Примерни задачи за полиноми - Висша Алгебра 1, специалност Математика

Деление на полиноми с частно и остатък. Най-голям общ делител.

Задача 1. *Да се намери полиномът* $f_i(x) = x^3 + px + q \in \mathbb{Z}[x]$, $1 \leq i \leq 2$, *ако:*
(i) $f_1(x)$ *се дели на* $x^2 - 3x + 2$;
(ii) остатъкът на $f_2(x)$ *при деление с* $x^2 + 3x + 2$ *е* $2x + 3$.

Отговор: (i) $f_1(x) = x^3 - 7x + 6$; (ii) $f_2(x) = x^3 - 5x - 3$.

Задача 2. *Да се намери най-големият общ делител* $d_i(x)$, $1 \leq i \leq 2$ *на полиномите* $f_i(x), g_i(x)$ *и полиноми* $u_i(x), v_i(x)$, *за които е изпълнено тъждеството на Безу*

$$d_i(x) = f_i(x)u_i(x) + g_i(x)v_i(x),$$

ако:

$$(i) \quad f_1(x) = x^3 + x^2 + x + 1, \quad g_1(x) = x^2 - x + 2 \in \mathbb{Q}[x];$$

$$(ii) \quad f_2(x) = x^5 + x^4 + \overline{1}, \quad g_2(x) = x^4 + x^2 + \overline{1} \in \mathbb{Z}_2[x].$$

Отговор: (i) $d_1(x) = 8 = (x^2 + 4x + 5)g_1(x) - (x + 2)f_1(x)$;
(ii) $d_2(x) = x^2 + x + \overline{1} = (x + \overline{1})f_2(x) + x^2 g_2(x)$.

Съществуване на корен на полином в подходящо разширение на полето от коефициенти.

Задача 3. *Нека* F *е поле,* $f(x) = \sum\limits_{o=0}^{n} a_i x^i \in F[x] \setminus F$ *е неразложим над* F *полином от степен* $n \in \mathbb{N}$, *а* $E = F[x]/\langle f \rangle$ *е полето, получено от* $F[x]$ *чрез факторизиране по идеала* $\langle f \rangle \triangleleft F[x]$, *породен от* f. *Да се докаже, че полето* $E = \left\{ \sum\limits_{j=0}^{n-1} b_j x^j + \langle f \rangle \middle| b_j \in F \right\} \simeq F^n$ *е* n*-мерно линейно пространство над своето подполе* F.

Решение: Нека $E_o = \left\{ \sum\limits_{j=0}^{n-1} b_j x^j + \langle f \rangle \;\middle|\; b_j \in F \right\}$. Включването $E_o \subseteq E$ следва от определението за фактор-пръстен $E = F[x]/\langle f \rangle$. За обратното включване $E \subseteq E_o$ да отбележим, че за $\forall g(x) \in F[x]$ делението $g(x) = f(x)q(x) + r(x)$ с частно $q(x) \in F[x]$ и остътък $r(x) \in F[x]$, $\deg(r) < \deg(f) = n$ дава

$$g(x) + \langle f \rangle = f(x)q(x) + r(x) + \langle f \rangle = r(x) + \langle f \rangle = \sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j + \langle f \rangle.$$

Това доказва, че полето E съвпада с множеството E_o.

Полето F е изоморфно на подполето $F + \langle f \rangle / \langle f \rangle$ на E. Следователно $E = E_o$ е линейно пространство над F. Остава да проверим, че изображението

$$\psi : F^n \longrightarrow E_o,$$

$$\psi(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j + \langle f \rangle$$

е изоморфизъм на линейни пространства над F. Линейността на ψ над F следва от равенствата

$$\psi((b_0, \ldots, b_{n-1}) + (c_0, \ldots, c_{n-1})) = \psi(b_0 + c_0, \ldots, b_{n-1} + c_{n-1}) = \sum_{j=0}^{n-1} (b_j + c_j) x^j + \langle f \rangle =$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j + \langle f \rangle \right) + \left(\sum_{j=0}^{n-1} c_j x^j + \langle f \rangle \right) = \psi(b_0, \ldots, b_{n-1}) + \psi(c_0, \ldots, c_{n-1})$$

и

$$\psi(\lambda(b_0, \ldots, b_{n-1})) = \psi(\lambda b_0, \ldots, \lambda b_{n-1}) = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda b_j x^j + \langle f \rangle =$$

$$= \lambda \left(\sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j + \langle f \rangle \right) = \lambda \psi(b_0, \ldots, b_{n-1}).$$

Всеки елемент на E_o е от вида $\sum\limits_{j=0}^{n-1} b_j x^j + \langle f \rangle = \psi(b_0, \ldots, b_{n-1})$, така че $\mathrm{im}(\psi) = E_o$. Ако $\psi(b_0, \ldots, b_{n-1}) = \psi(c_0, \ldots, c_{n-1})$, то $\sum\limits_{j=0}^{n-1} b_j x^j + \langle f \rangle = \sum\limits_{j=0}^{n-1} c_j x^j + \langle f \rangle$. Следователно полиномът $h(x) := \sum\limits_{j=0}^{n-1} (b_j - c_j) x^j \in \langle f \rangle$ се дели на $f(x)$, т.е. съществува $q(x) \in F[x]$ с $h(x) = f(x)q(x)$. Допускането $h(x) \not\equiv 0_F$ води до $q(x) \not\equiv 0_F$, откъдето $\deg(q) \geq 0$. Следователно $\deg(h) = \deg(f) + \deg(q) \geq \deg(f) = n$. Но от определението на полинома $h(x)$ се вижда, че $\deg(h) \leq n - 1$. Противоречието доказва, че $h(x) \equiv 0_F$, така че $b_j = c_j$ за $\forall 0 \leq j \leq n-1$. Следователно различни $b, c \in F^n$ се изобразяват в различни $\psi(b), \psi(c) \in E_o$ и изображението ψ е взаимно еднозначно. Линейното над F взаимно еднозначно изображение ψ е F-линеен изоморфизъм.

Задача 4. *Да се определи дали фактор-пръстенът $F_i[x]/(f_i)$, $1 \leq i \leq 3$ е поле, ако:*

(i) $F_1 = \mathbb{Z}_5$ е полето на остатъците при деление с 5, а $f_1(x) = x^3 + \bar{3}x^2 - \bar{1} \in \mathbb{Z}_5[x]$;

(ii) $F_2 = \mathbb{Z}_7$ е полето на остатъците при деление с 7, а $f_2(x) = x^3 - \bar{2}x^2 + \bar{3}x + \bar{3} \in \mathbb{Z}_7[x]$;

(iii) $F_3 = \mathbb{Z}_3$ е полето на остатъците при деление с 3, а $f_3(x) = x^4 + x - \bar{1} \in \mathbb{Z}_3[x]$;

Упътване: Фактор-пръстенът $F_i[x]/(f_i)$ е поле тогава и само тогава, когато полиномът $f_i(x) \in F_i[x]$ е неразложим над F_i.

Полиномите $f_i(x) \in F_i[x]$, $1 \leq i \leq 2$ от степен 3 са неразложими над F_i точно когато нямат корен в F_i.

Полиномът $f_3(x) \in F_3[x]$ от степен 4 със старши коефициент 1 е неразложим над F_3 точно когато $f_3(x)$ няма корен в F_3 и не се разлага в произведение

$$f_3(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$$

на неразложими над F_3 квадратни тричлени $x^2 + ax + b, x^2 + cx + d \in F_3[x]$.

Отговор: (i) да; (ii) не; (iii) да.

Задача 5. *Нека $f(x) = x^2 + ax + b \in \mathbb{R}[x]$ е квадратен тричлен с реални коефициенти и отрицателна дискриминанта $D = a^2 - 4b < 0$. Да се докаже, че фактор-пръстенът $\mathbb{R}[x]/(f)$ на $\mathbb{R}[x]$ по главния идеал, породен от $f(x)$ е полето на комплексните числа $\mathbb{C}$.*

Упътване: Приложете теоремата за епиморфизмите на пръстени към изображението

$$\varphi : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x_1] = \mathbb{C},$$

$$\varphi(g(x)) = g(x_1) \quad \text{за} \quad \forall g(x) \in \mathbb{R}[x]$$

и за някой от корените $x_1 = \frac{-a+i\sqrt{-D}}{2}$ или $x_1 = \frac{-a-i\sqrt{-D}}{2}$ на $f(x) = 0$. Използвайте, че ако $g(x_1) = 0$, то $0 = \overline{g(x_1)} = g(\overline{x_1})$ за $\forall g(x) \in \mathbb{R}[x]$, така че $\ker \varphi$ е главният идеал, породен от полинома $(x - x_1)(x - \overline{x_1}) = f(x)$.

Задача 6. *Нека $\mathbb{Z}_5$ е полето с 5 елемента. Да се докаже, че:*

(i) фактор-пръстенът $\mathbb{Z}_5[x]/(x^2 - 2)$ на $\mathbb{Z}_5[x]$ по главния идеал, породен от $x^2 - 2$ е поле;

(ii) множеството $F = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 2\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \ \middle| \ \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_5 \right\}$ е поле относно обичайните операции събиране и умножение на матрици;

(iii) полето $\mathbb{Z}_5/(x^2 - 2)$ е изоморфно на полето F.

Упътване: Полиномът $x^2 - 2$ е неразложим над $\mathbb{Z}_5$, така че фактор-пръстенът $\mathbb{Z}_5[x]/(x^2 - 2)$ е поле. Всеки елемент $g(x) + (x^2 - 2) \in \mathbb{Z}_5[x]/(x^2 - 2)$, $g(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$ има единствено представяне във вида $g(x) + (x^2 - 2) = \alpha + \beta x + (x^2 - 2)$ с $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_5$. Това определя взаимно-еднозначното изображение

$$\varphi : \mathbb{Z}_5[x]/(x^2 - 2) \longrightarrow F,$$

$$\varphi(\alpha + \beta x + (x^2 - 2)) = \begin{pmatrix} \alpha & 2\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Достатъчно е да докажем, че φ е изоморфизъм на пръстени, за да твърдим, че F е поле, изоморфно на $\mathbb{Z}_5[x]/(x^2-2)$.

Изобщо, ако F_1 е поле и $\psi : F_1 \to F$ е изоморфизъм на пръстени , то F е поле. По-точно, F е подпръстен на матриците от ред 2 с елементи от $\mathbb{Z}_5$, защото за произволни $\psi(a), \psi(b) \in F$ имаме $\psi(a) - \psi(b) = \psi(a-b) \in F$ и $\psi(a)\psi(b) \in F$. Комутативността на умножението в $F = \mathrm{im}\psi$ следва от равенствата $\psi(a)\psi(b) = \psi(ab) = \psi(ba) = \psi(b)\psi(a)$ за $\forall \psi(a), \psi(b) \in F$. Пръстенът F има единица $1_F = \psi(1_{F_1})$, съгласно $\psi(1_{F_1})\psi(a) = \psi(a)\psi(1_{F_1}) = \psi(a.1_{F_1}) = \psi(a)$ за $\forall \psi(a) \in F$. Всеки ненулев елемент $\psi(a) \in F \setminus \{0_F = \psi(0_{F_1})\}$ е образ на ненулев елемент $a \in F_1 \setminus \{0_{F_1}\}$ и има обратен $\psi(a)^{-1} = \psi(a^{-1}) \in F$. Следователно F е поле.

Формули на Виет

Задача 7. *За кои стойности на параметъра p корените $x_1, \dots, x_4$ на полинома*

$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 + px + 16 \in \mathbb{R}[x]$$

изпълняват равенството $x_1 + x_2 + x_3 = x_4$.

Решение: При наличие на равенството $x_1 + x_2 + x_3 = x_4$, формулите на Виет за $f(x)$ приемат вида

$$8 = (x_1 + x_2 + x_3) + x_4 = 2x_4,$$

$$22 = (x_1 + x_2 + x_3)x_4 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 16 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1),$$

$$16 = (x_1x_2x_3)x_4 = 4x_1x_2x_3,$$

$$-p = (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x_4 + x_1x_2x_3 = 6.4 + 4 = 28,$$

откъдето $p = -28$. Следователно $p = -28$ е необходимо условие за $x_1 + x_2 + x_3 = x_4$.

Условието $p = -28$ е достатъчно за $x_1 + x_2 + x_3 = x_4$, защото $x_4 = 4$ е корен на полинома $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 28x + 16 \in \mathbb{R}[x]$. Частното при деление на $f(x)$ с $x - 4$ е $g(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 4 \in \mathbb{R}[x]$. По първата формула на Виет за корените x_1, x_2, x_3 на полинома $g(x)$ имаме $x_1 + x_2 + x_3 = 4 = x_4$.

Задача 8. *За кои стойности на параметрите p, q полиномът*

$$f(x) = x^4 - 8x^3 + px^2 + qx + 8$$

има четири корена $x_1, \dots, x_4$, изпълняващи равенствата

$$5x_1 + 5x_2 = 3x_3 + 3x_4 \quad \textit{и} \quad x_1^2x_2^2 = x_3x_4,$$

ако тези корени са :

(а) реални;

(б) комплексни;

Решение: Замествайки с $x_3+x_4=\frac{5}{3}(x_1+x_2)$ и $x_3x_4=(x_1x_2)^2$ във формулите на Виет получаваме, че

$$\frac{8}{3}(x_1+x_2)=8,$$

$$p=(x_1+x_2)(x_3+x_4)+x_1x_2+x_3x_4=15+x_1x_2+(x_1x_2)^2,$$

$$-q=x_1x_2(x_3+x_4)+(x_1+x_2)x_3x_4=5x_1x_2+3(x_1x_2)^2,$$

$$8=(x_1x_2)^3.$$

(а) Ако $x_1,\dots,x_4\in\mathbb{R}$, то $y=x_1x_2\in\mathbb{R}$ и $y=2$, $p=21$, $q=-22$.

Непосредствено се проверява, че корените на полинома

$$f(x)=x^4-8x^3+21x^2-22x+8=(x^2-3x+2)(x^2-5x+4)$$

изпълняват равенствата $5(x_1+x_2)=5.3=3(x_3+x_4)$ и $(x_1x_2)^2=2^2=4=x_3x_4$.

(б) Ако $x_1,\dots x_4\in\mathbb{C}$, то $y=x_1x_2$ е комплексен корен на полинома $y^3-8=0$ или $y\in\{2,2\omega_3,2\omega_3^2\}$ за $\omega_3=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Вече видяхме, че ако $y=2\in\mathbb{R}$, то $p=21$, $q=-22$. Оттук нататък ще предполагаме, че комплексното число $y\in\{2\omega_3^i\mid 1\le i\le 2\}=\{-1+i\sqrt{3},-1-i\sqrt{3}\}$. Третите корени ω_3^i, $1\le i\le 2$ на 1, различни от 1 са корените на полинома $\frac{z^3-1}{z-1}=z^2+z+1=0$. Следователно $y^2=(2\omega_3^i)^2=-2(2\omega_3^i)-4=-2y-4$ и

$$p=y^2+y+15=-y+11,\quad q=-3y^2-5y=y+12.$$

За $y=-1+i\sqrt{3}$ получаваме $p=12-\sqrt{3}i$, $q=11+i\sqrt{3}$, а за $y=-1-i\sqrt{3}$ пресмятаме, че $p=12+i\sqrt{3}$, $q=11-i\sqrt{3}$.

Непосредствено се проверява, че корените $x_1,\dots,x_4$ на полинома

$$f(x)=x^4-8x^3+(12-\sqrt{3}i)x^2+(11+\sqrt{3}i)x+8=$$

$$=x^4-8x^3+(11-2\omega_3)x^2+(12+2\omega_3)x+8=(x^2-3x+2\omega_3)(x^2-5x-4\omega_3-4)$$

изпълняват равенствата

$$5(x_1+x_2)=5.3=3(x_3+x_4),\quad (x_1x_2)^2=(2\omega_3)^2=-4\omega_3-4=x_3x_4,$$

а корените $x_1,\dots,x_4$ на полинома

$$f(x)=x^4-8x^3+(12+\sqrt{3}i)x^2+(11-\sqrt{3}i)x+8=$$

$$=x^4-8x^3+(13+2\omega_3)x^2+(10-2\omega_3)x+8=(x^2-3x-2\omega_3-2)(x^2-5x+4\omega_3)$$

изпълняват равенствата

$$5(x_1+x_2)=5.3=3(x_3+x_4),\quad (x_1x_2)^2=(-2\omega_3-2)^2=4\omega_3=x_3x_4.$$

Окончателно, $(p,q)\in\{(21,-22),\,(12+\sqrt{3}i,11-\sqrt{3}i),\,(12-\sqrt{3}i,11+\sqrt{3}i)\}$.

Лема 9. *Нека R е комутативен пръстен с единица, I е идеал в R, а $\pi_I : R \to R/I$ е естественият епиморфизъм с ядро $\ker(\pi_I) = I$. Тогава изображението*

$$\Pi_I : R[x] \longrightarrow R/I[x],$$

$$\Pi_I\left(\sum_{j=0}^{n} a_j x^j\right) = \sum_{j=0}^{n} \pi_I(a_j)x^j = \sum_{j=0}^{n}(a_j + I)x^j$$

е епиморфизъм на пръстени с ядро $I[x]$

Доказателство: Непосредствено се проверява, че

$$\Pi_I\left(\sum_{j=0}^{n} a_j x^j\right) + \Pi_I\left(\sum_{s=0}^{m} b_s x^s\right) = \left(\sum_{j=0}^{n}(a_j + I)x^j\right) + \left(\sum_{s=0}^{m}(b_s + I)x^s\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\max(n,m)} (a_j + b_j + I)x^j = \Pi_I\left(\sum_{j=0}^{\max(n,m)} (a_j + b_j)x^j\right) =$$

$$= \Pi_I\left(\left(\sum_{j=0}^{n} a_j x^j\right) + \left(\sum_{s=0}^{m} b_s x^s\right)\right) \quad \text{и}$$

$$\Pi_I\left(\sum_{j=0}^{n} a_j x^j\right) \Pi_I\left(\sum_{s=0}^{m} b_s x^s\right) = \left(\sum_{j=0}^{n}(a_j + I)x^j\right)\left(\sum_{s=0}^{m}(b_s + I)x^s\right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n+m}\left(\sum_{s=0}^{j}(a_s + I)(b_{j-s} + I)\right)x^j = \sum_{j=0}^{n+m}\left(\left(\sum_{s=0}^{j} a_s b_{j-s}\right) + I\right)x^j =$$

$$= \Pi_I\left(\sum_{j=0}^{n+m}\left(\sum_{s=0}^{j} a_s b_{j-s}\right)x^j\right) = \Pi_I\left(\left(\sum_{j=0}^{n} a_j x^j\right)\left(\sum_{s=0}^{m} b_s x^s\right)\right),$$

така че Π_I е хомоморфизъм на пръстени. Всеки елемент на $R/I[x]$ е от вида

$$\sum_{j=0}^{n}(a_j + I)x^j = \Pi_I\left(\sum_{j=0}^{n} a_j x^j\right) \in \operatorname{im}(\Pi_I),$$

така че образът $\operatorname{im}(\Pi_I) = R/I[x]$ и Π_I е епиморфизъм. Ядрото

$$\ker(\Pi_I) = \left\{ f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \in R[x] \;\middle|\; \Pi_I(f) = \sum_{j=0}^{n}(a_j + I)x^j = I \right\} =$$

$$= \left\{ f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \in R[x] \;\middle|\; a_j \in I \quad \text{за} \quad \forall 0 \leq j \leq n \right\} = I[x],$$

Q.E.D.

Твърдение 10. (Редукционен критерий за неразложимост на целочислени полиноми) *Нека* $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x \in \mathbb{Z}[x]$, *p е просто число,* $\pi_p : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p$, $\pi_p(a) = a + p\mathbb{Z}$ *е естественият епиморфизъм с ядро* $\ker(\pi_p) = p\mathbb{Z}$, *а*

$$\Pi_p : \mathbb{Z}[x] \longrightarrow \mathbb{Z}_p[x],$$

$$\Pi_p \left(\sum_{i=0}^{n} a_j x^i \right) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + p\mathbb{Z}) x^i$$

е естественият епиморфизъм с ядро $\ker(\Pi_p) = (p\mathbb{Z})[x]$.

Ако редукцията $\pi_p(a_n) = a_n + p\mathbb{Z} \neq p\mathbb{Z}$ *на старшия коефициент* a_n *на* $f(x)$ *е ненулева и редукцията* $\Pi_p(f) \in \mathbb{Z}_p[x]$ *на полинома* $f(x)$ *е неразложима над полето* $\mathbb{Z}_p$, *то полиномът* $f(x)$ *е неразложим над* $\mathbb{Z}$.

Доказателство: Да допуснем противното и да представим $f(x) = f_1(x) f_2(x)$ като произведение на полиноми $f_i(x) \in \mathbb{Z}[x]$ от степен $0 < \deg(f_i) = n_i < \deg(f) = n$, $n_1 + n_2 = n$. По Лемата за старшия едночлен на полиноми на една променлива с коефициенти от комутативната област с единица $\mathbb{Z}$ имаме

$$a_n x^n = LT(f) = LT(f_1) LT(f_2).$$

Оттук, старшият коефициент

$$a_n = LC(f) = LC(f_1) LC(f_2)$$

има редукция

$$p\mathbb{Z} \neq a_n + p\mathbb{Z} = (LC(f_1) + p\mathbb{Z})(LC(f_2) + p\mathbb{Z}),$$

така че $LC(f_i) + p\mathbb{Z} \neq p\mathbb{Z}$ и $\deg(\Pi_p(f_i)) = \deg(f_i) = n_i < n$ за $1 \leq i \leq 2$. В резултат получаваме разлагане

$$\Pi_p(f) = \Pi_p(f_1) \Pi_p(f_2)$$

на редукцията $\Pi_p(f)$ на f над $\mathbb{Z}_p$, което противоречи на предположението и доказва неразложимостта на $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ над $\mathbb{Z}$, Q.E.D.

Задача 11. *Да се разложат полиномите*

$$f(x) = x^4 + 6x - 7 \in \mathbb{Z}[x] \quad \text{и} \quad g(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5 \in \mathbb{Z}[x]$$

в произведение от неразложими над $\mathbb{Q}$ *множители.*

Отговор: $f(x) = (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 7)$, $g(x) = (x^2 - x + 1)(x^2 + 3x + 5)$.

Задача 12. *Да се докаже, че полиномите*

$$(i) \quad f_1(x) = x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 4x - 1 \in \mathbb{Z}[x]$$

$$(ii) \quad f_2(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5 \in \mathbb{Z}[x],$$

са неразложими над $\mathbb{Q}$.

Задача 13. *За произволни цели числа* $a_1, \ldots, a_4 \in \mathbb{Z}$ *да се докаже, че полиномите*

$$f_1(x) = x^4 + 2a_1x^3 + 2a_2x^2 + (2a_3 + 1)x + (2a_4 + 1) \in \mathbb{Z}[x],$$

$$f_2(x) = x^4 + (2a_1 + 1)x^3 + 2a_2x^2 + 2a_3x + (2a_4 + 1) \in \mathbb{Z}[x],$$

$$f_3(x) = x^4 + (2a_1 + 1)x^3 + (2a_2 + 1)x^2 + (2a_3 + 1)x + (2a_4 + 1) \in \mathbb{Z}[x]$$

са неразложими над $\mathbb{Q}$.

Упътване: Използвайте редукция на коефициентите по модул 2.

Задача 14. *С редукция на коефициентите по модул* 3 *да се докаже, че полиномът*

$$g(x) = 2011x^4 + 6004x^3 + 2995x^2 + 6007x + 1549 \in \mathbb{Z}[x]$$

е неразложим над $\mathbb{Q}$.

Задача 15. *(а) За произволен полином* $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ *и произволно цяло число* a *да се докаже, че полиномите* $g(x) = f(x + a)$ *и* $f(x)$ *са едновременно неразложими над* $\mathbb{Z}$.

(б) С помощта на критерия на Айзенщайн, приложен към $f(x + a)$ *за подходящо* $a \in \mathbb{Z}$ *да се докаже неразложимостта на полиномите*

$$f_1(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 35x + 28 \in \mathbb{Z}[x],$$

$$f_2(x) = x^5 + 5x^4 + 6x^3 - 9x - 5 \in \mathbb{Z}[x],$$

$$f_3(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1 \in \mathbb{Z}[x] \quad \text{за просто } p,$$

$$f_4(x) = x^p - px^2 + p^2x - 1 \in \mathbb{Z}[x] \quad \text{за просто } p$$

над полето $\mathbb{Q}$ *на рационалните числа.*

Решение: (б)(i) Ако в полинома

$$f_1(x + a) = x^4 + 4(a - 2)x^3 + 6(a - 2)^2x^2 + [4(a - 2)^3 - 3]x + (a - 2)^4 - 3(a - 4)$$

положим $a = 2$, получаваме полинома $f_1(x+2) = x^4 - 3x + 6 \in \mathbb{Z}[x]$, който е неразложим над $\mathbb{Q}$ по критерия на Айзенщайн за простото число $p = 3$.

(ii) В

$$f_2(x + a) = x^5 + 5(a + 1)x^4 + [10(a + 1)^2 - 4]x^3 + [10(a + 1)^3 - 12(a + 1) + 2]x^2 +$$

$$+[5(a + 1)^4 - 12(a + 1)^2 + 4(a + 1) - 6]x + (a + 1)^5 - 4(a + 1)^3 + 2(a + 1)^2 - 6(a + 1) + 2$$

избираме $a = -1$ и прилагаме критерия на Айзенщайн за простото число $p = 2$ към $f_2(x-1) = x^5 - 4x^3 + 2x^2 - 6x + 2 \in \mathbb{Z}[x]$.

(iii) В биномната формула $(x-1)f_3(x) = x^p - 1$ заменяме променливата x с $t = x-1$ и прилагаме критерия на Айзенщайн за простото число p към

$$f_3(t+1) = \frac{(t+1)^p - 1}{t} = t^{p-1} + \sum_{i=2}^{p-1} \binom{p}{i} t^{i-1} + p \in \mathbb{Z}[x].$$

(iv) Полиномът

$$f_4(x+a) = x^p + \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i} a^{p-i} x^i - px^2 + p(p-2a)x + (a^p - pa^2 + p^2 a - 1) \in \mathbb{Z}[x]$$

изпълнява критерия на Айзенщайн за простото число p тогава и само тогава, когато p дели $a^p - 1$, но p^2 не дели $a^p - 1 - pa^2$. Например, $a = 1$ изпълнява тези условия.