

Решения и критерий за оценяване

Домашна работа № 2 по Висша алгебра 1 , спец. Математика, I курс,
зададена на 25 април 2013 г.

Задача 1 (1.8 точки) Дадена е таблицата за събиране и част от таблицата за умножение в пръстена $R = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$:

+	a	b	c	d	e	f	g	h
a	a	b	c	d	e	f	g	h
b	b	c	d	e	f	g	h	a
c	c	d	e	f	g	h	a	b
d	d	e	f	g	h	a	b	c
e	e	f	g	h	a	b	c	d
f	f	g	h	a	b	c	d	e
g	g	h	a	b	c	d	e	f
h	h	a	b	c	d	e	f	g

.	a	b	c	d	e	f	g	h
a	a	a	a	a	a	a	a	a
b	a	...	c	...	e	...	g	h
c	a	c	...	g	a	c	e	g
d	a	d	...	b	e	h	c	f
e	a	e	a	e	...	e	a	e
f	a	f	c	h	e	b	...	d
g	a	g	e	c	a	g	e	...
h	a	h	g	f	e	d	c	b

(i) Да се попълни таблицата за умножение на R .

(ii) Да се докаже, че $\{a\}$, $\{a, e\}$, $\{a, c, e, g\}$ и R са подгрупи на адитивната група $(R, +)$. Да се определи кои от тях са подпръстени на R и кои от тях са идеали на R .

Решение:

(i) 1.2 точки - по 0.15 точки за намиране на всяко неизвестно произведение:

$$b^2 = (c + h)b = cb + hb = c + h = b,$$

$$bd = (c + h)d = cd + hd = g + f = d,$$

$$bf = b(b + e) = b^2 + be = b + e = f,$$

$$c^2 = c(b + b) = cb + cb = c + c = e,$$

$$dc = d(b + b) = db + db = d + d = g,$$

$$e^2 = e(b + d) = eb + ed = e + e = a,$$

$$fg = f(b + f) = fb + f^2 = f + b = g,$$

$$gh = g(b + g) = gb + g^2 = g + e = c.$$

(ii) 0.6 точки

От тях:

- 0.2 точки за проверка на това, че $\{a, e\}$ и $\{a, c, e, g\}$ са подгрупи на $(R, +)$. За целта е достатъчно да отбележим, че всеки ред от следващите таблици за събиране е пермутация на елементите над хоризонталната черта.

+			+	a	c	e	g
	a	e	a	a	c	e	g
a	a	e	c	c	e	g	a
e	e	a	e	e	g	a	c
			g	g	a	c	e

- 0.2 точки за това, че сечението на редовете и стълбовете, отговарящи на посочените подгрупи на $(R, +)$ са съставени от елементите на тези подгрупи и $\{a, e\}$, $\{a, c, e, g\}$ са подпръстени на R .

.			.	a	c	e	g
	a	e	a	a	a	a	a
a	a	a	c	a	e	a	e
e	a	a	e	a	a	a	a
			g	a	e	a	e

- 0.2 точки за това, че целите редове и стълбове от таблицата за умножение, отговарящи на елементите на $\{a, e\}$ и $\{a, c, e, g\}$ са съставени от елементи на тези множества и $\{a, e\}$, $\{a, c, eg\}$ са идеали в R .

.	a	b	c	d	e	f	g	h
a	a	a	a	a	a	a	a	a
e	a	e	a	e	a	e	a	e

.	a	e
a	a	a
b	a	e
c	a	a
d	a	e
e	a	a
f	a	e
g	a	a
h	a	e

.	a	b	c	d	e	f	g	h
a	a	a	a	a	a	a	a	a
c	a	c	e	g	a	c	e	g
e	a	e	a	e	a	e	a	e
g	a	g	e	c	a	g	e	c

.	a	c	e	g
a	a	a	a	a
b	a	c	e	g
c	a	e	a	e
d	a	g	e	c
e	a	a	a	a
f	a	c	e	g
g	a	e	a	e
h	a	g	e	c

Ако първо е проверено, че $\{a, e\}$ и $\{a, c, e, g\}$ са идеали, то може направо да се стигне до извода, че $\{a, e\}$ и $\{a, c, e, g\}$ са подпръстени на R .

Задача 2 (1.2 точки) Нека $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ е директното произведение на пръстена $\mathbb{Z}$ на целите числа със себе си с покомпонентно определените операции събиране

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

и умножение

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2),$$

а n е естествено число. Да се докаже, че множеството

$$R_n = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a \equiv b \pmod{n}\}$$

е подпръстен на $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, а $n\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z}$ е идеал в R_n с фактор-пръстен $R_n/(n\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_n$.

Решение:

- 0.15 точки за проверка на това, че $(R_n, +)$ е подгрупа на $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$. Ако $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in R_n$, то $(a_1 + a_2, b_1 + b_2) \in R_n$, защото от $a_1 \equiv b_1 \pmod{n}$ и $a_2 \equiv b_2 \pmod{n}$ следва, че

$$(a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) \in n\mathbb{Z},$$

което е еквивалентно на $a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 \pmod{n}$.

- 0.15 точки за затвореност на R_n относно умножение. Ако $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in R_n$, то $(a_1 a_2, b_1 b_2) \in R_n$, защото от $a_1 \equiv b_1 \pmod{n}$ и $a_2 \equiv b_2 \pmod{n}$ следва

$$a_1 a_2 - b_1 b_2 = a_1 a_2 - a_1 b_2 + a_1 b_2 - b_1 b_2 = a_1(a_2 - b_2) + (a_1 - b_1)b_2 \in n\mathbb{Z}.$$

Последното е равносилно на $a_1 a_2 \equiv b_1 b_2 \pmod{n}$. Следователно R_n е подпръстен на $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

- 0.15 точки за избора на изображението

$$\varphi : R_n \longrightarrow \mathbb{Z}_n,$$

$$\varphi(a, b) = a \pmod{n} = b \pmod{n}.$$

- 0.15 точки за съгласуваност на φ със събирането в R_n . Ако $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in R_n$, то

$$\begin{aligned} \varphi((a_1, b_1) + (a_2, b_2)) &= \varphi(a_1 + a_2, b_1 + b_2) = a_1 + a_2 \pmod{n} = \\ &= [a_1 \pmod{n}] + [a_2 \pmod{n}] = \varphi(a_1, b_1) + \varphi(a_2, b_2). \end{aligned}$$

- 0.15 точки за съгласуваност на φ с умножението в R_n . Ако $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in R_n$, то

$$\begin{aligned} \varphi((a_1, b_1)(a_2, b_2)) &= \varphi(a_1 a_2, b_1 b_2) = a_1 a_2 \pmod{n} = \\ &= [a_1 \pmod{n}][a_2 \pmod{n}] = \varphi(a_1, b_1)\varphi(a_2, b_2). \end{aligned}$$

Последните две проверки доказват, че φ е хомоморфизъм на пръстени.

- 0.15 точки за $\text{im}\varphi = \mathbb{Z}_n$. По-точно, за $\forall a(\bmod n) \in \mathbb{Z}_n$ съществува $(a, a) \in R_n$ с $\varphi(a, a) = a(\bmod n)$.
- 0.15 точки за

$$\begin{aligned}\ker \varphi &= \{(a, b) \in R_n \mid 0(\bmod n) = \varphi(a, b) = a(\bmod n)\} = \\ &= \{(a, b) \in R_n \mid n \text{ дели } a \text{ и } b\} = n\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

- 0.15 точки за прилагане на теоремата за хомоморфизмите на пръстени и получаване на изоморфизма

$$R_n/(n\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z}) = R_n/\ker \varphi \simeq \text{im}\varphi = \mathbb{Z}_n.$$

Задача 3 (1 точка) Нека R е пръстенът $R = \{a + b\sqrt{7} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, а I е главният идеал на R , породен от $1 + \sqrt{7}$. Да се докаже, че

$$I = \{a + b\sqrt{7} \in R \mid 6 \text{ дели } a - b\}$$

и фактор-пръстенът $R/I \cong \mathbb{Z}_6$ е изморфен на пръстена $\mathbb{Z}_6$ от остатъци при деление с 6.

Решение:

По условие

$$I = \{(1 + \sqrt{7})(x + y\sqrt{7}) \mid x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

Да означим

$$I_0 = \{a + b\sqrt{7} \in R \mid 6 \text{ дели } a - b\}.$$

- 0.15 точки за $I \subset I_0$.

За произволни $x, y \in \mathbb{Z}$ е в сила

$$(1 + \sqrt{7})(x + y\sqrt{7}) = (x + 7y) + (x + y)\sqrt{7} = a + b\sqrt{7} \in R$$

с

$$\begin{cases} a = x + 7y \\ b = x + y \end{cases}. \quad (1)$$

Следователно $a - b = 6y$ се дели на 6.

- 0.15 точки за $I_0 \subseteq I$.

За произволни $a, b \in \mathbb{Z}$ с $a - b = 6z \in 6\mathbb{Z}$ трябва да докажем, че всички решения (x, y) на линейната система уравнения (1) имат компоненти $x, y \in \mathbb{Z}$. По-точно,

$$y = \frac{a - b}{6} = z \in \mathbb{Z} \quad \text{и}$$

$$x = \frac{-a + 7b}{6} = b + \frac{b - a}{6} \in \mathbb{Z},$$

така че (1) има единствено решение $(b + \frac{b-a}{6}, \frac{a-b}{6}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

- 0.15 точки за избор на изображението

$$\varphi : R \longrightarrow \mathbb{Z}_6,$$

$$\varphi(a + b\sqrt{7}) = a - b \pmod{6}.$$

- 0.10 точки за съгласуваност на φ със събирането в R ,

$$\begin{aligned} \varphi((a_1 + b_1\sqrt{7})(a_2 + b_2\sqrt{7})) &= \varphi((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{7}) = [(a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)] \pmod{6} = \\ &= [(a_1 - b_1) \pmod{6}] + [(a_2 - b_2) \pmod{6}] = \varphi(a_1 + b_1\sqrt{7}) + \varphi(a_2 + b_2\sqrt{7}). \end{aligned}$$

- 0.15 точки за съгласуваност на φ с умножението в R ,

$$\begin{aligned} \varphi((a_1 + b_1\sqrt{7})(a_2 + b_2\sqrt{7})) &= \varphi((a_1a_2 + 7b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{7}) = \\ &= [(a_1a_2 + 7b_1b_2) - (a_1b_2 + a_2b_1)] \pmod{6} = (a_1a_2 + b_1b_2 - a_1b_2 - a_2b_1) \pmod{6} = \\ &= (a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \pmod{6} = [(a_1 - b_1) \pmod{6}][(a_2 - b_2) \pmod{6}] = \varphi(a_1 + b_1\sqrt{7})\varphi(a_2 + b_2\sqrt{7}). \end{aligned}$$

- 0.15 точки за $\ker \varphi = \{a + b\sqrt{7} \mid 0 \pmod{6} = \varphi(a + b\sqrt{7}) = a - b \pmod{6}\} = I_0 = I$ и $\operatorname{im} \varphi = \mathbb{Z}_6$ съгласно $a \pmod{6} = \varphi(a)$ за $\forall a \in \mathbb{Z}$.

- 0.15 точки за прилагане на теоремата за хомоморфизмите на пръстени и получаване на изоморфизма

$$R/I = R/\ker \varphi \simeq \operatorname{im} \varphi = \mathbb{Z}_6.$$

Съставил темата и лектор:.....

Азнив Киркор Каспарян