. Да се пресметне стойността на комплексното число z и $|z|$.

$$z = \frac{(1+i)(2i+3)}{1-i} + i^6 + (2-i)^3$$

Решение. Ако $z = a + ib$, то $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$$i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 i = -i, \quad i^4 = i^2 i^2 = 1, \quad i^5 = i^4 i = i$$

$$i^6 = -1, \quad i^7 = -i, \quad i^8 = 1, \quad i^9 = i, \quad \dots$$

Трябва да отстраним комплексното число в знаменател, рационализираме (умножаваме горе и долу с комплексно спрегнатото число).

$$\begin{aligned} z &= \frac{(1+i)(2i+3)}{1-i} + i^6 + (2-i)^3 = \\ &= \frac{(2i+3+2i^2+3i)}{1-i} \frac{1+i}{1+i} + (-1) + (2-i)(2-i)^2 = \\ &= \frac{(1+5i)(1+i)}{1^2 - i^2} - 1 + (2-i)(4-4i+i^2) = \\ &= \frac{1+5i+i+5i^2}{1+1} - 1 + (2-i)(3-4i) = \\ &= \frac{1}{2}(1+6i-5) - 1 + 6-8i-3i+4i^2 = \\ &= \frac{1}{2}(-4+6i)+5-11i-4 = \\ &= -2+3i+1-11i = \\ &= -1-8i \\ |z| &= \sqrt{(-1)^2 + (-8)^2} = \sqrt{1+64} = \sqrt{65} \end{aligned}$$

Отговор: $z = -1 - 8i$, $|z| = \sqrt{65}$.

□

Задача 16. Като се използва правилото на Хорнер, да се намери каноничният вид на полинома: $P(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9$.

Решение. Ако $a_1, a_2, \dots, a_n$ са коефициентите пред степените, $x_1, x_2, \dots, x_n$ са корените на $P(x)$, то $a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$ е каноничният вид на полинома.

В задачата: $a_n = 1$. Трябва да намерим корените. Прилагаме правилото на Хорнер.

Правило на Хорнер. Взимаме само коефициентите. Всички степени трябва да присъстват, ако някоя липсва, се записва нула (примерно $x^2 + 1 \rightarrow$ липсва първа степен $\rightarrow 1x^2 + 0x + 1$). Корените са делителите на свободния член (някои от тях). Свободният член е $a_0 = 9$, неговите делители са $1, -1, 3, -3$.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 4 & -2 & -12 & 9 \\ \hline \end{array}$$

Да пробваме с 3 (на втория ред). Най високата степен се преписва, това е 1 (отдясно на вертикалната черта). Тогава: $3 \cdot 1 + 4 = 7$.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 4 & -2 & -12 & 9 \\ 3 & 1 & 7 & & & \\ \hline \end{array} \Rightarrow 3 \cdot 7 + (-2) = 19$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 4 & -2 & -12 & 9 \\ 3 & 1 & 7 & 19 & & \\ \hline \end{array} \Rightarrow 3 \cdot 19 + (-12) = 45$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 4 & -2 & -12 & 9 \\ 3 & 1 & 7 & 19 & 45 & \\ \hline \end{array} \Rightarrow 3 \cdot 45 + 9 = 144$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 4 & -2 & -12 & 9 \\ 3 & 1 & 7 & 19 & 45 & 144 \\ \hline \end{array}$$

Тъй като $144 \neq 0$, то 3 не е корен. Ако ще пробваме с друг корен, добре е да започнем на чисто, за да не се объркаме.

Нека да пробваме с 1. Щом намерим корен, следващите ще са делители на новият свободен член.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 4 & -2 & -12 & 9 \\ 1 & 1 & 5 & 3 & -9 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$1 \cdot 1 + 4 = 5, \quad 1 \cdot 5 - 2 = 3, \quad 1 \cdot 3 - 12 = -9, \quad 1 \cdot (-9) + 9 = 0$$

Следователно 1 е корен. Нека да проверим дали е двоен корен, т.е. правим същото нещо, но със втория ред.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 4 & -2 & -12 & 9 \\ 1 & 1 & 5 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 9 & 0 & \\ \hline \end{array}$$

$$1 \cdot 1 + 5 = 6, \quad 1 \cdot 6 + 3 = 9, \quad 1 \cdot 9 - 9 = 0$$

Т.е. 1 е двоен корен. Това което остава, може да се запише така: $1x^2 + 6x + 9$, което е $(x + 3)^2$, т.е. и -3 е двоен корен. Но нека проверим с Хорнер.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 4 & -2 & -12 & 9 \\ 1 & 1 & 5 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 9 & 0 & \\ -3 & 1 & 3 & 0 & & \end{array}$$

$$-3 \cdot 1 + 6 = 3, \quad -3 \cdot 3 + 9 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 4 & -2 & -12 & 9 \\ 1 & 1 & 5 & 3 & -9 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 9 & 0 & \\ -3 & 1 & 3 & 0 & & \\ -3 & 1 & 0 & & & \end{array}$$

$$-3 \cdot 1 + 3 = 0$$

Кое то е еквивалентно на следното:

$$\begin{array}{r|l} & 1x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 \\ (x-1) & 1x^3 + 5x^2 + 3x - 9 \\ (x-1) & 1x^2 + 6x + 9 \\ (x-(-3)) & 1x + 3 \\ (x-(-3)) & 1 \end{array}$$

При прилагане на правилото на Хорнер намаляваме степента на полинома с единица, докато стигнем до полином от нулева степен (последният ред).

Нашият полином се разлага на: $1(x-1)(x-1)(x+3)(x+3)$. Записваме:

$$P(x) = (x-1)^2(x+3)^2$$

Нека проверим.

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)^2(x+3)^2 = (x^2 - 2x + 1)(x^2 + 6x + 9) = \\ &= x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 2x^3 - 12x^2 - 18x + x^2 + 6x + 9 = \\ &= x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 12x + 9 \end{aligned}$$

□

Задача 2а. Да се изследва ранга на матрицата A в зависимост от стойността на параметъра λ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & \lambda \end{pmatrix}$$

Решение. Изчисляваме детерминанти от горния ляв ъгъл, като увеличаваме размера (тези детерминанти се наричат минори).

$$\Delta_1 = |1| \neq 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4 \neq 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & \lambda \end{vmatrix} = 2\lambda + 27 + 40 - 24 - 15 - 6\lambda = 28 - 4\lambda$$

$$\lambda = 7 \implies \Delta_3 = 0 \implies r(A) = 2$$

$$\lambda \neq 7 \implies \Delta_3 \neq 0 \implies r(A) = 3$$

Рангът на матрицата е най-големият ненулев минор. Ако $\lambda = 7$, третият минор става нула, следователно рангът е предишният минор — вторият. $\square$

Задача 26. Да се определи кога матричното уравнение $A.B.X = C$ има решение и да се изрази решението, ако матриците A , B и C са дадени.

Решение. Трябва да направим така, че отляво да остане само X . Първо умножаваме отляво с обратната на A .

$$\begin{aligned} /.A^{-1} \quad A.B.X &= C \\ A^{-1}.A.B.X &= A^{-1}.C \\ I.B.X &= A^{-1}.C \\ B.X &= A^{-1}.C \end{aligned}$$

Единичната матрица I е еквивалентна на единица при матриците: $A.A^{-1} = I$, $B.B^{-1} = I$. Сега умножаваме с обратната матрица на B .

$$\begin{aligned} /.B^{-1} \quad B.X &= A^{-1}.C \\ B^{-1}.B.X &= B^{-1}.A^{-1}.C \\ I.X &= B^{-1}.A^{-1}.C \\ X &= B^{-1}.A^{-1}.C \end{aligned}$$

Това е решението. Сега трябва да го докажем като проверим размерностите на матриците.

Матриците имат размерност редове по стълбове. При умножение на матрици броят на стълбовете на лявата матрица трябва да съвпада с броя редове на дясната матрица (само матрици с такива размерности могат да бъдат умножавани). Резултатът ще е матрица с размерност броя редове на лявата по броя стълбове на дясната. Ето така:

$$A_{a \times b} \cdot B_{b \times c} = Y_{a \times c}$$

В момента ние определяме размерностите на условието за да докажем, че изчисленията с обратните матрици са верни. Засега имаме:

$$A_{a \times b} \cdot B_{b \times c} \cdot X = C$$

Следователно X трябва да има c реда и — нека да е — d реда.

$$A_{a \times b} \cdot B_{b \times c} \cdot X_{c \times d} = C$$

Тогава за C имаме размерност a реда по d стълба.

$$A_{a \times b} \cdot B_{b \times c} \cdot X_{c \times d} = C_{a \times d}$$

При изчисляването на обратната матрица оригиналната матрица се транспонира, което означава че се разменят редовете и стълбовете:

$$A_{a \times b} \implies A_{b \times a}^{-1}$$

Същото важи и за B (в задачата обръщаме само тези две матрици, правилото важи за всички матрици):

$$B_{b \times c} \implies B_{c \times b}^{-1}$$

Нека да заместим в решението:

$$X_{c \times d} = B_{c \times b}^{-1} \cdot A_{b \times a}^{-1} \cdot C_{a \times d}$$

Изглежда всичко е точно. Доказателството е завършено. $\square$

Задача 3а. Да се реши системата по метода на Гаус.

$$\left| \begin{array}{cccc} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \\ 9x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \end{array} \right.$$

Решение. Метод на Гаус. Взимат се коефициентите и се записват като матрица. Слага се вертикална черта между коефициентите пред неизвестните и свободните членове отдясно. Матрицата отляво на чертата се нарича основна (от коефициентите пред неизвестните). Цялата матрица се нарича разширена. Ако ранговете на основната и разширената матрица са различни, задачата няма решение (почти винаги дават задачи, които имат решение). Трябва всички елементи под главния диагонал (това са елементите с равни индекси, т.е. $a_{11}, a_{22}, \dots$) да станат нула. Тогава рангът е равен на броя на елементите по главния диагонал, т.е. на броя редове. Останалите редове се връщат в уравнения и се решават чрез заместване.

Нека да запишем матрицата.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 6 & -3 & 4 & 3 & 3 \\ 9 & -4 & 3 & 2 & 4 \end{array} \right)$$

В случая елементите 6, 9 и -4 трябва да станат нула. Как се прави това? Като се изваждат редовете един от друг. Нека да погледнем 6-та: $3 \cdot (-2) + 6 = 0$. Ще умножим целия първи ред по -2 (но само наум, няма нужда да го записваме, ще си утежним сметките) и ще го съберем с втория ред. На мястото на втория ред ще запишем резултата от тези сметки (елемент по елемент). Имаме ред1. (-2) + ред2 и се записва където е ред2.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 6 & -3 & 4 & 3 & 3 \\ 9 & -4 & 3 & 2 & 4 \end{array} \right)$$

$$3 \cdot (-2) + 6 = 0$$

$$(-2) \cdot (-2) + (-3) = 1$$

$$5 \cdot (-2) + 4 = -6$$

$$4 \cdot (-2) + 3 = -5$$

$$2 \cdot (-2) + 3 = -1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & -5 & -1 \\ 9 & -4 & 3 & 2 & 4 \end{array} \right)$$

Сега за 9-та, пак с първия ред: $3 \cdot (-3) + 9 = 0$. Ред1. (-3) + Ред3 и се записва на мястото на Ред3.

$$3 \cdot (-3) + 9 = 0, \quad (-2) \cdot (-3) + (-4) = 2,$$

$$5 \cdot (-3) + 3 = -12, \quad 4 \cdot (-3) + 2 = -10, \quad 2 \cdot (-3) + 4 = -2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & -12 & -10 & -2 \end{array} \right)$$

(Както се вижда $2 \cdot \text{Ред2} = \text{Ред3}$. Това означава, че двата реда са линейно зависими, т.е. единия може да се махне. Но нека проверим с метода на Гаус.) Сега 2-та под 1-та трябва да стане нула: Ред2. (-2) + Ред3 и се записва на мястото на Ред3.

$$1 \cdot (-2) + 2 = 0, \quad (-6) \cdot (-2) + (-12) = 0,$$

$$(-5) \cdot (-2) + (-10) = 0, \quad (-1) \cdot (-2) + (-2) = 0$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Можем да махнем нулев ред, т.е. остават два реда. Рангът на матрицата е 2 (на основната и разширената ранговете са равни).

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & -5 & -1 \end{array} \right)$$

Сега записваме матрицата като система уравнения.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_2 - 6x_3 - 5x_4 = -1 \end{cases}$$

Имаме 2 уравнения с 4 неизвестни. Коеето означава, че ще имаме параметри. Броя на параметрите е разликата между уравненията (рангът) и неизвестните: 2 параметъра. Избираме си две неизвестни, които участват и в двете уравнения. Примерно x_3 и x_4 . Нека $x_3 = p$, $x_4 = q$.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5p + 4q = 2 \\ x_2 - 6p - 5q = -1 \end{cases}$$

От второто уравнение: $x_2 = 6p + 5q - 1$. Заместваме x_2 в първото уравнение:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2(6p + 5q - 1) + 5p + 4q &= 2 \\ 3x_1 - 12p - 10q + 2 + 5p + 4q &= 2 \\ 3x_1 &= 7p + 6q \\ x_1 &= (7/3)p + 2q \end{aligned}$$

Записваме отговора:

$$\begin{cases} x_1 = (7/3)p + 2q \\ x_2 = 6p + 5q - 1 \\ x_3 = p \\ x_4 = q \end{cases}$$

□

Задача 3б. Да се определят ранговете на основната и разширената матрица от (3а).

Решение. Рангът е 2. $r(A) = r(\tilde{A}) = 2$. Виж по-горе.

□

Задача 4а. Да се изведе формулата за ъгъл между две прави в равнината: $g_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $g_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Да се разгледат всички случаи на взаимно положение на двете прави g_1 и g_2 .

Решение. Взаимно положение на две прави в равнината: успоредни, пресичат се, сливат се.

Другото се прескача.

□

Задача 4б. Точките $A(1, 2)$, $B(-1, -1)$ и $C(2, 1)$ са върхове на триъгълник. Да се намерят уравненията на трите страни на триъгълник ABC и на височината от върха B към страната AC .

Решение. Нека имаме права AB , с начална точка $A(x_0, y_0)$ и крайна точка $B(x_1, y_1)$. Тогава уравнението на правата AB се намира по следната формула:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

По тази формула ще намерим уравненията на страните. Нека да започнем с AB , $A(1, 2)$, $B(-1, -1)$.

$$\frac{x - 1}{-1 - 1} = \frac{y - 2}{-1 - 2}$$

Умножаваме на кръст и се получава:

$$-3(x - 1) = -2(y - 2)$$

$$AB : 3x - 2y + 1 = 0$$

Сега за BC , $B(-1, -1)$, $C(2, 1)$.

$$\frac{x - (-1)}{2 - (-1)} = \frac{y - (-1)}{1 - (-1)}$$

$$2(x + 1) = 3(y + 1)$$

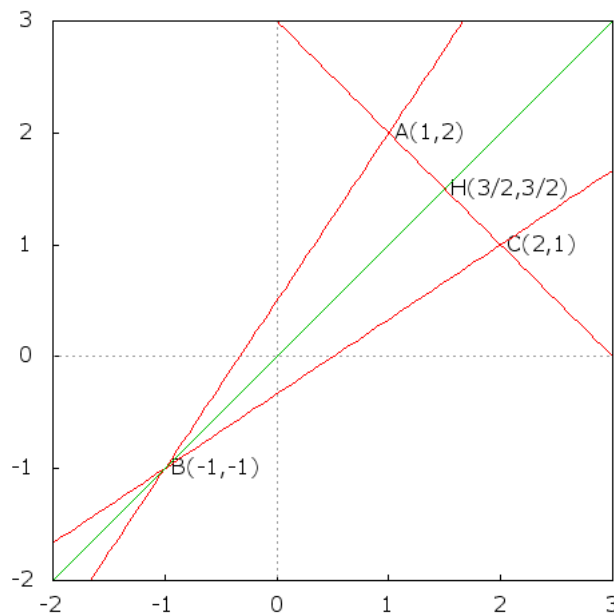
$$BC : 2x - 3y - 1 = 0$$

И за AC , $A(1, 2)$, $C(2, 1)$.

$$\frac{x - 1}{2 - 1} = \frac{y - 2}{1 - 2}$$

$$-(x - 1) = y - 2$$

$$AC : x + y - 3 = 0$$



Нека BH е височината към AC . Тогава $BH \cdot AC = 0$ (скаларно произведение). Взимаме нормалният вектор на AC : $(1, 1)$ (това са коефициентите пред x и y). Трябва да измислим такъв вектор за BC , че скаларното произведение с $(1, 1)$ да даде нула. Принципно се разменят числата и се сменя знака. Тогава нормалният вектор на BH ще е $(1, -1)$.

Сега образуваме уравнението на BC : $1x - 1y + c = 0$. Трябва да намерим c . Точката B принадлежи на правата BH , следователно можем да я заместим.

$$1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) + c = 0 \implies c = 0$$

Уравнението на BH е $x - y = 0$.

Отговор: AB : $3x - 2y + 1 = 0$, BC : $2x - 3y - 1 = 0$, AC : $x + y - 3 = 0$, BH : $x - y = 0$. $\square$

Задача 5. В пространството са дадени точката $P(4, 3, 10)$ и правите

$$p : \begin{cases} x = 1 + 4k \\ y = 1 + 8k \\ z = 1 + 10k \end{cases}, g : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$$

(а) Да се определи взаимното положение на правите p и g и да се провери дали те лежат в една равнина.

(б) Да се намерят координатите на симетричната точка P' на точката P спрямо правата g .

Решение. Правата g е в каноничен вид, трябва да направим и p така. От трите уравнения за p изразяваме k и се получава:

$$p : \frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{8} = \frac{z-1}{10}$$

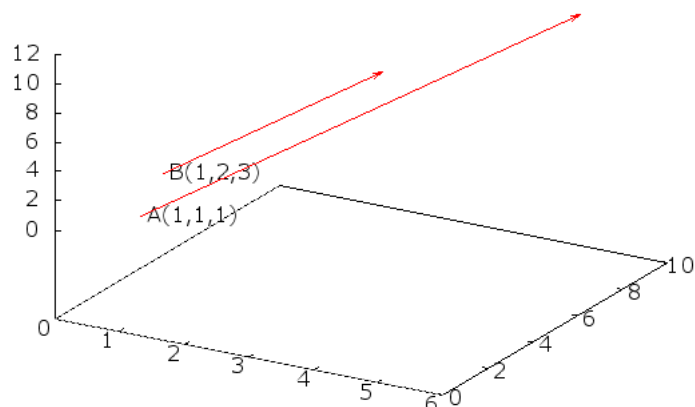
Сравняваме с g :

$$g : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$$

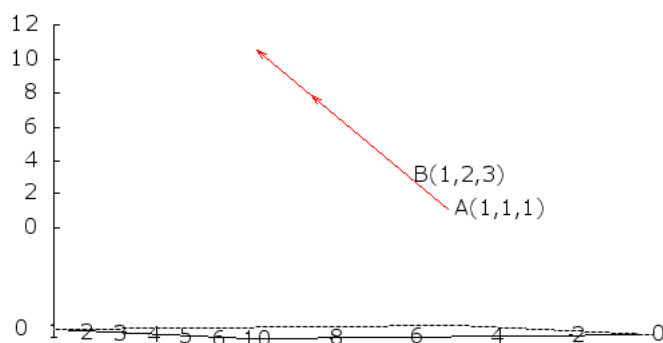
Разглеждаме векторите (числата в знаменател):

$$(4, 8, 10) = 2(2, 4, 5)$$

Това се нарича линейна комбинация на вектори, т.е. векторите са успоредни или съвпадат, т.е. правите са успоредни, т.е. лежат в една равнина.



Точката $A(1, 1, 1) \in p$ (числата в числител със знак минус, т.е. ако я заместим трябва числителите да станат нула), $B(1, 2, 3) \in g$.

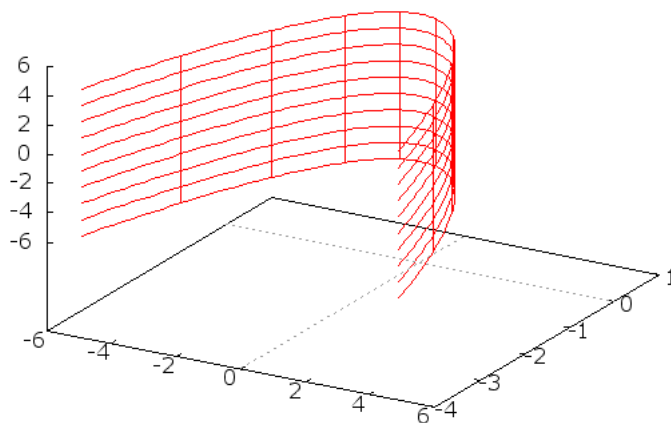
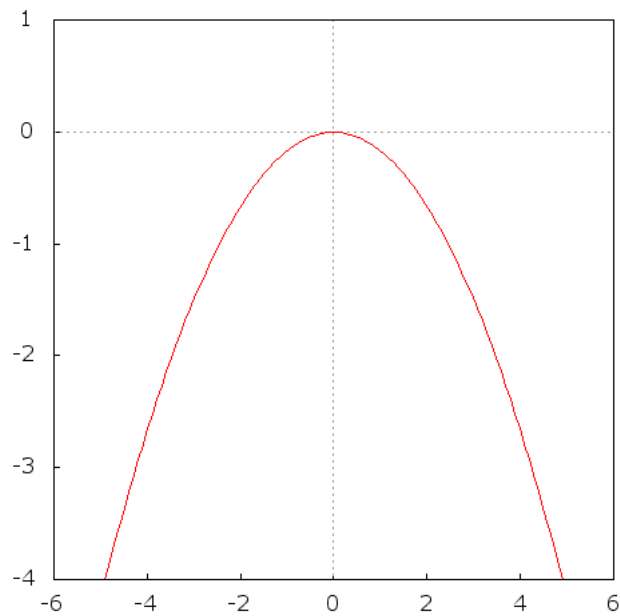


Търсенето на симетричната точка се прескача. □

Задача ба. Каква повърхнина е представена с уравнението $x^2 = -6y$. Да се опишат основните характеристики на съответната крива в равнината, която представя същото уравнение.

Решение. В равнината това е парабола, в пространството — параболичен цилиндър. Параметризация:

$$x = t, \quad y = -\frac{t^2}{6}$$



□

Задача 66. Да се намери областта на решенията на системата неравенства.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1 - x_2 \leq 0 \\ 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \leq 2 \end{cases}$$

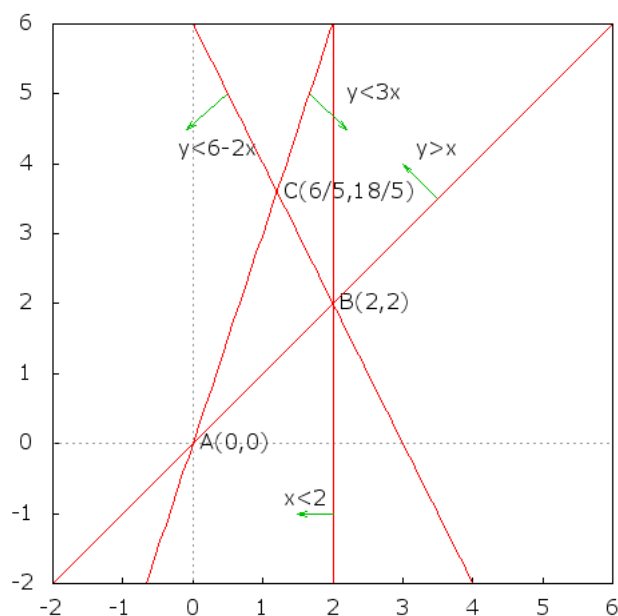
Да се определи какво множество представлява областта на решенията и коя е опорната права.

Решение. Имаме x_1 и x_2 , които определят координатна система. Сменяме ги на x и y за по-лесно представяне.

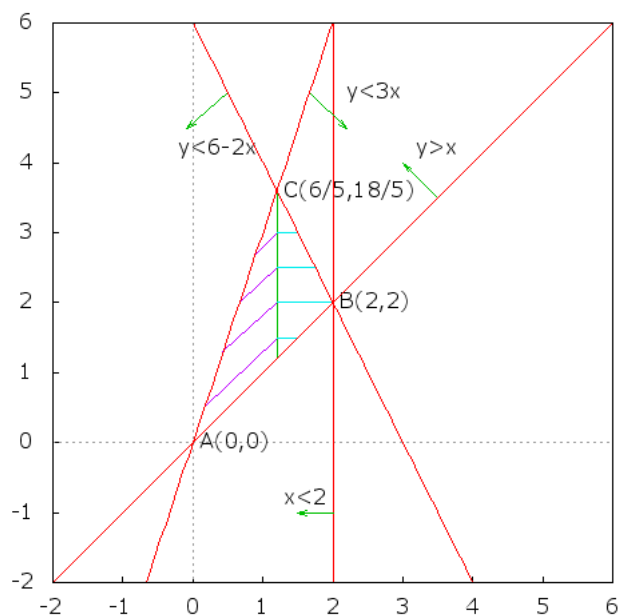
$$\begin{cases} 3x - y \geq 0 \\ x - y \leq 0 \\ 2x + y \leq 6 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

Оставяме y отляво, всичко друго отдясно (за да представим неравенствата като функции).

$$\begin{cases} y \leq 3x \\ y \geq x \\ y \leq 6 - 2x \\ x \leq 2 \end{cases}$$

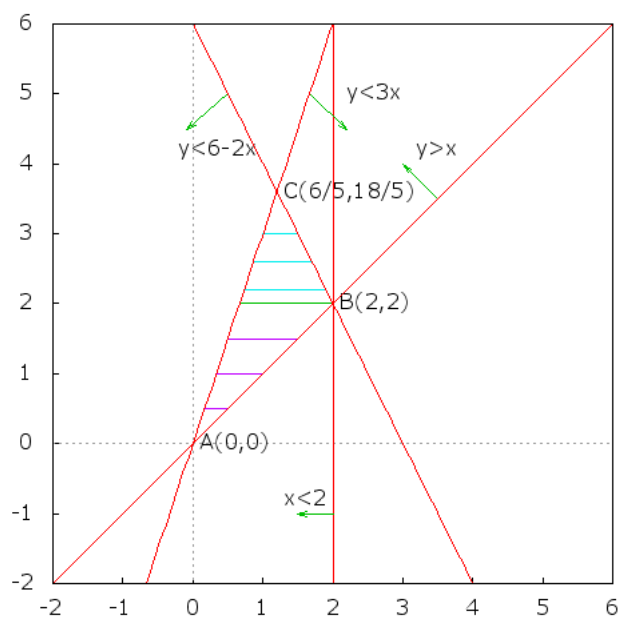


Това би трябвало да е решението, триъгълник ABC . Опорната ни права може да е x , може да е y . Взимаме първо x да е в числови граници, y във функционални.



Вертикалната зелена линия разделя двете области. Това е областта в лилаво: $x \in [0, 6/5]$, $y \in [x, 3x]$, а това е областта в светлосиньо: $x \in [6/5, 2]$, $y \in [x, 6 - 2x]$. Двете заедно описват целия триъгълник ABC .

Сега нека y да е в числови граници, а x във функционални.



Областта в лилаво: $y \in [0, 2]$, $x \in [y/3, y]$, областта в светлосиньо: $y \in [2, 18/5]$, $x \in [y/3, (6 - y)/2]$. $\square$

7 Седма тема

Задача 1а. Даден е полином $P(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6$. Да се намерят всички решения на уравнението $P(x) = 0$ и ако има комплексни корени, да се преведат в тригонометричен вид.

Задача 1б. Да се определи ранга на матрицата A в зависимост от стойността на параметъра λ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & \lambda + 1 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

Задача 2а. Да се намери общото решение на системата линейни уравнения по метода на Гаус.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}$$

Задача 2б. Да се определи при какви условия матричното уравнение $A.X.B.C = D$ има решение и да се изрази решението, ако матриците A , B , C и D са дадени.

Задача 3а. Даден е триъгълник ABC с върхове $A(-4, -5)$, $B(4, 1)$ и $C(-1, 7)$. Да се намерят уравненията на страната AB , височината CH и медианата CM ($H \in AB$, $M \in AB$).

Задача 3б. В пространството са дадени точката $D(7, 8, -5)$, правата g и равнината α .

$$g : \frac{x-3}{-2} = \frac{y-6}{2} = \frac{z}{1}, \quad \alpha : 2x + y + 2z = 0$$

Да се определи общото уравнение на равнината β , определена от точка D и правата g . Да се докаже, че α и β са успоредни.

Задача 4а. Да се определи границата.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$$

Задача 4б. Да се определят екстремумите и инфлексните точки на функцията.

$$y = \frac{x}{1 - \ln x}$$

Задача 5а. С помощта на дадената субституция да се реши интегралът.

$$\int \frac{dx}{\cos^3(x)}, \quad t = \sin(x)$$

Задача 5б. Да се реши интегралът.

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^2(1+x^2)}$$

Задача 6а. Да се определи видът на повърхнината, представена с уравнението $x^2 - y^2 = 4$. Да се опишат основните характеристики на съответната крива в равнината, която се представя със същото уравнение.

Задача 6б. Малки и големи суми на Дарбу и теорема на Дарбу. Теорема за средните стойности. Общ критерий за интегрируемост. Основни класове интегрируеми функции.

Всяка подточка е по 5 точки.

Задача 1а. Даден е полином $P(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6$. Да се намерят всички решения на уравнението $P(x) = 0$ и ако има комплексни корени, да се преведат в тригонометричен вид.

Решение. Ще използваме правилото на Хорнер за да намерим корените.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 2 & -4 & -5 & -6 \\ 2 & 1 & 4 & 4 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 1 & 0 & \end{array}$$

Реалните корени са $x_1 = 2$ и $x_2 = -3$. Квадратното уравнение, което остава, е с комплексни корени.

$$x^2 + x + 1 = 0, \quad D = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3$$

$$x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Нека да припомним тригонометричен вид на комплексно число.

$$z = a + ib, \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos(\varphi) = \frac{a}{|z|}, \quad \sin(\varphi) = \frac{b}{|z|}$$

$$z = |z|(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$$

Сега трябва да ги преведем в тригонометричен вид. Нека започнем с x_3 .

$$z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad |z_1| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

$$\cos(\varphi) = -\frac{1}{2}, \quad \sin(\varphi) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \varphi = \frac{4\pi}{3}$$

$$z_1 = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

Сега за x_4 .

$$z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad |z_1| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

$$\cos(\varphi) = -\frac{1}{2}, \quad \sin(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \varphi = \frac{2\pi}{3}$$

$$z_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

□

Задача 16. Да се определи ранга на матрицата A в зависимост от стойността на параметъра λ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & \lambda + 1 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

Решение. Нека да започнем с изчисляването на минорите.

$$\Delta_1 = |1| \neq 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2 = 1 \neq 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -5 - 4 - 4 + 2 + 4 + 8 = -9 + 10 = 1 \neq 0$$

Детерминантата 4×4 ще я приведем в триъгълен вид (всичко под главния диагонал трябва да стане нула).

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & \lambda + 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

Ред1. $\cdot$ (-2) + Ред2 и записваме на мястото на Ред2.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & \lambda + 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

Ред1. $\cdot$ (-1) + Ред3 и записваме на мястото на Ред3.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & \lambda + 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

Сега събираме Ред1 с Ред4 и записваме на мястото на Ред4.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda + 3 & \lambda \end{vmatrix}$$

Ред3. $(-(\lambda + 3))$ + Ред4. $(+3)$ и записваме на Ред4.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3\lambda - 2(\lambda + 3) \end{vmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 6 \end{vmatrix}$$

Всичко под главния диагонал е нула, т.е. ранга е равен на броя редове (броя на елементите по главния диагонал). Рангът е равен на 4, ако $\lambda \neq 6$.

Ако $\lambda = 6$, то детерминантата на A е нула, следователно рангът се изчислява чрез минори, тогава рангът е 3. $\square$

Задача 2а. Да се намери общото решение на системата линейни уравнения по метода на Гаус.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}$$

Решение. Метод на Гаус. Виж Тема 6, задача 3а. Прилагаме метода на Гаус.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \end{array} \right)$$

Ред1. (-1) + Ред2 и записваме на мястото на Ред2.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \end{array} \right)$$

Ред1. (-1) + Ред3 и записваме на мястото на Ред3.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array} \right)$$

(Ред2.(+2) + Ред3 = 0 — линейна зависимост) Ред2.(+2) + Ред3 и записваме на мястото на Ред3.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Ранга на матрицата е 2. Имаме два реда с 4 неизвестни, т.е. ще имаме 2 параметъра. Нека са x_2 и x_3 , защото във второто уравнение имаме само x_4 , по-лесно ще е така. Тогава $x_2 = p$, $x_3 = q$. Преминуваме обратно в система.

$$\left| \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -2x_4 = -2 \end{array} \right.$$

Следва, че $x_4 = 1$. Заместваме в първото уравнение: $x_1 - 2p + q + 1 = 1$. Тогава $x_1 = 2p - q$.

Отговор:

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = 2p - q \\ x_2 = p \\ x_3 = q \\ x_4 = 1 \end{array} \right.$$

□

Задача 26. Да се определи при какви условия матричното уравнение $A.X.B.C = D$ има решение и да се изрази решението, ако матриците A , B , C и D са дадени.

Решение. Умножаваме с A^{-1} отляво и с C^{-1} отдясно, после с B^{-1} отдясно.

$$\begin{aligned} A.X.B.C &= D \\ /.A^{-1} A.X.B.C &= D \\ A^{-1}.A.X.B.C &= A^{-1}.D \\ X.B.C &= A^{-1}.D \\ X.B.C &= A^{-1}.D /.C^{-1} \\ X.B.C.C^{-1} &= A^{-1}.D.C^{-1} \\ X.B &= A^{-1}.D.C^{-1} \\ X.B &= A^{-1}.D.C^{-1} /.B^{-1} \\ X.B.B^{-1} &= A^{-1}.D.C^{-1}.B^{-1} \\ X &= A^{-1}.D.C^{-1}.B^{-1} \end{aligned}$$

Сега определяме размерностите на матриците от условието, за да проверим дали X е с вярна размерност.

$$A_{a \times b}.X_{b \times c}.B_{c \times d}.C_{d \times e} = D_{a \times e}$$

Обратните матрици са транспонирани, т.е. редовете и стълбовете разменени.

$$X_{b \times c} = A_{b \times a}^{-1}.D_{a \times e}.C_{e \times d}^{-1}.B_{d \times c}^{-1}$$

Всичко е точно.

□

Задача 3а. Даден е триъгълник ABC с върхове $A(-4, -5)$, $B(4, 1)$ и $C(-1, 7)$. Да се намерят уравненията на страната AB , височината CH и медианата CM ($H \in AB$, $M \in AB$).

Решение. Нека имаме права AB , с начална точка $A(x_0, y_0)$ и крайна точка $B(x_1, y_1)$. Тогава уравнението на правата AB се намира по следната формула:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

За правата AB , $A(-4, -5)$, $B(4, 1)$.

$$\frac{x - (-4)}{4 - (-4)} = \frac{y - (-5)}{1 - (-5)}$$

$$6(x + 4) = 8(y + 5)$$

$$6x - 8y - 16 = 0$$

$$AB : 3x - 4y - 8 = 0$$

Сега за правата CM . Точка M разполовява страната AB , можем да я намерим по следната формула (чрез координатите на A и B):

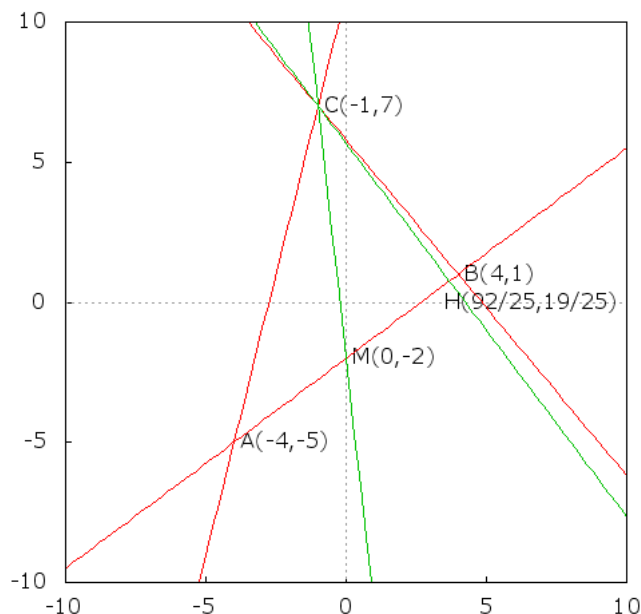
$$M\left(\frac{-4 + 4}{2}, \frac{-5 + 1}{2}\right) \Rightarrow M(0, -2)$$

Уравнението на CM , $C(-1, 7)$, $M(0, -2)$.

$$\frac{x - (-1)}{0 - (-1)} = \frac{y - 7}{-2 - 7}$$

$$-9(x + 1) = y - 7$$

$$CM : 9x + y + 2 = 0$$



За правата CH : тя е перпендикулярна на AB (височина). Скаларното произведение е нула: $AB \cdot CH = 0$. Взимаме коефициентите пред x и y от AB , това е вектора $(3, -4)$. Разменяме числата, едното с минус: $(4, 3)$ (сега скаларното произведение на тези два вектора ще е нула). Това са нормалните вектори на двете прави.

Образуваме уравнението на CH : $4x + 3y + c = 0$. Трябва да намерим c . Точка $C(-1, 7)$ принадлежи на CH , можем да я заместим в уравнението.

$$4(-1) + 3 \cdot 7 + c = 0 \implies c = -17$$

Уравнението на CH : $4x + 3y - 17 = 0$.

Отговор: $AB: 3x - 4y - 8 = 0$, $CM: 9x + y + 2 = 0$, $CH: 4x + 3y - 17 = 0$. $\square$

Задача 36. В пространството са дадени точката $D(7, 8, -5)$, правата g и равнината α .

$$g: \frac{x-3}{-2} = \frac{y-6}{2} = \frac{z}{1}, \quad \alpha: 2x + y + 2z = 0$$

Да се определи общото уравнение на равнината β , определена от точка D и правата g . Да се докаже, че α и β са успоредни.

Решение. Уравнение на равнина се намира чрез детерминанта, образувана от два вектора и точка. Имаме точка $D(7, 8, -5)$. Имаме вектор $(-2, 2, 1)$, от знаменателя на правата g . Точка $A(3, 6, 0)$ принадлежи на g , това са числата от числителя със знак минус (ако заместим точката, трябва да получим нула).

Можем да образуваме вектора $\overrightarrow{AD}$, като извадим началните координати от крайните:

$$\overrightarrow{AD} = D - A = (7, 8, -5) - (3, 6, 0) = (4, 2, -5)$$

Сега записваме детерминантата.

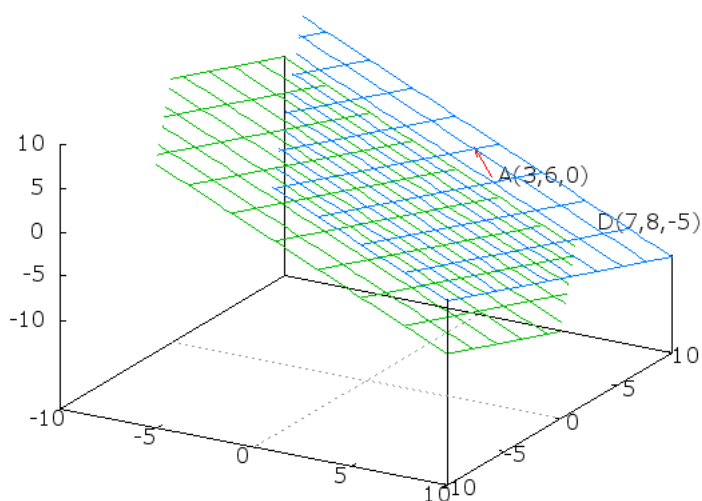
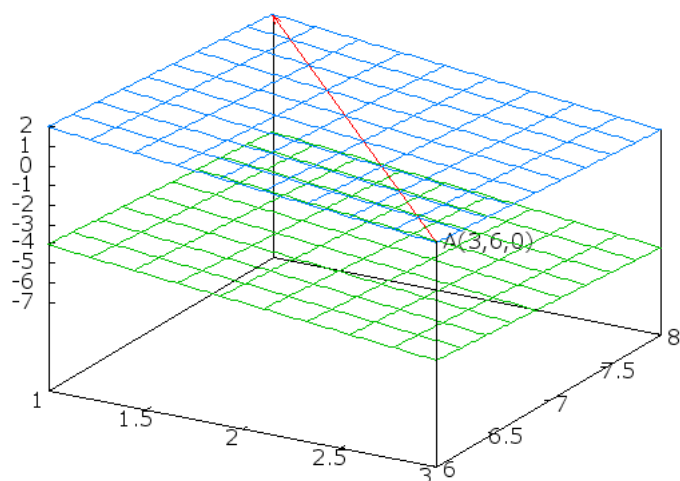
$$\begin{vmatrix} x-3 & y-6 & z-0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

И я развиваме по първи ред.

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} x-3 & y-6 & z-0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \\ & = (x-3)(-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} + (y-6)(-1)^3 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} + z(-1)^4 \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = \\ & = -12(x-3) - 6(y-6) - 12z = 2x + y + 2z - 12 \end{aligned}$$

Уравнението на равнината β е $2x + y + 2z - 12 = 0$.

Как се сравняват уравнения на равнини? Гледат се само коефициентите пред x , y и z . Уравнението на α е $2x + y + 2z = 0$. Следователно равнините α и β са успоредни.



□

Задача 4а. Да се определи границата.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$$

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

Ако заместим с четворката, се получава нула върху нула. Това се нарича неопределеност. Прилагаме правилото на Лопитал. Диференцираме поотделно числителя

и знаменателя.

$$((1+2x)^{1/2} - 3)' = (1+2x)^{-1/2} \frac{1}{2} 2 = \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$$

$$(x^{1/2} - 2)' = x^{-1/2} \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Заместваме в границата.

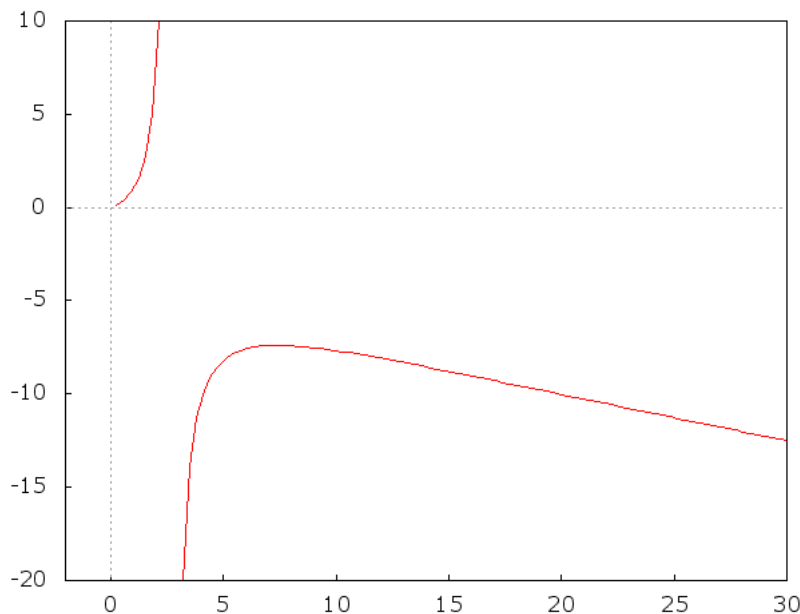
$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{1+2x}} = \frac{2\sqrt{4}}{\sqrt{1+8}} = \frac{4}{3}$$

□

Задача 46. Да се определят екстремумите и инфлексните точки на функцията.

$$y = \frac{x}{1 - \ln x}$$

Решение. Графиката на функцията.



Ограничението е $x \neq e$. Функцията няма корени. Трябва да изчислим първа и втора производна, и техните корени.

$$y' = \frac{1(1 - \ln(x)) - x(0 - 1/x)}{(1 - \ln(x))^2} = \frac{2 - \ln(x)}{(1 - \ln(x))^2}$$

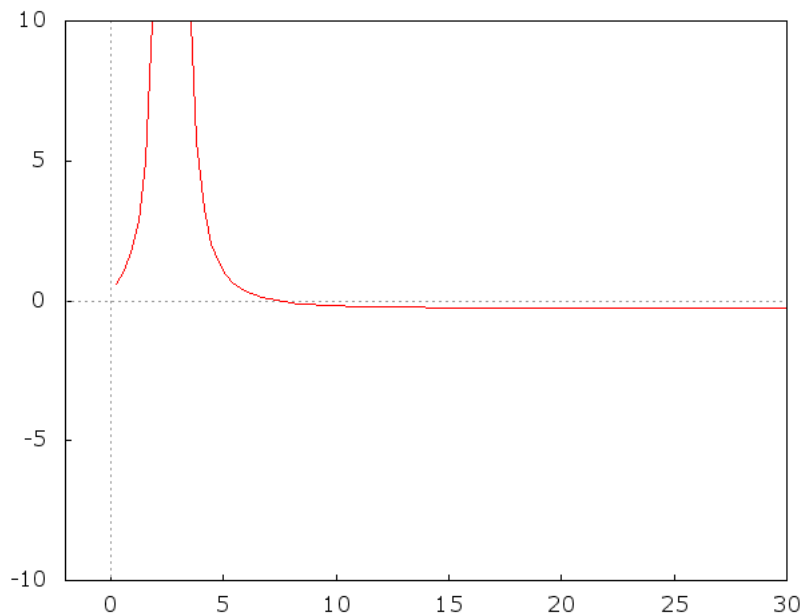
$$2 - \ln(x) = 0 \implies \ln(x) = 2 \implies x = e^2 \sim 7.389$$

Изчисляваме стойности около предполагаемата екстремална точка.

$$x = e^{1.5} : y'(e^{1.5}) = \frac{2 - \ln(e^{1.5})}{(1 - \ln(e^{1.5}))^2} = \frac{2 - 1.5}{(1 - 1.5)^2} = \frac{0.5}{(-0.5)^2} = \frac{1}{0.5} = 2$$

$$x = e^{2.5} : y'(e^{2.5}) = \frac{2 - \ln(e^{2.5})}{(1 - \ln(e^{2.5}))^2} = \frac{2 - 2.5}{(1 - 2.5)^2} = \frac{-0.5}{(-1.5)^2} = \frac{-0.5}{2.25} = -0.2(2)$$

Знакът отляво на $x = e^2$ е положителен (функцията расте), отдясно — отрицателен (функцията намалява), т.е. функцията има максимум в $x = e^2$.



Втора производна.

$$y'' = \frac{(0 - 1/x)(1 - \ln(x))^2 - (2 - \ln(x))2(1 - \ln(x))(-1/x)}{(1 - \ln(x))^4} =$$

$$= \frac{-(1 - \ln(x))[1 - \ln(x) - 2(2 - \ln(x))]}{x(1 - \ln(x))^4} = \frac{-(\ln(x) - 3)}{x(1 - \ln(x))^3} = \frac{3 - \ln(x)}{x(1 - \ln(x))^3}$$

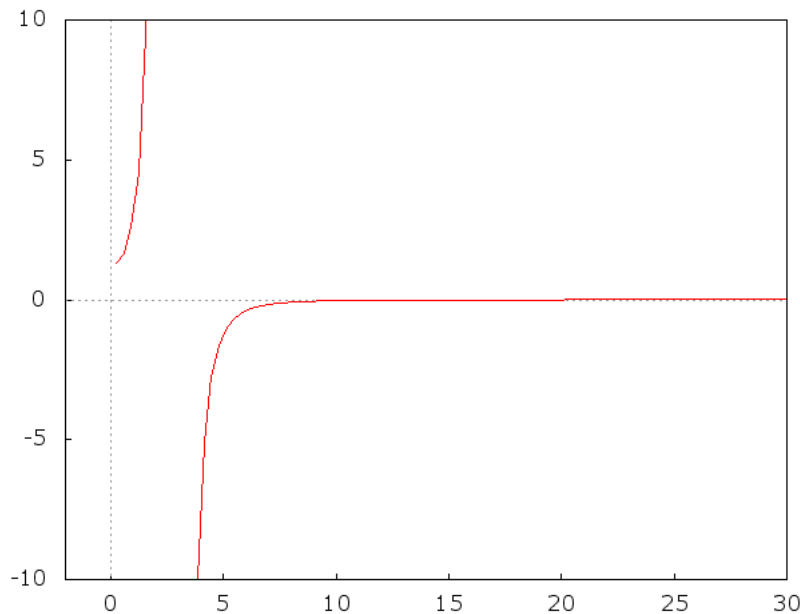
$$3 - \ln(x) = 0 \implies \ln(x) = 3 \implies x = e^3 \sim 20.085$$

Ограниченията са $x \neq e$, $x \neq 0$. Изчисляваме стойности около $x = e^3$.

$$x = e^{2.5} : y''(e^{2.5}) = \frac{3 - \ln(e^{2.5})}{e^{2.5}(1 - \ln(e^{2.5}))^3} = \frac{3 - 2.5}{e^{2.5}(1 - 2.5)^3} = \frac{0.5}{e^{2.5}(-1.5)^3} < 0$$

$$x = e^{3.5} : y''(e^{3.5}) = \frac{3 - \ln(e^{3.5})}{e^{3.5}(1 - \ln(e^{3.5}))^3} = \frac{3 - 3.5}{e^{3.5}(1 - 3.5)^3} = \frac{-0.5}{e^{3.5}(-2.5)^3} > 0$$

Знакът отляво на $x = e^3$ е отрицателен — функцията е вдлъбната, вдясно е положителен — функцията е изпъкнала, т.е. $x = e^3$ е инфлексна точка.



Отговор: Локален максимум в $x = e^2$, инфлексна точка в $x = e^3$. □

Задача 5а. С помощта на дадената субституция да се реши интегралът.

$$\int \frac{dx}{\cos^3(x)}, \quad t = \sin(x)$$

Решение. Субституцията е:

$$x = \arcsin(t), \quad \cos(x) = \sqrt{1-t^2}, \quad dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Заместваме:

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \frac{1}{(\sqrt{1-t^2})^3} &= \int \frac{dt}{(1-t^2)^2} = \int \frac{(1-t^2+t^2)dt}{(1-t^2)^2} = \\ &= \int \frac{(1-t^2)dt}{(1-t^2)^2} + \int \frac{t^2 dt}{(1-t^2)^2} = \int \frac{dt}{1-t^2} + \int \frac{t^2 dt}{(1-t^2)^2} \end{aligned}$$

Относно първия интеграл. Трябва да разложим $1-t^2$. Т.е. $(1-t)(1+t)$, корените са 1, -1.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-t^2} &= \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} \\ 1 &= A(1+t) + B(1-t) \end{aligned}$$

Заместваме с $t = 1$.

$$1 = A(1+1) \implies A = \frac{1}{2}$$

Сега с $t = -1$.

$$1 = B(1-(-1)) \implies B = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{dt}{1-t^2} &= \int \frac{1/2dt}{1-t} + \int \frac{1/2dt}{1+t} = \frac{1}{2} \left(-\int \frac{d(1-t)}{1-t} + \int \frac{d(1+t)}{1+t} \right) = \\ &= \frac{1}{2} (-\ln|1-t| + \ln|1+t|) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right|\end{aligned}$$

Сега втория интеграл. Вкарваме t под диференциала, после целия знаменател под диференциала, и диференцираме по части. Вземаме под внимание, че $(x^{-1})' = -x^{-2}$

$$\begin{aligned}\int \frac{t^2 dt}{(1-t^2)^2} &= -\frac{1}{2} \int \frac{td(-t^2)}{(1-t^2)^2} = -\frac{1}{2} \int t(1-t^2)^{-2} d(1-t^2) = \frac{1}{2} \int td(1-t^2)^{-1} = \\ &= \frac{1}{2} \left(t(1-t^2)^{-1} - \int (1-t^2)^{-1} dt \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{t}{1-t^2} - \int \frac{dt}{1-t^2} \right)\end{aligned}$$

Вече сметнахме този интеграл, записваме отговора.

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + \frac{1}{2} \left(\frac{t}{1-t^2} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| \right) + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + \frac{t}{2(1-t^2)} - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C = \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + \frac{t}{2(1-t^2)} + C\end{aligned}$$

□

Задача 5б. Да се реши интегралът.

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^2(1+x^2)}$$

Решение. Трябва да се разложи полинома $(1+x)^2(1+x^2)$. Корените на $(1+x)^2$ са $-1, -1$, а на $(1+x^2)$ са $i, -i$. Полинома се разлага на $(1+x)(1+x)(x+i)(x-i)$. Това се нарича каноничен вид. Щом търсим реални и комплексни корени, т.е. всички корени, полинома *винаги* се разлага до каноничен вид.

Нека сега да разложим дробта на сума от елементарни дроби. Полинома в числител *винаги* ще е константа (за полином в каноничен вид). Дробта ще изглежда така:

$$\frac{1}{(1+x)^2(1+x^2)} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{(1+x)^2} + \frac{C}{x-i} + \frac{D}{x+i}$$

Привеждаме под общ знаменател.

$$1 = A(1+x)(x-i)(x+i) + B(x-i)(x+i) + C(1+x)^2(x+i) + D(1+x)^2(x-i)$$

Сега заместваме с корените. Започваме с $x = -1$.

$$\begin{aligned}1 &= B(-1-i)(-1+i) \\ 1 &= B(1-i+i-i^2) \\ 1 &= B(1+1) \\ B &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Сега с $x = i$.

$$\begin{aligned}
 1 &= C(1+i)^2(i+i) \\
 1 &= C(1+2i+i^2)2i \\
 1 &= C(1+2i-1)2i \\
 1 &= C4i^2 \\
 1 &= C(-4) \\
 C &= -\frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

Остана и с $x = -i$.

$$\begin{aligned}
 1 &= D(1-i)^2(-i-i) \\
 1 &= -2iD(1-2i+i^2) \\
 1 &= -2iD(1-2i-1) \\
 1 &= 4i^2D \\
 1 &= -4D \\
 D &= -\frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

Трябва да намерим и A . Заместваме с $x = 0$.

$$\begin{aligned}
 1 &= A(-i)(+i) + B(-i)(+i) + C(+i) + D(-i) \\
 1 &= -i^2A - i^2B + iC - iD \\
 1 &= A + B + i(C - D) \\
 1 &= A + \frac{1}{2} + i\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) \\
 A &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Тогава:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(1+x)^2(1+x^2)} &= \frac{1/2}{1+x} + \frac{1/2}{(1+x)^2} + \frac{-1/4}{x-i} + \frac{-1/4}{x+i} \\
 \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^2(1+x^2)} &= \int_0^1 \frac{1/2dx}{1+x} + \int_0^1 \frac{1/2dx}{(1+x)^2} + \int_0^1 \frac{-1/4dx}{x-i} + \int_0^1 \frac{-1/4dx}{x+i}
 \end{aligned}$$

Нека да ги сметнем поотделно.

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{1/2dx}{1+x} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(1+x)}{1+x} = \frac{1}{2} \ln(1+x)|_0^1 = \frac{1}{2} (\ln(2) - \ln(1)) = \frac{\ln(2)}{2} \\
 \int_0^1 \frac{1/2dx}{(1+x)^2} &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1+x)^{-2} dx = -\frac{1}{2} (1+x)^{-1}|_0^1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \frac{-1/4 dx}{x-i} = -\frac{1}{4} \int_0^1 \frac{d(x-i)}{x-i} = -\frac{1}{4} \ln |x-i|_0^1 = -\frac{1}{4} (\ln |1-i| - \ln |-i|) = -\frac{1}{4} \ln \left| \frac{1-i}{-i} \right|$$

$$\int_0^1 \frac{-1/4 dx}{x+i} = -\frac{1}{4} \int_0^1 \frac{d(x+i)}{x+i} = -\frac{1}{4} \ln |x+i|_0^1 = -\frac{1}{4} (\ln |1+i| - \ln |i|) = -\frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+i}{i} \right|$$

Третия и четвъртия интеграл събрани:

$$-\frac{1}{4} \ln \left| \frac{1-i}{-i} \right| - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+i}{i} \right| = -\frac{1}{4} \left(\ln \left| \frac{1-i}{-i} \right| + \ln \left| \frac{1+i}{i} \right| \right) =$$

$$= -\frac{1}{4} \ln \left(\left| \frac{1+i}{i} \right| \left| \frac{1-i}{-i} \right| \right) = -\frac{1}{4} \ln \left| \frac{1-i^2}{-i^2} \right| = -\frac{1}{4} \ln \left| \frac{2}{1} \right| = -\frac{\ln(2)}{4}$$

Събираме всичко:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^2(1+x^2)} = \frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{4} - \frac{\ln(2)}{4} = \frac{\ln(2) + 1}{4}$$

Забележка: Ако търсим само реални корени, без комплексни, важи следното: Полинома в числител трябва да е с една степен по-ниска от полинома в знаменател. Както се вижда навсякъде имаме константи (полином от нулева степен) в числител, тъй като в знаменател имаме полиноми от първа степен. Ако целия знаменател е на степен, степента не е от значение, тъй като тя обозначава двукратен, трикратен, ... корен. Т.е. за $(1+x)^2$, имаме $1+x$, което е на първа степен. $\square$

Задача 6а. Да се определи видът на повърхнината, представена с уравнението $x^2 - y^2 = 4$. Да се опишат основните характеристики на съответната крива в равнината, която се представя със същото уравнение.

Решение. В равнината това е хипербола, в пространството — хиперболичен цилиндър. За да параметризираме уравнението, отдясно трябва да е единица, и вземаме числата в знаменател.

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$$

Хипербола се параметризира с $1/\cos(t)$, $\tan(t)$ или $\cosh(t)$, $\sinh(t)$ (това са косинус и синус хиперболичен, те дефинират/са дефинирани от хиперболата). Избираме си първия вариант:

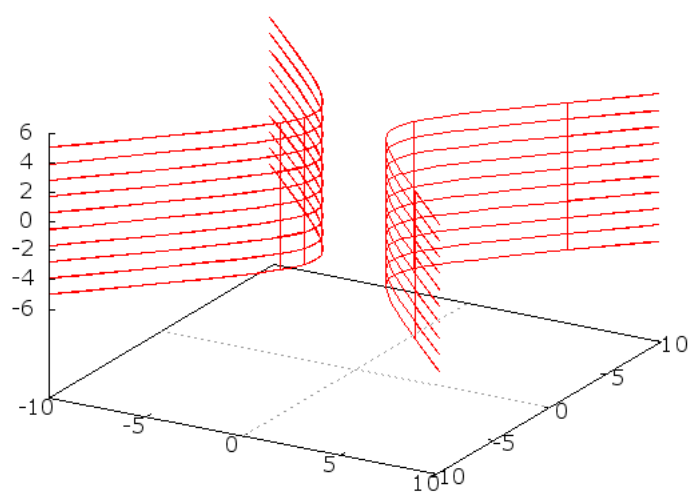
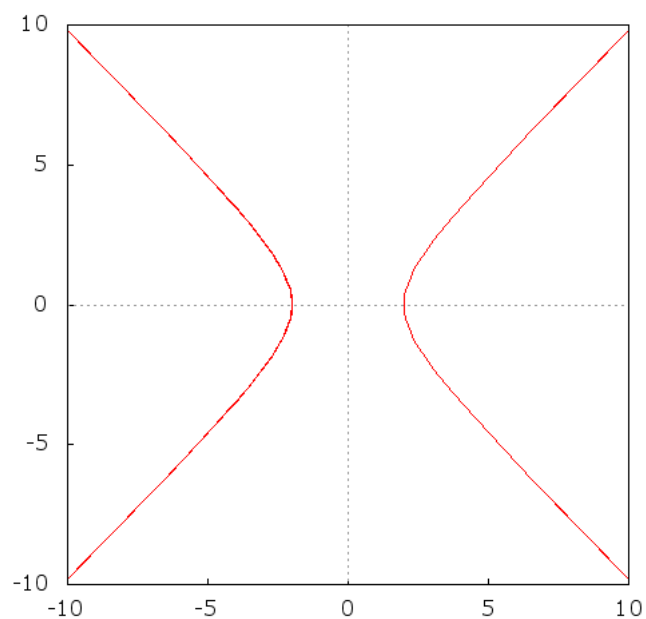
$$x = \frac{2}{\cos(t)}, \quad y = 2 \tan(t)$$

Проверяваме:

$$\frac{4}{\cos^2(t)} \frac{1}{4} - \frac{4 \sin^2(t)}{\cos^2(t)} \frac{1}{4} = 1$$

$$\frac{1}{\cos^2(t)} - \frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)} = 1$$

$$1 - \sin^2(t) = \cos^2(t)$$



□

Задача 66. Малки и големи суми на Дарбу и теорема на Дарбу. Теорема за средните стойности. Общ критерий за интегрируемост. Основни класове интегрируеми функции.

Решение. Доказателствата се прескачат.

□

Литература

- Аналитична геометрия: доц. д-р И. Трендафилов (л,у)
- Линейна алгебра: проф. д-тн К. Пеева (л), гл. ас. М. Узунова (у)
- Математически анализ: доц. д-р Е. Върбанова (л), доц. д-р Й. Панева (у)
- Сайтове: Wikibooks LaTeX, gnuplot tips, Wikipedia, Wolfram MathWorld
- Софтуер: TeX Live, gnuplot, Notepad++, Sumatra PDF, Windows XP