ПИСМЕН ИЗПИТ ПО ВИСША АЛГЕБРА
спец. Математика
07.07.2006 г.

Задача 1. Даден е полиномът

$$f = x^4 - 7x^3 + ax^2 + bx + 6 \in \mathbb{C}[x].$$

Да се намерят всички $a, b \in \mathbb{C}$, за които 1 е двукратен корен на f.

Задача 2. Дадени са полиномите

$$f = x^n - 2x^{n-1} + 2x \in \mathbb{C}[x],$$
$$g = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 \in \mathbb{C}[x].$$

Да се намери остатъка при делението на f с g.

Задача 3. Нека $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a = \pm 1 \right\}$.

а) Да се докаже, че G е група относно умножението на матрици;

б) Да се намерят елементите на G от краен ред;

в) Нека $N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{Z} \right\}$. Да се докаже, че $N \trianglelefteq G$ и $G/N \cong \mathbb{C}_2$.

Задача 4. Разглеждаме пръстена

$$A = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \mid f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x],\ g(1) \neq 0 \right\}.$$

Да се докаже, че множеството

$$M = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \in A \mid f(1) = 0 \right\}$$

е идеал на A, който съдържа всеки собствен (т.е. различен от A) идеал и $A/M \cong \mathbb{R}$.