Решения и критерий за оценяване

Домашна работа № 3 по Висша алгебра 1 , спец. Математика, I курс,
зададена на 3 юни 2013 г.

Задача 1 (1.5 точки) Да се намери най-големият общ делител $d = (f, g) \in \mathbb{Q}[x]$ на полиномите

$$f(x) = x^5 + x^4 - 7x^3 - x^2 + 6x, \quad g(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 \in \mathbb{Q}[x],$$

както и полиноми $u, v \in \mathbb{Q}[x]$, изпълняващи тъждеството на Безу $d = fu + gv$.

Решение:

- 0.9 точки за последователно деление с частно и остатък

$$f(x) = (x+2)g(x) + (2x^3 + 12x^2 - 2x - 12),$$

$$g(x) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{7}{2}\right)(2x^3 + 12x^2 - 2x - 12) + (36x^2 - 36),$$

$$2x^3 + 12x^2 - 2x - 12 = \left(\frac{1}{18}x + \frac{1}{3}\right)(36x^2 - 36).$$

  Последният ненулев остатък $36x^2 - 36$ или $x^2 - 1$ е най-големият общ делител на $f(x)$ и $g(x)$.

- 0.6 точки за изразяване отдолу нагоре

$$36x^2 - 36 = g(x) - \left(\frac{x}{2} - \frac{7}{2}\right)(2x^3 + 12x^2 - 2x - 12) =$$

$$= g(x) - \left(\frac{x}{2} - \frac{7}{2}\right)[f(x) - (x+2)g(x)] = \left(-\frac{x}{2} + \frac{7}{2}\right) f(x) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{5}{2}x - 6\right) g(x).$$

  Следователно полиномите

$$u(x) = -\frac{x}{2} + \frac{7}{2} \quad \text{и} \quad v(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{5}{2} - 6$$

  изпълняват тъждеството на Безу $f(x)u(x) + g(x)v(x) = d(x) = 36x^2 - 36$.

Задача 2 (1 точка) Даден е полиномът

$$h(x) = x^4 + x^3 - \overline{2}x^2 + \overline{1} \in \mathbb{Z}_5[x],$$

чиито коефициенти са остатъци при деление с 5. Да се докаже, че фактор-пръстенът $E = \mathbb{Z}_5[x]/\langle h \rangle$ по главния идеал $\langle h \rangle \triangleleft \mathbb{Z}_5[x]$, породен от h е поле със 5^4 елемента.

Решение:

- 0.1 точки за това, че $E = \mathbb{Z}_5[x]/\langle h \rangle$ е поле тогава и само тогава, когато полиномът $h(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$ е неразложим над $\mathbb{Z}_5$.

- 0.1 точки за това, че $h(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$ от степен $\deg(h) = 4$ е неразложим над $\mathbb{Z}_5$ тогава и само тогава, когато $h(x)$ няма корен в $\mathbb{Z}_5$ и не се разлага в произведение на два неразложими над $\mathbb{Z}_5$ квадратни тричлена.

- 0.2 точки за това, че $h(x)$ няма корен в $\mathbb{Z}_5$ съгласно

$$h(\overline{0}) = \overline{1}, \quad h(\overline{1}) = \overline{1}, \quad h(-\overline{1}) = -\overline{1}, \quad h(\overline{2}) = \overline{2}, \quad h(-\overline{2}) = \overline{1}.$$

- 0.5 точки за това, че $h(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$ не се разлага в произведение на два неразложими над $\mathbb{Z}_5$ квадратни тричлена.

  Ако съществуват $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_5$, така че

$$h(x) = x^4 + x^3 - \overline{2}x^2 + \overline{1} = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d),$$

  то сравняването на коефициентите дава

$$x^3 : \overline{1} = a + c, \tag{1}$$

$$x^2 : -\overline{2} = b + ac + d, \tag{2}$$

$$x : \overline{0} = bc + ad, \tag{3}$$

$$x^0 : \overline{1} = bd. \tag{4}$$

  От (4) следва, че $d = b^{-1} \in \mathbb{Z}_5^* = \{\pm\overline{1}, \ \pm\overline{2}\}$. Ако $b = \pm\overline{1}$, то $d = \pm\overline{1}$ и (3) дава $a + c = 0$, което противоречи на (1). Ако $b = \pm\overline{2}$, то $d = \mp\overline{2} = -b$, така че (3) приема вида $c - a = \overline{0}$, а (2) се свежда до $ac = a^2 = -\overline{2}$. Оттук $a \in \mathbb{Z}_5^* = \mathbb{Z}_5 \setminus \{\overline{0}\} = \{\pm\overline{1}, \ \pm\overline{2}\}$ и $a^2 \in \{\pm\overline{1}\}$. Противоречието доказва неразложимостта на $h(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$ над $\mathbb{Z}_5$.

- 0.1 точки за това, че ако $h(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$ е неразложим над $\mathbb{Z}_5$ полином от степен $\deg(h) = 4$, то полето $E = \mathbb{Z}_5[x]/\langle h \rangle \simeq \mathbb{Z}_5^{\deg(h)} = \mathbb{Z}_5^4$ е 4-мерно линейно пространство над $\mathbb{Z}_5$ и има 5^4 елемента.

Задача 3 (1.5 точки) Да се намерят стойностите на комплексните параметри p и q, за които корените $x_1, \ldots, x_4$ на полинома

$$t(x) = x^4 - 9x^3 + px^2 - 19x + q \in \mathbb{C}[x]$$

изпълняват равенствата

$$x_1 = 2(x_2 + x_3 + x_4) \quad \text{и} \quad x_1^2 = 12(x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4).$$

Решение:

- 0.4 точки за формулите на Виет

$$x_1 + (x_2 + x_3 + x_4) = 9,$$

$$x_1(x_2 + x_3 + x_4) + (x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) = p,$$

$$x_1(x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) + x_2x_3x_4 = 19,$$

$$x_1(x_2x_3x_4) = q.$$

- 0.5 точки за комбиниране с $x_1 = 2(x_2 + x_3 + x_4)$, $x_1^2 = 12(x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4)$ и получаване на

$$x_2 + x_3 + x_4 = 3, \quad x_1 = 6,$$

$$x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 3, \quad x_2x_3x_4 = 1,$$

$$p = 21, \quad q = 6.$$

- 0.4 точки за полагане на $p = 21$, $q = 6$ и разлагане

$$(x-6)(x-1)^3 = (x-6)(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = x^4 - 9x^3 + 21x^2 - 19x + 6 = t(x).$$

- 0.2 точки за извеждане на

$$x_1 = 6, \quad x_2 + x_3 + x_4 = 3,$$

$$x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 3, \quad x_2x_3x_4 = 1$$

и получаване на

$$x_1 = 6 = 2(x_2 + x_3 + x_4) \quad \text{и} \quad x_1^2 = 36 = 12(x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4).$$

Съставил темата и лектор:...................

Азнив Киркор Каспарян