

Решения и критерий за оценяване

Домашна работа № 1 по Висша алгебра 1 , спец. Математика, I курс
зададена на 17.04.2013

Задача 1 (1 точка) Да се докаже, че подмножеството

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, c \in \mathbb{R}^*, \quad b \in \mathbb{R} \right\}$$

на общата линейна група

$$GL_2(\mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{R}, \quad \det A \neq 0 \right\}$$

е подгрупа, а подмножеството

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^3 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R}^*, \quad c \in \mathbb{R} \right\} \subset G$$

е нормална подгрупа на G с фактор-група $G/H \simeq (\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, изоморфна на мултипликативната група на ненулевите реални числа.

Решение:

- 0.15 точки за затвореност на G относно умножението на матрици,

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 & a_1 b_2 + b_1 c_2 \\ 0 & c_1 c_2 \end{pmatrix} \in G,$$

защото $a_1 a_2, c_1 c_2 \in \mathbb{R}^*$ за $a_1, a_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}^*$, $a_1 b_2 + b_1 c_2 \in \mathbb{R}$ за $a_1, b_2, b_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

- 0.15 точки за затвореността на G относно обръщането на матрици,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{ac} \\ 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix} \in G,$$

защото $\frac{1}{a}, \frac{1}{c} \in \mathbb{R}^*$ за $a, c \in \mathbb{R}^*$, $-\frac{b}{ac} \in \mathbb{R}$ за $a, c \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$.

Тези две проверки установяват, че G е подгрупа на $GL_2(\mathbb{R})$.

- 0.30 точки за избор на изображение

$$\varphi_1 : G \longrightarrow \mathbb{R}^* \quad \text{или} \quad \varphi_2 : G \longrightarrow \mathbb{R}^*,$$

$$\varphi_1 \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \right) = a^3 c^{-1} \quad \text{или} \quad \varphi_2 \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \right) = a^{-3} c$$

и за проверка на това, че φ_1 или φ_2 е хомоморфизъм на групи,

$$\begin{aligned} \varphi_1 \left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \right) &= \varphi_1 \left(\begin{pmatrix} a_1 a_2 & a_1 b_2 + b_1 c_2 \\ 0 & c_1 c_2 \end{pmatrix} \right) = \\ &= (a_1 a_2)^3 (c_1 c_2)^{-1} = (a_1^3 c_1^{-1}) (a_2^3 c_2^{-1}) = \varphi_1 \left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \right) \varphi_1 \left(\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \right), \\ \varphi_2 \left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \right) &= \varphi_2 \left(\begin{pmatrix} a_1 a_2 & a_1 b_2 + b_1 c_2 \\ 0 & c_1 c_2 \end{pmatrix} \right) = \\ &= (a_1 a_2)^{-3} (c_1 c_2) = (a_1^{-3} c_1) (a_2^{-3} c_2) = \varphi_2 \left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \right) \varphi_2 \left(\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

- 0.10 точки за $\text{im} \varphi = \mathbb{R}^*$, защото $\forall r \in \mathbb{R}^*$ е образ

$$\varphi_1 \left(\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & r^{-1} \end{pmatrix} \right) = r \quad \text{или} \quad \varphi_2 \left(\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & r \end{pmatrix} \right) = r$$

под действие на φ_1 или на φ_2 .

- 0.15 точки за определяне на ядрото

$$\begin{aligned} \ker \varphi_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid 1 = \varphi_1 \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \right) = a^3 c^{-1} \right\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}^*, \quad b \in \mathbb{R} \right\} = H, \end{aligned}$$

съответно

$$\begin{aligned} \ker \varphi_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid 1 = \varphi_2 \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \right) = a^{-3} c \right\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}^*, \quad b \in \mathbb{R} \right\} = H \end{aligned}$$

и за извода, че H е нормална подгрупа на G .

- 0.15 точки за прилагане на теоремата за хомоморфизмите на групи и получаване на изоморфизма

$$G/H = G/\ker \varphi \simeq \text{im} \varphi = (\mathbb{R}^*, \cdot).$$

Задача 2 (2 точки) В множеството

$$G = \{ (a, b, c) \mid a \in \mathbb{R}^*, \quad b, c \in \mathbb{R} \}$$

е въведена бинарна операция

$$(a_1, b_1, c_1) \circ (a_2, b_2, c_2) = (a_1 a_2, \quad a_1 b_2 + b_1 a_2, \quad a_1 c_2 + b_1 b_2 + c_1 a_2).$$

Да се докаже, че:

(а) G е група относно $\circ$;

(б) $H_1 = \{ (1, b, c) \mid b, c \in \mathbb{R} \}$ е нормална подгрупа на G с фактор-група $G/H_1 \simeq \mathbb{R}^*$, изоморфна на мултипликативната група на реалните числа;

(в) $H_2 = \{ (1, 0, c) \mid c \in \mathbb{R} \}$ е подгрупа на G , изоморфна на адитивната група $(\mathbb{R}, +)$ на реалните числа;

(г) за произволни $g \in G$ и $h \in H_2$ е в сила $gh = hg$ и H_2 е нормална подгрупа на G .

Решение:

(а) 0.75 точки. От тях:

- 0.25 точки за проверка на асоциативността на зададената операция

$$\begin{aligned} [(a_1, b_1, c_1) \circ (a_2, b_2, c_2)] \circ (a_3, b_3, c_3) &= (a_1 a_2, \quad a_1 b_2 + b_1 a_2, \quad a_1 c_2 + b_1 b_2 + c_1 a_2) \circ (a_3, b_3, c_3) = \\ &= ((a_1 a_2) a_3, \quad (a_1 a_2) b_3 + (a_1 b_2 + b_1 a_2) a_3, \quad (a_1 a_2) c_3 + (a_1 b_2 + b_1 a_2) b_3 + (a_1 c_2 + b_1 b_2 + c_1 a_2) a_3) = \\ &= (a_1 (a_2 a_3), \quad a_1 (a_2 b_3 + b_2 a_3) + b_1 (a_2 a_3), \quad a_1 (a_2 c_3 + b_2 b_3 + c_2 a_3) + b_1 (a_2 b_3 + b_2 a_3) + c_1 (a_2 a_3)) = \\ &= (a_1, b_1, c_1) \circ (a_2 a_3, \quad a_2 b_3 + b_2 a_3, \quad a_2 c_3 + b_2 b_3 + c_2 a_3) = (a_1, b_1, c_1) \circ [(a_2, b_2, c_2) \circ (a_3, b_3, c_3)]. \end{aligned}$$

- 0.25 точки за намиране на неутралния елемент $e = (e_1, e_2, e_3) \in G$ от равенството

$$(a, b, c) \circ (e_1, e_2, e_3) = (a, b, c)$$

за произволно $(a, b, c) \in G$. По-точно, системата уравнения

$$\left| \begin{array}{l} ae_1 = a \\ ae_2 + be_1 = b \\ ae_3 + be_2 + ce_1 = c \end{array} \right.$$

има решение $e_1 = 1, e_2 = 0, e_3 = 0$. Проверяваме, че

$$(1, 0, 0) \circ (a, b, c) = (a, b, c) \quad \text{за} \quad \forall (a, b, c) \in G$$

и стигаме до извода, че $e = (1, 0, 0) \in G$ е неутралният елемент на G .

- 0.25 точки за намиране на $(a, b, c)^{-1} \in G$. Ако $(a, b, c)^{-1} = (x, y, z)$, то от

$$(a, b, c) \circ (x, y, z) = (1, 0, 0)$$

следва, че

$$\left| \begin{array}{l} ax = 1 \\ ay + bx = 0 \\ az + by + cx = 0 \end{array} \right. .$$

Следователно десният обратен на (a, b, c) има компоненти

$$x = a^{-1}, \quad y = -a^{-2}b, \quad z = a^{-3}b^2 - a^{-2}c.$$

Проверяваме, че $(a^{-1}, -a^{-2}b, a^{-3}b^2 - a^{-2}c) \in G$ е и ляв обратен на (a, b, c) , т.е.

$$\begin{aligned} & (a^{-1}, -a^{-2}b, a^{-3}b^2 - a^{-2}c) \circ (a, b, c) = \\ & = (a^{-1}a, a^{-1}b - a^{-1}b, a^{-1}c - a^{-2}b^2 + a^{-2}b^2 - a^{-1}c) = (1, 0, 0) \end{aligned}$$

и стигаме до извода, че $(a, b, c)^{-1} = (a^{-1}, -a^{-2}b, a^{-3}b^2 - a^{-2}c)$ е двустранен обратен на (a, b, c) .

Това доказва, че G е група.

(б) 0.55 точки. От тях:

- 0.15 точки за избор на изображение

$$\varphi : G \longrightarrow \mathbb{R}^*,$$

$$\varphi(a, b, c) = a$$

и проверка на това, че φ е хомоморфизъм на групи,

$$\begin{aligned} \varphi((a_1, b_1, c_1) \circ (a_2, b_2, c_2)) &= \varphi(a_1a_2, a_1b_2 + b_1a_2, a_1c_2 + b_1b_2 + c_1a_2) = \\ &= a_1a_2 = \varphi(a_1, b_1, c_1)\varphi(a_2, b_2, c_2). \end{aligned}$$

- 0.15 точки за пресмятане на ядрото

$$\ker \varphi = \{(a, b, c) \in G \mid 1 = \varphi(a, b, c) = a\} = \{(1, b, c) \mid b, c \in \mathbb{R}\} = H_1$$

и извода, че H е нормална подгрупа на G .

- 0.10 точки за $\operatorname{im} \varphi = \mathbb{R}^*$, защото $\forall r \in \mathbb{R}^*$ е образ $r = \varphi(r, b, c)$ под действие на φ .
- 0.15 точки за прилагане на теоремата за хомоморфизмите на групи и получаване на изоморфизма

$$G/H_1 = G/\ker \varphi \simeq \operatorname{im} \varphi = \mathbb{R}^*.$$

(в) 0.55 точки. От тях:

- 0.15 точки за затвореност на H_2 относно $\circ$,

$$(a, 0, c_1) \circ (1, 0, c_2) = (1, 0, c_1 + c_2) \in H_2.$$

- 0.15 точки за затвореност на H_2 относно обръщане, $(1, 0, c)^{-1} = (1, 0, -c) \in H_2$.
Следователно H_2 е подгрупа на G .

- 0.15 точки за разглеждане на взаимно еднозначното изображение

$$\psi : H_2 \longrightarrow (\mathbb{R}, +),$$

$$\psi(1, 0, c) = c.$$

- 0.10 точки за проверка на това, че ψ е хомоморфизъм, а оттам и изоморфизъм на групи,

$$\psi((1, 0, c_1) \circ (1, 0, c_2)) = \psi(1, 0, c_1 + c_2) = c_1 + c_2 = \psi(1, 0, c_1) + \psi(1, 0, c_2).$$

- (г) 0.15 точки за пресмятане на

$$gh = (a, b, c) \circ (1, 0, c_0) = (a, b, ac_0 + c) = (1, 0, c_0) \circ (a, b, c) = hg$$

за $\forall g = (a, b, c) \in G, \forall h \in H_2$. Оттук следва, че

$$gH_2 = \{gh = hg \mid h \in H_2\} = H_2 \quad \text{за} \quad \forall g \in G$$

и подгрупата H_2 на G е нормална.

Задача 3 (1 точка) Дадени са пермутациите

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 8 & 5 & 2 & 7 & 4 & 1 & 6 & 10 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{и}$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 3 & 4 & 5 & 2 & 7 & 8 & 9 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

от симетричната група S_{10} .

- (а) Да се разложат σ и τ в произведение от независими цикли.
- (б) Да се намери (поне една) пермутация $\rho \in S_{10}$, така че $\tau = \rho\sigma\rho^{-1}$.
- (в) Да се пресметнат редът и четността на σ и τ .

Решение:

- (а) 0.25 точки за разлагане на

$$\sigma = (1, 3, 5, 7)(2, 8, 6, 4)(9, 10)$$

и

$$\tau = (1, 10)(2, 3, 4, 5)(6, 7, 8, 9) = (2, 3, 4, 5)(6, 7, 8, 9)(1, 10)$$

в произведение на независими цикли.

- (б) 0.25 точки за избор на

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 6 & 3 & 9 & 4 & 8 & 5 & 7 & 1 & 10 \end{pmatrix} \in S_{10}$$

$$\text{с } \rho\sigma\rho^{-1} = \tau.$$

(в) 0.50 точки

Редът на σ е най-малкото общо кратно 4 на дължините 4, 4, 2 на независимите цикли от разлагането в (а). По същата причина и редът на τ е равен на 4.

Циклите с четна дължина са нечетни пермутации. Понеже σ и τ са произведения на нечетен брой (3) цикъла с четна дължина, $\sigma, \tau \in S_{10} \setminus A_{10}$ са нечетни пермутации.

Съставил темата и лектор:.....

Азнив Каспарян