ПИСМЕН ИЗПИТ ПО ВИСША АЛГЕБРА I

специалност Математика

02.07.2003

Задача 1. Разглеждаме пръстена

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : \ a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Нека p е просто число и нека I и J са множествата

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in R \ : \ p \,|\, c \right\}, \quad J = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in R \ : \ p \,|\, a, \ p \,|\, c \right\}.$$

Да се докаже, че:

а) $I \lhd R$, $J \lhd R$;

б) факторпръстенът R/I е поле, а факторпръстенът R/J не е поле.

Задача 2. Разглеждаме множествата

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \epsilon & a \\ 0 & \eta \end{pmatrix} : \ a \in \mathbb{Z}, \ \epsilon = \pm 1, \ \eta = \pm 1 \right\},$$

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} \epsilon & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \right\}, \quad N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \right\}.$$

Да се докаже, че:

а) G е група относно умножението на матрици и $M \lhd G$, $N \lhd G$;

б) $G/M \cong \mathbb{C}_2$. Колко елемента има факторгрупата G/N?

Задача 3. Да се намерят a и b, за които 1 е двукратен корен на полинома $f = ax^{n+1} + bx^n + 1$.

Задача 4. Нека G е крайна група. Да се докаже, че:

а) ако $|G|$ е четно число, в G има елемент от ред 2;

б) ако всеки неединичен елемент на G е от ред 2, то G е абелева група.