§ 8. Системи сравнения от първа степен. Китайска теорема за остатъците

Нека  са естествени числа. Да разгледаме следната система сравнения от първа степен:

,

където  за всяко . Според теорема 7.1 всяко едно от сравненията на системата има единствено решение , . Така горната система е еквивалентна на системата

. (1)

Ще изследваме тази система само в случая, когато числата  са две по две взаимно прости. Тогава  е тяхното най-малко общо кратно. Ясно е, че ако , то  за всяко . Следователно ако *c* е решение на системата (1), то и  също е решение. Две такива решения ще считаме, че не са различни и ще казваме, че  е решение на системата (1). Така (по аналогия с предния параграф) броят на различните решения на системата (1) е равен на броя на различните числа в една пълна система остатъци по модул *m*, които я удовлетворяват.

**Теорема 8.1.** *Ако естествените числа  са две по две взаимно прости, системата сравнения (1) има единствено решение.*

*Доказателство.* **Единственост.** Ако *c* и  са решения на системата (1), то  за всяко .Тогава разликата  се дели на  за всяко , а значи се дели и на *m*. Следователно .

**Съществуване.** Въпросът за съществуване на решение на системата (1) се решава от следващата теорема, известна като Китайска теорема за остатъците.

**Теорема 8.2 (Китайска теорема за остатъците).** *Нека  () са естествени числа, които са две по две взаимно прости, а  са произволни цели числа. Тогава съществува цяло число c, за което са в сила сравненията*

**.

*Доказателство.* Ще проведем индукция по *k*. Първо ще разгледаме случая . Щом , съществуват числа  и , такива че . Полагаме . Тогава



,



.

Нека сега , като считаме, че твърдението е доказано за . Според индукционното предположение съществува число *d*, такова че

.

Тъй като числата ** са две по две взаимно прости, то . Тогава, съгласно случая , съществува число *c*, такова че

.

От първото сравнение следва  за всяко . Тогава са изпълнени сравненията

.

Теоремата е доказана.