Глава 1

Диференциално смятане на функции на няколко променливи.

1.1 Разстояние и норма в $\mathbb{R}^n$

Дефиниция на крайномерно пространство. В настоящата глава ще се занимаваме със свойствата на функциите на няколко променливи. Преди да започнем обаче тяхното изучаване, трябва да обърнем внимание на множествата, върху които те са дефинирани. Когато имаме функция на едно променливо $f(x)$, тя е определена за x принадлежащо на някакво подмножество (обикновено интервал) на реалната права $\mathbb{R}$. При функция на две променливи $f(x, y)$ стойността на функцията зависи от числовите стойности на двете променливи x и y, при това взети в определен ред - ясно е, че ако разменим техните места, получаваме друга стойност на функцията. Така, можем да кажем, че $f(x, y)$ е дефинирана върху някакво множество, състоящо се от *наредени двойки реални числа.* Аналогично функцията на три променливи $f(x, y, z)$ е дефинирана върху множество от *наредени тройки реални числа*, и т.н. Това ни довежда до следната дефиниция, играеща основна роля в по-нататъшните ни разсъждения:

Определение. *Под n-мерно евклидово пространство* $\mathbb{R}^n$ *ще раз-*

бираме множеството от всички наредени n-торки $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ от реални числа. Числата $x_1, x_2, \dots, x_n$ ще наричаме съответно първа, втора,..., n-та координата на точката P.

Пространството $\mathbb{R}^2$ от всички наредени двойки (x, y) се нарича равнина. При $n = 3$ получаваме тримерното пространство $\mathbb{R}^3$ на всички наредени тройки (x, y, z). Ще отбележим, че в линейната алгебра пространствата $\mathbb{R}^n$ се изучават от малко по-различна гледна точка: в тях се въвеждат т.н. линейни, или векторни операции - събиране на два елемента, и произведение на даден елемент с реално число. Понякога и ние ще използваме тези операции; в такъв случай, за да подчертаем наличието на такива операции, ще наричаме елементите на $\mathbb{R}^n$ вектори, и ще използваме за тях означения от вида $\vec{x}$, $\vec{y}$ и т.н.

Горната дефиниция е частен случай на възприетата в теорията на множествата операция произведение на две или повече множества. Ако $M_1, \dots, M_n$ са някакви множества, тяхното произведение $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ се определя като множеството от всички наредени n-торки $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ с $m_1 \in M_1$,...,$m_n \in M_n$. Тогава $\mathbb{R}^n$ може да се определи като произведение $\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ на n екземпляра на реалната права $\mathbb{R}$. Така може да бъдат дефинирани и някои подмножества на евклидовите пространства: ако $[a, b]$ и $[c, d]$ са интервали в $\mathbb{R}$, тяхното произведение $[a, b] \times [c, d]$ представлява правоъгълник в $\mathbb{R}^2$ със страни, успоредни на координатните оси. Произведението на три интервала $[a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ е правоъгълен паралелопипед в $\mathbb{R}^3$, и т.н.

Забележка. Дадения подход към многомерните пространства (към който ние ще се придържаме и в бъдеще) притежава следния недостатък - в него привилегирована роля играят координатните оси на променливите $x_1, \dots, x_n$. В приложенията на анализа към природните науки такива привилегировани координатни системи рядко могат да са посочат; така например, в обичайното тримерно пространство ние не можем да предпочетем едни направления пред други. Ще изложим по-общия подход към въпроса, възприет в линейната алгебра:

Нека H е линейно пространство, т.е. пространство, в което са дефинирани векторните операции: събиране на елементи и умножение на елемент с реално число. Казваме, че пространството H е n-мерно (има размерност n), ако всеки $n+1$ вектора в него са линейно зависими (някаква тяхна линейна комбинация с ненулеви коефициенти е нула), но съществуват n на брой линейно независими вектори. Да изберем линейно независима система от вектори $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ в H. Тогава всеки вектор $\vec{x} \in H$ притежава единствено разлагане от вида $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i$. Ние можем да съпоставим на всеки вектор $\vec{x}$ n-торката от реални числа $x_1, \dots, x_n$, с което получаваме взаимно еднозначно изображение на H в $\mathbb{R}^n$, запазващо линейните операции. В частност, на всяка функция $f(\vec{x})$ върху H ние съпоставяме функцията $f(x_1, \ldots, x_n)$, зависеща от n числови аргумента. Важно е да се помни обаче, че това съпоставяне зависи от избора на координатните вектори $\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}$; по-голямата (и по-важната) част от дефинираните по-натагък понятия не зависят от избора на координатната система, и ние ще трябва да проверяваме това във всеки конкретен случай.

Най-често едно линейно пространство H се разглежда заедно с дадено скаларно произведение в него $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \in \mathbb{R}$, $\vec{x}, \vec{y} \in H$. В този случай казваме, че H е *евклидово пространство.* В този случай обикновено избираме векторите $\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}$ така, че да образуват *ортонормирана система* (виж по-долу).

Разстояние и норма в $\mathbb{R}^n$. По-нататък основна роля за нас ще играе понятието *евклидово разстояние между две точки в* $\mathbb{R}^n$. При $n = 1$, т.е. върху правата $\mathbb{R}$, разстоянието между точките с координати x и y е $\rho(x, y) = |x - y|$. Разстоянието между две точки в равнината или в пространство с по-голям брой измерения може да се намери по елементарно-геометричен път с помощта на Питагоровата теорема. Нека $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $Q = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Тогава т. нар. евклидово разстояние между точките P и Q се дава с формулата

$$\rho_2(P, Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

По нататък ние ще използваме не толкова дефиницията на това разстояние, колкото неговите основни свойства:

1/ $\rho_2(P, Q) \geq 0$ за всеки две точки $P,\ Q \in \mathbb{R}^n$; $\rho_2(P, Q) = 0$ тогава и само тогава, когато $P = Q$.

2/ Винаги $\rho_2(P, Q) = \rho_2(Q, P)$.

3/ (неравенство на триъгълника) За всеки три точки $P,\ Q,\ R \in \mathbb{R}^n$ имаме

$$\rho_2(P, R) \leq \rho_2(P, Q) + \rho_2(Q, R).$$

Свойствата 1/ и 2/ са очевидни. Свойството 3/ лесно се интерпретира геометрически: ако разгледаме триъгълника с върхове в точките P, Q и R, то сумата от дължините на страните PQ и QR не надминава дължината на страната PR. Този факт се доказва в елементарната геометрия; разбира се, интересно е и неговото аналитично доказателство - виж Твърдение1 и Задача 1.

Норма в $\mathbb{R}^n$. Да разгледаме сега $\mathbb{R}^n$ като векторно пространство, и да въведем понятието евклидова норма на вектор от $\mathbb{R}^n$: ако $\vec{x} == (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то

$$||\vec{x}||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2}.$$

Така въведената норма притежава свойствата:

$1'/$ $||\vec{x}||_2 \geq 0$; $||\vec{x}||_2 = 0$ тогава и само тогава, когато $\vec{x} = \vec{0}$.

$2'/$ $||\lambda\, \vec{x}||_2 = |\lambda|\, ||\vec{x}||_2$ за всеки $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

$3'/$ (неравенство на триъгълника) За всеки два вектора $\vec{x},\ \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ имаме $||\vec{x} + \vec{y}||_2 \leq ||\vec{x}||_2 + ||\vec{y}||_2$.

Нормата и разстоянието са очевидно свързани: имаме $\rho_2(P, Q) = \left|\left|\vec{PQ}\right|\right|_2 = \left|\left|\vec{P} - \vec{Q}\right|\right|_2$, където с $\vec{P}$ и $\vec{Q}$ означаваме радиус-векторите на точките P и Q. В такъв случай ще казваме, че нормата $||\cdot||_2$ поражда разстоянието ρ_2. В допълнението по-долу ние ще видим и други примери на разстояния, породени от норми.

Твърдение 1. *Нека нормата $||\vec{x}||$ в $\mathbb{R}^n$ удовлетворява условията $1'/$ - $3'/$. Тогава породеното от нея разстояние $\rho(P, Q) = \left|\left|\vec{P} - \vec{Q}\right|\right|$ удовлетворява условията 1/ - 3/.*

Наистина, $1/$ веднага следва от $1'/$. Условието $2/$ се получава от $2'/$ при $\vec{x} = \vec{P} - \vec{Q}$ и $\lambda = -1$. Накрая, използвайки $3'/$, имаме

$$\left|\left|\vec{P} - \vec{R}\right|\right| = \left|\left|\left(\vec{P} - \vec{Q}\right) + \left(\vec{Q} - \vec{R}\right)\right|\right| \leq \left|\left|\vec{P} - \vec{Q}\right|\right| + \left|\left|\vec{Q} - \vec{R}\right|\right|,$$

т.е. условието $3/$. ■

В по-нататъшните ни разглеждания под норма $||\vec{x}||$ и разстояние $\rho(P, Q)$ в ще разбираме евклидовата норма и евклидовото разстояние (освен ако изрично е казано противното). Добрите геометрични свойства на тази норма се дължат на факта, че тя е породена от скаларното произведение в $\mathbb{R}^n$.

Скаларно произведение. Нека H е линейно пространство. Казваме, че в H е дефинирано *скаларно произведение*, ако на всеки два вектора $\vec{x}, \vec{y} \in H$ е съпоставено реалното число $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$, удовлетворяващо съотношенията:

$1''$ (линейност): За всеки $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}, \vec{y} \in H$ и число $\lambda \in \mathbb{R}$ имаме

$$\langle \vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}_1, \vec{y} \rangle + \langle \vec{x}_2, \vec{y} \rangle \ , \ \langle \lambda \vec{x}, \vec{y} \rangle = \lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle .$$

$2''$ (симетричност): За всеки $\vec{x}, \vec{y} \in H$ имаме

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle .$$

$3''$ (положителна определеност): За всеки *ненулев* вектор $\vec{x} \in H$ имаме

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0.$$

В пространството $\mathbb{R}^n$ стандартното скаларно произведение се дава с формулата $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, където $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$. То може да се изрази и геометрично: $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = ||x|| \, ||y|| \cos \angle (\vec{x}, \vec{y})$, където $\angle (\vec{x}, \vec{y})$ означава ъгъла между векторите $\vec{x}$ и $\vec{y}$. Лесно се вижда, че двете определения съвпадат - виж зад. 7. Разбира се, това не е единственото скаларно произведение в $\mathbb{R}^n$.

Ще изложим накратко някои основни свойства на скаларните произведения:

Твърдение 2.*(Неравенство на Коши-Шварц-Буняковски): За всеки два вектора $\vec{x}, \vec{y} \in H$ е в сила неравенството*

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} \ \sqrt{\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle}.$$

Равенството се достига само в случая, когато векторите $\vec{x}$ и $\vec{y}$ са колинеарни.

Доказателство. Да разгледаме квадратния тричлен

$$p(t) = \langle \vec{x} + t\vec{y}, \vec{x} + t\vec{y} \rangle = At^2 + 2Bt + C,$$

където $A = \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle$, $B = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$, $C = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$. От свойство $3''$ се вижда, че $p(t) \geq 0$ за всички стойности на t. Следователно $p(t)$ не може да има два различни реални корена - иначе в интервала между тях неговите значения биха били отрицателни. Оттук се вижда, че неговата дискриминанта $D = 4 \left(B^2 - AC \right)$ е по-малка или равна на нула, т.е. $B^2 \leq AC$.

Остава да изследваме кога се достига равенството. В такъв случай дискриминантата D е равна на нула, което означава, че $p(t)$ има точно един реален корен - да го означим с t_0. Имаме

$$p\left(t_0\right) = \left\langle \vec{x} + t_0 \vec{y}, \vec{x} + t_0 \vec{y} \right\rangle = 0,$$

откъдето пак по свойство $3''$ получаваме $\vec{x} + t_0 \vec{y} = 0$, или, с други думи, $\vec{x} = -t_0 \vec{y}$. ■

Определение (норма, породена от скаларното произведение). *Норма на вектора $\vec{x} \in H$ ще наричаме числото*

$$||\vec{x}|| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}.$$

Твърдение 3.*Нормата, породена от скаларното произведение, удовлетворява условията $1'$/ - $3'$/.*

Доказателство. Свойствата $1'$ и $2'$ са очевидни. Свойството $3'$ (неравенството на триъгълника) следва от неравенството на Коши-Шварц-Буняковски:

$$||\vec{x} + \vec{y}||^2 = \langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + 2 \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle =$$

$$= ||x||^2 + 2 \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + ||y||^2 \leq ||x||^2 + 2 ||x|| \, ||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2 . ■$$

Нека H е n-мерно линейно пространство със скаларно произведение. Тогава в него може да се избере ортонормирана база, т.е. вектори $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n \in H$ такива, че $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = 0$ при $i \neq j$ и $||\vec{e}_i|| = 1$ за всяко i. За всяко $\vec{x} \in H$ е налице разлагането

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i \text{ , където } x_i = \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle .$$

Лесно се вижда, че ако $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i$ и $\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \vec{e}_i$, то

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Съпоставяйки на вектора $\vec{x}$ n-торката от числа $(x_1, \ldots, x_n)$, ние получаваме взаимно еднозначно линейно съответствие между пространството H и $\mathbb{R}^n$, като скаларното произведение в H преминава в описаното по-горе стандартно скаларно произведение в $\mathbb{R}^n$. Важно е да се отбележи, че такова отъждествяване може да се извърши по много различни начини: то зависи от избора на ортонормирания базис $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$. При преминаване от един ортонормиран базис към друг координатите се преобразуват чрез умножение с подходяща ортогонална матрица - виж зад. 8.

Допълнение. Разстоянието $\rho_2(P, Q)$ не е единственото разстояние в $\mathbb{R}^n$, притежаващо свойствата 1/ - 3/. За илюстрация на това, да си представим, че живеем в град, разделен на правоъгълни квартали, и се движим само по улиците (виж чертежа). Лесно се вижда, че всеки от най-кратките пътища (такива има много), съединяващ точките с координати $P = (x, y)$ и $Q = (x', y')$, има дължина $\rho_1(P, Q) = |x - x'| + |y - y'|$. Аналогично разстояние може да се дефинира и в $\mathbb{R}^n$ за произволно n с формулата

$$\rho_1(P, Q) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \,.$$

Очевидно разстоянието ρ_1 също притежава свойствата 1/ - 3/. Веднага се вижда, че разстоянието ρ_1 се поражда от нормата

$$||\vec{x}||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \,.$$

Друго разстояние ρ_∞, отново удовлетворяващо 1/ - 3/, както и съответната норма $||\vec{x}||_\infty$, могат да бъдат определени с формулите:

$$\rho_\infty(P, Q) = \max_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i| \,, \quad ||\vec{x}||_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$$

(за обяснение на индексите виж задачи 1. - 3.).

Забележка. Скаларното произведение и разлагането по ортонормален базис се прилагат не само в разгледаните тук крайно-мерни пространства, но и в по-сложни случаи като например пространства от функции. Така например, то е основен инструмент при разлагането на функции в ред на Фурие (виж §2.9.11 и 2.9.12).

Упражнения.

1. Да определим при $p \geq 1$ нормата $||\vec{x}||_p$ в $\mathbb{R}^n$ с формулата $||\vec{x}||_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$. Докажете, че условията $1'/$ - $3'/$ са удовлетворени.

Упътване. За да докажете $3'/$ при $p > 1$, покажете, че

$$\left(||\vec{x}+\vec{y}||_p\right)^p = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i|\,|x_i+y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i|\,|x_i+y_i|^{p-1}$$

и приложете за двете суми вдясно неравенството на Хьолдер (виж I. §2.10, зад. 10).

2. Докажете, че при $p \in (0,1)$ неравенството на триъгълника за $||\vec{x}||_p$ не се изпълнява.

3. Докажете, че $\lim_{p\to+\infty} ||\vec{x}||_p = ||\vec{x}||_\infty$.

4. Нека H е пространство със скаларно произведение, и $||\vec{x}||$ е нормата в H, породена от него. Докажете, че е в сила теоремата на Питагор: за всеки $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, такива че $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$, имаме

$$||\vec{x}+\vec{y}||^2 = ||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2 .$$

5. Докажете, че за всяка норма, определена от скаларно произведение, е в сила равенството на успоредника:

$$2\left(||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2\right) = ||\vec{x}+\vec{y}||^2 + ||\vec{x}-\vec{y}||^2 .$$

(сумата на квадратите на страните на успоредника е равна на сумата на квадратите на неговите диагонали).

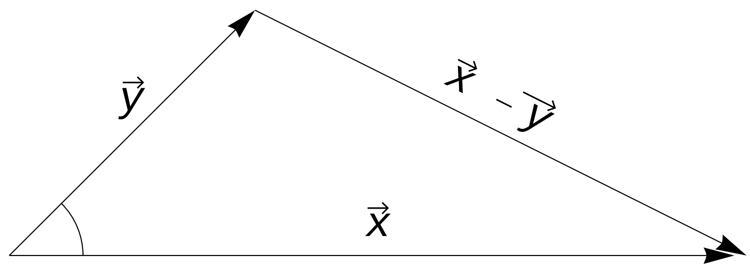
6. Използувайки резултата на зад. 5, докажете, че при $p \neq 2$ нормата $||\vec{x}||_p$ не се поражда от никое скаларно произведение в $\mathbb{R}^n$.

7. Докажете, че аналитичната и геометричната дефиниция на скаларно произведение в $\mathbb{R}^n$ съвпадат.

Упътване. От свойствата на дефинираното по аналитичен път скаларно произведение следва, че

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \frac{1}{2}\left(||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2 - ||\vec{x}-\vec{y}||^2\right) .$$

Да разгледаме тригълника, образуван от векторите $\vec{x}$ и $\vec{y}$, приложени в една и съща точка; страните му са равни на $||\vec{x}||$, $||\vec{y}||$ и $||\vec{x}-\vec{y}||$. Прилагайки косинусовата теорема за този триъгълник, виждаме, че дясната част на равенството съвпада с геометричната дефиниция на скаларното произведение.



Чертеж към задача 7.

8. Нека H е n-мерно векторно пространство със скаларно произведение, и $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n$ е ортонормирана система от вектори в H, а $\vec{f}_1,\ldots,\vec{f}_n$ е друга система от n вектора, изразяваща се чрез предходната с формулите

$$\vec{f}_j=\sum_{i=1}^{n}a_{i,j}\vec{e}_i\ ,\ j=1,\ldots,n.$$

а/ Докажете, че системата $\vec{f}_1,\ldots,\vec{f}_n$ е ортонормирана точно тогава, когато матрицата $\{a_{i,j}\}$ е ортогонална. Една $n\times n$ - матрица $A=\{a_{i,j}\}_{i=1,\ldots,n,j=1,\ldots,n}$ се нарича ортогонална, ако редовете и образуват ортонормирана система в $\mathbb{R}^n$, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n}a_{i,j_1}a_{i,j_2}=\begin{cases}0, & j_1\neq j_2\\ 1, & j_1=j_2\end{cases}\ .$$

б/ Покажете, че ако $\vec{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i\vec{e}_i$ и $\vec{x}=\sum_{j=1}^{n}\tilde{x}_j\vec{f}_j$, то връзката между предишните коефициенти $\{x_i\}$ и новите $\{\tilde{x}_j\}$ се дава с формулите

$$x_i=\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}\tilde{x}_j.$$

9. Докажете, че всяко ортогонално преобразование на $\mathbb{R}^2$ се задава с матрица от вида

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

т.е. представлява ротация на подходящ ъгъл θ.

1.2 Топология и сходимост в $\mathbb{R}^n$.

Както знаем, анализът върху реалната права се базира на отворените интервали в $\mathbb{R}$ и понятието околност (симетрична околност) на точка. За да развием анализа в многомерно пространство, ще трябва да въведем аналогични обекти в него, като имаме пред вид, че геометрията на подмножествата на многомерното пространство е много по-сложна от тази на едномерното.

Наличието на разстояние в $\mathbb{R}^n$ ни позволява да дефинираме понятието кръгова околност на дадена точка: под кръгова околност на точката $P \in \mathbb{R}^n$ с радиус r разбираме отворен кръг (евентуално кълбо) с център P и радиус r, т.е. множеството от всички точки Q от $\mathbb{R}^n$, намиращи се на разстояние по-малко от r от точката P. Означаваме:

$$B(P,r) = \{Q : \rho(Q,P) < r\} .$$

В едномерния случай това е симетричен интервал с център P и радиус r.

Нека сега M е подмножество на $\mathbb{R}^n$. Ще разделим точките от $\mathbb{R}^n$ на три класа в зависимост от местоположението им спрямо M.

Дефиниция. *Точката $P \in \mathbb{R}^n$ се нарича вътрешна за M, ако съществува $r > 0$ такова, че $B(P,r) \subset M$.*

С други думи, точката е вътрешна за едно множество, ако тя се съдържа в него заедно с някоя своя кръгова околност.

Множеството на всички вътрешни точки на M се бележи с M^o.

Дефиниция. *Точката $P \in \mathbb{R}^n$ се нарича външна за M, ако съществува $r > 0$ такова, че $B(P,r) \cap M = \emptyset$.*

С други думи, точката е вътрешна за M, ако тя се съдържа в допълнението му заедно с някоя своя кръгова околност, т.е. принадлежи на $(\mathbb{R}^n \backslash M)^0$.

Оставащите точки ще наричаме контурни:

Дефиниция. *Точката $P \in \mathbb{R}^n$ се нарича контурна за M, ако тя не е нито вътрешна, нито външна за M.*

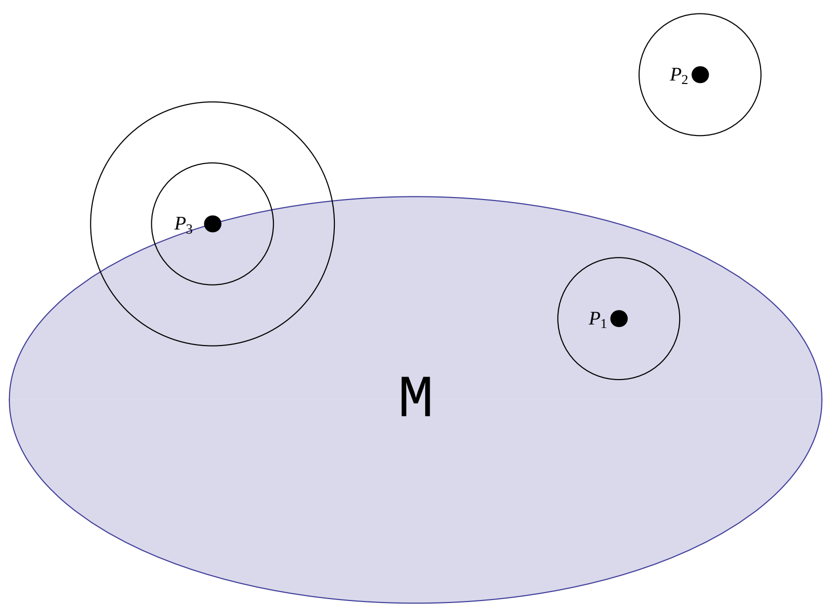
Множеството от контурните точки се нарича контур на M и се бележи с $b\ M$ или с $b(M)$.

Горната дефиниция не е конструктивна; по-добро описание на контура на едно множество се дава в следното твърдение:

Твърдение 1. *Една точка е контурна за M точно тогава, когато всяка нейна кръгова околност се пресича и с M, и с $\mathbb{R}^n \backslash M$.*

Доказателство. Ако точката P не е нито вътрешна, нито външна за M, то за всяко $r > 0$ кръговата околност $B(P, r)$ не може да се съдържа нито в M, нито в $\mathbb{R}^n \backslash M$. Това означава, че тя ще има общи точки и с $\mathbb{R}^n \backslash M$, и с M.

Обратно, ако всяка кръгова околност на P има общи точки с M и с $\mathbb{R}^n \backslash M$, то очевидно никоя кръгова околност на P не може да се съдържа в M или в $\mathbb{R}^n \backslash M$, т.е. P не е вътрешна или външна за M. ∎



Вътрешна (P_1), външна (P_2), контурна (P_3) точки за множеството M.

Следствие. *Контурите на множеството M и на неговото допълнение $\mathbb{R}^n \backslash M$ съвпадат.*

Забележка. Дадените по-горе дефиниции зависят от това в кое евклидово пространство разглеждаме множеството M. Така например, нека I е подинтервал на правата $\mathbb{R}$. Тогава неговата вътрешност в смисъл на горната дефиниция съвпада с множеството на вътрешните му точки в обичайния смисъл, т.е. съвпада с интервала, евентуално с изключени крайни точки. От друга страна, ако разгледаме същия интервал I като подмножество на оста x в равнината $\mathbb{R}^2$, то вътрешността му е празна, и той се състои само от контурни точки (докажете!).

Ясно е, че външните за M точки не принадлежат на M; следователно точките, принадлежащи на M, са вътрешни или контурни. Това дава $M \subset M^o \cup b(M)$. От друга страна, тези две множества не са длъжни да съвпадат; наистина, точките от контура на M могат и да не му принадлежат. Оттук получаваме една класификация на подмножествата на $\mathbb{R}^n$, която играе основна роля по-нататък:

Дефиниция. *Едно подмножество на $\mathbb{R}^n$ се нарича отворено в $\mathbb{R}^n$, ако то не съдържа точки от контура си. Под околност на дадена точка ще разбираме отворено множество, което я съдържа.*

Ще разгледаме и другият краен случай:

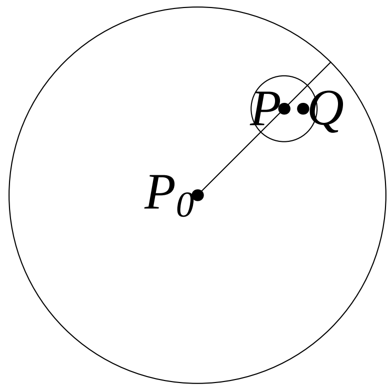
Дефиниция. *Едно подмножество на $\mathbb{R}^n$ се нарича затворено в $\mathbb{R}^n$, ако то съдържа всички точки на контура си.*

Ще отбележим, че в общия случай едно множество може да съдържа някои точки от контура, а други да не съдържа. С други думи, "повечето" множества в $\mathbb{R}^n$ не са нито отворени, нито затворени.

Както видяхме по-горе, контурите на едно множество и неговото допълнение съвпадат. Следователно, ако M не съдържа нито една точка от bM, то $\mathbb{R}^n \backslash M$ ще съдържа всички точки на bM, и обратно. Оттук получаваме:

Твърдение 2. *Едно подмножество на $\mathbb{R}^n$ е отворено точно тогава, когато неговото допълнение в $\mathbb{R}^n$ е затворено.*

Забележка. Лесно се вижда, че множеството M^o от вътрешните точки на M е отворено – очевидно това е най-голямото отворено множество, съдържащо се в M. Множеството $\overline{M} = M \cup bM$ (което се нарича затворена обвивка на M) е затворено, защото допълнението му съвпада с външността на M. Всяко затворено множество, което съдържа M, ще съдържа и $\overline{M}$ (докажете). С други думи, $\overline{M}$ е най-малкото затворено множество, съдържащо M.



Отвореният кръг е отворено множество.

Пример. Отвореният кръг е отворено множество.

Доказателство. Нека P е произволна точка от отворения кръг $B(P_0, r)$ с център P_0 и радиус r. Това означава, че $\rho(P_0, P) < r$. Да изберем ε такова, че $0 < \varepsilon < r - \rho(P_0, P)$; ще докажем, че $B(P, \varepsilon) \subset B(P_0, r)$. Наистина, нека $Q \in B(P, \varepsilon)$. Тогава по неравенството на триъгълника

$$\rho(P_0, Q) \leq \rho(P_0, P) + \rho(P, Q) < \rho(P_0, P) + \varepsilon < r.$$

■

По същия начин се доказва, че затвореният кръг, т.е. множеството от точки P, за които $\rho(P_0, P) \leq r$, е затворено множество. И в двата случая контура на кръга съвпада с неговата гранична окръжност (или сфера,...), т.е. с множеството $S(P_0, r) = \{P : \rho(P_0, P) = r\}$.

Сходимост на редици от точки в $\mathbb{R}^n$.

Дефиниция. *Казваме, че редицата $\{P_k\}_{k=1,2,\ldots}$ от точки на $\mathbb{R}^n$ е сходяща към точката P_0 (пишем $P_k \to P_0$, или $\lim_{k\to\infty} P_k = P_0$), ако*

$$\rho(P_k, P_0) \ \to \ 0.$$

По-подробно, за всяко положително ε съществува номер ν, така че за всяко естествено $k > \nu$ да имаме $\rho(P_k, P_0) < \varepsilon$. Казано по друг начин: Всяка кръгова околност на граничната точка съдържа всички членове на редицата освен краен брой (или: всички от известно място нататък).

Сходимостта в $\mathbb{R}^n$ може лесно да се сведе към сходимост на числови редици. Наистина, нека точката P_k да е с координати $\left(x_1^k, \ldots, x_n^k\right)$, и съответно P_0 - с $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Тогава имаме

Теорема 3. *Редицата $\{P_k\}_{k=1,2,\ldots}$ клони към P_0 тогава и само тогава, когато за всяко $i = 1, 2, \ldots, n$ редицата $\left\{x_i^k\right\}$ от i-тите координати клони по k към i-тата координата x_i^0 на P_0.*

Доказателство. Нека $\rho(P_k, P_0) \quad \to \quad 0$. Тогава за всяко $i = 1, 2, \ldots, n$ имаме:

$$0 \leq \left|x_i^k - x_i^0\right| = \sqrt{\left|x_i^k - x_i^0\right|^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left|x_j^k - x_j^0\right|^2} = \rho(P_k, P_0)$$

и по лемата за полицаите $\lim_{k\to\infty} \left|x_i^k - x_i^0\right| = 0$.

Обратно, ако за всяко i имаме $\left|x_i^k - x_i^0\right| \to 0$, след повдигане в квадрат, сумиране, и коренаване, получаваме, че $\sqrt{\sum_{i=1}^n \left|x_i^k - x_i^0\right|^2} \to 0$. ■

От теоремата веднага се вижда, че сходимостта в $\mathbb{R}^n$ е съгласувана с линейните операции. По-точно, имаме:

Следствие. Ако $P_k \to P_0$ и $Q_k \to Q_0$ в $\mathbb{R}^n$, и λ_k е числова редица, клоняща към λ_0, то

$$P_k + Q_k \to P_0 + Q_0 \quad , \quad \lambda_k\ P_k \to \lambda_0\ P_0.$$

Теорема 3 ни дава възможност да пренесем условието на Коши за сходимост, доказано в I §1.6 за числови редици, към редици от точки в $\mathbb{R}^n$.

Дефиниция. *Казваме, че редицата $\{P_k\}_{k=1,2,\ldots}$ от точки на $\mathbb{R}^n$ удовлетворява условието на Коши, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува число ν такова, че при $k > \nu$, $l > \nu$ да имаме $\rho(P_k, P_l) < \varepsilon$.*

Теорема 4. *Една редица от точки на $\mathbb{R}^n$ е сходяща тогава и само тогава, когато удовлетворява условието на Коши.*

Доказателство. В едната посока твърдението лесно се доказва непосредствено от дефиницията за сходимост. Нека $P_k \to P_0$. Да вземем произволно $\varepsilon > 0$ и да изберем ν такова, че при $k > \nu$ да имаме $\rho(P_k, P_0) < \varepsilon/2$. Тогава при $k > \nu$, $l > \nu$ имаме $\rho(P_k, P_l) \leq \rho(P_k, P_0) + \rho(P_0, P_l) < \varepsilon$.

За доказателство на обратното твърдение ще използваме, че за редици от числа то вече е доказано (виж т. 8 на I §1.6). Ако условието на Коши е изпълнено, то за всяко $i = 1, \dots, n$ при $k > \nu$, $p > \nu$ имаме $\left|x_i^k - x_i^l\right| \leq \rho\left(P_k, P_l\right) < \varepsilon$. Така редицата $\left\{x_i^k\right\}_{k=1,2,\dots}$ от i-тите координати на точките P_k удовлетворява условието на Коши и следователно е сходяща. Да означим границата и чрез x_i^0. Тогава от теорема 3 следва, че редицата P_k клони към точката $P_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$. ■

Характеризация на затворените множества. Разглеждането на сходимостта позволява да се даде еквивалентна дефиниция на понятието затворено множество:

Теорема 5. *Едно подмножество на $\mathbb{R}^n$ е затворено точно тогава, когато съдържа границите на всички сходящи редици от свои елементи.*

Доказателство. Нека F е затворено подмножество на $\mathbb{R}^n$, и редицата P_k клони към P_0, като $P_k \in F$ за всяко естествено k. Трябва да докажем, че и $P_0 \in F$.

Наистина, нека допуснем, че P_0 не принадлежи на F. Тъй като F е затворено, то съдържа всички свои контурни точки. Тогава P_0 може да бъде само външна за F. Следователно можем да намерим $r > 0$ такова, че $B\left(P_0, r\right)$ не пресича F. От друга страна, по дефиницията за сходимост при достатъчно голямо k имаме $P_k \in B\left(P_0, r\right)$. Това обаче противоречи на предположението, че всички точки на редицата са в F.

Обратно, нека F съдържа границите на всички сходящи редици от свои елементи; ще докажем, че F съдържа контурните си точки. Нека P_0 е произволна точка от контура на F. Да разгледаме кръговете $B\left(P_0, 1/k\right)$ с център P_0 и радиус $1/k$. От твърдение 1 следва, че всеки от тези кръгове има непразно сечение с F и следователно съществува точка $P_k \in F \cap B\left(P_0, 1/k\right)$. Тъй като $\rho\left(P_k, P_0\right) < 1/k$, то $\rho\left(P_k, P_0\right) \to 0$, и следователно $P_k \to P_0$. От друга страна, тъй като всички точки P_k са в F, то от предположението следва, че и $P_0 \in F$, което трябваше да се докаже. ■

Забележка. От доказателството се вижда, че ако добавим към дадено множество M границите на всички сходящи редици от негови елементи, ще получим точно затворената му обвивка $\overline{M}$.

Точки на сгъстяване и подредици. Както и в едномерния случай, можем да въведем понятието <u>точка на сгъстяване</u> на дадена редица от точки на $\mathbb{R}^n$:

Дефиниция. *Казваме, че точката P_0 е точка на сгъстяване на редицата $\{P_k\}_{k=1,2,...}$, ако за всяко $\varepsilon > 0$ кръговата околност $B(P_0, \varepsilon)$ на P_0 съдържа безкрайно много точки от редицата.*

Това означава, че всяка кръгова околност на P_0 съдържа точки с произволно големи номера. Следователно горната дефиниция може да се изкаже и по друг начин:

Точката P_0 е точка на сгъстяване на редицата $\{P_k\}_{k=1,2,...}$, ако за всяко $\varepsilon > 0$ и естествено n съществува номер $m > n$ такъв, че $P_m \in B(P_0, \varepsilon)$.

Ясно е, че ако редицата $\{P_k\}$ притежава граница P_0, то точката P_0 е и единствена точка на сгъстяване на тази редица.* В общия случай една редица от точки може да има много точки на сгъстяване. Така, в I.§1.6 беше показано, че множеството $\mathbb{Q}$ от рационалните числа може да бъде номерирано, и така получената редица има за точки на сгъстяване всички реални числа. Не е трудно този пример да бъде пренесен в многомерния случай: да означим с $\mathbb{Q}^2$ множеството от всички точки в $\mathbb{R}^2$, за които и двете координати са реални. Тогава отново точките от $\mathbb{Q}^2$ могат да бъдат подредени в редица, и тази редица има за точки на сгъстяване всички точки от $\mathbb{R}^2$ (докажете!)

Подредици. Ще напомним понятието <u>подредица</u> на дадена редица: ако ни е дадена редицата $\{P_k\}_{k=1,2,...}$ от точки на $\mathbb{R}^n$ и строго монотонно растяща система $k_1 < k_2 < \ldots < k_l < \ldots$ от естествени числа, ние може да си образуваме редицата $\{P_{k_l}\}_{l=1,2,...}$, която наричаме подредица на дадената.

Твърдение 6. *Ако редицата $\{P_k\}_{k=1,2,...}$ е сходяща към точката P_0, то всяка нейна подредица е сходяща към същата граница.*

Доказателство. Наистина, след като извън всяка кръгова околност на P_0 от вида $B(P_0, \varepsilon)$ се намират само краен брой членове на началната редица, то извън нея може да има най-много краен брой членове на подредицата. ■

---

*Както ще покажем по-нататък, за ограничени редици е в сила и обратното твърдение.

Както и в едномерния случай, понятията подредица и точка на сгъстяване са тясно свързани:

Теорема 7. *Точката P_0 е точка на сгъстяване на редицата $\{P_k\}_{k=1,2,\ldots}$ точно тогава, когато съществува подредица $\{P_{k_l}\}_{l=1,2,\ldots}$, клоняща към P_0.*

Доказателство. Ако $\lim_{l\to\infty} P_{k_l} = P_0$, то всеки отворен кръг от вида $B\,(P_0, \varepsilon)$ съдържа безкрайно много членове на подредицата (всички освен краен брой) и следователно безбройно много членове на дадената редица.

Обратно, нека P_0 е точка на сгъстяване на редицата $\{P_k\}$. Можем да изберем номер k_1 такъв, че $P_{k_1} \in B\,(P_0, 1)$. Да разгледаме кръга $B\,(P_0, 1/2)$; тъй като според дефиницията на точка на сгъстяване той съдържа членове на редицата с произволно големи номера, ние можем да намерим естествено число k_2 такова, че $k_2 > k_1$ и $P_{k_2} \in B\,(P_0, 1/2)$. Продължавайки по същия начин, при намерени вече $k_1 < k_2 < \ldots < k_{l-1}$, ние можем да изберем k_l така, че $k_l > k_{l-1}$ и $P_{k_l} \in B\,(P_0, 1/l)$. С това получихме безкрайна редица $k_1 < k_2 < \ldots < k_l < \ldots$ от естествени числа такива, че $\rho\,(P_{k_l}, P_0) < 1/l$, откъдето $\lim_{l\to\infty} P_{k_l} = P_0$. ∎

Компактни множества. Теореми на Болцано-Вайерщрас и Хайне-Борел.

В тази точка ще покажем как теоремата на Болцано-Вайерщрас, известна в едномерния случай, се пренася в многомерното пространство.

Едно подмножество M на $\mathbb{R}^n$ ще наричаме ограничено, ако числовото множество $\{\rho(0, P)\}_{P\in M}$ на разстоянията на всички точки от M до началото на координатната система е ограничено отгоре. Лесно се вижда, че M е ограничено точно тогава, когато всички координати x_i, $i = 1, \ldots, n$ на всички негови точки $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ са ограничени по модул от някаква константа. Една редица $\{P_k\}$ ще наричаме ограничена, ако множеството от нейните точки е ограничено.

Теорема 8. (Болцано-Вайерщрас) *Всяка ограничена редица от точки на $\mathbb{R}^n$ притежава поне една точка на сгъстяване.*

Като се вземе пред вид теорема 7, се получава следната еквивалентна формулировка: Всяка ограничена редица от точки на $\mathbb{R}^n$ съдържа сходяща подредица.

Доказателство. При $n = 1$ теоремата е доказана в първата част на курса (виж I.§1.6), като се използва последователно разделяне на интервала, съдържащ членовете на редицата, на две равни части. Това доказателство може лесно да се извърши в многомерното пространство (виж теоремата на Хайне-Борел по-долу), но по-краткия начин е да използваме едномерния случай за доказателство на многомерния.

За удобство ще докажем случая $n = 2$. Нека $P_k = (x_k, y_k)$ е ограничена редица от точки на равнината. Тогава съществува константа C такава, че $|x_k|, |y_k| \leq C$. От ограничената числова редица $\{x_k\}_{k=1,2,\dots}$ можем да изберем сходяща подредица $\{x_{k_l}\}_{l=1,2,\dots}$; нека $\lim_{l\to\infty} x_{k_l} = x_0$. Да разгледаме сега съответната подредица от вторите координати $\{y_{k_l}\}_{l=1,2,\dots}$. Тъй като тя също е ограничена, можем на свой ред да намерим нейна подредица $\left\{y_{k_{l_p}}\right\}_{p=1,2,\dots} \to y_0$. Тъй като редицата $\left\{x_{k_{l_p}}\right\}_{p=1,2,\dots}$ е подредица на редицата $\{x_{k_l}\}_{l=1,2,\dots}$, то според твърдение 6 тя също клони към x_0. Тогава, по теорема 3, редицата от точки $P_{k_{l_p}} = \left(x_{k_{l_p}}, y_{k_{l_p}}\right)$ е подредица на дадената и клони към точката $P_0 = (x_0, y_0)$.

За редици от точки на $\mathbb{R}^n$ при по-големи стойности на n доказателството се извършва по същия начин. Разликата е, че трябва n пъти да се избират подредици на подредиците ..., като в крайна сметка отново се получава покоординатно сходяща подредица на дадената редица. ■

Следствие 9. Ако една ограничена редица от точки на $\mathbb{R}^n$ има само една точка на сгъстяване, то тя е сходяща към тази точка.

Доказателство. Нека $\{P_k\}$ е ограничена редица от точки и P_0 е нейната единствена точка на сгъстяване. Да допуснем, че $\{P_k\}$ не клони към P_0. Това означава, че съществува $\varepsilon > 0$ такова, че извън кръга $B(P_0, \varepsilon)$ остават безкрайно много членове на редицата. Повтаряйки конструкцията на теорема 7, ние можем да конструираме подредица P_{k_l} на дадената, чиито точки са извън $B(P_0, \varepsilon)$. За тази подподредица е приложима теорема 8, и ние може да намерим на свой ред нейна сходяща подредица $\left\{P_{k_{l_p}}\right\}_{p=1,2,\dots}$. Да означим границата и с $\widetilde{P}$. Ясно е, че $\widetilde{P} \neq P$. От друга страна, $\widetilde{P}$ е точка на сгъстяване на подредицата P_{k_l}, а следователно и на дадената редица $\{P_k\}$, което противоречи на условието на теоремата. ■

Дефиниция. *Едно подмножество на $\mathbb{R}^n$ наричаме компактно, ако то е ограничено и затворено.*

Като използуваме това понятие, можем да дадем друга формулировка на теоремата на Болцано-Вайерщрас:

Теорема 10. *Едно множество $M \subset \mathbb{R}^n$ е компактно тогава и само тогава, когато от всяка редица от негови точки може да се избере подредица, клоняща към точка от M.*

Доказателство. Нека M е компактно и $\{P_k\}$ е редица от негови точки. Тъй като M е ограничено, то същото е вярно и за редицата $\{P_k\}$, и ние можем да изберем нейна сходяща подредица. По теорема 5 от затвореността на M следва, че границата на подредицата също принадлежи на M.

Обратно, нека M да притежава свойството за съществуване на сходяща подредица. Ще докажем, че M е ограничено и затворено. Ако M не е ограничено, то съществува редица от точки $P_k \in M$ такава, че $\rho\left(\vec{0}, P_k\right) \to +\infty$. Да изберем нейна подредица P_{k_l}, сходяща към точката $P_0 \in M$. Тогава, от една страна, $\rho\left(\vec{0}, P_{k_l}\right) \to \rho\left(\vec{0}, P_0\right)$. От друга страна, тъй като $\rho\left(\vec{0}, P_{k_l}\right)$ е подредица на $\rho\left(\vec{0}, P_k\right)$, то $\rho\left(\vec{0}, P_{k_l}\right) \to +\infty$, и полученото противоречие доказва ограничеността на M.

За да докажем, че M е затворено, да вземем произволна точка P_0 от контура bM на M, и да изберем, както в доказателството на теорема 5, редица P_k от точки на M, така че $P_k \to P_0$. Съществува нейна подредица P_{k_l}, сходяща към точка $P' \in M$. От твърдение 6 следва обаче, че $P' = P_0$ и следователно $P_0 \in M$. ■

Забележка. Горното твърдение е характерно за крайномерните пространства. В случая на безкрайномерни нормирани пространства то не е вярно, и затова съществуването на сходяща подредица се приема в този случай като дефиниция на понятието компактно множество.

Следната теорема отново е характерна за компактните множества. Тя обикновено не се изучава в едномерния анализ.

Нека M е подмножество на $\mathbb{R}^n$. Една фамилия $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ от подмножества на $\mathbb{R}^n$, индексирана с (крайното или безкрайно) множество A, наричаме покритие за M, ако M се съдържа в нейното обединение $\cup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Покритието $\mathcal{U}$ наричаме отворено, ако множеството U_α е отворено за всяко $\alpha \in A$. Имаме:

Теорема 11. (теорема на Хайне-Борел) *От всяко отворено покритие на компактно множество може да се избере крайно подпокритие.*

По-точно, ако M е компактно множество в $\mathbb{R}^n$ и $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ е негово отворено покритие, то съществуват краен брой индекси $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in A$ такива, че $M \subset U_{\alpha_1} \cup \ldots \cup U_{\alpha_k}$.

Доказателство. Първи етап. Ще докажем теоремата в случая, когато M е "n-мерен правоъгълник" в $\mathbb{R}^n$, т.е. произведение на крайни затворени интервали: $M = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$. За удобство ще разгледаме случая $n = 2$. Нека е даден правоъгълника $M = [a, b] \times [c, d] \in \mathbb{R}^2$. Да допуснем противното – че M не може да бъде покрито с никаква крайна фамилия от елементи на $\mathcal{U}$. Да прекараме вертикалната права през средата на $[a, b]$ и хоризонталната права през средата на $[c, d]$; тези две прави разделят правоъгълника M на четири еднакви по форма правоъгълника. Тогава поне един от тях не може да бъде покрит с краен брой от елементи на $\mathcal{U}$; наистина, ако и четирите малки правоъгълника могат да бъдат покрити с краен брой множества от $\mathcal{U}$, то същото ще бъде вярно и за тяхното обединение - правоъгълника M. Следователно можем да изберем, и да означим с M_1 един от тях, за който не съществува крайно подпокритие. Тогава $M_1 = [a_1, b_1] \times [c_1, d_1] \subset M$, откъдето $[a_1, b_1] \subset [a, b]$ и $[c_1, d_1] \subset [c, d]$; при това $b_1 - a_1 = (b - a)/2$ и $d_1 - c_1 = (d - c)/2$. Да продължим процеса по-нататък, като разделим M_1 на четири еднакви правоъгълника и изберем един от тях, означен с M_2, и т.н. По този начин получаваме намаляваща редица от правоъгълници $M \supset M_1 \supset \ldots \supset M_k \supset \ldots$, като $M_k = [a_k, b_k] \times [c_k, d_k]$ и всеки от правоъгълниците M_k не може да бъде покрит с краен брой от елементи на $\mathcal{U}$. Очевидно числовата редица a_k е монотонно растяща и ограничена; да означим нейната граница с x_0. Редицата b_k е монотонно намаляваща и ограничена; тъй като $b_k - a_k = (b - a)/2^k \to 0$, то b_k клони към същата граница x_0. Оттук се вижда, че за всяко естествено k имаме $x_0 \in [a_k, b_k]$. Същото разсъждение е валидно и за вторите координати и доказва съществуването на число y_0 такова, че $y_0 \in [c_k, d_k]$ за всяко k. Очевидно точката $P_0 = (x_0, y_0)$ принадлежи на всеки от правоъгълниците M_k, $k = 1, 2, \ldots$. Тъй като $P_0 \in M$, то P_0 принадлежи на някое отворено множество U_{α_0} от покритието $\mathcal{U}$.

Според дефиницията на отворено множество съществува $e > 0$ такова, че $B(P_0, \varepsilon) \subset U_{\alpha_0}$. Лесно се вижда, че при достатъчно големи k ще имаме $M_k \subset B(P_0, \varepsilon)$ (това е изпълнено при $\sqrt{(b_k - a_k)^2 + (d_k - c_k)^2} < \varepsilon$). Така M_k е подмножество на U_{α_0}, което противоречи на допускането, че M_k не може да бъде покрито с краен брой от множествата U_α. Полученото противоречие доказва първия етап на доказателството.

В n-мерния случай доказателството се извършва по същия начин, с единствената разлика, че на всяка стъпка поредният n-мерен правоъгълник се разделя на 2^n части, и всички направени по-горе разсъждения остават в сила.

Втори етап. Като използваме първия етап, ще преминем към доказателството на теоремата в общия случай. Нека M е компактно (т.е. ограничено и затворено) множество в $\mathbb{R}^n$, и $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ е негово отворено покритие. Тъй като M е ограничено, можем да намерим n-мерен правоъгълник $\widetilde{M} = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ такъв, че

$M \subset \widetilde{M}$. Да означим с $\mathcal{U}'$ фамилията от отворени множества, състояща се от множествата на $\mathcal{U}$ и отвореното множество $\mathbb{R}^n \backslash M$. Очевидно $\mathcal{U}'$ е покритие за $\widetilde{M}$, и по доказаното по-горе може да се намерят краен брой отворени множества $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_k}$ от $\mathcal{U}$, така че $\widetilde{M} \subset \left(\mathbb{R}^n \backslash M\right) \cup U_{\alpha_1} \cup \ldots \cup U_{\alpha_k}$. Това означава, че $M \subset U_{\alpha_1} \cup \ldots \cup U_{\alpha_k}$.
■

Упражнения.

1. Докажете, че:

а/ Обединение на произволна фамилия отворени множества е също отворено.

б/ Сечение на краен брой отворени множества е отворено.

2. Докажете, че:

а/ Сечение на произволна фамилия затворени множества е също затворено.

б/ Обединение на краен брой затворени множества е затворено.

Упътване. Използвайте твърдение 2 и резултата на задача 1.

3. Докажете, че множеството от точките на сгъстяване на дадена редица е затворено.

4. Нека множеството M не е компактно. Докажете, че заключението на теорема 11 не е вярно, т.е. съществува отворено покритие на M, от което не може да се избере крайно подпокритие.

Пояснение: Предположението, че M не е компактно, означава, че е налице една от двете възможности (или и двете): а/ M не е ограничено, или б/ M не е затворено. Разгледайте двете възможности поотделно.

5. Нека M и N са затворени подмножества на $\mathbb{R}^n$ и нека $\Phi : M \to N$ е взаимно еднозначно и взаимно непрекъснато изображение (това означава, че обратното му изображение от N в M е също непрекъснато). Докажете, че

$$\Phi\left(M^o\right) = N^o\ ,\ \Phi\left(bM\right) = bN.$$

Забележка. Изображение с горните свойства се нарича *хомеоморфизъм* между M и N, а за множествата M и N в този случай се казва, че са *хомеоморфни*. Хомеоморфните множества са неразличими от гледна точка на топологията.

1.3 Непрекъснатост на функции и изображения.

Както и в първата част на анализа, при нас ще играят основна роля понятията функция и изображение. Нека D е подмножество на $\mathbb{R}^n$. Казваме, че е дадено изображение от D в $\mathbb{R}^m$, ако на всяка точка $x = (x_1, \ldots, x_n)$ от D е съпоставена точката $f(x)$ от $\mathbb{R}^m$. В такъв случай се казва още, че f е функция с дефиниционна област D и със стойности в $\mathbb{R}^m$. Вместо $f(x)$ понякога се пише $f(x_1, \ldots, x_n)$.

В случая $m = 1$, т.е. функцията f взема стойности в множеството на реалните числа, ще казваме, че f е числова, или още скаларна, функция. В многомерния случай ще казваме, че f е векторна функция. Всяка векторна функция може да бъде описана чрез числови функции; наистина, нека f е функция, дефинирана в $D \subset \mathbb{R}^n$ и вземаща стойности в $\mathbb{R}^m$. Да означим чрез $f_1(x), \ldots, f_m(x)$ координатите на точката $f(x) \in \mathbb{R}^m$. Тогава $f_1(x), \ldots, f_m(x)$ са числови функции върху D, които определят напълно функцията f. Тези функции се наричат координатни функции за изображението f.

Ще се занимаем с понятията граница на функция и непрекъснатост. Изложението почти дословно повтаря едномерния случай, изложен в част I, §1.8 и 1.10. Отново имаме две еквивалентни определения за граница на функция (и съответно две определения за непрекъснатост): - на Хайне и на Коши.

Определение на Хайне за граница на функция. *Дадена е функцията $f(P)$ с дефиниционна област $D \subset \mathbb{R}^n$ със значения в $\mathbb{R}^m$. Нека $P_0 \in \overline{D}$, и Q е точка от $\mathbb{R}^m$. Казваме, че функцията $f(P)$ клони към Q при $P \to P_0$, ако за всяка редица $\{P_k\}_{k=1,2,\ldots}$ от точки на D, за която $P_k \to P_0$ имаме $f(P_k) \to Q$ в $\mathbb{R}^m$.*

Определение на Коши за граница на функция. *При горните условия казваме, че $f(P)$ клони към Q при $P \to P_0$, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$ такова, че за всяка точка P от D, за която $\rho(P, P_0) < \delta$, имаме $\rho(f(P), Q) < \varepsilon$.*

Теорема 1. *Определенията на Хайне и Коши за граница на функция са еквивалентни.*

Доказателство. Ще започнем с по-лесната част - ще допуснем, че $f(P)$ клони към Q при $P \to P_0$ в смисъл на Коши, и ще докажем, че това е вярно и в смисъл на Хайне. Наистина, нека $\{P_k\}_{k=1,2,\dots}$ е редица от точки на D, клоняща към P_0. Ще докажем, че $f(P_k) \to Q$. Да изберем произволно $\varepsilon > 0$, и да вземем съответното $\delta > 0$ по определението на Коши. Тогава по определението на сходимост на редици от точки може да се намери ν такова, че $\rho(P_k, P_0) < \delta$ за всяко $k > \nu$. Следователно при $k > \nu$ имаме $\rho(f(P), Q) < \varepsilon$, което и трябваше да се докаже.

Доказателството, че от определението на Хайне следва определението на Коши, се извършва чрез допускане на противното. Ще допуснем, че определението на Коши не е удовлетворено, и ще докажем, че не е изпълнено и определението на Хайне. Твърдението "$f(P)$ не клони в смисъл на Коши към Q при $P \to P_0$" означава, че съществува число $\varepsilon_0 > 0$ такова, че по-нататъшната част от определението не е изпълнена: т.е. за всяко $\delta > 0$ съществува точка $P_\delta \in D$ такава, че $\rho(P_\delta, P_0) < \delta$, но $\rho(f(P_\delta), Q) \geq \varepsilon_0$. За да сведем нещата до редици, да дадем на δ стойности $\delta_1 = 1, \delta_2 = 1/2, \dots, \delta_k = 1/k, \dots$ и да означим $P_k = P_{\delta_k}$. Тогава тези точки удовлетворяват условията $P_k \in D$, $\rho(P_k, P_0) < 1/k$ и $\rho(f(P_k), Q) \geq \varepsilon_0$. С други думи, редицата $\{P_k\}_{k=1,2,\dots}$ от точки на D клони към P_0, но редицата от функционалните стойности $f\{P_k\}$ не клони към Q. ■

Понятието граница на функция лесно се свежда към случая на граници на числови функции. Нека $f_1(P), \dots, f_m(P)$ са координатните функции на изображението $f(p)$, и нека $Q = (y_1, \dots, y_m)$. Тогава:

Твърдение 2. *Имаме* $\lim_{P \to P_0} f(P) = Q$ *тогава и само тогава, когато* $\lim_{P \to P_0} f_i(P) = y_i$ *за всяко* i *между* 1 *и* m.

Доказателство. По теорема 3 от §2 редицата $f(P_k)$ клони към Q точно тогава, когато $f_i(P_k) \to y_i$ за $i = 1, \dots, m$. Оттук, използвайки дефиницията на Хайне, получаваме твърдението. ■

От горното твърдение веднага следва, че при линейните операции - сума на векторни функции, и произведение на векторна функция с числова функция - може да се извършва граничен преход. По-точно, имаме:

Твърдение 3.

а/ Ако $f(P)$ и $g(P)$ са векторни функции със стойности в $\mathbb{R}^m$, притежаващи граници при $P \to P_0$, то $\lim_{P\to P_0}(f(P)+g(P)) = \lim_{P\to P_0} f(P) + \lim_{P\to P_0} g(P)$.

б/ Ако $\lambda(P)$ е числова функция, а $f(P)$ - векторна функция, и двете функции притежават граници при $P \to P_0$, то $\lim_{P\to P_0} \lambda(P)\ f(P) = \lim_{P\to P_0} \lambda(P)\ \lim_{P\to P_0} f(P)$.

Непрекъснатост на функции.

Определение. *Нека е дадена функцията $f(P)$ с дефиниционна област $D \subset \mathbb{R}^n$ и със значения в $\mathbb{R}^m$. Ще казваме, че $f(P)$ е непрекъсната в точката $P_0 \in D$, ако*

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = f(P_0).$$

Двете еквивалентни определения на понятието граница на функция водят до две еквивалентни определения на непрекъснатостта:

Непрекъснатост по Хайне. *Функцията $f(P)$ е непрекъсната в точката P_0, ако за всяка редица $\{P_k\}_{k=1,2,\dots}$ от точки на D, за която $P_k \to P_0$ имаме $f(P_k) \to f(P_0)$ в $\mathbb{R}^m$.*

Непрекъснатост по Коши. *Функцията $f(P)$ е непрекъсната в точката P_0, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$ такова, че за всяка точка P от D, за която $\rho(P, P_0) < \delta$, имаме $\rho(f(P), f(P_0)) < \varepsilon$.*

Разбира се, тези две определения са еквивалентни, и ние можем да използваме това определение, което е по-удобно в дадена конкретна ситуация. Така, от определението на Хайне и от твърдение 3 веднага следва:

Твърдение 4. *Сума на две непрекъснати векторни функции (със значение в едно и също пространство $\mathbb{R}^m$), както и произведение на непрекъсната скаларна функция с непрекъсната векторна функция, са също непрекъснати.*

Непрекъснатост на сложно изображение. Нека g е изображение с дефиниционна област $E \subset \mathbb{R}^n$ и стойности в $\mathbb{R}^m$, и f е изображение с дефиниционна област $D \subset \mathbb{R}^m$ и стойности в $\mathbb{R}^p$. Да предположим, че

$g(E) \subset D$. Тогава можем да определим изображението F с дефиниционна област D и стойности в $\mathbb{R}^p$ с формулата $F(P) = f(g(P))$, $P \in E$. Изображението F се нарича сложно, или съставно, изображение. Казва се още, че изображението F е суперпозиция на изображенията f и g. Както се вижда от следващата теорема, суперпозицията на две непрекъснати изображения е също непрекъснато изображение:

Теорема 5. *Нека функцията g е непрекъсната в точката $P_0 \in E$, и g е непрекъсната в $Q_0 = g\left(P_0\right)$. Тогава съставната функция $F(P) = f(g(P))$ също е непрекъсната в P_0.*

Доказателство. Нека $\{P_k\}$ е редица от точки на E, клоняща към P_0. Тогава по дефиницията на Хайне редицата $Q_k = g\left(P_k\right)$ клони към Q_0 и следователно редицата $F\left(P_k\right) = f\left(Q_k\right)$ клони към $F\left(P_0\right) = f\left(Q_0\right)$. ■

Пример. Следващият пример показва, че непрекъснатостта по две променливи е нещо повече от непрекъснатостта по всяка от тях поотделно. Нека $f(x,y)$ е определена с формулата

$$f(x,y) = \frac{x\ y}{x^2+y^2} \text{ при } (x,y) \neq (0,0)\,,\ f(0,0) = 0.$$

Тогава при всяко фиксирано y функцията $f(x,y)$ е непрекъсната като функция на променливата x, и при всяко фиксирано x - като функция на y. В точката $(0,0)$ обаче функцията не е непрекъсната. Наистина, ако $P_n = (1/n, 1/n)$, то $f\left(P_n\right) \to 1/2$. Нещо повече, ако разгледаме редица от точки в $\mathbb{R}^2$, която клони към началото на координатите, намирайки се върху правата с уравнение $y = \lambda x$, то редицата от функционалните стойности клони към $\frac{\lambda}{1+\lambda^2}$, т.е. граничната стойност зависи от посоката, по която се стремим към точката.

Възможна е и по-сложна ситуация - една функция да има една и съща граница по всички прави, минаващи през дадена точка, и въпреки това да не бъде непрекъсната в тази точка - виж задача 11.

Характеризация на непрекъснатите функции. Казваме, че една функция е непрекъсната, ако тя е непрекъсната във всички точки на дефиниционната си област. Ние ще изложим една характеризация на непрекъснатите функции.

Нека $f(P)$ е функция с дефиниционна област $D \subset \mathbb{R}^n$ и със значения в $\mathbb{R}^m$. Нека M е подмножество на $\mathbb{R}^m$. Под праобраз на M относно f разбираме множеството от онези точки $P \in D$ такива, че $f(p) \in M$ (разбира се, това може да е и празното множество). Праобразът на M относно f ще означаваме с $f^{-1}(M)$.

Ще използваме едно обобщение на понятието отворено множество. Нека $D \subset \mathbb{R}^n$, и V е подмножество на D. Ще казваме, че множеството V е отворено в D, ако за всяка точка $P \in V$ съществува $\varepsilon > 0$, така че $B(P, \varepsilon) \cap D \subset V$. Ако D съвпада с цялото $\mathbb{R}^n$, получаваме известното вече определение на отворено множество.

Теорема 6. *Функцията $f(P)$ с дефиниционна област $D \subset \mathbb{R}^n$ и със значения в $\mathbb{R}^m$ е непрекъсната тогава и само тогава, когато праобразът на всяко отворено подмножество на $\mathbb{R}^m$ е отворен в D.*

Доказателство. Нека $f(P)$ е непрекъсната във всички точки на D, и нека $U \subset \mathbb{R}^m$ е отворено множество. Ще докажем, че $f^{-1}(U)$ е отворено в D. Наистина, нека $P_0 \in f^{-1}(U)$. Тогава $f(P_0)$ принадлежи на U, и по определението на отворено множество съществува $\varepsilon > 0$, така че $B(f(P_0), \varepsilon) \subset U$. По дефиницията на Коши за непрекъснатост можем да намерим $\delta > 0$, така че за всяко $P \in D$, за което $\rho(P, P_0) < \delta$, имаме $\rho(f(P), f(P_0)) < \varepsilon$. Преведено на езика на множествата, това означава, че $B(P_0, \delta) \cap D \subset f^{-1}(U)$, което и трябваше да се докаже.

Обратно, нека е дадено, че праобразът на всяко отворено множество чрез f е отворен в D. Да фиксираме произволна точка $P_0 \in D$. Ще докажем, че f е непрекъсната по Коши в P_0. Наистина, да вземем произволно $\varepsilon > 0$, и да означим с U отвореното множество $B(f(P_0), \varepsilon)$ в $\mathbb{R}^m$. Тогава $f^{-1}(U)$ е отворено в D, което означава, че съществува $\delta > 0$, така че $B(P_0, \delta) \cap D \subset f^{-1}(U)$. Това значи, че за всяко $P \in D$, удовлетворяващо $\rho(P, P_0) < \delta$, е изпълнено $\rho(f(P), f(P_0)) < \varepsilon$. ■

Свойства на непрекъснатите функции върху компактно множество. Теоремите на Вайерщрас за непрекъснати функции върху краен и затворен интервал лесно се пренасят за случая на непрекъснати числови функции върху компактни подмножества на $\mathbb{R}^n$:

Теорема 7. (Първа теорема на Вайерщрас). *Всяка непрекъсната числова функция, дефинирана върху компактно множество, е ограничена.*

Доказателство. Нека числовата функция $f(P)$ е дефинирана и непрекъсната за $P \in D$, където D е компактно подмножество на $\mathbb{R}^n$. Да допуснем, че f не е ограничена, например, отгоре. Тогава съществува редица от точки $P_k \in D$ такива. че $f(P_k) \geq k$. Според §2.10 ние можем да изберем нейна сходяща подредица $P_{k_l} \to P_0 \in D$. Тогава от една страна $f(P_{k_l}) > k_l$ и следователно $f(P_{k_l}) \to +\infty$. От друга страна, от непрекъснатостта на f в точката P_0 следва, че $f(P_{k_l}) \to f(P_0)$, и полученото противоречие доказва теоремата. ∎

Теорема 8. (Втора теорема на Вайерщрас). *Всяка непрекъсната числова функция, дефинирана върху компактно множество, достига най-голямата и най-малката си стойност.*

Доказателство. Нека $M = \sup_{P \in D} f(P)$. Тогава за всяко естествено k числото $M - 1/k$ вече не е горна граница за значенията на функцията, и ние може да намерим точка $P_k \in D$ такава. че $M - 1/k < f(P_k) \leq M$. Отново ще изберем сходяща подредица $P_{k_l} \to P_0$. Като извършим граничен преход в неравенствата

$$M - \frac{1}{k_l} < f(P_{k_l}) \leq M,$$

получаваме $M \leq f(P_0) \leq M$, т.е. $f(P_0) = M$.

Твърденията за ограниченост отдолу и за достигане на точната долна граница се получават аналогично. ∎

За векторнозначни функции горните твърдения не се пренасят дословно, но се заместват от следващата теорема. За случая на числови функции тя е еквивалентна с теореми 6 и 7 (покажете!).

Теорема 9. *Образът на компактно множество при непрекъснато изображение е компактен.*

Доказателство. Нека $f(P)$ е непрекъсната функция, дефинирана върху компактното множество $D \subset \mathbb{R}^n$ и вземаща стойности в $\mathbb{R}^m$. Ще покажем, че нейният образ $f(D) \subset \mathbb{R}^m$, състоящ се от всички точки $f(P), p \in D$, е компактно подмножество на $\mathbb{R}^m$. По теорема §2.10 е достатъчно да покажем, че от всяка редица от точки $Q_k \in f(D)$ можем да изберем подредица, сходяща към точка от $f(D)$. Нека $Q_k = f(P_k)$. Избираме подредица P_{k_l} от точки на D, клоняща към $P_0 \in D$. Тогава от непрекъснатостта в точката P_0 получаваме, че $Q_{k_l} \to Q_0 = f(P_0)$. ∎

Равномерна непрекъснатост. И това понятие се пренася от едномерния случай почти без изменения:

Определение. *Изображението f с дефиниционна област $D \subset \mathbb{R}^n$ се нарича равномерно непрекъснато в D, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, така че за всеки две точки P и Q от D, за които $\rho(P, Q) < \delta$, имаме $\rho(f(P), f(Q)) < \varepsilon$.*

Теорема 10. (Теорема на Кантор). *Всяко изображение, дефинирано върху компактно множество и непрекъснато в него, е и равномерно непрекъснато.*

Доказателство. Да допуснем, че избражението f, дефинирано и непрекъснато върху компактното множество D, не е равномерно непрекъснато. Тогава съществува число $\varepsilon_0 > 0$ такова, че по-нататъшната част от определението не е изпълнена: т.е. за всяко $\delta > 0$ съществуват точки $P_\delta, Q_\delta \in D$ такава, че $\rho\left(P_\delta, Q_\delta\right) < \delta$, но $\rho\left(f\left(P_\delta\right), f\left(Q_\delta\right)\right) \geq \varepsilon_0$. Да дадем на δ стойности $\delta_k = 1/k, \ldots$ и да означим $P_k = P_{\delta_k}, Q_k = Q_{\delta_k}$. Тогава тези точки удовлетворяват условията $\rho\left(P_k, Q_k\right) < 1/k$ и $\rho\left(f\left(P_k\right), f\left(Q_k\right)\right) \geq \varepsilon_0$. Нека $\{P_{k_l}\}\, l = 1, 2, \ldots$ е сходяща подредица на редицата $\{P_k\}$. Да означим границата и с P_0. Очевидно редицата $\{Q_{k_l}\}\, l = 1, 2, \ldots$ клони към същата граница. Тогава $f\left(P_{k_l}\right) \to f\left(P_0\right)$, $f\left(Q_{k_l}\right) \to f\left(Q_0\right)$, и $f\left(P_{k_l}\right) - f\left(Q_{k_l}\right) \to \vec{0}$, което противоречи на допускането, че $\rho\left(f\left(P_{k_l}\right), f\left(Q_{k_l}\right)\right) \geq \varepsilon_0$. ■

Линейно свързани множества. Теорема за междинните стойности. В първата част на анализа се доказва следното свойство на непрекъснатите функции: нека $f(x)$ е непрекъсната функция, дефинирана върху интервал (вида на интервала не е от значение). Ако A и B са значенията на функцията в две точки от дефиниционния интервал, и C е число между A и B, то съществува точка, в която $f(x)$ взема стойност C. Теоремата не е вярна, ако пропуснем условието, че дефиниционата област е интервал; например, нека дефиниционното множество е обединение на два непресичащи се интервала, и $f(x)$ е равна на константата 0 върху първия, и на 1 - върху втория. Така определената функция е непрекъсната, но междинната стойност $1/2$ не се достига в никоя точка.

За да успеем да пренесем тази теорема в многомерния случай, трябва да можем да правим разграничение между двата случая за подмножества на $\mathbb{R}^n$. Общо казано, трябва да разделим множествата, които "се състоят от едно парче", от тези, които са "от няколко парчета". Това води до понятието линейна свързаност на множество. Това е множество, всеки две точки на което може да бъдат съединени с непрекъсната линия. Предварително ще трябва да въведем понятието непрекъсната крива линия в $\mathbb{R}^n$:

Определение. *Под непрекъсната крива линия в $\mathbb{R}^n$ разбираме непрекъснато изображение на крайния и затворен интервал $[a, b]$ в пространството $\mathbb{R}^n$.*

Така, всяка непрекъсната крива в $\mathbb{R}^n$ се задава с векторна функция $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$, $t \in [a, b]$. Със същия термин ще означаваме и множеството от стойностите на $\varphi(t)$: $\Gamma_\varphi = \{\varphi(t)\}_{t\in[a,b]}$. Точките $\varphi(a)$ и $\varphi(b)$ се наричат съответно начална и крайна точка на кривата Γ_φ.

Определение. *Едно множество $D \subset \mathbb{R}^n$ се нарича линейно свързано, ако за всеки две точки P, Q от D съществува непрекъсната крива Γ_φ, съдържаща се в D, с начална точка P и крайна точка Q.*

Например, всяко изпъкнало множество е линейно свързано. Ще напомним, че едно множество се нарича изпъкнало, ако то съдържа заедно с всеки две свои точки и отсечката, която ги свързва. Такива множества са кръга, правоъгълника, триъгълника и др. Отсечката, която свързва точките P и Q, може да се параметризира по формулата $\varphi(t) = (1-t)\, P + t\, Q$, и следователно представлява непрекъсната крива, съединяваща тези точки.

Обратно, обединението на два непресичащи се кръга не е линейно свързано (докажете!),

Забележка. Друго, близко по характер свойство на множествата в $\mathbb{R}^n$ се дава в определението на свързано множество - виж задачи 13-17.

Теорема 11. (Теорема за междинните стойности.) *Нека f е непрекъсната функция върху линейно свързаното множество $D \subset \mathbb{R}^n$, P и Q са две точки от D, и $A = f(P)$, $B = f(Q)$. Нека C е число между A и B. Тогава съществува точка $L \in D$ такава, че $f(L) = C$.*

Доказателство. Ще сведем задачата към едномерния случай, доказан в I §1.11, следствие 2. Нека изображението $\varphi(t) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ да определя непрекъсната крива, лежаща в D и съединяваща точките P

и Q. Да определим функцията на едно променливо $F(t)$ по формулата $F(t) = f(\varphi(t))$, $t \in [a, b]$. Тогава имаме $F(a) = A$, $F(b) = B$, и следователно съществува точка $\xi \in (a, b)$ такава, че $F(\xi) = C$. Нека $L = \varphi(\xi)$; тогава $f(L) = F(\xi) = C$. ■

Упражнения.

1. Докажете, че евклидовото разстояние $\rho(P, Q)$ в $\mathbb{R}^n$ е равномерно непрекъснато по двете променливи едновременно, т.е. се явява непрекъсната функция на точката $(P, Q) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Упътване. Докажете неравенството

$$|\rho(P_1, Q_1) - \rho(P_2, Q_2)| \leq \rho(P_1, P_2) + \rho(Q_1, Q_2).$$

2. (Разстояние между точка и множество.) Нека P е точка и A е подмножество на $\mathbb{R}^n$. Разстоянието между P и A се определя по формулата

$$\rho(P, A) = \inf \{\rho(P, Q) : \ Q \in B\}.$$

а/ Докажете, че $|\rho(P, A) - \rho(Q, A)| \leq \rho(P, Q)$ и следователно $\rho(P, A)$ е равномерно непрекъсната функция на P.

б/ Нека A е затворено. Докажете, че в горната дефиниция минимумът се достига, т.е. съществува $Q \in A$ такова, че $\rho(P, A) = \rho(P, Q)$.

3. (Разстояние между две множества.) Нека A и B са подмножества на $\mathbb{R}^n$. Да положим

$$\rho(A, B) = \inf \{\rho(P, Q) : P \in A, \ Q \in B\}.$$

а/ Докажете, че $\rho(A, B) = \inf_{P \in A} \rho(P, B) = \inf_{Q \in B} \rho(Q, A)$.

б/ Докажете, че ако A и B са непресичащи се подмножества на $\mathbb{R}^n$, като A е компактно, а B е затворено, то $\rho(A, B) > 0$.

4. Нека A и B са непресичащи се затворени подмножества на $\mathbb{R}^n$. Постройте непрекъсната в $\mathbb{R}^n$ функция $f(P)$ такава, че $f(P) = 0$ за $P \in A$ и $f(P) = 1$ за $P \in B$.

Упътване. Определете $f(P)$ с формулата:

$$f(P) = \frac{\rho(P, A)}{\rho(P, A) + \rho(P, B)}.$$

5. Нека A и B са като в горната задача. Докажете, че те могат да бъдат отделени с непресичащи се околности, т.е. съществуват две отворени подмножества U, V на $\mathbb{R}^n$ такива, че $A \subset U$, $B \subset V$, и $U \cap V = \emptyset$.

Упътване. Положете $U = f^{-1}\left((-\infty, 1/2)\right)$, $V = f^{-1}\left((1/2, +\infty)\right)$.

Следващите по-нататък задачи 6 - 10 показват, че резултатите на този и предните параграфи не зависят от избора на норма в $\mathbb{R}^n$. В частност, всички възможни норми определят една и съща сходимост – въведената в §2 покоординатна сходимост.

6. Нека $||P||'$ е норма в $\mathbb{R}^n$, т.е. числова функция, удовлетворяваща условията 1'/ - 3'/ от §1. Докажете, че $||P||'$ е непрекъсната в точката $\vec{0}$.

Упътване. Нека $\vec{e}_1, \ldots \vec{e}_n$ са координатните вектори в $\mathbb{R}^n$. Тогава за точката P с координати $(x_1, \ldots, x_n)$ е в сила векторното равенство $P = x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n$, и от неравенството на триъгълника получаваме

$$||P||' \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, ||\vec{e}_i||' \leq \sqrt{\sum \left(||\vec{e}_i||'\right)^2} \, \sqrt{\sum x_i^2}.$$

7. Ако $||P||'$ е както в предната задача, докажете, че $||P||'$ е равномерно непрекъсната функция в $\mathbb{R}^n$.

Упътване. Покажете, че $\left| ||P||' - ||Q||' \right| \leq ||P - Q||'$, и използвайте горното неравенство за $P - Q$.

8. Нека $||P||'$ е произволна норма в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяваща условията 1'/ - 3'/, и нека $||P||$ е обичайната евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Докажете, че съществуват константи c, C, $0 < c \leq C$, така че за всяко $P \in \mathbb{R}^n$ да имаме

$$c\,||P|| \leq ||P||' \leq C\,||P||\,.$$

Упътване. Нека S е сфера в $\mathbb{R}^n$ с център в началото и радиус единица (т.е. множеството от точките в $\mathbb{R}^n$ с евклидова норма единица). Да означим съответно с c и C най-малката и най-голямата стойност на функцията $||P||'$ върху S (които съществуват според теоремите на Вайерщрас). Покажете, че те удовлетворяват горните неравенства.

Забележка. Казваме, че нормите $||P||$ и $||P||'$ са <u>еквивалентни</u>, ако съществуват константи c и C. за които неравенството от задачата винаги е удовлетворено. В тази терминология, твърдението на задачата може да се формулира така: Всяка норма в $\mathbb{R}^n$ е еквивалентна на евклидовата.

9. Нека $||P||$ и $||P||'$ са норми в $\mathbb{R}^n$, и $\rho(P,Q)$, $\rho'(P,Q)$ са породените от тях разстояния (виж §1.) Докажете, че $||P||$ и $||P||'$ са еквивалентни точно тогава, когато разсточнията ρ, ρ' пораждат една и съща сходимост на редици от точки в $\mathbb{R}^n$.

Упътване. Достатъчно е да докажете задачата за редици, клонящи към нулата. В едната посока твърдението следва непосредствено от дефиницията на еквивалентност. Обратно, нека за всяко естествено k съществува точка $P_k \in \mathbb{R}^n$ такава, че $||P_k||' > k\,||P_k||$. Тогава редицата $Q_k = \dfrac{1}{\sqrt{k}\,||P_k||} P_k$ удовлетворява условията $||Q_k|| \to 0$, $||Q_k||' \to +\infty$.

10. Нека $||P||'$ е произволна норма в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяваща условията 1'/ - 3'/. Използвайки твърденията на задачи 8 и 9, докажете, че сходимостта относно $||P||'$ на редици от точки в $\mathbb{R}^n$ съвпада с покоординатната сходимост (виж теорема 3 от §2).

Пояснение. Казваме, че редицата $\{P_k\}$ клони към P_0 относно нормата $||\,||'$, ако $||P_k - P_0||' \to 0$ (в дефиницията за сходимост в §2 за тази цел е използвана евклидовата норма.)

11. Нека $f(x,y)$ е функцията в $\mathbb{R}^2$, дефинирана с формулите:

$$f(x,y) = \frac{x^2\,y}{x^4+y^2} \text{ при } (x,y) \neq (0,0)\,,\; f(0,0) = 0.$$

Докажете, че $f(x,y)$ не е непрекъсната в началото на координатната система, но е непрекъсната по всяка права, минаваща през началото.

Упътване. Всяка права през началото се параметризира с формулите $x = \lambda t$, $y = \mu t$, $t \in \mathbb{R}$, при подходящи λ и μ. Лесно се вижда, че функцията $f(\lambda t, \mu t)$, получена чрез заместване по тези формули, е непрекъсната функция на t. От друга страна, редицата $P_n = (1/n, 1/n^2)$ клони към $(0,0)$, но $f(P_n) \to 1/2$.

12. Докажете, че подмножеството V на множеството D е отворено в D (според дефиницията, предхождаща теорема 6) тогава и само тогава, когато съществува отворено множество U, така че $V = D \cap U$.

13. Едно подмножество M на $\mathbb{R}^n$ се нарича свързано, ако не съществуват две непресичащи се отворени множества U и V, така че $M \subset U \cup V$ (С други думи, M не може да се разложи на две отворени в него подмножества.) Докажете, че всеки интервал е свързано подмножество на $\mathbb{R}$.

Упътване. Нека $I = [a, b] \subset U \cup V$, като $a \in U$, $b \in V$. Разгледайте $c = \sup_{x \in I \cap U} x$, и покажете, че c е контурна точка за U и V. Следователно, c не може да принадлежи нито на U, нито на V.

14. Докажете, че всяко линейно свързано множество е свързано.

Упътване. Да допуснем, че $M \subset U \cup V$, и $\varphi(t), t \in [a, b]$, е параметризация на непрекъсната крива, свързваща точка от U с точка от V. Тогава интервалът $[a, b]$ се представя като обединение на непресичащите се отворени множества $\varphi^{-1}(U)$ и $\varphi^{-1}(V)$.

15. Да означим с М графиката на функцията $f(x)$, зададена с формулата

$$f(x) = \sin\frac{1}{x} \text{ при } x \neq 0\,,\; f(0) = 0$$

(виж графиката в I, стр. 92.)

Докажете, че M е свързано, но не е линейно свързано.

16. Докажете, че всяко *отворено* свързано подмножество на $\mathbb{R}^n$ е и линейно свързано.

17. Докажете, че ако f е непрекъсната числова функция върху свързаното множество M, то за нея е валидна теоремата за междинните стойности (теорема 11).

Упътване. Да допуснем, че числата A и B са стойности на функцията f, $A < C < B$, и числото C не е стойност на f. Тогава ще имаме $M \subset f^{-1}\left((-\infty, C)\right) \cup f^{-1}\left((C, +\infty)\right)$.

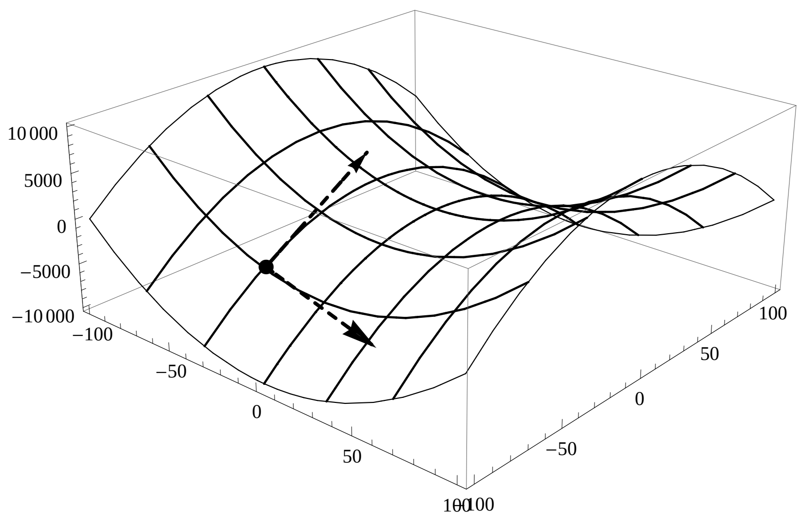
18. Нека $f(p)$ е функция, дефинирана и непрекъсната върху отвореното и ограничено множество $D \subset \mathbb{R}^n$. Докажете, че f е равномерно непрекъсната върху D тогава и само тогава, когато тя се продължава до непрекъсната функция $\overline{f}(p)$ върху затворената обвивка $\overline{D}$ на D.

Забележка. В едната посока горното твърдение е непосредствено следствие на теорема 10; наистина, ако $\overline{f}(p)$ съществува, то тя е равномерно непрекъсната върху $\overline{D}$, и следователно същото е вярно и за $f(p)$.

Трудната част на задачата е да се построи непрекъснато продължение на равномерно непрекъснатата функция $f(p)$ в точките от контура bD на D.

Упътване. Нека $P_0 \in bD$ и $P_k \to P_0$, $P_k \in D$. Докажете, че редицата $\{f(P_k)\}$ е фундаментална в смисъл на Коши и следователно сходяща. Покажете, че граничната стойност $\overline{f}(P_0)$ не зависи от избора на редицата $\{P_k\}$, клоняща към P_0. Докажете, че така продължената функция $\overline{f}(P)$ е непрекъсната върху $\overline{D}$.

1.4 Диференцируемост на функции и изображения. Диференциране на съставни функции.



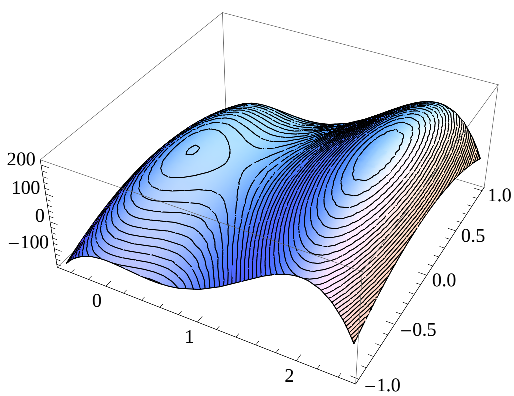
Графика на функцията $f(x, y) = x^2 - y^2$
и допирателни вектори към графиката.

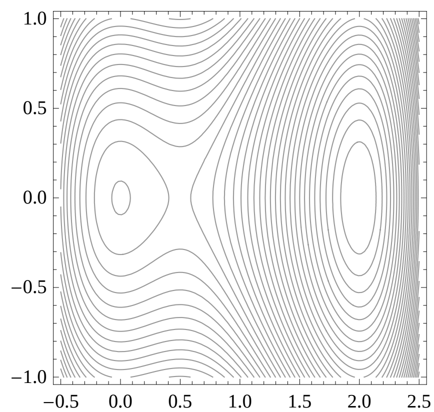
Нека $f(x_1, \ldots, x_n)$ е функция, дефинирана в отвореното подмножество D на $\mathbb{R}^n$. Най-често е трудно да си представим нагледно поведението на тази функция; за тази цел можем да разгледаме зависимостта на функцията f от всяко едно променливо поотделно. Нека фиксираме точка $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ от D, и да въведем следните (n на брой) функции на едно променливо:

$$\varphi_i(t) = f\left(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, t, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0\right),$$

като функцията $\varphi_i(t)$ е дефинирана в околност на точката x_i^0. Функциите $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ще наричаме <u>частични функции</u>, съответстващи на функцията на много променливи $f(x)$. На чертежа е дадена графиката на функцията $f(x, y) = x^2 - y^2$, т.е. множеството от точки $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, за които $z = f(x, y)$, и лежащите върху нея графики на някои от частичните и функции.

Възможен е и друг начин за онагледяване на поведението на една функция на две променливи – чрез така наречените линии на ниво, ("хоризонтали") т.е. линиите, зададени с уравнението $f(x, y) = a$ при различните стойности на a. Този начин се използува например за представяне на релефа на местността върху физическите карти. В графиката по-долу са представени хоризонталите върху графиката на дадена функция (отляво), и хоризонталите за същата функция в равнината Oxy (отдясно).





Хоризонтали върху графиката на функцията и в равнината Oxy.

Частни производни на функция. Можем да разгледаме производните на написаните по-горе частични функции (стига те да съществуват). С други думи, можем да диференцираме функцията $f(x)$ по една от променливите $x_1, \ldots, x_n$, като останалите променливи са фиксирани. Така стигаме до определението:

Под частна производна на функцията $f(x_1, \ldots, x_n)$ по променливата x_i в точката $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ ще разбираме (ако съществува) границата

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^0\right) = \varphi_i'(x_i^0) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f\left(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i^0 + h, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0\right) - f\left(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i^0, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0\right)}{h}.$$

Частната производна на $f(x)$ по x_i се означава още и с f'_{x_i}.

За нагледност ще повторим тази дефиниция за функция на две променливи $f(x, y)$:

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}.$$

Забележка. Трябва да се отбележи, че (за разлика от случая на едно променливо) наличието на частни производни, по всички променливи и във всяка точка, още не означава, че функцията е "добра". Да си припомним функцията, разгледана в примера в §3: $f(x, y) = \frac{x\ y}{x^2+y^2}$ при $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$. Лесно се вижда, че $f(x, y)$ притежава навсякъде частни производни по x и y; от друга страна, както беше показано там, функцията не е непрекъсната в $(0, 0)$.

Формула за нарастването на функция на много променливи. За да обясним смисъла на изведеното по-долу равенство, отначало ще си припомним случая на функция на една променлива. Нека $f(x)$ е функция, дефинирана в околност на точката $x_0 \in \mathbb{R}$ и диференцируема в тази точка. Знаем, че $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Ако означим

$$\alpha(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0),$$

то ще получим, че $\lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0$, и

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \alpha(h)h.$$

Това равенство лесно се интерпретира геометрически: ако заместим h с $x - x_0$, първите две събираеми отдясно дават уравнението на допирателната права към графиката на f в точката x_0, а третото събираемо е "остатък", намаляващ по-бързо от величината h. Ще изведем подобна формула за функция на няколко променливи.

Теорема 1 (формула за нарастването за функция на много променливи) *Нека $f(x_1, \dots, x_n)$ е функция, дефинирана в околност на точката $x = (x_1, \dots, x_n)$, и нека всички частни производни f'_{x_i}, $i = 1, \dots, n$, съществуват и са непрекъснати в тази околност. Тогава за достатъчно малки по норма вектори $h = (h_1, \dots, h_n)$ е в сила равенството:*

$$(*) \qquad f(x+h) \; = \; f(x) \; + \; \sum_{i=1}^{n} \; f'_{x_i}(x) \; h_i \; + \; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(h) \; h_i,$$

където $\alpha_i(h)$ са функции, клонящи към нула при $h \to 0$.

Преди да докажем тази формула. ще обясним нейния смисъл, като я напишем по друг начин. Първите две събираеми отдясно се наричат линейна част на нарастването, а третото – остатък. Линейната част на функцията представлява приблизителен израз за стойностите на функцията близо до x, лесен за пресмятане и опериране. Остатъкът ни дава представа за точността на това приближение. Ако означим с $r(h)$ остатъка в горната формула:

$$r(h) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(h) \; h_i,$$

то очевидно имаме $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{r(h)}{||h||} = 0$, и получаваме:

II форма на формулата за нарастването:

$$(**) \qquad f(x+h) \; = \; f(x) \; + \; \sum_{i=1}^{n} \; f'_{x_i}(x) \; h_i \; + \; r(h),$$

където $r(h) = o\,(||h||)$. *

Понякога е удобно горната формула да се записва по друг начин: ако означим $\Delta f = f(x+h) - f(x)$, и вместо h_i напишем Δx_i (нарастването на променливата x_i), имаме

$$\Delta f \;=\; \sum_{i=1}^{n} \; f'_{x_i}(x)\;\Delta x_i \;+\; o\,(||h||)\,.$$

Доказателство на формулата за нарастването: Ще използваме теремата за крайните нараствания (виж I, §2.3): Ако функцията $\varphi(x)$ е непрекъсната в интервала $[x_0, x_0+h]$ и диференцируема във вътрешността му, то съществува число $\theta \in (0,1)$ такова, че $\varphi\,(x_0+h) - \varphi\,(x_0) = h\varphi'\,(x_0+\theta h)$.

За яснота най-напред ще дадем доказателството за функция на две променливи. Имаме:

$$f\,(x+h, y+k) - f(x,y) \;=$$
$$=\; (f(x+h,y+k) - f(x,y+k)) \;+\; (f(x,y+k) - f(x,y)) \;=$$
$$=\; h\; f'_x(x+\theta_1 h, y+k) \;+\; k\; f'_y(x, y+\theta_2 k),$$

за подходящи $\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$. Да означим

$$\alpha(h,k) = f'_x(x+\theta_1 h, y+k) - f'_x(x, y+k),\; \beta(h,k) = f'_y(x, y+\theta_2 k) - f'_y(x,y).$$

От непрекъснатостта на частните производни на f следва, че функциите $\alpha(h,k), \beta(h,k)$ клонят към нула при $h, k \to 0$. Като направим заместване, горното равенство добива търсения вид

$$f\,(x+h, y+k) - f(x,y) \;=\; h\; f'_x(x,y) + k\; f'_y(x,y) + h\,\alpha(h,k) + k\,\beta(h,k).$$

В общия случай на функция на n променливи $f\,(x_1,\ldots,x_n)$ доказателството се провежда по същия начин. Нека $h = (h_1,\ldots,h_n)$ е достатъчно малко по норма. Да означим $\Delta f = f(x+h) - f(x)$, и нека

$$\Delta_i f = f\,(x_1,\ldots,x_{i-1}, x_i+h_i, x_{i+1}+h_{i+1},\ldots,x_n+h_n) \;-$$

* Двете форми на формулата за нарастването очевидно са равносилни; наистина, ако имаме формулата (**), и означим $\alpha_i(h) = \frac{h_i}{||h||^2}\; r(h)$, то от нея се получава формулата (*).

$$- \, f \left(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1} + h_{i+1}, \ldots, x_n + h_n \right).$$

Разглеждайки $f\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ като функция само на променливото x_i (т.е. фиксирайки всички останали променливи), и прилагайки към тази функция теоремата за крайните нараствания, имаме

$$\Delta_i f = h_i f'_{x_i} \left(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + \theta_i h_i, x_{i+1} + h_{i+1}, \ldots, x_n + h_n \right), \, \theta_i \in (0,1).$$

Ако означим

$$\alpha_i(h) = f'_{x_i} \left(x_1, \ldots, x_i + \theta_i h_i, x_{i+1} + h_{i+1}, \ldots, x_n + h_n \right) - f'_{x_i} \left(x_1, \ldots, x_n \right),$$

то, поради непрекъснатостта на частните производни, имаме $\alpha_i(h) \to 0$ при $h \to 0$.

От друга страна, лесно се проверява, че $\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i f$, откъдето

$$\Delta f \; = \sum_{i=1}^{n} \left(f'_{x_i} \left(x_1, \ldots, x_n \right) + \alpha_i(h) \right) h_i \; = \; \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(x) h_i \; + \; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(h) \; h_i . \blacksquare$$

Забележка 1. Само съществуването на частните производни (без тяхната непрекъснатост) не е достатъчно за валидността на доказаната формула; наистина, лесно се вижда, че ако една функция удовлетворява формулата за нарастването, то тя е непрекъсната. По-горе обаче ние видяхме пример на функция, притежаваща частни производни, която не е непрекъсната.

Забележка 2. Функциите $\alpha_i(h)$, $r(h)$ зависят от избора на точката x. Ако обаче дефиниционната област D е компактно множество, то по теоремата на Кантор производните f'_{x_i} са равномерно непрекъснати върху D, и следователно функциите $\alpha_i(h)$ във формулата $(*)$ могат да бъдат избрани независимо от x. Следователно, ако означим с $r_x(h)$ остатъка във формулата $(**)$, то съществува функция $\alpha(h)$, не зависеща от x и клоняща към нула при $h \to 0$, така че

$$|r_x(h)| \leq \alpha(h) \, ||h||$$

за всяко x в компактното множество D.

Забележка 3. В много случаи е по-удобно функцията $\alpha(h)$ да е функция на скаларен, а не на векторен аргумент. Да положим

$$\overline{\alpha}(t) = \sup_{||h||=t} \alpha(h),$$

и ние получаваме оценката

$$|r_x(h)| \leq \overline{\alpha}(||h||)\,||h||\,.$$

Лесно се доказва (чрез допускане на противното) че $\lim_{t\to 0}\overline{\alpha}(t) = 0$.

Определение на диференцируема функция. Както често се случва в математиката, за определение на даден клас от обекти се приема това тяхно свойство, което се използва при работата с тях. В случая това е формулата за нарастването. Така, (макар че това може да изглежда изкуствено), диференцируеми функции на няколко променливи се наричат тези функции, за които тя е удовлетворена. По-точно, имаме:

Определение. *Нека $f(x_1, \ldots, x_n)$ е функция на n променливи, определена в околност на точката $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Казваме, че функцията f е диференцируема в точката x, ако съществуват константи $A_1, \ldots, A_n$, както и функции $\alpha_1(h), \ldots, \alpha_n(h)$, клонящи към нула при $h \to 0$, така че за достатъчно малки по норма вектори $h = (h_1, \ldots, h_n)$ е в сила равенството*

$$f(x+h) \;=\; f(x) \;+\; \sum_{i=1}^{n} A_i\; h_i \;+\; \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(h)\; h_i$$

В частност, веднага се вижда, че ако функцията е диференцируема в една точка, то тя е непрекъсната в тази точка.

Горното определение се пренася и за изображения:

Определение. *Вектор-функцията на n променливи $f(x_1, \ldots, x_n) = (f_k(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_n))$ със стойности в $\mathbb{R}^k$ се нарича диференцируема в точката x, ако всичките и компоненти f_i, $i = 1, \ldots, k$, са диференцируеми в тази точка.*

С други думи, диференцируеми функции са тези, които добре се приближават с линейни функции около дадената точка.

Забележка. По-горе беше показано, че ако една функция на една променлива притежава производна в дадена точка, то тя удовлетворява в тази точка формулата за нарастването. Следователно, за функции на една променлива горната дефиниция съвпада с обичайната.

Сега теорема 1 може да се формулира така:

Теорема $1'$**.** *Ако функцията f притежава непрекъснати частни производни в околност на точката x, то тя е диференцируема в тази точка.*

Обратното твърдение не е вярно, но може да се докаже нещо по-слабо:

Теорема 2. *Ако функцията f е диференцируема в точката x, то тя притежава частни производни в тази точка, и са в сила равенствата*

$$A_i \;=\; \frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Доказателство. Да вземем вектор h, който има само една ненулева координата с номер i: $h = t\vec{e}_i = (0, \ldots 0, t, 0, \ldots, 0)$ (тук и по-долу с $\vec{e}_i$ означаваме вектор с дължина единица, насочен по оста x_i). Тогава равенството от дефиницията добива вида:

$$f\left(x + t\vec{e}_i\right) \;=\; f(x) + t\; A_i + t\; \alpha_i\left(t\vec{e}_i\right),$$

и според определението на частна производна имаме

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \;=\; \lim_{t\to 0} \frac{f\left(x + t\vec{e}_i\right) - f\left(x\right)}{t} \;=\; \lim_{t\to 0}\left(A_i + \alpha_i\left(t\vec{e}_i\right)\right) \;=\; A_i\;. \blacksquare$$

Оттук се вижда в частност, че константите A_i в дефиницията за диференцируема функция са определени еднозначно.

Разбира се, от диференцируемостта в дадена точка не следват нито съществуването на частни производни в околност на точката, нито – още повече – тяхната непрекъснатост. Читателят сам може да намери съответните примери дори за функции на едно променливо.

Допирателна равнина към графиката на функция на няколко променливи. Нека $f\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ е функция на n променливи, дефинирана и диференцируема в областта $D \in \mathbb{R}^n$. Както знаем, нейната графика G_f е подмножеството на $\mathbb{R}^{n+1}$, определено с условията

$$G_f = \left\{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, \dots, x_n) \in D, x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)\right\}.$$

Определение. *Нека $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ е точка от D, и $(x^0, f(x^0))$ е съответната точка от G_f. Под <u>допирателна равнина</u> в точката $(x^0, f(x^0))$ ще разбираме равнината в $\mathbb{R}^{n+1}$ с уравнение $y = l(x_1, \dots, x_n)$, където*

$$l(x_1, \dots, x_n) = f\left(x^0\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^0\right)\left(x_i - x_i^0\right).$$

От формулата за нарастване на диференцируема функция следва следната характеризация на допирателната равнина:

Функцията $l(x)$ е единствената линейна функция, удовлетворяваща условието

$$f(x) - l(x) = o\left(\left\|x - x^0\right\|\right).$$

С други думи, измежду всички равнини в $\mathbb{R}^{n+1}$, минаващи през точката $(x^0, f(x^0))$, допирателната равнина е разположена най-близко до графиката на $f(x)$.

Определение. *Под <u>допирателен вектор</u> към G_f в точката $(x^0, f(x^0))$ разбираме всеки (свободен) вектор, колинеарен с допирателната равнина в тази точка.*

Очевидно допирателните вектори в точката $(x^0, f(x^0))$ образуват n-мерно линейно подпространство на $\mathbb{R}^{n+1}$, наричано <u>допирателно подпространство</u> към графиката в тази точка. Лесно можем да посочим един базис в това пространство: той се състои от допирателните към графиките на частичните функции в тази точка (ще напомним, че под i-та частична функция разбираме функцията на променливата x_i, получена от $f(x_1, \dots, x_n)$ чрез замразяване на всички останали променливи).

Така получаваме $n+1$-мерните вектори

$$l_i = \left(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^0\right)\right),$$

като единицата в дясната част е поставена на i-то място. Така написаните n на брой вектори са линейно независими и колинеарни с допирателната равнина (проверете!), и следователно образуват базис в допирателното пространство (виж чертежа в началото на параграфа).

Допирателна равнина към графиката на изображение. Ще въведем аналогични на горните понятия и за векторно-значна функция, т.е. за изображение от $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^k$. Нека $f(x_1,\dots,x_n) = (f_k(x_1,\dots,x_n),\dots,f_k(x_1,\dots,x_n))$ е диференцируема вектор-функция, дефинирана в подмножество D на $\mathbb{R}^n$ и вземаща стойности в $\mathbb{R}^k$. Ще означаваме точките на пространството $\mathbb{R}^{n+k}$ чрез (x,y), където $x = (x_1,\dots,x_n)$, $y = (y_1,\dots,y_k)$ са точки в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^k$ съответно. Под графика G_f на изображението f ще разбираме подмножеството на $\mathbb{R}^{n+k}$, определено с условията

$$G_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+k} : x \in D, y = f(x)\right\}.$$

Определение. *Нека $x^0 \in D$. Под допирателна равнина към G_f в точката $(x^0, f(x^0))$ ще разбираме n-мерната равнина в $\mathbb{R}^{n+k}$, определена с равенствата*

$$y_j = f_j\left(x^0\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\left(x^0\right)\left(x_i - x_i^0\right), \quad j = 1,\dots,k.$$

Ако отново въведем понятията допирателен вектор и допирателно подпространство по същия начин, както по-горе, ще получим базис от n на брой допирателни вектори от вида

$$l_i = \left(0,\dots,0,1,0,\dots,0,\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\left(x^0\right),\dots,\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\left(x^0\right)\right),$$

като отново единицата в дясната част е поставена на i-то място. Породеното от тези вектори n-мерно линейно подпространство на $\mathbb{R}^{n+k}$ се нарича допирателно подпространство към графиката G_f на изображението f.

Аритметични операции с диференцируеми функции.

Както и в случая на функции на една променлива, при аритметични операции с диференцируеми функции резултатът отново е диференцируема функция:

Теорема 3. *Ако функциите на n променливи $f(x)$ и $g(x)$ са диференцируеми в точката $x^0 \in \mathbb{R}^n$, то тяхната сума $f(x)+g(x)$, произведение $f(x).g(x)$, и, ако $g\left(x^0\right) \neq 0$, тяхното частно $\frac{f(x)}{g(x)}$, са също диференцируеми в тази точка.*

Доказателство. Нека h е достатъчно малък по норма вектор от $\mathbb{R}^n$. Да напишем формулата за нарастването в точката x^0 за функциите $f(x)$ и $g(x)$:

$$\begin{aligned} f\left(x^0+h\right) &= f\left(x^0\right)+\sum_{i=1}^{n} A_i h_i + r_f(h), \\ g\left(x^0+h\right) &= g\left(x^0\right)+\sum_{i=1}^{n} B_i h_i + r_g(h), \end{aligned}$$

където $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n$ са частните производни на $f(x)$ и $g(x)$ в x^0, и $r_f(h), r_g(h) = o\left(||h||\right)$. Като съберем двете равенства, получаваме

$$(f+g)\left(x^0+h\right) = (f+g)\left(x^0\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(A_i+B_i\right) h_i + r_f(h)+r_g(h).$$

Тъй като за остатъка в горната формула имаме $r(h) = r_f(h) + r_g(h) = o\left(||h||\right)$, то полученото равенство изразява диференцируемостта на $(f+g)(x)$ в x^0.

За да получим формулата за нарастването за $f(x)g(x)$, да умножим двете равенства. Получаваме:

$$f\left(x^0+h\right) g\left(x^0+h\right) = f\left(x^0\right) g\left(x^0\right)+\sum_{i=1}^{n} C_i h_i + r(h),$$

където $C_i = g\left(x^0\right) A_i + f\left(x^0\right) B_i$, и

$$r(h) = \left(f\left(x^0\right)+\sum_{i=1}^{n} A_i h_i\right) r_g(h) + \left(g\left(x^0\right)+\sum_{i=1}^{n} B_i h_i\right) r_f(h) + r_f(h) r_g(h).$$

Имаме

$$\frac{r(h)}{||h||} = \left(f\left(x^0\right)+\sum_{i=1}^{n} A_i h_i\right) \frac{r_g(h)}{||h||} + \left(g\left(x^0\right)+\sum_{i=1}^{n} B_i h_i\right) \frac{r_f(h)}{||h||} + r_f(h) \frac{r_g(h)}{||h||},$$

и следователно $\frac{r(h)}{||h||} \to 0$ при $h \to 0$.

Накрая, нека $g\left(x^0\right) \neq 0$. За да докажем, че $\frac{f(x)}{g(x)}$ е диференцируема в x^0, е достатъчно да видим, че $\frac{1}{g(x)}$ е диференцируема в тази точка. Наистина, тъй като $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x).\frac{1}{g(x)}$, диференцируемостта на частното ще следва от доказаната по-горе диференцируемост на произведение на диференцируеми функции.

За да докажем, че $\frac{1}{g(x)}$ е диференцируема в x^0, да означим

$$\Delta\left(\frac{1}{g}\right) = \frac{1}{g\left(x^0+h\right)} - \frac{1}{g\left(x^0\right)}.$$

Тъй като $g(x)$ е непрекъсната в x^0, то същото е вярно и за $\frac{1}{g(x)}$, т.е. $\Delta\left(\frac{1}{g}\right) \to 0$ при $h \to 0$. Имаме

$$\Delta\left(\frac{1}{g}\right) = \frac{g\left(x^0\right) - g\left(x^0+h\right)}{g\left(x^0\right) g\left(x^0+h\right)} = -\frac{1}{g\left(x^0\right)}\ \Delta g \left(\frac{1}{g\left(x^0\right)} + \Delta\left(\frac{1}{g}\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{g^2\left(x^0\right)}\ \Delta g\ -\ \frac{1}{g\left(x^0\right)}\ \Delta g\ \Delta\left(\frac{1}{g}\right)\ =\ \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{B_i}{g^2\left(x^0\right)}\right) h_i + r(h),$$

където

$$r(h) = -\frac{1}{g^2\left(x^0\right)}\ r_g(h)\ -\ \frac{1}{g\left(x^0\right)}\ \Delta g\ \Delta\left(\frac{1}{g}\right).$$

Тогава

$$\frac{r(h)}{||h||}\ =\ -\frac{1}{g^2\left(x^0\right)}\ \frac{r_g(h)}{||h||}\ -\ \frac{1}{g\left(x^0\right)}\ \frac{\Delta g}{||h||}\ \Delta\left(\frac{1}{g}\right).$$

От диференцируемостта на $g(x)$ следва, че $\frac{\Delta g}{||h||}$ е ограничена при достатъчно малки h (докажете!), и следователно $\frac{r(h)}{||h||} \to 0$ при $h \to 0$. ■

Диференциране на съставни функции.

При намиране на частни производни на сума, произведение и т.н. на функции на няколко променливи не е необходимо да се знае нищо повече от известните формули за производна на аритметични операции с функции на една променлива *. Един въпрос, при който положението е различно, е диференцирането на сложни, или съставни, функции.

*Всъщност горните изчисления доказват още веднъж тези формули.

Ще напомним формулата за случая на едно променливо: при дадени функции $f(x)$ и $\varphi(t)$ (външна и вътрешна функция), производната на съставната функция $F(t) = f(\varphi(t))$ се дава с формулата

$$F'(t) \;=\; f'(\varphi(t)).\varphi'(t),$$

т.е. производната на съставната функция е равна на произведението на производните на външната и вътрешната функция. Ще докажем, че подобна формула съществува и за съставна функция на няколко променливи. Ще започнем с по-простия вариант на теоремата:

Теорема 4. *Нека $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ е функция, дефинирана в околност на точката $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, и нека функциите на едно променливо $(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ са дефинирани и диференцируеми в околност на точката $t^0 \in \mathbb{R}$, при което $x_i^0 = \varphi_i(t^0)$, $i = 1, \ldots, n$. Да предположим, че $f(x)$ е диференцируема (в смисъл на горното определение) в x^0, а $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ - в t^0. Тогава съставната функция*

$$F(t) \;=\; f(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$$

е диференцируема в точката t^0, като нейната производна се дава с формулата

$$F'\left(t^0\right) \;=\; \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x^0\right)\varphi_1'\left(t^0\right) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\left(x^0\right)\varphi_n'\left(t^0\right) \;=\; \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^0\right)\varphi_i'\left(t^0\right).$$

С други думи, формулата за производната на съставната функция се състои от толкова събираеми, колкото са променливите, като всяко от тях наподобява по форма израза за производна на съставна функция на едно променливо.

Доказателство на теоремата. Грубо казано, доказателството се състои в заменяне на функцията с нейната линейна част. Нека t е точка достатъчно близка до t^0. Да означим $\Delta t = t - t^0$, $\Delta x_i = \varphi_i(t) - \varphi_i(t^0)$, $\Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$. Имаме

$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta x_i}{\Delta t} = \varphi_i'\left(t^0\right).$$

Нека $\Delta F = F(t) - F(t^0) = f(x^0 + \Delta x) - f(x^0)$. Тогава от формулата за нарастването имаме

$$\Delta F = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}\left(x^0\right)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\Delta x)\Delta x_i,$$

като $\alpha_i(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Следователно,

$$\frac{\Delta F}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^0\right)\frac{\Delta x_i}{\Delta t} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\Delta x)\frac{\Delta x_i}{\Delta t} \to \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^0\right)\varphi'_i\left(t^0\right). \blacksquare$$

Пример. Нека $f(u,v) = u^v$, $u > 0, v > 0$, и нека $\varphi(t), \psi(t)$ са диференцируеми функции с положителни стойности. Ако положим $F(t) = \varphi(t)^{\psi(t)} = f(\varphi(t), \psi(t))$, то от горната теорема получаваме

$$F'(t) = \psi(t).\varphi(t)^{\psi(t)-1}.\varphi'(t) + \ln\varphi(t).\varphi(t)^{\psi(t)}.\psi'(t).$$

Тази формула е известна от първата част на курса, където тя се извежда чрез предварително логаритмуване.

Ще докажем аналогичната теорема за векторни функции (изображения):

Теорема 4′. *Нека $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ е функция, дефинирана и диференцируема в околност на точката $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, а векторната функция $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$, зависеща от аргумента $t = (t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^k$, е дефинирана в околност на точката $t^0 = (t_1^0, \ldots, t_k^0)$, при което $\varphi(t^0) = x^0$. Да предположим, че функцията на n променливи $f(x)$ е диференцируема в x^0, а изображението $\varphi(t)$ (т.е. неговите компоненти $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$) - в точката t^0. Тогава съставната функция $F(t) = f(\varphi(t))$ е диференцируема в t^0, и са в сила равенствата:*

$$\frac{\partial F}{\partial t_j}\left(t^0\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^0\right)\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}\left(t^0\right), \quad j = 1, \ldots, k.$$

Забележка. Тук новото в сравнение с теорема 4 се състои единствено във факта, че функцията $F(t)$ е диференцируема като функция на k променливи според определението на настоящия параграф, а не само по всяка променлива поотделно.

Доказателство. Нека, както по-горе, $\Delta t = t - t^0$, $\Delta t_j = t_j - t_j^0$, $\Delta x_i = \varphi_i(t) - \varphi_i(t^0)$, $\Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$. Формулата за нарастванията, приложена към функциите $f, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$, ни дава равенствата

$$\Delta f \;=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^0\right)\Delta x_i \;+\; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\left(\Delta x\right)\Delta x_i,$$

$$\Delta \varphi_i \;=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}\left(t^0\right)\Delta t_j \;+\; \sum_{i=1}^{n} \beta_{i,j}\left(\Delta t\right)\Delta t_j,$$

където функциите $\alpha_i(\Delta x)$, $\beta_{i,j}(\Delta t)$ клонят към нула при Δx, респ. Δt клонящи към нула. Преминавайки в първото от равенствата към променливите t, заместваме Δx_i с $\Delta \varphi_i$, и вместо Δf пишем ΔF. Ще отделим в отделно събираемо членовете, съдържащи някоя от безкрайно малките функции $\alpha_i(\Delta x)$, $\beta_{i,j}(\Delta t)$. Размествайки реда на сумиране, получаваме:

$$\Delta F = \sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^0\right)\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}\left(t^0\right)\right)\Delta t_j + r\left(\Delta t\right),$$

където остатъкът $r(\Delta t)$ се дава с формулите

$$r\left(\Delta t\right) = \sum_{j=1}^{k} \gamma_j\left(\Delta t\right)\Delta t_j,$$

като

$$\gamma_j\left(\Delta t\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^0\right)\beta_{i,j}\left(\Delta t\right) + \alpha_i\left(\Delta \varphi\right)\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}\left(t^0\right) + \alpha_i\left(\Delta \varphi\right)\beta_{i,j}\left(\Delta t\right)\right).$$

Очевидно имаме $\gamma_j(\Delta t) \to 0$ при $\Delta t \to 0$, и следователно за функцията $F(t)$ в точката t^0 е изпълнена формулата за нарастването, т.е. тя е диференцируема в тази точка. Попътно равенството за ΔF ни дава още веднаж формули за частните производни на $F(t)$ в t^0. ∎

Матрична производна на изображение.

Нека $D \subset \mathbb{R}^n$ и изображението $f(x) : D \to \mathbb{R}^m$ $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D$ има компоненти $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$, където $f_1(x), \ldots, f_m(x)$ са диференцируеми функции в D. Ако разгледаме всички първи частни производни $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ на координатните функции, получаваме $n.m$ на брой различни производни, и картината изглежда доста сложна. Ситуацията става значително по-обозрима, ако подредим тези производни в една $n \times m$ - матрица. Така стигаме до следната дефиниция:

Определение. *Под матрична производна на изображението $f(x)$ в точката x^0 ще разбираме матрицата*

$$Df\left(x^0\right) = \left\{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\left(x^0\right)\right\}_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j1}\left(x^0\right) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\left(x^0\right) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\left(x^0\right) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\left(x^0\right) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\left(x^0\right) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\left(x^0\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}\left(x^0\right) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}\left(x^0\right) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\left(x^0\right) \end{pmatrix}.$$

В частност, матричната производна на една скаларна функция е вектора, съставен от нейните производни.

Използването на операциите с матрици позволява да се даде прост вид на формулата за нарастването и формулата за производна на съставна функция за изображения. Ще напомним, че всяка $n \times m$ – матрица може да се разглежда като линеен оператор от $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$. Нека, както по-горе, $f(x) : D \to \mathbb{R}^m$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in D$ е m – мерна вектор-функция, и $h = (h_1, \dots, h_n)$ е вектор на нарастването на аргумента. Да напишем за всяка от компонентите $f_1(x), \dots, f_m(x)$ на изображението $f(x)$ формулата за нарастването във формата $(**)$ за точката x^0 и нарастването h. Написвайки получените m на брой скаларни равенства като равенство между m-мерни вектори, получаваме:

Формула за нарастването за вектор-функции. При горните условия имаме

$$f\left(x^0 + h\right) \;=\; f\left(x^0\right) \;+\; Df\left(x^0\right) \circ h \;+\; r(h),$$

където $r(h)$ е m – мерна вектор-функция, удовлетворяваща условието:

$$||r(h)|| \;=\; o\left(||h||\right).$$

Матрицата $Df\left(x^0\right)$, разглеждана като оператор от $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, се нарича диференциал на изображението $f(x)$ в точката x^0.

Ще покажем, че при горния подход и теоремата за диференциране на съставно изображение добива съвсем прост вид, аналогичен на този при функции на едно променливо. Ще напомним, че на всяка двойка матрици A, B с размерност съотв. $n \times m$ и $k \times n$ се съпоставя матрицата $A \circ B$ с размерност $k \times m$: ако $A = \{a_{ij}\}$, $B = \{b_{pq}\}$, то $A \circ B = \{c_{ls}\}$ с $c_{ls} = \sum_{i=1}^{n} b_{li}.a_{is}$.

Нека сега вектор-функцията $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ е определена в околност на точката $t^0 = (t_1^0, \dots, t_k^0) \in \mathbb{R}^k$, а вектор-функцията $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ - в околност на точката $x^0 = \varphi(t^0) \in \mathbb{R}^n$. Тогава съставната функция $F(t) = f(\varphi(t))$ е определена в околност на точката t^0 и взема стойности в пространството $\mathbb{R}^k$.

Теорема 4. *Да предположим, че функциите $f(x)$ и $\varphi(t)$ са диференцируеми съответно в точките t^0 и $x^0 = \varphi(t^0)$. Тогава съставната функция $F(t) = f(\varphi(t))$ е диференцируема в точката t^0, и е в сила равенството*

$$DF\left(t^0\right) \; = \; Df\left(x^0\right) \circ D\varphi\left(t^0\right).$$

Доказателство. В същност твърдението представлява само друга формулировка на резултата на теорема $4'$. Наистина, то се получава непосредствено от даденото по-горе определение на произведение на матрици и от доказаните по-горе равенства

$$\frac{\partial F_l}{\partial t_j}\left(t^0\right) \; = \; \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_l}{\partial x_i}\left(x^0\right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}\left(t^0\right).$$

■

Функционална детерминанта на изображение.

По-нататък често ще се налага да разглеждаме изображения, които действат от $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, или, по-точно, са дефинирани в подмножество на $\mathbb{R}^n$ и вземат стойности в $\mathbb{R}^n$. Тогава тяхната матрична производна представлява квадратна матрица, и ние може да разгледаме нейната детерминанта, която играе много важна роля в по-нататъшните разглеждания.

Определение. *Нека вектор-функцията $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, вземаща стойности в $\mathbb{R}^n$, е дефинирана в околност на точката $x^0 =$*

$\varphi(t^0) \in \mathbb{R}^n$. *Под функционална детерминанта, или якобиан, на* $f(x)$ *в точката* x^0, *ще разбираме числото*

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}\left(x^0\right) = \det\left(Df\left(x^0\right)\right).$$

Теорема 5.(основно свойство на функционалните детерминанти). *Функционалната детерминанта на произведението на две изображения е равна на произведението на техните функционални детерминанти.*

Доказателство. Нека $F(t) = f(\varphi(t))$. Тъй като детерминанта на произведение на две квадратни матрици е равна на произведението на техните детерминанти, то твърдението непосредствено следва от теорема 4. ■

Доказаното равенство се записва във вида

$$\frac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(t_1, \ldots, t_n)}\left(t^0\right) = \frac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}\left(x^0\right) \cdot \frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{D(t_1, \ldots, t_n)}\left(t^0\right).$$

Вижда се, че начинът на записване е така съставен, че да подсеща читателя за правилната формула: горното равенство може да се тълкува като "съкращаване"на $D(x_1, \ldots, x_n)$ с "равното му" $D(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$.

Производна на обратното изображение. Както знаем, изображението $f : X \to Y$ от множеството X в множеството Y е биективно (взаимно еднозначно), ако за всяка точка $y \in Y$ съществува точно един прообраз в X, т.е. такова $x \in X$, че $f(x) = y$. Полагайки $x = g(y)$, получаваме обратното изображение $g = f^{-1} : Y \to X$. Лесно се вижда, че са изпълнени равенствата $g \circ f = I_X$, $f \circ g = I_Y$, където I_X и I_Y са идентичните изображения на пространствата X и Y в себе си.

Теорема 6.*Нека* $f(x)$ *е биективно изображение на множеството* $D \subset \mathbb{R}^n$ *в множеството* $E \subset \mathbb{R}^n$ *и* $g(y)$ *е неговото обратно изображение. Нека изображението* $f(x)$ *е диференцируемо в точката* $x^0 \in D$, *а изображението* $g(y)$ *- в точката* $y^0 = f(x^0)$. *Тогава са в сила равенствата:*

$$Dg\left(y^0\right) = Df\left(x^0\right)^{-1}, \quad \frac{D(g_1, \ldots, g_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)}\left(y^0\right) = \frac{1}{\frac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}\left(x^0\right)}.$$

Доказателство. От равенството $g(f(x)) = x$ и теоремата за производна на съставно изображение следва матричното равенство $Dg\left(y^0\right) \circ Df\left(x^0\right) = I$, където I е единичната $n \times n$ матрица, което е първото от горните равенства. Второто равенство следва от цитираното по-горе свойство на детерминантата. ■

В частност, от тук се вижда, че при условията на теоремата имаме $\frac{D(f_1,\ldots,f_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)}\left(x^0\right) \neq 0$.

Забележка. В параграф 1.8, теорема 7, ние ще покажем, че е вярно и обратното твърдение: ако функционалната детерминанта на едно диференцируемо биективно изображение е различна от нула, то обратното му изображение също е диференцируемо.

Упражнения.

1. Функцията $f\left(\vec{x}\right) = f\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ се нарича *хомогенна от степен* k, ако за всяко число t е изпълнено равенството

$$f\left(t\vec{x}\right) \;=\; t^k f\left(\vec{x}\right).$$

Докажете, че за функциите, хомогенни от степен k, е в сила равенството на Ойлер:

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\vec{x}\right) + \ldots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}\left(\vec{x}\right) = k\; f\left(t\vec{x}\right).$$

2. Докажете, че функцията $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$ не е диференцируема в точката $(0,0)$, а функцията $g(x,y) = \cos\sqrt[3]{xy}$ е диференцируема в тази точка.

1.5 Производна по направление и градиент.

За функции на една променлива първата производна в дадена точка има прост геометричен смисъл - тя е равна на ъгловия коефициент на допирателната към графиката на функцията в тази точка. С други думи, тя изразява "стръмността"на графиката в тази точка (ако функцията нараства, производната е положителна, и т.н.). За функции на n променливи първите производни са също n на брой, и тяхната интерпретация не е толкова очевидна.

За си изясним геометричният смисъл на първите производни, ще си послужим с аналогията, която споменахме в началото на предния параграф: ще разгледаме графиката на дадена функция на две променливи като релеф на част от земната повърхност. Така, да си представим, че се намираме на склона на някакъв хълм (виж чертежа). Тогава стръмността на пътеката, по която вървим, зависи от нейната посока: ние може да тръгнем право нагоре (голям положителен наклон), право надолу (голям отрицателен), или да поемем по хоризонталата - тогава пътеката е хоризонтална и наклонът е нулев. Тези съображения водят до понятието производна по направление, което ще изложим по-долу.

Производна по направление. Нека $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ е функция на n променливи, диференцируема в точката x^0, и нека $\vec{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ е n-мерен вектор с норма единица (т.е. $||e|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} e_i^2} = 1$.)*

Определение. *Под производна на функцията $f(x)$ по направление $\vec{e}$ в точката x^0 ще разбираме границата*

$$\frac{df}{d\vec{e}}\left(x^0\right) = \lim_{t \to 0} \frac{f\left(x^0 + t\vec{e}\right) - f\left(x^0\right)}{t}.$$

Ще изразим $\frac{df}{d\vec{e}}\left(x^0\right)$ чрез частните производни на $f(x)$. Правата, минаваща през точката x^0 и колинеарна на вектора $\vec{e}$, може да се параметризира с уравненията

$$x(t) = \left(x_1^0 + te_1, \ldots, x_n^0 + te_n\right).$$

*Компонентите $e_1, \ldots, e_n$ на единичния вектор $\vec{e}$ се наричат негови директорни косинуси. Ако означим с $\vec{x_i}$ единичния координатен вектор по оста x_i, то компонентата e_i е равна на скаларното произведение $\langle \vec{e}, \vec{x_i} \rangle$ и следователно на косинуса на ъгъла между $\vec{e}$ и оста x_i.

(Тъй като $||e|| = 1$, параметърът t съвпада с ориентираното разстояние от текущата точка $x(t)$ до началната точка x^0.)

Тогава ограничението на $f(x)$ върху тази права се представя с функцията на едно променливо

$$\varphi(t) \;=\; f(x(t)) \;=\; f\left(x_1^0 \;+\; te_1, \ldots, x_n^0 \;+\; te_n\right).$$

Прилагайки за функцията $\varphi(t) = f\left(x_1^0 + te_1, \ldots, x_n^0 + te_n\right)$ правилото за диференциране на съставна функция, получаваме равенството

$$(*) \qquad \frac{df}{d\vec{e}}\left(x^0\right) \;=\; \sum_{i=1}^{n} e_i \frac{df}{dx_i}\left(x^0\right).$$

Дефиницията на производна по направление обобщава понятието частна производна, дефинирано в предния параграф. Наистина, ако в ролята на $\vec{e}$ вземем i-тият координатен вектор $\vec{e^i}$ (това е вектор с координата единица на i-тото място и нули на останалите места), то от формулата $(*)$ получаваме:

$$\frac{df}{d\vec{e^i}}\left(x^0\right) \;=\; \frac{df}{dx_i}\left(x^0\right).$$

Забележка. По-нататък ние ще използваме дефиницията за производна по направление и формулата $(*)$ за произволен n-мерен вектор $\vec{h}$, без да изискваме условието $\left|\left|\vec{h}\right|\right| = 1$. Тогава определението губи директен геометричен смисъл, но основните му свойства остават в сила. За по-нататъшни цели ще въведем означението:

$$D_{\vec{h}} f(x) = \frac{df}{d\vec{h}}(x) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{df}{dx_i}(x).$$

Ако означим с D_i операцията на диференциране по променливата x_i, е в сила равенството между оператори

$$D_{\vec{h}} = \sum_{i=1}^{n} h_i D_i.$$

Градиент на функция. Да разгледаме, при фиксирана точка x^0, зависимостта на производната по направление $f'_{\vec{e}}(x^0)$ от единичния вектор $\vec{e}$. С други думи, пита се по кое направление производната на функцията е най-голяма, респ. най-малка. За целта ще използваме понятието *скаларно произведение* на вектори от $\mathbb{R}^n$, което може да бъде дефинирано по аналитичен и геометричен път. Ще напомним, че за два вектора $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ от $\mathbb{R}^n$ скаларното произведение се дефинира с формулата

$$\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle \ = \ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

В сила е равенството

$$\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle \ = \ ||\vec{a}|| \left|\left|\vec{b}\right|\right| \cos \angle \left(\vec{a}, \vec{b}\right),$$

където $\angle \left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ означава ъгъла между векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Определение. *Под <u>градиент</u> на функцията на n променливи $f(x_1, \ldots, x_n)$ в точката x^0 ще разбираме n-мерен вектор с координати, равни на частните производни в тази точка:*

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f\left(x^0\right) \ = \ \left(\frac{df}{dx_1}\left(x^0\right), \frac{df}{dx_2}\left(x^0\right), \ldots, \frac{df}{dx_n}\left(x^0\right) \right).$$

Тогава формулата $(*)$ може да се напише и така:

$$(**) \quad \frac{df}{d\vec{e}}\left(x^0\right) = \left\langle \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f\left(x^0\right), \vec{e} \right\rangle = \left|\left| \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f\left(x^0\right) \right|\right| \cos \angle \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f\left(x^0\right), \vec{e} \right),$$

тъй като $||\vec{e}|| = 1$.

Знаем, че най-голямата стойност на косинуса на един ъгъл е равна на единица и се достига за ъгъл, равен на нула. Оттук получаваме:

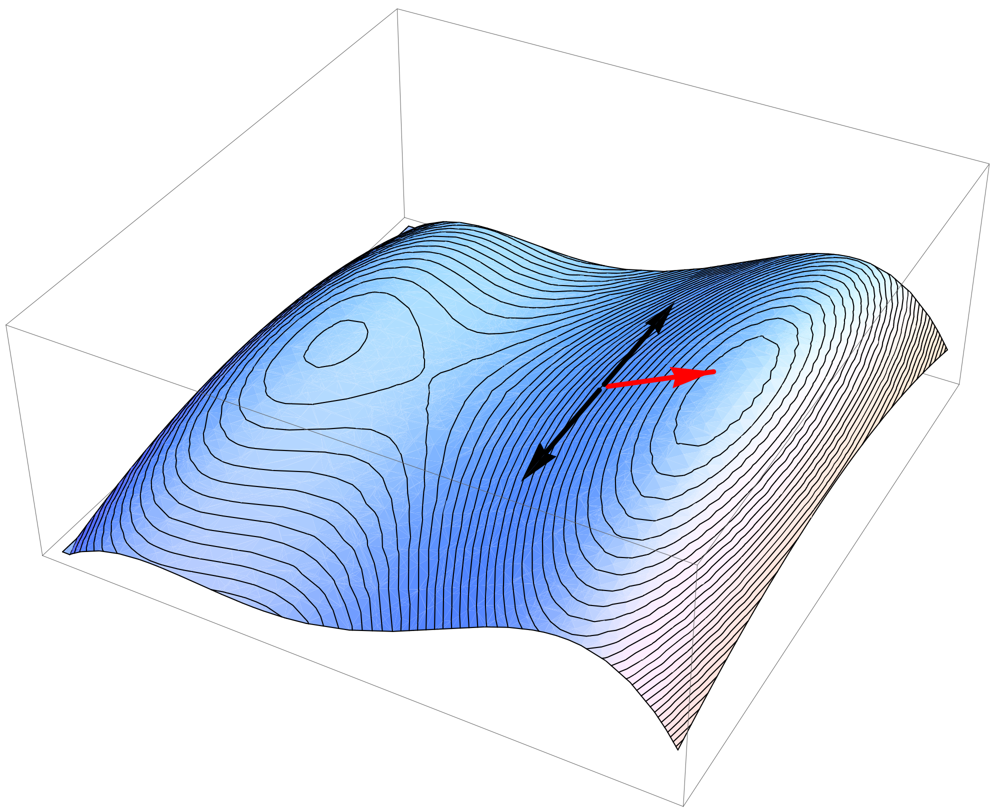
Теорема 1. *Производната по направление $\frac{df}{d\vec{e}}(x^0)$ в точката (x^0) взема най-голямата си стойност, когато вектора $\vec{e}$ е еднопосочен с вектора $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x^0)$, т.е.*

$$\vec{e} \ = \ \frac{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x^0)}{\left|\left|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x^0)\right|\right|}.$$

В този случай имаме

$$\frac{df}{d\vec{e}}\left(x^0\right) = \left\|\overrightarrow{\text{grad}}\, f\left(x^0\right)\right\|.$$

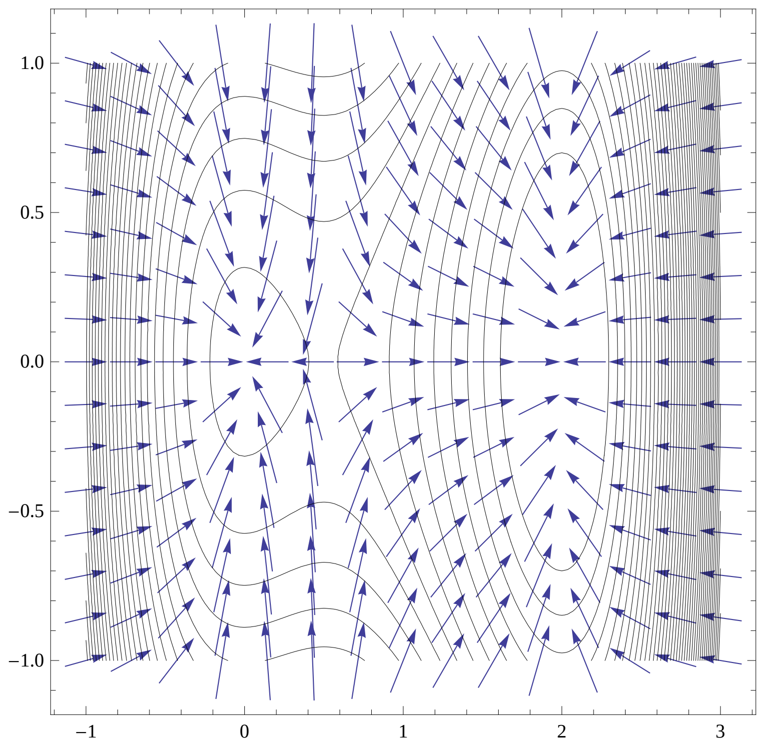
С други думи, имаме следната геометрична интерпретация на вектора $\overrightarrow{\text{grad}}\, f\left(x^0\right)$: посоката му съвпада с посоката, в която $f(x)$ расте най-бързо, а големината му е равна на наклона на графиката на функцията в тази посока.



Градиент на функцията в дадена точка (в червено), и вектори, допирателни към хоризонталата (в черно).

Ще посочим още една геометрична характеризация на вектора $\overrightarrow{\text{grad}}\, f\left(x^0\right)$. От формулата $(**)$ се вижда, че $\frac{df}{d\vec{e}}\left(x^0\right) = 0$ точно тогава, когато $\vec{e}$ е перпендикулярен на $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f\,(x^0)$. Иначе казано, ако се движим по "хоризонталата", направлението на движението във всеки момент ще бъде перпендикулярно на градиента в съответната точка. Така, засега на интуитивно ниво, стигаме до твърдението (виж чертежа).

Теорема 2. *Градиентът на една функция в дадена точка е перпендикулярен на линията на ниво на функцията, минаваща през тази точка.*



Градиент и линии на ниво на дадена функция.

Точната формулировка на това твърдение е следната: градиентът е перпендикулярен на допирателната към линията на ниво в точката. (За допирателна към параметрично зададена крива виж част I, §2.12.) Параметризирането на линията на ниво, както и доказателството на горната теорема, ще бъде направено в §8.

Забележка. Градиентът на дадена функция беше дефиниран при наличие на декартова координатна система в пространството $\mathbb{R}^n$. Теореми 1 и 2 обаче показват, че вектора $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x)$ има инвариантен геометричен смисъл, т.е не зависи от избора на координатната система, а само от скаларното произведение в $\mathbb{R}^n$.

Формула за крайните нараствания за функции на много променливи. Ще обобщим една от най-важните формули на диференциалното смятане за една променлива – формулата за крайните нараствания, доказана в I.§2.3 (и използвана в предния параграф). Нека $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $\vec{h} = (h_1, \ldots, h_n)$ (вектор на нарастването), и нека функцията $f(x)$ е дефинирана и диференцируема във всички точки от отсечката, свързваща точките x^0 и $x^0 + \vec{h}$ в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 3. *При горните условия съществува число $\theta \in (0,1)$ такова, че*

$$f\left(x^0 + \vec{h}\right) - f\left(x^0\right) \;=\; \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{df}{dx_i}\left(x^0 + \theta\vec{h}\right)$$

Доказателство. Да въведем, както по-горе, помощната функция на една променлива $\varphi(t) = f\left(x_1^0 + th_1, \ldots, x_n^0 + th_n\right)$. Тогава от условието на теоремата следва, че тя е диференцируема в интервала $[0,1]$. От едномерната теорема за крайните нараствания следва, че $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta)$ за някое $\theta \in (0,1)$. Тогава теоремата е следствие на очевидните равенства

$$\varphi(0) = f\left(x^0\right),\ \varphi(1) = f\left(x^0 + \vec{h}\right),\ \varphi'(t) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{df}{dx_i}\left(x^0 + t\vec{h}\right). \blacksquare$$

Следствие 4. Да предположим, че производните на $f(x)$ удовлетворяват неравенството

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{df}{dx_i}(x)\right)^2} \leq C.$$

Тогава е в сила неравенството

$$\left|f\left(x^0 + \vec{h}\right) - f\left(x^0\right)\right| \;\leq\; C\,||h||\,.$$

Доказателство. Горното условие всъщност означава, че $\left\|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x)\right\| \leq C$. Твърдението на теоремата може да се напише във вида

$$f\left(x^0+\vec{h}\right)-f\left(x^0\right) \;=\; \left\langle \vec{h}, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f\left(x^0+\theta\vec{h}\right)\right\rangle$$

и следователно

$$\left|f\left(x^0+\vec{h}\right)-f\left(x^0\right)\right| \;\leq\; \|h\|\left\|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f\left(x^0+\theta\vec{h}\right)\right\| \;\leq\; C\,\|h\|\,.\blacksquare$$

Упражнения.

1. Нека $f(P)$ е радиална функция в равнината, т.е. има вида

$$f(P)=\varphi\left(\|OP\|\right),$$

където O е фиксирана точка в равнината (напр. началото), $\|OP\|$ е разстоянието от точката O до точката P, а $\varphi(t)$ е функция на едно променливо, дефинирана и диференцируема при $t>0$. Докажете, че $f(P)$ е диференцируема при $P\neq O$ и

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(P)=\varphi'\left(\|OP\|\right).\frac{\vec{OP}}{\|OP\|}.$$

Забележка. Векторът $\frac{\vec{OP}}{\|OP\|}$ представлява единичен вектор, насочен от O към P.

2. (Нютоново гравитационно поле). Ако имаме две материални точки, то, според теорията за гравитацията, гравитационната сила между тях е насочена по свързващата ги линия, право пропорционална е на произведението на масите, и обратно пропорционално на квадрата на разстоянието между тях. Математическия израз е следният: нека имаме маса M в точката O, и единична маса в точката P. Да означим с $\vec{F}(P)=\left(F_x(P),F_y(P),F_z(P)\right)$ силата, с която тази маса се привлича от първата. Покажете, че векторното поле

$$\vec{F}(P)=-\frac{c}{\left\|\vec{OP}\right\|^3}\left(\vec{OP}\right),$$

където $c = kM$ и k е гравитационната константа, удовлетворява горните условия. Покажете още, че ако положим $\Phi(P) = \frac{c}{||\vec{OP}||}$, то е изпълнено равенството

$$\vec{F}(P) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Phi(P).$$

Забележка. Функцията $\Phi(P)$ се нарича *гравитационен потенциал.* В много случаи е по-лесно да се работи със скаларната функция $\Phi(P)$, отколкото с векторното поле $\vec{F}(P)$.

3. Нека F_1, F_2 са две различни точки от равнината, и $f(P) = ||F_1P|| + ||F_2P||$. Докажете, че при $\lambda > ||F_1F_2||$ линиите на ниво на функцията (т.е. множеството от точки P, за които $f(p) = \lambda$) представляват елипси (с фокуси в точките F_1 и F_2).

Упътване. Изберете координатна система с начало средата на отсечката F_1F_2 и абсцисна ос по тази отсечка. Да означим $p = \frac{1}{2}\,||F_1F_2||$; тогава точките F_1, F_2 ще имат координати $(-p, 0)$ и $(p, 0)$ съответно. Да положим

$$a = \frac{\lambda}{2},\ b = \sqrt{a^2 - p^2}.$$

Докажете чрез двукратно повдигане на квадрат, че за всяка точка $P = (x, y)$ равенството $||PF_1|| + ||PF_2|| = \lambda$ е еквивалентно с

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Забележка. От тази задача следва добре познатият начин за начертаване на елипса с помощта на връвчица и две гвоздейчета (посочете го!)

4. (Оптично свойство на елипсата.) Нека $f(P) = ||F_1P|| + ||F_2P||$ е функцията от предната задача. Докажете, че за всяка точка $P \neq F_1, F_2$ векторът $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f(P)$ е колинеарен с ъглополовящата на ъгъла, определен от векторите $P\vec{F}_1$, $P\vec{F}_2$.

Упътване. Да означим $f_1(P) = ||F_1P||$, $f_2(P) = ||F_2P||$. От резултата на зад. 1 се вижда, че

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f_1(P) = \frac{\vec{F_1P}}{||F_1P||}, \quad \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f_2(P) = \frac{\vec{F_2P}}{||F_2P||}.$$

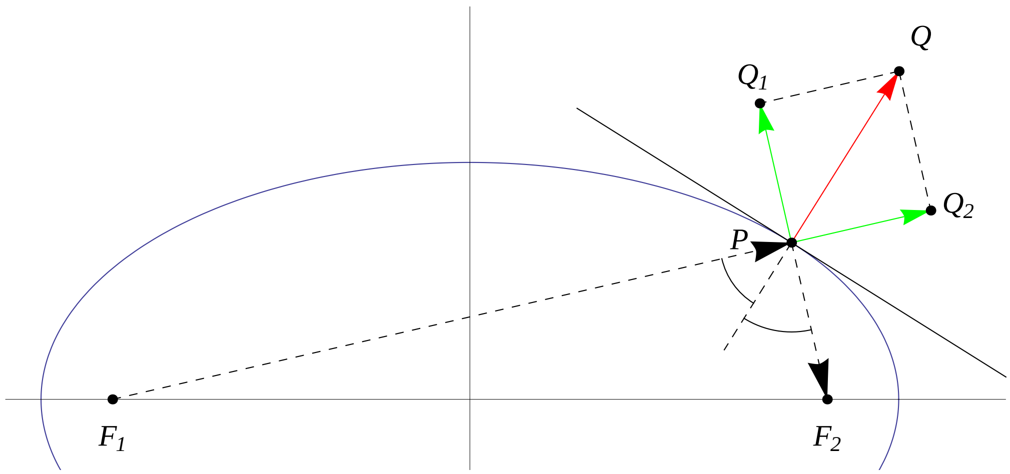
Да нанесем от точката P единичните вектори

$$P\vec{Q}_1 = \overrightarrow{\text{grad}}\, f_1(P), \quad P\vec{Q}_2 = \overrightarrow{\text{grad}}\, f_2(P).$$

Тогава

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(P) = \overrightarrow{\text{grad}}\, f_1(P) + \overrightarrow{\text{grad}}\, f_2(P) = P\vec{Q}_1 + P\vec{Q}_2 = P\vec{Q}.$$

Тъй като четириъгълникът PQ_1QQ_2 е ромб, то $\angle Q_1PQ = \angle Q_2PQ$.



Оптично свойство на елипсата.

Забележка. Резултатът на задачата има проста геометрична интерпретация. Законът за отразяване на светлината гласи, че при отразяване от равнина падащият и отразеният лъч сключват еднакви ъгли с нормалата към повърхнината. Същият закон е валиден и за криволинейна повърхнина; ако повърхнината е представена като линия на ниво на дадена функция, то по Теорема 2 от параграфа нормалата към нея е колинеарна с градиента на функцията. Резултата на задачата може да се формулира така:

Ако пуснем произволен светлинен лъч от единия фокус на елипсата, след отразяването в нея той ще мине през другия и фокус.

5. Нека l е права в равнината и F е точка, която не лежи на l. Нека M е множеството от всички точки P в равнината, за които разстоянието

$||FP||$ от точката P до точката F е равно на разстоянието от точката P до правата l (т.е. на дължината на перпендикуляра, спуснат от P към правата). Докажете, че множеството M е парабола (с фокус в F).

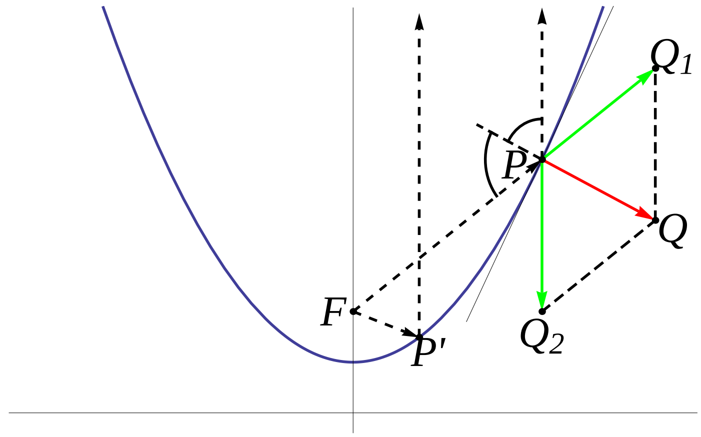
Упътване. Изберете координатната система в равнината така, че оста x да съвпада с l, а точката F да лежи на оста y (т.е. $F = (0, p)$). Покажете, че множеството M се описва с уравнението $y = \frac{1}{2p}x^2 + \frac{p}{2}$.

Забележка. Неформално, параболата може да се разглежда като гранично положение на елипсата, ако единият и фокус е неподвижен, а другият отива в безкрайността.

6. (Оптично свойство на параболата.) Покажете, че всеки светлинен лъч, излизащ от фокуса F на параболата, след отражение в параболата става успореден на нейната ос. [*]

Упътване. Аналогично на зад. 4, да положим $f_1(P) = ||FP||$, $f_2(x, y) = -y$, и $f(P) = f_1(P) + f_2(P)$. Тогава $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f_1(P) = \frac{\vec{FP}}{||FP||}$, $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f_2(P) = (0, -1)$. Параболата M съвпада с нулевата линия на ниво на функцията $f(P)$, т.е. с множеството на всички точки P, за които $f(P) = 0$. Както и по-горе, ще нанесем от точката P единичните вектори $P\vec{Q}_1 = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f_1(P)$, $P\vec{Q}_2 = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f_2(P)$. Отново четириъгълникът PQ_1QQ_2 е ромб, и следователно $\angle Q_1PQ = \angle Q_2PQ$ (виж чертежа).

[*] Разбира се, вярно е и обратното: ако изпратите към параболата сноп лъчи, успореден на нейната ос, след отражението всички те ще се съберат във фокуса на параболата. Това свойство широко се използва в техниката, например във фаровете на колите, в параболичните антени и др.



Оптично свойство на параболата.

1.6 Производни от по-висок ред.

Досега ние разглеждахме само производни от първи ред. Както за функции на едно променливо, ние можем да продължим да диференцираме и да получим производни от по-висок ред. Така, с $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(x)$ или с $f_{x_i x_j}(x)$ означаваме производната на функцията $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ по променливата x_j в точката x.

На пръв поглед картината изглежда доста сложна: ако $f\,(x_1, \ldots, x_n)$ е функция на n променливи, то първите и производни са n на брой. Всяка от тях може да бъде диференцирана по n променливи, и така получаваме общо n^2 различни втори производни, n^3 - трети, и n^k производни от k-ти ред. Всъщност картината е малко по-оптимистична: в този параграф ние ще покажем, че при някои леки предположения стойността на производните не зависи от реда, в който е извършено диференцирането. Така ситуацията се опростява – например за функция на две променливи различните производни от ред k не са 2^k, а само $k+1$ на брой.

Ще докажем теоремата за независимостта на висшите производни от реда на диференцирането най-напред за функция на две променливи.

Теорема 1. *Нека $f(x, y)$ е функция на две променливи, дефинирана* *в околност на точката* (x_0, y_0). *Да предположим, че първите производни* f'_x, f'_y, *и смесените втори производни* f''_{xy} *и* f''_{yx} *съществуват в околност на* (x_0, y_0). *Ако* f''_{xy} *и* f''_{yx} *са непрекъснати в тази точка, то стойностите им в нея са равни.*

Доказателство. Ще апроксимираме смесените втори производни с "диференчни частни от втори ред". Нека h и k са достатъчно малки числа. Да означим

$$W(h,k) = f\left(x_0+h, y_0+k\right) - f\left(x_0+h, y_0\right) - f\left(x_0, y_0+k\right) + f\left(x_0, y_0\right).$$

Да разгледаме помощната функция

$$\varphi(x) = f\left(x, y_0+k\right) - f\left(x, y_0\right),$$

дефинирана за стойности на x, достатъчно близки до x_0. Групирайки в израза за $W(h,k)$ първото с третото, и второто с четвъртото събираемо, получаваме равенството

$$W(h,k) = \varphi\left(x_0+h\right) - \varphi\left(x_0\right) = h\varphi'\left(x_0+\theta_1 h\right),$$

за подходящо $\theta_1 \in (0,1)$ (по теоремата за крайните нараствания за функцията φ). Тъй като $\varphi'(x) = f'_x\left(x, y_0+k\right) - f'_x\left(x, y_0\right)$, то

$$W(h,k) = hf'_x\left(x_0+\theta_1 h, y_0+k\right) - f'_x\left(x_0+\theta_1 h, y_0\right) = hkf''_{xy}\left(x_0+\theta_1 h, y_0+\theta_2 k\right),$$

като последното равенство се получава отново чрез прилагане на теоремата за крайните нараствания, този път за функцията $f'_x\left(x_0+\theta_1 h, y\right)$ на променливата y. Тук отново $\theta_2 \in (0,1)$ (разбира се, числата θ_1 и θ_2 зависят от h и k). Оттук

$$\frac{W(h,k)}{hk} = f''_{xy}\left(x_0+\theta_1 h, y_0+\theta_2 k\right),$$

и следователно при $h \to 0$, $k \to 0$ имаме

$$\frac{W(h,k)}{hk} \to f''_{xy}\left(x_0, y_0\right).$$

Ясно е, че в горното разсъждение местата на x и y могат да бъдат разменени. Да въведем друга помощна функция $\psi(y) = f\left(x_0+h, y\right) -$

$f(x_0, y)$. Тогава $W(h,k) = \psi(y_0 + k) - \psi(y_0) = k\psi'(y_0 + \theta_3 k)$, откъдето както по-горе получаваме

$$\frac{W(h,k)}{hk} = f''_{yx}(x_0 + \theta_4 h, y_0 + \theta_3 k) \text{ и } \lim_{h\to 0,\, k\to 0} \frac{W(h,k)}{hk} = f''_{yx}(x_0, y_0),$$

откъдето $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$. ■

Следствие 2. *Ако функцията $f(x_1, \ldots, x_n)$ притежава непрекъснати частни производни до ред k в дадена околност, то тяхните стойности не зависят от реда на диференциране.*

Доказателство. За удобство ние ще въведем нови означения. Да означим с D_i операцията на диференциране по променливата x_i:

$$D_i f(x) \; = \; \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

(в математиката често се употребява термина диференциален оператор). Тогава производните от по-висок ред се получават чрез последователно прилагане на съответните операции:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}}(x) \; = \; D_{i_1} D_{i_2} \ldots D_{i_k} f(x).$$

При тези означения твърдението на теорема 1 означава, че при направените в нея предположения тези операции комутират, т.е.

$$D_i D_j f(x) = D_j D_i f(x)$$

за всеки два индекса i, j, намиращи се между 1 и n.

Нека сега изберем система $i_1, \ldots, i_k$ от индекси между 1 и n, и разгледаме производната $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}}(x)$. Трябва да докажем, че стойността на тази производна не се променя при произволно разместване на индексите $i_1, \ldots, i_k$. От казаното дотук се вижда, че тази стойност няма да се промени, ако разменим местата на две съседни диференцирания, например на тези, отговарящи на индексите i_p и i_{p+1}. Наистина,

$$D_{i_1} \ldots D_{i_{p+1}} D_{i_p} \ldots D_{i_k} f(x) = D_{i_1} \ldots D_{i_{p-1}} \left(D_{i_{p+1}} D_{i_p} \left(D_{i_{p+2}} \ldots D_{i_k} f(x) \right) \right) =$$

$$= D_{i_1} \dots D_{i_{p-1}} \left(D_{i_p} D_{i_{p+1}} \left(D_{i_{p+2}} \dots D_{i_k} f(x) \right) \right) = D_{i_1} \dots D_{i_p} D_{i_{p+1}} \dots D_{i_k} f(x).$$

Както е известно от алгебрата, всяко разместване на индексите $i_1, \dots, i_k$ може да се получи чрез няколко последователни размествания, разменящи местата на два съседни елемента и не засягащи останалите. Тъй като при всяко разместване на два съседни индекса резултата не се променя, той няма да се промени и при произволно разместване на индексите. ∎

Определение. *Ако една функция притежава непрекъснати частни производни до ред k включително във вътрешността на дефиниционната си област D, че казваме, че тя е <u>k-кратно гладка</u> в D. Пространството от всички такива функции ще бележим с $\mathcal{C}^k(D)$.*

Важен пример. В този раздел ще намерим висшите производни на помощната функция $\varphi(t)$, използвана в предния параграф. Ще припомним нейната дефиниция: нека функцията $f(x_1, \dots, x_n)$ е дефинирана в околност на точката $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ и притежава непрекъснати частни производни до ред m включително (т.е. $f \in \mathcal{C}^m(D)$), и нека $\vec{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$. Функцията $\varphi(t)$ е определена в околност на точката $t = 0$ с формулата

$$\varphi(t) = f\left(x_1^0 + th_1, \dots, x_n^0 + th_n\right).$$

Както в §5, формулата за диференциране на съставна функция ни дава

$$\varphi'(t) = D_{\vec{h}} f\left(x^0 + t\vec{h}\right) = \sum_{i=1}^{n} h_i D_i f\left(x^0 + t\vec{h}\right).$$

Прилагайки последователно към горното равенство формулата за диференциране на съставна функция, получаваме

$$\varphi''(t) = D_{\vec{h}} \left(D_{\vec{h}} f\left(x^0 + t\vec{h}\right)\right) = \left(D_{\vec{h}}\right)^2 f\left(x^0 + t\vec{h}\right)$$

и по-общо

$$\varphi^{(k)}(t) = \left(D_{\vec{h}}\right)^k f\left(x^0 + t\vec{h}\right) \text{ за } k = 1, \dots, m.$$

(Ще поясним, че с $\left(D_{\vec{h}}\right)^k f$ се означава резултата от k последователни прилагания на диференциалния оператор $D_{\vec{h}}$ към функцията f.)

Нашата задача се сведе към следната: да се изразят степените $\left(D_{\vec{h}}\right)^k$ на оператора $D_{\vec{h}}$ чрез операторите на частно диференциране $D_1, \ldots, D_n$. Ще припомним, че $D_{\vec{h}} = \sum_{i=1}^n h_i D_i$. Важно е да се отбележи, че, както беше показано по-горе, в това представяне отделните събираеми $h_i D_i$, $h_j D_j$ комутират помежду си.

От алгебрата знаем, че за всеки n елементи $a_1, \ldots, a_n$ на даден комутативен пръстен, и за всяко естествено k, е в сила формулата

$$(a_1 + \ldots + a_n)^k = \sum_{\substack{1 \le k_1, \ldots, k_n \le n \\ k_1 + \ldots + k_n = k}} \binom{k}{k_1, \ldots, k_n} a_1^{k_1} \ldots a_n^{k_n},$$

където $\binom{k}{k_1, \ldots, k_n}$ означава т.н. полиномен коефициент:

$$\binom{k}{k_1, \ldots, k_n} = \frac{k!}{k_1! \ldots k_n!}.$$

Прилагайки тази формула за комутиращите оператори $h_1 D_1, \ldots h_n D_n$, получаваме

$$\left(D_{\vec{h}}\right)^k = \sum_{\substack{1 \le k_1, \ldots, k_n \le n \\ k_1 + \ldots + k_n = k}} \binom{k}{k_1, \ldots, k_n} h_1^{k_1} \ldots h_n^{k_n} D_1^{k_1} \ldots D_n^{k_n}.$$

В крайна сметка ние получихме:

Теорема 3. *За дефинираната по-горе функция $\varphi(t)$ е в сила равенството*

$$\varphi^{(k)}(t) = \sum_{\substack{1 \le k_1, \ldots, k_n \le n \\ k_1 + \ldots + k_n = k}} \binom{k}{k_1, \ldots, k_n} h_1^{k_1} \ldots h_n^{k_n} \frac{\partial^k f}{\partial^{k_1} x_1 \ldots \partial^{k_n} x_n} \left(x^0 + t\vec{h}\right).$$

Често горното равенство формално се записва във вида

$$\varphi^{(k)}(t) = (h_1 D_1 + \ldots + h_n D_n)^k f\left(x^0 + t\vec{h}\right).$$

За яснота ние отделно ще напишем тази формула за функции на две променливи. Нека $f(x, y)$ е m-кратно диференцируема функция на променливите x и y, дефинирана в околност на точката (x_0, y_0), $h, k \in \mathbb{R}$, и $\varphi(t) = f\left(x_0 + th, y_0 + tk\right)$. Тогава за всяко n между 1 и m е изпълнено равенството*

$$\varphi^{(n)}(t) = \left(h\frac{\partial}{\partial\, x} + k\frac{\partial}{\partial\, y}\right)^n f\left(x_0 + th, y_0 + tk\right) =$$

$$= \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} h^p k^{n-p} \frac{\partial^n f}{\partial^p x\ \partial^{n-p} y}\left(x_0 + th, y_0 + tk\right),$$

където $\binom{n}{p}$ е биномният коефициент

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p\,!\,(n-p)!}.$$

Упражнения.

1. Нека $f(x, y)$ е функцията, определена с равенствата

$$f(x, y) = xy\,\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \text{ при } (x, y) \neq (0, 0)\,,\ f(0, 0) = 0.$$

Докажете, че $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ съществуват и са непрекъснати навсякъде в $\mathbb{R}^2$ и че смесените производни в нулата съществуват. Покажете, че

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\ \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y\ \partial x}(0, 0).$$

Обяснете защо този факт не противоречи на теорема 1.

2. Да предположим, че първите производни f'_x, f'_y и смесената производна f''_{xy} съществуват в околност на точката (x_0, y_0), и f''_{xy} е непрекъсната в тази точка. Тогава $f''_{yx}(x_0, y_0)$ също съществува, и имаме $f''_{yx}(x_0, y_0) = f''_{xy}(x_0, y_0)$.

*Читателят може сам да докаже това равенство чрез индукция по n, използвайки свойствата на биномните коефициенти (виж част I, стр. 148). Доказателството дословно повтаря доказателството на бинома на Нютон.

Използвайте, че в означенията на теорема 1 имаме

$$\frac{f'_y(x_0+h,y_0)-f'_y(x_0,y_0)}{h}=\lim_{k\to 0}\frac{W(h,k)}{hk},$$

и доказаното в тази теорема равенство

$$\lim_{h\to 0,k\to 0}\frac{W(h,k)}{hk}=f''_{xy}(x_0,y_0).$$

1.7 Формула на Тейлор за функции на много променливи. Локални екстремуми.

Формула на Тейлор.В началото ще припомним формулата на Тейлор за функции на една променлива.(Виж част I, §2.7.) Ако функцията $f(x)$ е дефинирана в околност на точката x_0 и притежава производни до ред n в тази околност, за достатъчно малки нараствания $h = \Delta x$ е в сила формулата

$$f\left(x_0+h\right) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}\left(x_0\right)}{k!}\left(x-x_0\right)^k \;+\; R_n(h)$$

(ще напомним, че под нулева производна на една функция се разбира самата функция). За остатъка $R_n(h)$ е в сила оценката $R_n(h) = o(h^n)$, т.е.

$$\lim_{h\to 0} \frac{R_n(h)}{h^n} = 0.$$

Ако $f(x)$ притежава и $n+1$-ва производна в x_0, е в сила по-точна оценка; най-често за остатъка се използва формулата на Лагранж

$$R_n(h) \;=\; \frac{f^{(n+1)}\left(x_0+\theta h\right)}{k!}\left(x-x_0\right)^{n+1}$$

за подходящо избрано $\theta \in (0,1)$.

В този параграф ние ще изведем аналогична формула за функция на много променливи. Ще използваме същия похват, както и в предишните параграфи: свеждане на въпроса към функция на една променлива.

Нека $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ е m-кратно диференцируема функция на n променливи, дефинирана в околност на точката $x^0 = (x_1^0,\ldots,x_n^0)$. Нека $\vec{h} = (h_1,\ldots,h_n)$ е вектора на нарастването. Да предположим, че отсечката, свързваща точките x^0 и $x^0+\vec{h}$, се съдържа в дефиниционната област на функцията f. Тогава ние можем да образуваме познатата вече помощна функция

$$\varphi(t) = f\left(x_1^0+th_1,\ldots,x_n^0+th_n\right),$$

определена за $t \in [0,1]$. Както видяхме в предния параграф, тя притежава производни до ред m включително, и ние можем за всяко $k \leq m-1$ да напишем за нея формулата на Тейлор с $t_0 = 0$ и $\Delta t = 1$:

$$\varphi(1) = \sum_{p=0}^{k} \frac{\varphi^{(p)}(0)}{p!} + R_k,$$

с $R_k = \frac{\varphi^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!}$ за някое $\theta \in (0,1)$. Тъй като $\varphi(0) = f\left(x^0\right)$ и $\varphi(1) = f\left(x^0 + \vec{h}\right)$, то припомняйки си формулите от предходния параграф за производните на $\varphi(t)$, получаваме *:

Формула на Тейлор с остатъчен член във вид на Лагранж. *Ако $f(x)$ притежава частни производни до ред $k+1$ включително в някаква околност на x^0, в сила е равенството*

$$f\left(x^0 + \vec{h}\right) = \sum_{p=0}^{k} \frac{1}{p!} \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^p f\left(x^0\right) \; + \; R_k\left(\vec{h}\right),$$

където

$$R_k\left(\vec{h}\right) \; = \; \frac{1}{(k+1)!} \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{k+1} f\left(x^0 + \theta \vec{h}\right)$$

за подходящо $\theta \in (0,1)$.

Забележка. За остатъчния член може да бъде използвана всяка от другите познати от част I формули - формата на Шлемилх-Рош или интегралната формула от зад. 3 на §4.3; разликите не са съществени.

Следствие (остатъчен член във формата на Пеано). *Нека $f(x)$ притежава частни производни до ред k включително, непрекъснати в някаква околност на x^0. Тогава за остатъка $R_k\left(\vec{h}\right)$ е в сила съотношението $R_k\left(\vec{h}\right) = o\left(\left\|\vec{h}\right\|^k\right)$, т.е.*

$$\lim_{\vec{h} \to 0} \frac{R_k\left(\vec{h}\right)}{\left\|\vec{h}\right\|^k} = 0.$$

*Тук за краткост използваме формулите за производните в съкратен вид. Точният смисъл на тези съкратени означения беше даден при тяхното извеждане в §6.

Доказателство. Да положим

$$\alpha_{k_1\dots k_n}(\vec{h}) = \frac{\partial^k f}{\partial^{k_1}x_1\dots\partial^{k_n}x_n}\left(x^0+\vec{h}\right) - \frac{\partial^k f}{\partial^{k_1}x_1\dots\partial^{k_n}x_n}\left(x^0\right).$$

От непрекъснатостта на k-тите производни следва, че $\alpha_{k_1\dots k_n}(\vec{h}) \to 0$ при $\vec{h} \to 0$.

От формулата на Лагранж за $k-1$-вия остатък $R_{k-1}\left(\vec{h}\right)$ имаме

$$R_{k-1}\left(\vec{h}\right) =$$

$$\sum_{k_1+\dots+k_n=k} \binom{k}{k_1,\dots,k_n} h_1^{k_1}\dots h_n^{k_n}\left(\frac{\partial^k f}{\partial^{k_1}x_1\dots\partial^{k_n}x_n}\left(x^0\right) + \alpha_{k_1\dots k_n}(\theta\vec{h})\right),$$

откъдето получаваме

$$R_k\left(\vec{h}\right) = \sum_{k_1+\dots+k_n=k} \binom{k}{k_1,\dots,k_n} h_1^{k_1}\dots h_n^{k_n}\,\alpha_{k_1\dots k_n}(\theta\vec{h}).$$

Следователно

$$\frac{R_k\left(\vec{h}\right)}{\left|\left|\vec{h}\right|\right|^k} = \sum_{k_1+\dots+k_n=k} \binom{k}{k_1,\dots,k_n} \left(\frac{h_1}{\left|\left|\vec{h}\right|\right|}\right)^{k_1}\dots\left(\frac{h_n}{\left|\left|\vec{h}\right|\right|}\right)^{k_n}\alpha_{k_1\dots k_n}(\theta\vec{h}).$$

Тъй като $\alpha_{k_1\dots k_n}(\vec{h}) \to 0$ при $\vec{h} \to 0$, и $\left|\frac{h_i}{||h||}\right| \le 1$, това доказва твърдението. ■

Забележка. Ако поискаме нещо повече - $f(x)$ да притежава частни производни до ред $k+1$ (а не само до ред k) в околност на x^0, и те са ограничени по модул от константата C, то е валидна по-силната оценка

$$\left|R_k\left(\vec{h}\right)\right| \le C_1\left|\left|\vec{h}\right|\right|^{k+1},$$

където $C_1 = C.n^k$.

Наистина, в този случай по многомерната теорема за крайните нараствания ще имаме $\left|\alpha_{k_1\dots k_n}(\vec{h})\right| \le C\left|\left|\vec{h}\right|\right|$, и заместването им в горната оценка за $\frac{R_k(\vec{h})}{\left|\left|\vec{h}\right|\right|^k}$ дава нужната формула.

Локални екстремуми. Определението на локален екстремум на функция на много променливи звучи по същия начин, както и за функция на една променлива:

Определение. *Нека функцията $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ е дефинирана в областта $D \subset \mathbb{R}^n$. Точката $x^0 \in D$ се нарича точка на локален максимум за $f(x)$, ако*

а/ x^0 е вътрешна за D, и

б/ съществува $\varepsilon > 0$ такова, че $f(x) \leq f(x^0)$ за всяко $x \in D$, за което $||x - x^0|| < \varepsilon$.

Ако в б/ вместо $f(x) \leq f(x^0)$ пишем $f(x) \geq f(x^0)$, получаваме определението на локален минимум.

Локалният максимум или минимум се нарича строг, ако при $x \neq x^0$ неравенството е строго.

Накрая, под точка на локален екстремум ще разбираме точка, която е или локален минимум, или локален максимум.

Ще напомним резултатите в едномерния случай (виж част I, §2.9): за да бъде точката x_0, вътрешна за дефиниционната област на диференцируемата функция $f(x)$, точка на локален екстремум, имаме

– необходимо условие: ако x_0 е локален екстремум, то $f'(x_0) = 0$ (теорема на Ферма).

– достатъчно условие: ако $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) > 0$, то x_0 е локален минимум; ако $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) < 0$, то x_0 е локален максимум. (доказва се чрез развитие по Тейлор от ред 2 на $f(x)$ около точката x_0.)

Елементарни примери показват, че нито необходимото условие е достатъчно, нито достатъчното условие е необходимо.

За функции на няколко променливи ситуацията е аналогична. Ще изложим необходимото условие:

Теорема 1. (необходимо условие за локален екстремум). *Нека точката $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ е локален екстремум за функцията $f(x_1, \ldots, x_n)$. Ако в x^0 тази функция притежава частни производни, то всички те са равни на нула, т.е.*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x^0\right) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}\left(x^0\right).$$

Доказателство. Ще използваме съответните частични функции на една променлива. По-подробно, за дадено i между 1 и n да означим чрез

$$\varphi_i(t) = f\left(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, t, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0\right)$$

функцията, получена чрез фиксиране на всички други променливи освен променливата x_i. Очевидно функцията на едно променливо $\varphi_i(t)$ е дефинирана в околност на точката $t = x_i^0$ и притежава локален екстремум в тази точка (докажете!). Тогава според теоремата на Ферма за функции на едно променливо имаме

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^0\right) = \varphi'\left(x_i^0\right) = 0. \blacksquare$$

Удобно е да въведем следното понятие:

Определение. *Точка, вътрешна за дефиниционната област, в която всички частни производни на функцията f се анулират, наричаме критична точка за дадената функция.*

От горната теорема веднага следва едно полезно наблюдение:

Следствие 2. *Ако $f(x)$ е еднократно гладка непрекъсната функция, дефинирана върху компактното множество $D \subset \mathbb{R}^n$, то нейните най-голяма и най-малка стойности се достигат или върху контура на D, или в някоя от критичните точки на функцията.*

Доказателство. Наистина, според втората теорема на Вайерщрас минималната и максималната стойност на $f(x)$ се достигат в някои точки на D, които могат да бъдат вътрешни или контурни. Ако глобалният максимум се достига във вътрешна точка на D, то тази точка е също и локален максимум и следователно е критична точка. Разбира се, същото е вярно и за глобалния минимум. $\blacksquare$

За намиране на достатъчното условие ще изследваме члена от развитието по Тейлор, съдържащ вторите производни на функцията. Както ще видим, този член представлява квадратична функция на координатите на нарастването $h_1, \ldots, h_n$.

Ще припомним някои понятия от линейната алгебра, засягащи такива функции (наричани обикновено квадратични форми). Нека $\mathcal{A}\vec{h}$ е квадратична форма в $\mathbb{R}^n$, дефинирана с формулата

$$\mathcal{A}\vec{h} \;=\; \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\; h_i h_j, \quad A_{ij} = A_{ji}.$$

Определение. *Квадратичната форма $\mathcal{A}$ се нарича*

– положително определена (съотв. отрицателно определена), ако за всеки ненулев вектор $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{h} \neq \vec{0}$, имаме $\mathcal{A}\vec{h} > 0$ (съотв. $\mathcal{A}\vec{h} < 0$).

– знакопроменлива, ако съществуват вектори $\vec{h}^1$, $\vec{h}^2 \in \mathbb{R}^n$, така че $\mathcal{A}\vec{h}^1 > 0$, $\mathcal{A}\vec{h}^2 < 0$.

– положително (съотв. отрицателно) полуопределена, ако за всеки $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ имаме $\mathcal{A}\vec{h} \geq 0$ (съотв. $\mathcal{A}\vec{h} \leq 0$).

Примери. В пространството $\mathbb{R}^2$ с координати x, y можем да разгледаме квадратичните форми, зададени с формулите*:

- $x^2 + y^2$ – положително определена,
- $-x^2 - y^2$ – отрицателно определена,
- $x^2 - y^2$ – знакопроменлива,
- x^2 – положително полуопределена,
- $-x^2$ – отрицателно полуопределена.

Критерий за определеност. Нека $\mathcal{A}$ е написаната по-горе квадратична форма с коефициенти A_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, и нека означим с Δ_k k-тият главен минор на матрицата от коефициентите:

$$\Delta_k = \det \left\{A_{ij}\right\}_{i,j=1,\ldots,k}$$

Тогава критерият на Силвестър гласи, че формата $\mathcal{A}$ е положително определена, когато $\Delta_k > 0$, и отрицателно определена, ако $(-1)^k\Delta_k > 0$,

---

*В алгебрата се доказва, че всяка квадратична форма в $\mathbb{R}^2$ се привежда към една от изброените чрез линейна смяна на променливите.

за $k = 1, \ldots, n$. Ако поне един от минорите с четни номера $\Delta_{2k} < 0$, то формата $\mathcal{A}$ е знакопроменлива.

Сега можем да формулираме достатъчното условие за екстремум.

Теорема 3. (достатъчно условие за локален екстремум.) *Нека $f(x_1, \ldots, x_n)$ е двукратно гладка функция, дефинирана в околност на точката x^0. Нека освен това x^0 е критична точка, т.е.*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x^0\right) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}\left(x^0\right).$$

Тогава

а/ ако квадратичната форма

$$\mathcal{A}_f\left(x^0\right)\vec{h} \;=\; \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}\left(x^0\right)\; h_i h_j$$

е положително дефинирана, x^0 е строг локален минимум за f.

б/ ако $\mathcal{A}_f(x^0)\vec{h}$ е отрицателно дефинирана, x^0 е строг локален максимум за f.

в/ ако $\mathcal{A}_f(x^0)\vec{h}$ е знакопроменлива, x^0 не е локален екстремум за f.

Забележка. Нищо не може да се твърди в случаите, когато $\mathcal{A}_f(x^0)\vec{h}$ е полуопределена: този случай може да има или да няма локален екстремум. Така, ако разгледаме функциите

$$f(x,y) = x^2 + y^4 \quad \text{и} \quad g(x,y) = x^2 - y^4$$

в $\mathbb{R}^2$, то в критичната точка $(0,0)$ имаме

$$\mathcal{A}_f\left((0,0)\right)(h,k) = \mathcal{A}_g\left((0,0)\right)(h,k) = h^2,$$

но първата функция притежава локален екстремум в тази точка, а втората – не.

В частност, оттук се вижда, че достатъчното условие от теоремата не е необходимо.

Доказателство на достатъчното условие. Ще ни е нужно помощно твърдение за квадратичните форми:

Лема. *Нека $\mathcal{A}\vec{h}$ е положително определена квадратична форма в $\mathbb{R}^n$. Тогава съществуват константи c и C, $0 < c \leq C$, така че за всяко $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ имаме*

$$c\left|\left|\vec{h}\right|\right|^2 \leq \mathcal{A}\vec{h} \leq C\left|\left|\vec{h}\right|\right|^2.$$

Доказателство на лемата. Нека S е единичната сфера в $\mathbb{R}^n$, т.е. множеството от тези вектори $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$, за които $\left|\left|\vec{h}\right|\right| = 1$. Очевидно множеството S е компактно, и по теоремите на Вайерщрас непрекъсната функция $\mathcal{A}\vec{h}$ достига върху него своята най-малка и най-голяма стойност. Да ги означим съответно с c и C, $c \leq C$. От положителната определеност следва, че $c > 0$ (нулевият вектор не принадлежи на S). Нека сега $\vec{h}$ е произволен ненулев вектор. Тогава $\frac{\vec{h}}{||\vec{h}||} \in S$, и следователно

$$\mathcal{A}\left(\frac{\vec{h}}{\left|\left|\vec{h}\right|\right|}\right) = \frac{1}{\left|\left|\vec{h}\right|\right|^2}\mathcal{A}\vec{h} \in [c, C].\blacksquare$$

Числата c и C, чието съществуване се установява от лемата, се наричат съответно долна и горна граница на квадратичната форма.

За доказателство на достатъчното условие ще напишем развитието на $f(x)$ около точката x^0 по Тейлор до втория член с остатъчен член във формата на Пеано. Тъй като първите производни се анулират в x^0, съответният член в тейлоровото развитие отсъствува. За достатъчно малки по норма вектори $\vec{h}$ получаваме

$$\Delta f = f\left(x^0 + \vec{h}\right) - f\left(x^0\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}\left(x^0\right)\, h_i h_j + o\left(\left|\left|\vec{h}\right|\right|^2\right),$$

откъдето получаваме

$$\frac{\Delta f}{\left|\left|\vec{h}\right|\right|^2} - \frac{1}{\left|\left|\vec{h}\right|\right|^2}\mathcal{A}f\left(x^0\right)\vec{h} \to_{\vec{h}\to 0} 0.$$

Да предположим, че квадратичната форма $\mathcal{A}f\left(x^0\right)$ е положително определена, и да означим с c нейната долна граница. Тогава за достатъчно малки по норма $\vec{h}$ имаме

$$\frac{\Delta f}{\left|\left|\vec{h}\right|\right|^2} - \frac{1}{\left|\left|\vec{h}\right|\right|^2}\mathcal{A}f\left(x^0\right)\vec{h} > -\frac{c}{2} \text{ и следователно } \frac{\Delta f}{\left|\left|\vec{h}\right|\right|^2} \geq c - \frac{c}{2} = \frac{c}{2} > 0,$$

т.е. $\Delta f > 0$ за достатъчно малки $\vec{h}$, което доказва точка а/. Точка б/ може да се докаже по същия начин, или като се приложи точка а/ за функцията $-f$.

Ако формата $\mathcal{A}f\left(x^0\right)$ е знакопроменлива, това означава, че съществуват вектори $\vec{h}^1, \vec{h}^2 \in \mathbb{R}^n$ такива, че $\mathcal{A}f\left(x^0\right)\vec{h}^1 > 0$ и $\mathcal{A}f\left(x^0\right)\vec{h}^2 < 0$. Да заместим в горните формули вектора $\vec{h}$ с $t\vec{h}^1$. Имайки пред вид, че $\mathcal{A}f\left(x^0\right)t\vec{h}^1 = t^2\mathcal{A}f\left(x^0\right)\vec{h}^1$, за малки t имаме

$$\frac{f\left(x^0 + t\vec{h}^1\right) - f\left(x^0\right)}{t^2\left\|\vec{h}^1\right\|} = \frac{1}{\left\|\vec{h}^1\right\|}\mathcal{A}f\left(x^0\right)\vec{h}^1 + \frac{o\left(\left\|t\vec{h}^1\right\|\right)}{\left\|t\vec{h}^1\right\|^2}.$$

Тъй като второто събираемо клони към нула при $t \to 0$, разликата $f\left(x^0 + t\vec{h}^1\right) - f\left(x^0\right)$ е положителна при достатъчно малки стойности на t. По същия начин се вижда, че $f\left(x^0 + t\vec{h}^2\right) - f\left(x^0\right)$ е отрицателна при достатъчно малки стойности на t, и следователно в x^0 не може да има нито локален минимум, нито локален максимум. ■

Отново ще изложим отделно случая на функция на две променливи. Нека $f(x, y)$ е двукратно гладка функция в околност на критичната точка (x_0, y_0). Да дадем на x и на y нараствания съответно h и k. По формулата на Тейлор

$$\Delta f = f\left(x_0 + h, y_0 + k\right) - f\left(x_0, y_0\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(h^2 f''_{xx}\left(x_0, y_0\right) + 2hk f''_{xy}\left(x_0, y_0\right) + k^2 f''_{yy}\left(x_0, y_0\right)\right) + o\left(\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2\right),$$

тъй като по предположение първите производни на функцията се анулират. Според теорема 3, знака на разликата отляво при достатъчно малки h и k съвпада със знака на първия член отдясно. Да означим за простота $f''_{xx}\left(x_0, y_0\right) = A$, $f''_{xy}\left(x_0, y_0\right) = B$, $f''_{yy}\left(x_0, y_0\right) = C$. Да предположим, че $A \neq 0$[*]. Имаме

$$Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 = A\left(h^2 + 2\frac{B}{A}hk + \frac{C}{A}k^2\right) = A\left(\left(h + \frac{B}{A}k\right)^2 + \frac{AC - B^2}{A^2}k^2\right).$$

[*] Читателят лесно ще съобрази, че това предположение не намалява общността.

Оттук получаваме:

а/ При $AC - B^2 > 0$ и $A > 0$ имаме $\Delta f \geq 0$, т.е. (x_0, y_0) е локален минимум.

б/ При $AC - B^2 > 0$ и $A < 0$ имаме $\Delta f \leq 0$, т.е. (x_0, y_0) е локален минимум.

в/ Нека $AC - B^2 < 0$. Тогава за двойки (h, k), за които $h = -\frac{B}{A}k$, изразът в скобите е отрицателен, а за двойки от вида $(h, 0)$ - положителен. Следователно нарастването Δf може да има различни знаци, и точката (x_0, y_0) не може да бъде точка на локален екстремум.

Забележка. Разбира се, доказаното по-горе веднага следва от теорема 3 и критерия на Силвестър. Наистина, в двумерния случай имаме

$$\Delta_1 = A \quad \text{и} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Глобални екстремуми. В повечето случаи е важно да намерим най-голямата и на-малката стойности на дадена функция върху цялото дефиниционно множество, т.е. глобалният минимум и максимум на функцията. Да предположим, че дефиниционното множество D на функцията $f(x)$ е компактно множество в $\mathbb{R}^n$. Тогава по теоремата на Вайерщрас $f(x)$ достига най-малка и най-голямата си стойност в подходящи точки на D. Тогава получаваме следната алтернатива (например, за максималната стойност): глобалният максимум може да се достигне във вътрешна или контурна точка на D. Ако максимума се достига във вътрешна точка, то той е и локален, и ние можем да използваме развитата по-горе теория. Ние обаче все още не разполагаме със средства за откриване на екстремумите върху контура bD на дефиниционната област. За случая на "гладък"контур това ще бъде направено в §9.

В някои случаи подобни разсъждения могат да бъдат проведени и за некомпактни области – виж напр. задачи 2 и 3.

Приложение: Метод на най-малките квадрати. В този пункт ще дадем едно просто приложение на необходимото условие за локален екстремум, което обаче намира широко приложение в естествените науки. Нека x, y, z са някакви величини, и ние искаме да покажем, че между тях съществува линейна зависимост от вида

$$z = ax + by + c.$$

Проблема е да се намерят коефициентите a, b и c.

Разбира се, тяхното определяне трябва да се базира на направените измервания. Да предположим, че е проведена серия от n експеримента, в резултат на които са измерени величините $x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n$. Трябва да се намерят такива стойности на коефициентите, така че експериментално измерените стойности z_k най-малко се различават от теоретично намерените по формулата $z_k = ax_k + by_k + c$. Метода на най-малките квадрати се състои в следното: да се минимизира сумата от квадратите на отклоненията. По-точно, ако означим

$$F(a,b,c) = \sum_{k=1}^{n} \left((ax_k + by_k + c) - z_k\right)^2,$$

да определим къде тази функция достига минималната си стойност. За критичните точки на тази функция получаваме уравненията:

$$F'_a = 2\sum_{k=1}^{n} x_k \left((ax_k + by_k + c) - z_k\right) = 0,$$

$$F'_b = 2\sum_{k=1}^{n} y_k \left((ax_k + by_k + c) - z_k\right) = 0,$$

$$F'_c = 2\sum_{k=1}^{n} \left((ax_k + by_k + c) - z_k\right) = 0.$$

Да въведем нови означения: Нека означим с $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ n-мерните вектори $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, $\vec{z} = (z_1, \ldots, z_n)$, и нека $\vec{1}$ да означава n-мерният вектор, съставен само от единици. Тогава $F(a,b,c)$ се написва като

$$F(a,b,c) = \left\|\vec{z} - a.\vec{x} - b.\vec{y} - c.\vec{1}\right\|^2.$$

Уравненията на критична точка, след разкриване на скобите, са линейни относно a, b и c и имат вида:

$$a\left\langle\vec{x},\vec{x}\right\rangle + b\left\langle\vec{x},\vec{y}\right\rangle + c\left\langle\vec{x},\vec{1}\right\rangle = \left\langle\vec{x},\vec{z}\right\rangle,$$

$$a\left\langle\vec{y},\vec{x}\right\rangle + b\left\langle\vec{y},\vec{y}\right\rangle + c\left\langle\vec{y},\vec{1}\right\rangle = \left\langle\vec{y},\vec{z}\right\rangle,$$

$$a\left\langle\vec{1},\vec{x}\right\rangle + b\left\langle\vec{1},\vec{y}\right\rangle + c\left\langle\vec{1},\vec{1}\right\rangle = \left\langle\vec{1},\vec{z}\right\rangle.$$

В линейната алгебра се доказва, че ако векторите $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{1}$ са линейно независими*, то детерминантата, съставена от коефициентите пред неизвестните, е различна от нула (т.н. детерминант на Грам). Следователно системата притежава единствено решение за a, b и c. Тъй като за функцията $F(a,b,c)$ е изпълнено

$$\lim_{||(a,b,c)||\to\infty} F(a,b,c) = +\infty,$$

то така намерената единствен критична точка е локален и глобален минимум на функцията (виж зад. 2).

Упражнения.

1. Нека в $\mathbb{R}^2$ е зададена функцията $f(x,y) = (y - x^2)\,(y - 3x^2)$. Докажете, че:

а/ $f(x,y)$ няма локален екстремум в точката $(0,0)$. (Упътване: разгледайте точките от вида $(0,y)$ и $(x, 2x^2)$).

б/ Ограничението на функцията върху произволна права през точката $(0,0)$ притежава строг локален минимум в тази точка.

2. Нека $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, е непрекъсната функция такава, че $\lim_{||x||\to\infty} f(x) = +\infty$. Докажете, че минималната стойност на $f(x)$ се достига в някоя точка.

3. Нека $f(x)$ е еднократно гладка функция в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяваща условията на предната задача. Докажете, че ако $f(x)$ притежава само една критична точка, то в нея се достига глобалният минимум.

---

*Ако векторите $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{1}$ са линейно зависими, това означава, че една от величините x, y се изразява линейно чрез другата и е излишна в дадения модел.

1.8 Теорема за неявната функция.

Първата теорема, разглеждана в този параграф, се отнася до решаване на уравнения от вида $F(x,y) = 0$ спрямо една от променливите, например y. Другата променлива - x - се разглежда като параметър, и очевидно решението трябва да зависи от нея. Да запишем това решение във вида $y = f(x)$. За да проверим дали така дефинираното y е решение на търсеното уравнение, трябва да го заместим в уравнението. Стигаме до равенството

$$F\left(x, f(x)\right) \equiv 0.$$

Определение. *Ако функцията $f(x)$ удовлетворява тъждествено горното равенство за всяко x от дефиниционната си област, ще казваме, че тя е неявна функция, определена от уравнението $F(x,y) = 0$.*

Геометрически това може да се каже така: множеството от точки в равнината, чиито координати удовлетворяват равенството $F(x,y) = 0$, да се представи като графика на функцията $f(x)$.

По-долу ние разглеждаме въпроса за съществуване и единственост на неявната функция. Разбира се, ние ще се интересуваме от неявни функции с хубави свойства, в частност диференцируеми. Ако $f(x)$ е такава функция, то, диференцирайки горното равенство по x и използвайки теоремата за диференциране на съставни функции, получаваме

$$F'_x\left(x, f(x)\right) + f'(x)F'_y\left(x, f(x)\right) \equiv 0,$$

откъдето

$$f'(x) = -\frac{F'_x\left(x, f(x)\right)}{F'_y\left(x, f(x)\right)}.$$

Оттук се вижда. че е естествено да наложим на функцията F условието $F'_y(x,y) \neq 0$.

Ще разгледаме един прост пример. Да разгледаме уравнението

$$F(x,y) = x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

определящо окръжност с център в началото и радиус R в равнината $\mathbb{R}^2$. Ясно е, че за да има уравнението решение, трябва $x \in [-R, R]$. В крайните точки $x = \pm R$ се нарушава условието $F'_y(x,y) \neq 0$. Лесно се вижда, че в тези точки окръжността не може да бъде представена като графика на диференцируема функция (тангентата ѝ става вертикална).

За всяко x от отворения интервал $(-R, R)$ това уравнение има точно две решения относно y:

$$y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Следователно всяка неявна функция, определена от горното уравнение, има вида

$$f(x) = \varepsilon(x)\sqrt{R^2 - x^2},$$

където $\varepsilon(x)$ е произволна функция, вземаща стойности плюс или минус единица. Такива функции има безбройно много.

Ако се интересуваме само от непрекъснати функции, получаваме само две неявни функции: $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ и $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$, т.е. отново няма еднозначност. За да се избегне нееднозначността, нещата трябва да се разглеждат локално – да се фиксира едно решение в дадена точка (тя може да лежи върху горната или долната полуокръжност), и да се разгледа непрекъснатата функция, вземаща съответната стойност в тази точка. Тогава, в зависимост от избраното решение в началната точка, ще получим уравнението на горната или долната полуокръжност.

Сега вече сме подготвени да дадем точната формулировка на теоремата:

Теорема 1. (Теорема за неявната функция, случай на едно уравнение). *Нека $F(x, y)$ е непрекъсната функция в $\mathbb{R}^2$, притежаваща непрекъсната производна по y. Нека (x_0, y_0) е точка от дефиниционното ѝ множество, удовлетворяваща условията*

$$F\,(x_0, y_0) = 0\,,\ F'_y\,(x_0, y_0) \neq 0.$$

Тогава за достатъчно малки положинелни δ имаме:

а/ Съществува функция $f(x)$, дефинирана и непрекъсната в интервала $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, която удовлетворява условията:

1/ $f\,(x_0) = y_0$, и

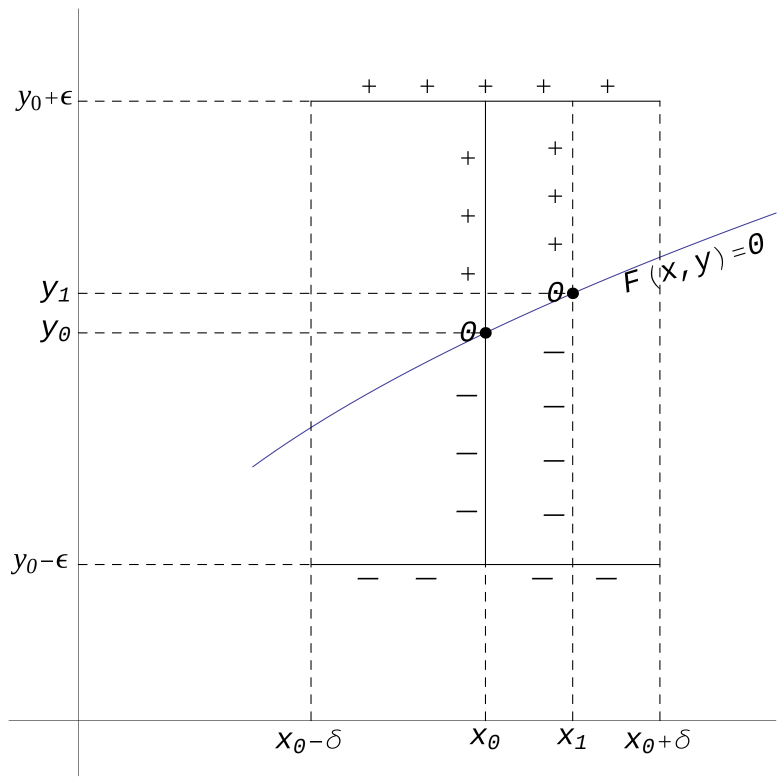
2/ $F\,(x, f(x)) \equiv 0$ за всяко $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

б/ $f(x)$ е единствената непрекъсната функция в интервала $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, удовлетворяваща условията 1/ и 2/.

в/ Ако $F(x,y)$ е диференцируема в точката (x_0,y_0), то $f(x)$ е диференцируема в x_0, като

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}.$$

Ако $F(x,y)$ е k-кратно гладка в околност на точката (x_0,y_0), то същото е вярно и за $f(x)$ в околност на x_0.



Доказателство на теоремата за неявната функция.

Доказателство. За определеност можем да предположим, че $F'_y(x_0,y_0) > 0$. Тогава неравенството $F'_y(x,y) > 0$ е вярно и в някаква околност U на (x_0,y_0) в $\mathbb{R}^2$.

Да разгледаме $F(x_0,y)$ като функция на y; от горното следва, че тя е строго монотонно растяща в някаква околност на y_0. Тъй като

$F(x_0, y_0) = 0$, то при достатъчно малки стойности на $\varepsilon > 0$ ще имаме

$$F(x_0, y) > 0 \text{ при } y \in (y_0, y_0 + \varepsilon], \quad \text{и} \quad F(x_0, y) < 0 \text{ при } y \in [y_0 - \varepsilon, y_0).$$

Да прекараме през точките $(x_0, y_0 - \varepsilon)$ и $(x_0, y_0 + \varepsilon)$ хоризонтални отсечки: тогава знакът на $F(x, y)$ се запазва в някаква околност на тези точки (виж чертежа, на който са означени знаците на $F(x, y)$ в съответните точки).

Тогава можем да изберем (достатъчно малко) $\delta > 0$, така че

– за всяко $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ имаме $F(x, y_0 - \varepsilon) < 0$, $F(x, y_0 + \varepsilon) > 0$.

– правоъгълникът $\Delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ се съдържа в околността U (т.е. в него $F'_y > 0$).

Да фиксираме $x_1 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$; тогава функцията $F(x_1, y)$ е строго монотонно растяща в интервала $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$, взема отрицателна стойност в левия му край и положителна - в десния. Следователно съществува *единствено* $y_1 \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ такова, че $F(x_1, y_1) = 0$. Полагайки $f(x_1) = y_1$, получаваме функция, дефинирана в интервала $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ и удовлетворяваща условията 1/ и 2/ от точка а/.

Ще отбележим едно следствие от горната конструкция: ако (x, y) е произволна точка от Δ такава, че $F(x, y) = 0$, то $y = f(x)$.

Ще докажем непрекъснатостта на така дефинираната функция. Най-напред ще докажем непрекъснатостта в точката x_0. Горната конструкция може да се изложи по следния начин: за всяко достатъчно малко $\varepsilon > 0$ ние намерихме $\delta > 0$, така че за всяко x, за което $|x - x_0| < \delta$, ще имаме $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$; това е точно дефиницията на Коши за непрекъснатост.

Да вземем сега произволно $x_1 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, и нека $y_1 = f(x_1)$; тогава ние можем да повторим горната конструкция, избирайки достатъчно малко $\varepsilon_1 > 0$ и зависеща от него $\delta_1 > 0$, и конструирайки неявната функция $\tilde{f}(x)$ за $x \in (x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1)$. Както доказахме, функцията $\tilde{f}(x)$ е непрекъсната в x_1.

Ние можем да изберем ε_1 и δ_1 толкова малки, че правоъгълникът $\Delta_1 = [x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1] \times [y_1 - \varepsilon_1, y_1 + \varepsilon_1]$ да се съдържа в Δ. Тогава, поради отбелязаната по-горе единственост, имаме $\tilde{f}(x) = f(x)$ за $x \in (x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1)$, и следователно $f(x)$ е непрекъсната в x_1. С това подточка а/ е доказана.

Подточка б/: Нека $\tilde{f}(x)$ е непрекъсната функция, дефинирана в околност на x_0 и удовлетворяваща условията 1/ и 2/. Тогава за стойности на x, достатъчно близки до x_0, точката с координати $\left(x, \tilde{f}(x)\right)$ ще принадлежи на правоъгълника Δ. От гореказаното се вижда, че тогава $\left(x, \tilde{f}(x)\right) = (x, f(x))$, т.е. $\tilde{f}(x)$ и $f(x)$ ще съвпадат в някаква околност на точката x_0.

Да означим сега с x_1 точната горна граница на точките, за които $\tilde{f}(x) = f(x)$; ако допуснем, че x_1 е в дефиниционната област на $\tilde{f}(x)$ и $f(x)$, то повтаряйки същите разсъждения за x_1 вместо за x_0, получаваме, че $\tilde{f}(x)$ и $f(x)$ съвпадат в околност на x_1, т.е. противоречие. С това б/ е доказано.

Доказателство на в/: Ако ни е известно, че неявната функция $f(x)$ е диференцируема, то, както беше показано в началото на параграфа, формулата за $f'(x_0)$ се получава чрез диференциране на равенството $F(x, f(x)) \equiv 0$.

За да докажем диференцируемостта на $f(x)$, ще използваме формулата за нарастването за диференцируемата функция $F(x, y)$. Нека x е достатъчно близко до x_0, $y = f(x)$, $\Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0)$. Тогава

$$\Delta F = F(x, y) - F(x_0, y_0) = 0 - 0 = 0,$$

и формулата за нарастването дава

$$0 = \Delta F = F'_x(x_0, y_0)\,\Delta x + F'_y(x_0, y_0)\,\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\,\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\,\Delta y,$$

където $\alpha(\Delta x, \Delta y), \beta(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $\Delta x, \Delta y \to 0$. Тогава

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F'_x(x_0, y_0) + \alpha(\Delta x, \Delta y)}{F'_y(x_0, y_0) + \beta(\Delta x, \Delta y)} = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}.$$

Оттук следва диференцируемостта на $f(x)$ в x_0, както и формулата за производната и; разбира се, същата формула е валидна за всяко x от дефиниционния интервал.

Да допуснем, че $F(x, y)$ притежава производни до ред k: тогава, диференцирайки доказаната формула за $f'(x)$, получаваме k-кратната диференцируемост на $f(x)$. ■

Геометрична интерпретация. Нека $F(x, y)$ е еднократно гладка функция в $\mathbb{R}^2$. Да означим с M множеството на нулите на $F(x, y)$, т.е.

от точките (x, y) в равнината, за които $F(x, y) = 0$. Ще предположим, че в нито една точка от M двете първи частни производни $F_x(x, y)$ и $F_y(x, y)$ не се анулират едновременно. Тогава доказаната по-горе теорема допуска следната геометрична интерпретация:

Теорема 2. *При горното условие множеството M локално (т.е. в някаква околност на всяка своя точка) се представя като графика на гладка функция.*

Наистина, да фиксираме някаква точка $(x_0, y_0) \in M$. Ако имаме $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, и $f(x)$ е съответната неявна функция, от горното доказателство се вижда, че в някаква околност на (x_0, y_0) равенствата $F(x, y) = 0$ и $y = f(x)$ са еквивалентни. Аналогично, ако $F'_x(x_0, y_0) \neq 0$, то около (x_0, y_0) множеството M се представя с уравнението $x = f(y)$.

Забележка. Както знаем, графиките на гладките функции са частен случай на регулярни параметрично зададени криви (виж част I, §2.12). Следователно локално множеството M притежава регулярна параметризация. Може да се докаже, че в такъв случай локалните параметризации могат да бъдат "слепени"и да се получи регулярна параметризация на цялата крива.

В крайна сметка геометричният смисъл на теорема 2 може да се формулира по следния начин:

Нека $F(x, y)$ е еднократно гладка функция на две променливи, като за всички (x, y) имаме $\overrightarrow{\text{grad}} F(x, y) \neq \vec{0}$. Тогава множеството M, определено с уравнението $F(x, y) = 0$, представлява регулярна еднократно гладка крива в равнината.

Доказателство на теорема 2 от §5. Сега ние можем да докажем теорема 2 от §5, която твърди, че градиентът на функция на две променливи в дадена точка е перпендикулярен на линията на ниво, минаваща през тази точка.

Да уточним формулировката: Нека $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ е регулярна параметрично зададена крива, $(x_0, y_0) \in \Gamma$, и $\vec{v}$ е вектор с начало в точката (x_0, y_0). Ще казваме, че $\vec{v}$ *е перпендикулярен на* Γ, ако $\vec{v}$ е перпендикулярен на допирателната права към Γ в (x_0, y_0).

Нека е дадена еднократно гладката функция $F(x, y)$ на две променливи и (x_0, y_0) е точка от дефиниционната и област. Теоремата има смисъл , ако $\overrightarrow{\mathrm{grad}} F(x_0, y_0) \neq \vec{0}$. Да предположим, че $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Нека $F(x_0, y_0) = a$; тогава линията на ниво L_a, минаваща през (x_0, y_0), се представя с уравнението $F(x, y) - a = 0$. Очевидно производната по y на лявата страна на това равенство съвпада с $F'_y(x_0, y_0)$ и е различна от нула. Ако означим с $f(x)$ неявната функция, определена от това равенство, то в околност на (x_0, y_0) множеството L_a съвпада с графика на $f(x)$. Допирателната към тази графика в (x_0, y_0) е колинеарна с вектора $\vec{l}(x_0) = (1, f'(x_0))$. Така ортогоналността на векторите $\vec{l}(x_0)$ и $\overrightarrow{\mathrm{grad}} F(x_0, y_0)$ се свежда до равенството

$$F'_x(x_0, y_0) + f'(x_0) F'_y(x_0, y_0) = 0,$$

което беше получено по-горе чрез диференциране на тъждеството $F(x, f(x)) \equiv 0$.

Теорема за неявната функция за едно уравнение и няколко параметъра. В следващия по сложност случай, който ще разгледаме, отново имаме едно уравнение $F(x, y) = 0$, което трябва да бъде решено относно променливата y, но в този случай параметъра x е вече векторна - n-мерна - променлива, т.е. $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Формулировката и доказателството в този случай почти напълно съвпадат с дадените по-горе, и ние само ще формулираме теоремата.

Теорема 3. (Теорема за неявната функция, случай на едно уравнение и няколко параметъра). *Нека $F(x, y) = F(x_1, \ldots, x_n, y)$ е непрекъсната функция в $\mathbb{R}^{n+1}$, притежаваща непрекъсната частна производна по y. Нека $(x^0, y_0) = (x_1^0, \ldots, x_n^0, y_0)$ е точка от дефиниционното и множество, удовлетворяваща условията*

$$F\left(x^0, y_0\right) = 0\,,\; F'_y\left(x^0, y_0\right) \neq 0.$$

Тогава:

а/ За достатъчно малко $\delta > 0$ съществува функция $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$, дефинирана и непрекъсната в кълбото $B(x^0, \delta) \subset \mathbb{R}^n$ с център x^0 и радиус δ, и удовлетворяваща условията:

1/ $f(x^0) = y_0$, и

2/ $F(x, f(x)) \equiv 0$ за всяко $x \in B(x^0, \delta)$.

б/ $f(x)$ е единствената непрекъсната функция в кълбото $B\left(x^0, \delta\right)$, удовлетворяваща условията 1/ и 2/.

в/ Ако $F(x, y)$ е диференцируема в точката (x^0, y_0), то $f(x)$ е диференцируема в x^0, като

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^0\right) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}\left(x_0, y_0\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(x_0, y_0\right)}, \; i = 1, \ldots, n.$$

Теорема за неявната функция (общ случай). Тук ще формулираме и докажем теорема, аналогична на дадената по-горе, за случая на n уравнения с n неизвестни и произволен брой параметри. Като начало ще разгледаме случая $n = 2$. Нека имаме уравненията

$$F(x, y, u, v) = 0,$$

$$G(x, y, u, v) = 0,$$

където F и G са еднократно гладки функции на четири променливи, и нека нашата цел е да ги разрешим относно променливите u и v, т.е. да изразим u и v чрез параметрите x и y. По-точно, ние искаме да намерим функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ такива, че при заместването им в уравненията да получим тъждества относно x и y:

$$F(x, y, u(x, y), v(x, y)) \equiv 0,$$

$$G(x, y, u(x, y), v(x, y)) \equiv 0.$$

Да предположим, че диференцируемите функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ са вече намерени, да се опитаме да пресметнем техните производни, например, по x. Диференцирайки по x горните тъждества, получаваме

$$F'_x + u'_x F'_u + v'_x F'_v \equiv 0,$$

$$G'_x + u'_x G'_u + v'_x G'_v \equiv 0.$$

Тези равенства могат да се разглеждат като система от линейни уравнения относно неизвестните u'_x, v'_x. Както знаем от линейната алгебра, ако детерминантата от коефициентите пред неизвестните не се анулира, те имат единствено решение, зададено с формулите на Крамер. С други думи, ако предположим, че

$$\begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix} = \frac{D(F,G)}{D(u,v)} \neq 0,$$

то частните производни на $u(x,y)$ и $v(x,y)$ относно x ще се задават с формулите

$$u'_x = -\frac{\begin{vmatrix} F'_x & F'_v \\ G'_x & G'_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix}},\ v'_x = -\frac{\begin{vmatrix} F'_u & F'_x \\ G'_u & G'_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix}}.$$

Ако се опитаме да намерим u'_y, v'_y, отново ще стигнем до условието $\dfrac{D(F,G)}{D(u,v)} \neq 0$; ясно е, че това условие замества условието $F'_y \neq 0$, наложено в случая на едно уравнение. Имайки това пред вид, вече можем да формулираме общия вид на теоремата - случая на n уравнения с n неизвестни и m параметъра:

Теорема 4. (Теорема за неявната функция - общ случай.) *Нека*

$$F_1\left(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n\right),\ldots,F_n\left(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n\right)$$

са n еднократно гладки функции, дефинирани в отворено подмножество на $\mathbb{R}^{n+m}$. Нека $(x^0,y^0) = (x^0_1,\ldots,x^0_m,y^0_1,\ldots,y^0_n)$ е точка от дефиниционното им множество, така че

$$F_1\left(x^0,y^0\right) = \ldots = F_n\left(x^0,y^0\right) = 0, \quad \frac{D\left(F_1,\ldots,F_n\right)}{D\left(y_1,\ldots,y_n\right)}\left(x^0,y^0\right) \neq 0.$$

Тогава:

а/ За достатъчно малко $\delta > 0$ съществуват функции $f_1(x) = f_1\left(x_1,\ldots,x_m\right),\ldots,f_n(x) = f_n\left(x_1,\ldots,x_m\right)$, дефинирани и непрекъснати в кълбото $B\left(x^0,\delta\right) \subset \mathbb{R}^m$ с център x^0 и радиус δ, и удовлетворяващи условията:

1/ $f_1\left(x^0\right) = y^0_1,\ldots,f_n\left(x^0\right) = y^0_n$, и

2/ $F_j\left(x_1, \ldots, x_m, f_1(x), \ldots, f_n(x)\right) \equiv 0$ *за* $j = 1, 2, \ldots, n$ *и за всяко* $x = (x_1, \ldots, x_m) \in B\left(x^0, \delta\right)$.

б/ $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ *е единствената система от* n *функции в кълбото* $B\left(x^0, \delta\right)$*, удовлетворяваща условията 1/ и 2/.*

в/ Функциите $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ *са диференцируеми в точката* x^0.

Доказателството на теоремата се извършва чрез индукция по броя на уравненията n. За да обясним обаче идеята по-добре, ще изложим отделно доказателството на частния случай, разгледан по-горе.

Доказателство в случая $n = 2$**.** Трябва да решим уравненията $F(x, y, u, v) = 0$, $G(x, y, u, v) = 0$ относно u и v в околност на точката (x_0, y_0, u_0, v_0) при условие, че $F\left(x_0, y_0, u_0, v_0\right) = G\left(x_0, y_0, u_0, v_0\right) = 0$ и $\frac{D(F,G)}{D(u,v)} \neq 0$. Ще следваме обичайния метод на решаване на системи от две уравнения - ще определим едната от неизвестните величини от едното уравнение и ще я заместим в другото, като получим в резултат едно уравнение с едно неизвестно.

Да отбележим най-напред, че от условието на теоремата следва, че поне една от частните производни F'_u, F'_v, G'_u, G'_v не се анулира в точката (x_0, y_0, u_0, v_0); може да предположим, че $G'_v\left(x_0, y_0, u_0, v_0\right) \neq 0$. Следователно може да приложим теоремата за неявната функция за уравнението

$$G(x, y, u, v) = 0$$

и да го решим относно променливата v. Получаваме функция $\varphi(x, y, u)$ със свойствата

$$G(x, y, u, \varphi(x, y, u)) \equiv 0, \quad \varphi\left(x_0, y_0, u_0\right) = v_0.$$

Чрез диференциране на горното тъждество по u получаваме

$$\varphi'_u(x, y, u) = -\frac{G'_u(x, y, u, \varphi(x, y, u))}{G'_v(x, y, u, \varphi(x, y, u))}.$$

Да заместим променливата v в първото уравнение с $\varphi(x, y, u)$; получаваме уравнението

$$\widetilde{F}(x, y, u) \stackrel{def}{=} F(x, y, u, \varphi(x, y, u)) = 0.$$

По теоремата за диференциране на съставни функции получаваме

$$\widetilde{F}'_u = F'_u + \varphi'_u F'_v = F'_u - \frac{G'_u}{G'_v} F'_v = \frac{\frac{D(F,G)}{D(u,v)}}{G'_v},$$

което по условие не се анулира в точката (x_0, y_0, u_0, v_0). Следователно можем да приложим теоремата за неявната функция към уравнението $\widetilde{F}(x,y,u) = 0$. Да означим получената функция с $u(x,y)$, и нека $v(x,y) = \varphi(x,y,u(x,y))$. Лесно се вижда, че така построената двойка функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ удовлетворява исканите условия, т.е.

$$F(x,y,u(x,y),v(x,y)) \equiv 0, \quad G(x,y,u(x,y),v(x,y)) \equiv 0,$$

$$u\left(x_0, y_0\right) = u_0, \quad v\left(x_0, y_0\right) = v_0. \blacksquare$$

Доказателство в общия случай. Доказателството се извършва чрез индукция по броя на уравненията n (броят на параметрите не е от значение). Отново се използва методът на заместването. От условието $\frac{D(F_1,\dots,F_n)}{D(y_1,\dots,y_n)}\left(x^0, y^0\right) \neq 0$ следва, че поне един от елементите на съответната матрица не се анулира. Сменяйки, ако е необходимо, номерацията на уравненията и неизвестните, може да считаме, че

$$\frac{\partial F_n}{\partial y_n}\left(x^0, y^0\right) \neq 0.$$

Следователно към уравнението

$$F_n\left(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n\right) = 0$$

може да бъде приложена теоремата за неявната функция относно променливата y_n. Получаваме функция $y_n = \varphi\left(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_{n-1}\right)$ такава, че равенството

$$F_n\left(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_{n-1}, \varphi\left(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_{n-1}\right)\right) = 0$$

е тъждествено изпълнено по $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_{n-1}$. Чрез диференциране получаваме равенствата

$$\frac{\partial F_n}{\partial y_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial F_n}{\partial y_n} = 0 \quad \text{за} \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Да въведем сега функциите

$$\widetilde{F}_j\left(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_{n-1}\right) \stackrel{def}{=}$$

$\stackrel{def}{=} F_j\left(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_{n-1},\varphi\left(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_{n-1}\right)\right)$ за $j=1,\ldots,n-1$.

Отново основната трудност е в доказателството на равенството

$$\frac{D\left(\widetilde{F}_1,\ldots,\widetilde{F}_{n-1}\right)}{D\left(y_1,\ldots,y_{n-1}\right)}\left(x_1^0,\ldots,x_m^0,y_1^0,\ldots,y_{n-1}^0\right)\neq 0.$$

За $i,j=1,\ldots,n-1$ имаме

$$\frac{\partial \widetilde{F}_j}{\partial y_i}=\frac{\partial F_j}{\partial y_i}+\frac{\partial \varphi}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial F_n}{\partial y_n}.$$

Да разгледаме сега детерминантата

$$\frac{D\left(F_1,\ldots,F_n\right)}{D\left(y_1,\ldots,y_n\right)}=\left|\begin{array}{ccc|c} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{n-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial y_n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_{n-1}} & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n}\\ \hline \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_n}{\partial y_{n-1}} & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{array}\right|$$

Да преобразуваме тази детерминанта, като вземем последния стълб, умножен по $\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}$ и го прибавим към първия, умножен по $\frac{\partial \varphi}{\partial y_2}$ го прибавим към втория,... , умножен по $\frac{\partial \varphi}{\partial y_{n-1}}$ го прибавим към $n-1$-вия. Както знаем, при тези операции стойността на детерминантата не се изменя. Като вземем пред вид получените по-горе равенства, имаме

$$\frac{D\left(F_1,\ldots,F_n\right)}{D\left(y_1,\ldots,y_n\right)}=\left|\begin{array}{ccc|c} \frac{\partial \widetilde{F}_1}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial \widetilde{F}_1}{\partial y_{n-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial y_n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{\partial \widetilde{F}_{n-1}}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial \widetilde{F}_{n-1}}{\partial y_{n-1}} & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n}\\ \hline 0 & \ldots & 0 & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{array}\right|=\frac{D\left(\widetilde{F}_1,\ldots,\widetilde{F}_{n-1}\right)}{D\left(y_1,\ldots,y_{n-1}\right)}\cdot\frac{\partial F_n}{\partial y_n},$$

откъдето получаваме търсеното неравенство $\frac{D\left(\widetilde{F}_1,\ldots,\widetilde{F}_{n-1}\right)}{D\left(y_1,\ldots,y_{n-1}\right)}\neq 0$.

Сега според индуктивното предположение можем да решим системата от уравнения $\widetilde{F}_1=0,\ldots,\widetilde{F}_{n-1}=0$, относно неизвестните

$y_1, \ldots, y_{n-1}$, т.е. да получим функции $f_1(x), \ldots, f_{n-1}(x)$, които, заместени в тези уравнения, да дават тъждества по x. За да намерим неизвестното y_n, да положим

$$f_n(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(x_1, \ldots, x_n, f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)).$$

От конструкцията е ясно, че замествайки в уравненията $F_1 = 0, \ldots, F_n = 0$ неизвестните $y_1, \ldots, y_n$ с функциите $f_1(x), \ldots, f_n(x)$, получаваме тъждества по x. Лесно се проверяват и равенствата $f_i(x_1^0, \ldots, x_n^0) = y_i^0$, $i = 1, \ldots, n$. Теоремата за неявната функция е доказана. ■

Геометрична интерпретация. Както вече направихме в частния случай на едно уравнение, теоремата за неявната функция може да бъде използвана за описание на някои геометрични обекти. По-специално, нека $F_1(x_1, \ldots, x_{n+k}), \ldots, F_n(x_1, \ldots, x_{n+k})$ са n на брой еднократно гладки функции, зададени в някаква област в $\mathbb{R}^{n+k}$. Нека M е подмножеството на $\mathbb{R}^{n+k}$, определено с уравненията

$$F_1(x_1, \ldots, x_{n+k}) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F_n(x_1, \ldots, x_{n+k}) = 0.$$

Без допълнителни условия върху функциите $F_i(x)$ структурата на множеството M трудно може да бъде описана; може да се случи например измежду тези функции да има повтарящи се, или някои от тях да са тъждествено нула. Затова върху функциите обикновено се налага следното:

Условие за регулярност: Казваме, че функциите $F_1(x), \ldots, F_n(x)$ образуват регулярна система от функции , ако техните градиенти $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, F_1(x), \ldots, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, F_n(x)$ са линейно независими за всяко x.

При горното предположение множеството M може (поне локално) да бъде лесно описано:

Теорема 5. *Ако функциите $F_1, \ldots, F_n$ образуват регулярна система, то множеството M от техните общи нули може локално* *(в околност на всяка своя точка) да се представи като графика на изображение от $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^n$.*

Доказателство. Да разгледаме матрицата с n реда и $n+k$ стълба, образувана от координатите на векторите $\overrightarrow{\text{grad}}\, F_1\left(x^0\right), \ldots, \overrightarrow{\text{grad}}\, F_n\left(x^0\right)$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\left(x^0\right) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\left(x^0\right) & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial x_{n+k}}\left(x^0\right) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}\left(x^0\right) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}\left(x^0\right) & \ldots & \frac{\partial F_2}{\partial x_{n+k}}\left(x^0\right) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}\left(x^0\right) & \frac{\partial F_n}{\partial x_2}\left(x^0\right) & \ldots & \frac{\partial F_n}{\partial x_{n+k}}\left(x^0\right) \end{pmatrix}$$

От линейната алгебра знаем, че векторите на редовете на една матрица са линейно независими точно тогава, когато тя е от максимален ранг. Следователно горната матрица е от ранг n, т.е. тя притежава поне една различна от нула поддетерминанта от ред n. Всяка такава детерминанта се получава чрез избор на n различни стълба на матрицата; ако това са стълбовете с номера $i_1, \ldots, i_n$, $1 \leq i_1 < \ldots < i_n \leq n+k$, то получената детерминанта е равна на

$$\frac{D\left(F_1, \ldots, F_n\right)}{D\left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\right)}\left(x^0\right).$$

Поне една от тези детерминанти трябва да е различна от нула; размествайки, ако е необходимо, номерацията на променливите, можем да считаме, че това е детерминантата, образувана от първите n стълба, т.е.

$$\frac{D\left(F_1, \ldots, F_n\right)}{D\left(x_1, \ldots, x_n\right)}\left(x^0\right) \neq 0.$$

Сега можем да приложим теоремата за неявната функция и да решим уравненията $F_1(x) = \ldots = F_n(x) = 0$ относно променливите $x_1, \ldots, x_n$. Получаваме, че в някаква околност на x^0 координатите на точките от M удовлетворяват уравненията

$$x_1 = f_1\left(x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n = f_n\left(x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}\right),$$

т.е. локално множеството M се представя като графиката на изображението от $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^n$, определено от функциите $f_1, \dots, f_n$. ■

Сега ще докажем многомерния аналог на теорема 2 от §5. Ще използваме въведеното в §4 понятие за допирателно подпространство към графиката на изображение.

Теорема 6. *Допирателното подпространство към M в точката x^0 съвпада с пространството от всички вектори в $\mathbb{R}^{n+k}$, ортогонални на векторите* $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, F_1\left(x^0\right), \dots, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, F_n\left(x^0\right)$.

С други думи, векторите $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, F_1\left(x^0\right), \dots, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, F_n\left(x^0\right)$ образуват базис в ортогоналното допълнение $T_{x^0}M^{\perp}$ към допирателното пространство $T_{x^0}M$.

Доказателство. Нека, както по-горе, представим локално M като графика на изображението определено от функциите $f_1, \dots, f_n$. С други думи, локално M се параметризира с променливите $x_{n+1}, \dots, x_{n+k}$. За всяко $j = 1, \dots, n$ е изпълнено тъждеството

$$F_j\left(f_1\left(x_{n+1}, \dots, x_{n+k}\right), \dots, f_n\left(x_{n+1}, \dots, x_{n+k}\right), x_{n+1}, \dots, x_{n+k}\right) \equiv 0.$$

Да диференцираме това тъждество по променливата x_{n+p}, където p е между 1 и n. Получаваме:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_{n+p}} + \frac{\partial F_j}{\partial x_{n+p}} \equiv 0.$$

От друга страна, в §4 видяхме, че допирателното пространство към M се поражда от векторите $\vec{l_p}$, $p = 1, \dots, k$:

$$\vec{l_p} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_{n+p}}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_{n+p}}, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0\right),$$

като единицата е разположена на p-то място измежду последните k координати на вектора $\vec{l_p}$. * Тогава горното тъждество може да се напише във вида

$$\left\langle \vec{l_p}, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, F_j \right\rangle = 0.$$

---

*в сравнение с §4 тук са разменени местата на зависимите и независимите променливи

Това равенство е изпълнено за всички $j = 1, \ldots, n$ и $p = 1, \ldots, k$. От условието на теоремата следва, че ортогоналното допълнение на векторите $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, F_1\left(x^0\right), \ldots, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, F_n\left(x^0\right)$ има размерност k. Следователно то съвпада с линейното пространство, породено от векторите $\vec{l_1}, \ldots, \vec{l_k}$, т.е. с допирателното пространство към M. ■

Забележка. От доказаната теорема се вижда, че допирателното пространство към M не зависи от начина на представянето му като графика, т.е от това, кои измежду променливите $x_1, \ldots, x_{n+k}$ ще изберем за независими променливи. Нещо повече: от теоремата се вижда, че допирателното подпространство не зависи от избора на ортогонална координатна система в даденото евклидово пространство. Наистина, както беше показано в §4, градиентът на дадена функция има геометричен смисъл и не зависи от координатната система,а само от скаларното произведение в евклидовото пространство.

Теорема за обратното изображение. Едно от важните приложения на теоремата за неявната функция е теоремата за обратното изображение. Нека

$$f(x) = \left(f_1\left(x_1, \ldots, x_n\right), \ldots, f_n\left(x_1, \ldots, x_n\right)\right)$$

е еднократно гладко изображение, дефинирано в отвореното множество $D \in \mathbb{R}^n$. Нека освен това

$$\frac{D\left(f_1, \ldots, f_n\right)}{D\left(x_1, \ldots, x_n\right)}(x) \neq 0 \quad \text{за всяко} \quad x \in D$$

(такова изображение ще наричане регулярно). Теоремата гласи, че всяко регулярно изображение локално е обратимо.

Теорема 7. (Теорема за обратното изображение). *Нека $f(x)$ е изображение, удовлетворяващо горните условия, и нека $x^0 \in D$ и $y^0 = f\left(x^0\right) \in f(D)$. Тогава съществуват околности U и V на точките x^0 и y^0, и еднократно гладко регулярно изображение $g(y) : V \to U$, обратно на изображението $f(x)$ (С други думи, $f(g(y))$ за всяко $y \in V$.)*

В частност, от теоремата следва, че образът $f(D)$ на изображението f е отворено множество в $\mathbb{R}^n$.

Доказателство. Да разгледаме графиката Γ_f на изображението $f(x)$, т.е. множеството от всички точки $(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$, за които $y = f(x)$. Очевидно множеството Γ_f може да се зададе с уравненията

$$F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \stackrel{def}{=} f_1(x_1, \dots, x_n) - y_1 = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots,$$

$$F_n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \stackrel{def}{=} f_n(x_1, \dots, x_n) - y_n = 0.$$

Да вземем точката $(x^0, y^0) \in \Gamma_f$. Имаме

$$\frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}\left(x^0, y^0\right) = \frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}\left(x^0\right) \neq 0$$

и следователно около тази точка можем да приложим теоремата за неявната функция, считайки $y_1, \dots, y_n$ за независими променливи и изразявайки чрез тях $x_1, \dots, x_n$. С други думи, в някаква околност V на точката y^0 съществуват единствени функции $g_1(y_1, \dots, y_n), \dots, g_n(y_1, \dots, y_n)$, и определено от тях изображение $g(y) : V \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяващи условията

1/ $g(y^0) = x^0$, и

2/ $F_k(g(y), y) = 0$, $k = 1, \dots, n$.

Равенствата 2/ могат да се напишат във вида

$$f_k(g_1(y_1, \dots, y_n), \dots, g_n(y_1, \dots, y_n)) = y_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

т.е. $f(g(y)) = y$. Да означим $U = g(V)$; тогава, тъй като V е отворено, множеството U съдържа всяка своя точка заедно с нейна околност, т.е. U е също отворено.

Накрая, регулярността на изображението $g(y)$ следва от основното свойство на функционалните детерминанти. Наистина, т.6 от §4 за производна на обратно изображение показва, че

$$\frac{D(g_1, \dots, g_n)}{D(y_1, \dots, y_n)} \neq 0. \quad \blacksquare$$

Забележка. Ако предварително се знае, че изображението f е взаимно еднозначно, то обратното му изображение е също такова и изобразява $f(D)$ върху D. Според доказаната теорема то е еднократно гладко и регулярно навсякъде.

В общия случай обаче локалната обратимост не влече след себе си глобална. Пример за това ще бъде даден в следващия параграф.

1.9 Полярни и сферични координати.

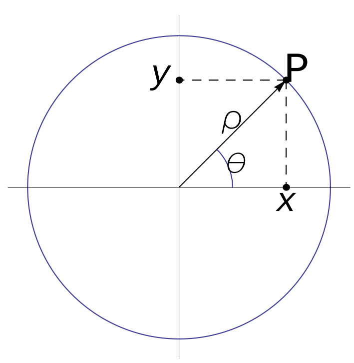
Полярна смяна на координатите в $\mathbb{R}^2$. Ще припомним понятието полярна смяна на координатите, познато от част I. Нека $D = \{(\rho, \theta) : \rho > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ и изображението от D в $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ е определено с формулите

$$x = \rho \cos\theta, \ y = \rho \sin\theta.$$

Лесно се смята, че

$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}(\rho,\theta) = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\theta \\ y'_\rho & y'_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho > 0.$$

Можем да приложим теорема 7 от предния параграф, от която се вижда, че горното изображение е локално обратимо. Очевидно обаче то не е глобално обратимо, тъй като всяка точка от $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ има безкрайно много праобрази (със стойности на θ, различаващи се със целочислени кратни на 2π.) За да избегнем нееднозначността, трябва да ограничим интервала, в който се мени полярният ъгъл θ. Стандартният избор е $\theta \in [0, 2\pi)$; тогава написаната по-горе смяна поражда взаимно еднозначно изображение на множеството $(0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ в $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.



Полярни координати в равнината.

Обратното му изображение обаче дори не е непрекъснато: наистина, ако вземем окръжност в $\mathbb{R}^2$ с център началото, и точката се движи по нея срещу часовниковата стрелка, то при доближаване на точката към абсцисната ос отдолу стойностите на θ клонят към 2π (вместо към нула). Това се дължи на факта, че дефиниционната област не е отворено множество, и теорема 7 не може да бъде приложена.

Да стесним още дефиниционната област: именно, ако с $\mathbb{R}_+$ означим положителния лъч на абсцисната ос, то горните формули определят взаимно еднозначно изображение на множеството $(0,+\infty)\times(0,2\pi)$ в $\mathbb{R}^2\backslash\mathbb{R}_+$. Сега вече можем да приложим глобалния вариант на теорема 7, която показва, че съществува еднократно гладко* обратно изображение.

Формулите за обратното изображение могат да бъдат посочени в явен вид: очевидно имаме $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$. Възстановяването на θ по x и y е малко по-сложно; в отворения първи квадрант е вярна формулата $\theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. Предлагаме на читателя самостоятелно да намери формулите за другите квадранти.

По-нагледна представа за полярната смяна на координатите можем да получим, ако разгледаме нейните координатни линии, т.е. линиите, получени при фиксиране на една от координатите ρ,θ, и променяне на другата координата. Така, при полагане $\rho=R$ и промяна на θ получаваме фамилия от концентрични окръжности с център в началото; при фиксиране на θ се получават лъчи, започващи в началото и сключващи съответният ъгъл с абсцисната ос (виж чертежа).

Сферична смяна на координатите в $\mathbb{R}^3$. Ще започнем с една по-проста смяна в $\mathbb{R}^3$: тя съпоставя на всяка тройка (ρ,θ,z) точката $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ по формулите

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta,\quad z=z.$$

С други думи, смяна на променливите се прави само в равнината (x,y). Очевидно имаме

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,z)}=\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}=\rho.$$

Ще опишем по-сложната сферична смяна. Нека $P=(x,y,z)$ е произволна точка от $\mathbb{R}^3$. Нейната проекция върху равнината (Oxy) е $P_1=(x,y)$. Нека $\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ и $\rho_1=\sqrt{x^2+y^2}$ са разстоянията на точките P и P_1 до началото. Полярната смяна на координатите в равнината (Oxy) има вида

$$x=\rho_1\cos\theta,\quad y=\rho_1\sin\theta.$$

Да означим с φ ъгъла между оста z и радиус-вектора $\vec{P}$ на точката P. Очевидно φ взема стойности между 0 и π. В правоъгълния триъгъл-

*всъщност безкрайно гладко.

ник OP_1P получаваме равенствата

$$\rho_1 = \rho \sin\varphi, \quad z = \rho\cos\varphi.$$

Обединявайки така написаните равенства, получаваме формули, изразяващи декартовите координати (x, y, z) чрез ρ, θ, φ:

$$\begin{aligned} &x = \rho\cos\theta\sin\varphi, \\ &y = \rho\sin\theta\sin\varphi, \\ &z = \rho\cos\varphi, \qquad\qquad \rho \geq 0,\ \theta \in [0, 2\pi),\ \varphi \in [0, \pi]. \end{aligned}$$

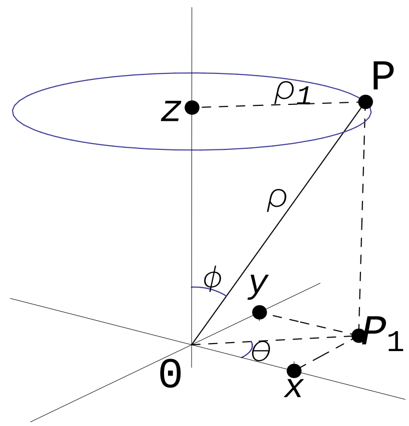
Координатите (ρ, θ, φ) се наричат сферични координати в $\mathbb{R}^3$. Ще пресметнем функционалната детерминанта на съответната смяна на променливите: това може да бъде извършено директно, но по-лесно е да се използва представянето на сферичната смяна като произведение на две цилиндрични смени:

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)} = \frac{D(x,y,z)}{D(\rho_1,\theta,z)}.\frac{D(\rho_1,\theta,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)} =$$

$$= \frac{D(x,y)}{D(\rho_1,\theta)}.\frac{D(\rho_1,z)}{D(\rho,\varphi)} = \rho_1\rho = \rho^2\sin\varphi.$$

Оттук се вижда, че сферичната смяна на координатите е регулярна при $\rho > 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $\varphi \in (0, \pi)$.

За да си представим нагледно сферичните координати, ще опишем линиите, получени при фиксиране на някои от тях и промяна на други. Да фиксираме $\rho = R$; тогава при промяна на θ и φ точката с координати (ρ, θ, φ) описва сфера с център в началото на координатите и радиус R. Можем да си представим тази сфера като земното кълбо; при това точките $(0, 0, R)$ и $(0, 0, -R)$ отговарят съответно на северния и южния полюс. Да фиксираме $\varphi \in (0, \pi)$ и да меним θ; това отговаря на въртене на точката около оста z. Така получените линии в географията се наричат паралели. При $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ те се израждат в точки - съответно северният и южният полюс на сферата. Обратно, ако фиксираме θ и меним φ между 0 и π, получаваме полуокръжност, свързваща северния и южния полюс - т.е. меридиан върху сферата. С други думи,



Сферични координати в тримерното пространство.

координатата φ отговаря на географската ширина, а координатата θ - на географската дължина*.

Обобщени сферични координати. Ще покажем как могат да се въведат координати, аналогични на сферичните, в пространствата $\mathbb{R}^n$ при $n > 3$. Ще започнем за нагледност с пространството $\mathbb{R}^4$ с координати x, y, z, t. Нека $P = (x, y, z, t)$ е произволна точка от $\mathbb{R}^4$. Нека $P_1 = (x, y, z, 0)$, $\rho_1 = \left|\vec{P_1}\right|$ и $\rho = \left|\vec{P}\right|$. Да определим ъглите θ и φ така, че $(\rho_1, \theta, \varphi)$ да са сферичните координати на точката (x, y, z), и нека φ_1 да е ъгъла между радиус-вектора $\vec{P}$ и оста t. Както по-горе, от правоъгълния триъгълник OP_1P получаваме равенствата $\rho_1 = \rho \sin \varphi_1$, $t = \rho \cos \varphi_1$. Замествайки, получаваме:

$$x = \rho \cos \theta \sin \varphi \sin \varphi_1,$$

*Различието между координатите, използвани в математиката и в географията, е въпрос на конвенция; така, в географията дължината се мени между 180^o западна дължина и 180^o източна дължина, т.е. между $-\pi$ и π, а ширината - между 90^o северна и 90^o южна ширина, т.е. между $-\pi/2$ и $\pi/2$.

$y = \rho \sin\theta \sin\varphi \sin\varphi_1,$
$z = \rho \cos\varphi \sin\varphi_1,$
$t = \rho \cos\varphi_1, \qquad \rho \geq 0,\ \theta \in [0, 2\pi),\ \varphi, \varphi_1 \in [0, \pi].$

Лесно се пресмята съответната функционална детерминанта:

$$\frac{D(x,y,z,t)}{D(\rho,\theta,\varphi,\varphi_1)} = \frac{D(x,y,z,t)}{D(\rho_1,\theta,\varphi,t)}.\frac{D(\rho_1,\theta,\varphi,t)}{D(\rho,\theta,\varphi,\varphi_1)} =$$

$$= \frac{D(x,y,z)}{D(\rho_1,\theta,\varphi)}.\frac{D(\rho_1,t)}{D(\rho,\varphi_1)} = \rho_1^2 \sin\varphi\,.\rho = \rho^3 \sin^2\varphi_1 \sin\varphi,$$

и смяната е регулярна при $\rho > 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $\varphi, \varphi_1 \in (0, \pi)$.

Същата конструкция е възможна и в общия случай. За удобство ще означим размерността с $n+2$, $n > 0$. Да означим координатите в пространството $\mathbb{R}^{n+2}$ с $(x, y, z_1, \ldots, z_n)$. Имаме:

Теорема. *Нека $P = (x, y, z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^{n+2}$. Съществуват величини $\rho \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \in [0, \pi]$, така че са изпълнени равенствата*

$x = \rho \cos\theta \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \ldots \sin\varphi_n,$
$y = \rho \sin\theta \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \ldots \sin\varphi_n,$
$z_1 = \rho \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 \ldots \sin\varphi_n,$
$z_2 = \rho \cos\varphi_2 \sin\varphi_3 \ldots \sin\varphi_n,$
$\ldots\ldots\ldots\ldots,$
$z_n = \rho \sin\varphi_n.$

Изпълнено е равенството

$$\frac{D(x,y,z_1,\ldots,z_n)}{D(\rho,\theta,\varphi_1,\ldots,\varphi_n)} = \rho^{n+1} \sin^n\varphi_n \ldots \sin\varphi_1,$$

и смяната е еднозначна и регулярна при $\rho > 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \in (0, \pi)$.

Доказателство. Ще проведем доказателството чрез индукция по n. Да предположим, че твърдението е вярно в пространството $\mathbb{R}^{n+2}$, и нека $P = (x, y, z_1, \ldots, z_n, z_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+3}$. Както по-горе, да положим $P_1 = (x, y, z_1, \ldots, z_n, 0)$, $\rho_1 = \left|\vec{P_1}\right|$ и $\rho = \left|\vec{P}\right|$. Да означим с $\rho_1, \theta, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ обобщените полярни координати на точката $(x, y, z_1, \ldots, z_n)$, които съществуват според индуктивното предположение. Нека φ_{n+1} е ъгъла между радиус-вектора $\vec{P}$ на точката и оста z_{n+1}. Имаме равенствата

$$\rho_1 = \rho \sin \varphi_{n+1}, \quad z_{n+1} = \rho \cos \varphi_{n+1}.$$

Замествайки ρ_1 във формулите за $x, y, z_1, \ldots, z_n$, получаваме съответните формули в $\mathbb{R}^{n+3}$.

По основното свойство на функционалните детерминанти имаме:

$$\frac{D\left(x, y, z_1, \ldots, z_n, z_{n+1}\right)}{D\left(\rho, \theta, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi_{n+1}\right)} =$$

$$= \frac{D\left(x, y, z_1, \ldots, z_n, z_{n+1}\right)}{D\left(\rho_1, \theta, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, z_{n+1}\right)} . \frac{D\left(\rho_1, \theta, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, z_{n+1}\right)}{D\left(\rho, \theta, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi_{n+1}\right)} =$$

$$= \frac{D\left(x, y, z_1, \ldots, z_n\right)}{D\left(\rho_1, \theta, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\right)} . \frac{D\left(\rho_1, z_{n+1}\right)}{D\left(\rho, \varphi_{n+1}\right)} =$$

$$= \rho_1^{n+1} \sin^n \varphi_n \ldots \sin \varphi_1 . \rho = \rho^{n+2} \sin^{n+1} \varphi_{n+1} \sin^n \varphi_n \ldots \sin \varphi_1 . \quad \blacksquare$$

1.10 Обвивки на фамилии от криви.

В този параграф ще изложим едно приложение на развитата по-горе техника, отнасящо се за фамилии от криви в равнината. В теорема 2 от предния параграф и в последвалата я забележка беше показано, че гладките криви в равнината могат да бъдат зададени с уравнения от вида

$$F(x,y)=0,$$

където $F(x,y)$ е еднократно гладка функция на x,y и $\overrightarrow{\text{grad}}\,F(x,y)\neq\vec{0}$. Тук ще разглеждаме *фамилии* от еднократно гладки криви в равнината. С други думи, въвежда се параметър a, изменящ се в даден интервал, така че на всяка негова стойност съответства дадена крива Γ_a. По-точно, имаме

Определение. *Нека е дадена еднократно гладката функция на три променливи $F(x,y,a)$, като $(x,y)\in D\subset\mathbb{R}^2$, $a\in\Delta=(a_1,a_2)$, и нека навсякъде да е изпълнено равенството*

$$|F'_x|+\left|F'_y\right|>0.$$

Тогава казваме, че функцията F поражда фамилията от криви $\{\Gamma_a\}_{a\in\Delta}$, като при всяка фиксирана стойност на a кривата $\Gamma_a\subset\mathbb{R}^2$ се състои от точките (x,y) в равнината, удовлетворяващи равенството

$$F(x,y,a)=0$$

.

Ще въведем понятието обвивка на фамилия от криви. Първото понятие, което ще ни трябва, е понятието допиране на криви:

Определение. *Ще казваме, че две регулярни еднократни криви, минаващи през дадена точка, се допират в тази точка, ако допирателните им прави в тази точка съвпадат.*

Определение. *Регулярната и еднократно гладка крива Γ ще наричаме обвивка на фамилията $\{\Gamma_a\}_{a\in\Delta}$, ако през всяка точка от Γ преминава точно една крива от фамилията $\{\Gamma_a\}$, и в тази точка двете криви се допират.*

Ще изведем параметричните уравнения на обвивката на дадена фамилия от криви (ако такава обвивка съществува). Ще изберем за параметър индекса a на кривата Γ_a от фамилията, минаваща през съответната точка. По-точно, нека

$$x = x(a),\ y = y(a)\,, a \in \Delta$$

са параметричните уравнения на Γ. Ще искаме кривите Γ и Γ_a да минават през точката $(x(a), y(a))$ и да се допират в нея.

Първото условие ни дава, че $(x(a), y(a)) \in \Gamma_a$, т.е.

$$F\left(x(a), y(a), a\right) = 0.$$

Диференцирайки това равенство по a, получаваме

$$x'(a)F'_x + y'(a)F'_y + F'_a = 0,$$

като производните на F се вземат в точката $(x(a), y(a), a)$.

Да изразим и условието за допиране. Както знаем, допирателният вектор към Γ в тази точка е равен на $(x'(a), y'(a))$. От друга страна, доказаната в предния параграф т.2 от §5 показва, че допирателният вектор към Γ_a е ортогонален на вектора $\left(F'_x, F'_y\right)$ в съответната точка, и следователно това е вярно и за допирателния вектор към Γ. Получаваме, че равенството

$$x'(a)F'_x + y'(a)F'_y = 0$$

е необходимо и достатъчно за допирането на кривите Γ и Γ_a.

Изваждайки това равенство от полученото по-горе, получаваме. че $F'_a = 0$. В крайна сметка за параметричните функции на търсената обвивка получихме системата уравнения

$$F\left(x(a), y(a), a\right) = 0$$

$$F'_a\left(x(a), y(a), a\right) = 0.$$

Системи от подобен вид бяха разгледани в предния параграф. Така стигаме до следното твърдение:

Теорема. *Нека функцията $F(x, y, a)$ е двукратно гладка и удовлетворява условията*

$$\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ F''_{ax} & F''_{ay} \end{vmatrix} \neq 0, \quad F''_{aa} \neq 0.$$

Тогава породената от нея фамилия от криви в равнината притежава обвивка.

Доказателство. Като приложим теоремата за неявната функция към уравненията
$$F(x, y, a) = 0,\ F'_a(x, y, a) = 0$$
относно неизвестните x и y и имайки пред вид първото от горните условия, получаваме съществуването на двукратно гладки функции $x(a), y(a)$, удовлетворяващи горните уравнения. Като диференцираме второто от уравненията по a, получаваме

$$x' F''_{ax} + y' F''_{ay} = -F''_{aa} \neq 0,$$

т.е. $x'(a)$ и $y'(a)$ не се анулират едновременно.

Да означим с Γ параметрично зададената крива, определена с параметричното представяне $x = x(a)$, $y = y(a)$. Току-що видяхме, че това параметрично представяне е регулярно. Диференцирайки първото уравнение по a и изваждайки от него второто, получаваме равенството $x'(a)F'_x + y'(a)F'_y = 0$, от което, както видяхме, следва допирането на кривите Γ и Γ_a. ■

Забележка. Условията на теоремата не са задължителни за съществуването на обвивка. В конкретните задачи обикновено те не се проверяват, а задачата се свежда до решаване на уравненията $F(x, y, a) = 0$, $F'_a(x, y, a) = 0$ относно неизвестните x и y.

Примери. 1. Нека разгледаме фамилията от окръжности с даден радиус r, чиито център се движи по абсцисната ос. Ако означим с a координатата на центъра на окръжността, виждаме, че съответната окръжност се дава с уравнението

$$F(x, y, a) = (x - a)^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

Диференцирайки по a, получаваме второто уравнение за обвивката:

$$F'_a(x, y, a) = -2\,(x - a) = 0.$$

Оттук виждаме, че обвивката на фамилията се състои от правите $y = r$ и $y = -r$.

2. Нека е дадена отсечка с дължина l, чиито краища се плъзгат съответно по абсцисната и ординатната ос. Да се определи вида на фигурата в равнината, запълнена от всички възможни положения на отсечката.

Да разгледаме случая, когато отсечката се намира в първи квадрант. Ако единият край на отсечката има координати $(a, 0)$, то координатите на другия и край са $\left(0, \sqrt{l^2 - a^2}\right)$. Припомняйки си отрезовото уравнение на права линия, получаваме уравнението на получената фамилия от прави:

$$F(x, y, a) = \frac{x}{a} + \frac{y}{\sqrt{l^2 - a^2}} - 1 = 0, \quad a \in [0, l].$$

Имаме

$$F_a(x, y, a) = -\frac{x}{a^2} + \frac{ay}{\left(l^2 - a^2\right)^{3/2}} = 0.$$

Решавайки уравненията относно x и y, получаваме $x = \frac{a^3}{l^2}$, $y = \frac{\left(l^2 - a^2\right)^{3/2}}{l^2}$. Изключвайки a, получаваме уравнението на обвивката:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = l^{2/3}.$$

В останалите три квадранта се получава същото уравнение, и ние получаваме частен случай на кривата, наречена астроида. В крайна сметка търсената фигура е оградена от получената крива и се състои от всички точки $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, чиито координати удовлетворяват неравенството

$$|x|^{2/3} + |y|^{2/3} \le l^{2/3}.$$

3. Парабола на безопасността. Нека си представим оръдие, разположено в началото на координатите и стрелящо с определена начална скорост, но под различни ъгли. Да се определи множеството от точките в равнината, които могат да бъдат достигнати от снарядите.

Ако снарядът е изстрелян с начална скорост v под ъгъл α към хоризонта, уравненията на движението му имат вида

$$x = t\,v\cos\alpha, \quad y = t\,v\sin\alpha - \frac{g}{2}\,t^2,$$

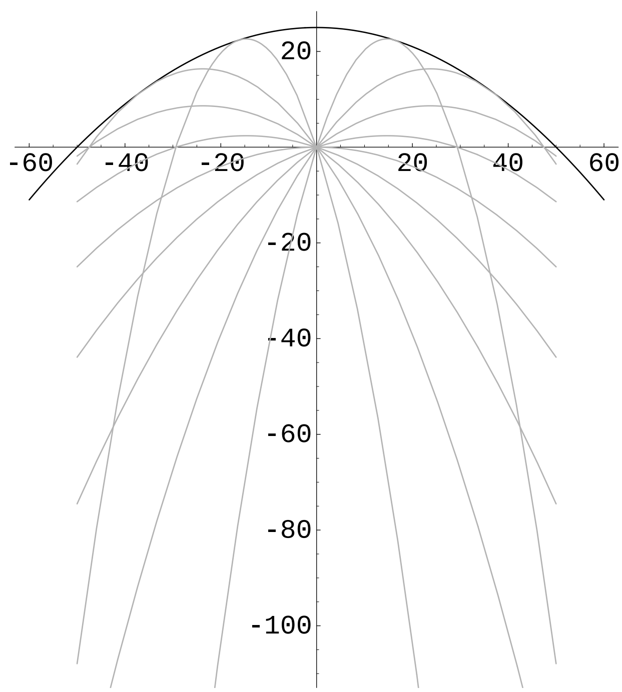
където g е земното ускорение. Изключвайки времето t, получаваме уравнението на траекторията на движението

$$y = -\frac{g}{2v^2\cos^2\alpha}\,x^2 + x\operatorname{tg}\alpha.$$

Да положим $a = \operatorname{tg}\alpha$; тогава при вариране на ъгъла α съответната фамилия от параболи се поражда от функцията

$$F(x, y, a) = -k\left(1 + a^2\right)x^2 + ax - y = 0.$$

(за момента сме положили $k = \frac{g}{2v^2}$).



Парабола на безопасността.

Следващото уравнение от системата е

$$F_a(x, y, a) = x - 2kax^2 = 0,$$

откъдето получаваме параметричните уравнения на обвивката

$$x = \frac{1}{2ka}, \quad y = \frac{1}{4k}\left(\frac{1}{a^2} - 1\right).$$

Изключвайки параметъра a, получаваме обвивката на получената система от параболи, която се оказва също парабола (т.н. парабола на безопасността), с уравнение:

$$y = \frac{1}{4k} - k\,x^2 = \frac{v^2}{2g} - \frac{g}{2v^2}\,x^2.$$

В крайна сметка зоната на безопасността, т.е. множеството от онези точки (x, y) в равнината, които не могат да бъдат достигнати при никакъв ъгъл на изстрелване, се описва с неравенството:

$$y > \frac{v^2}{2g} - \frac{g}{2v^2}\,x^2.$$

4. От горните три примера читателят може да остане с впечатлението, че обвивката винаги огражда частта от равнината, запълнена от фамилията криви. Ще дадем пример, когато това не е така. Да вземем графиката на функцията $y = x^3$ и да я плъзгаме успоредно на абцисната ос. Получаваме фамилия от криви, определена с уравнението

$$F(x, y, a) = (x - a)^3 - y = 0.$$

Решавайки получената система, виждаме, че единствената обвивка на тази фамилия съвпада с абсцисната ос, докато кривите от фамилията запълват цялата равнина.

В този пример се вижда също, че обвивката съществува, макар че условията на теоремата не са удовлетворени (покажете!).

5. Всяка регулярна крива съвпада с обвивката на фамилията от собствените си тангенти. За улеснение ще докажем това в случая, когато кривата е явно зададена, т.е. е представена като графика на гладка функция. Нека Γ се задава с уравнението

$$y = f(x),\ x \in \Delta.$$

Ще предполагаме, че $f(x)$ е двукратно гладка и $f''(x) \neq 0$. Допирателната линия към Γ, минаваща през точката $(a, f(a))$, има уравнение $y = f(a) + f'(a)(x - a)$, и следователно фамилията от тангентите се задава чрез уравнението

$$F(x, y, a) = -y + f(a) + f'(a)(x - a) = 0.$$

Тъй като $F_a(x, y, a) = f''(a)(x - a)$, то за обвивката получаваме уравненията $x = a$, $y = f(a)$, т.е. тя съвпада с Γ.

6. Тук ще разгледаме обвивката на фамилията от нормалите на дадена крива, и ще докажем, че тя съвпада с еволютата на кривата.*

Понятието *еволюта* на дадена двукратно гладка крива с ненулева кривина беше въведено в том I, §4.4, и означаваше геометричното място

*Този факт беше даден без обосновка при разглеждането на геометричния смисъл на еволютата, направено в I, §4.4.

на всички центрове на кривината на кривата. Нека двукратно гладката регулярна крива G е зададена с параметричните уравнения

$$x = \varphi(a),\ y = \psi(a),\ a \in \Delta.$$

Нормалата към кривата G в точката $(\varphi(a), \psi(a))$ е колинеарна с вектора $(-\psi'(a), \varphi'(a))$ и следователно се описва с параметричните уравнения

$$x = \varphi(a) - t\,\psi'(a),\ y = \psi(a) + t\,\varphi'(a),\ t \in \mathbb{R}.$$

Елиминирайки параметъра t, получаваме уравнението на нормалата във вида

$$F(x, y, a) = \psi'(a)\,(y - \psi(a)) + \varphi'(a)\,(x - \varphi(a)) = 0.$$

Оттук получаваме

$$F_a(x, y, a) = \psi''(a)\,(y - \psi(a)) - (\psi'(a))^2 + \varphi''(a)\,(x - \varphi(a)) - (\varphi'(a))^2\,.$$

Така уравненията на обвивката придобиват вида
$\psi'(a)\,(y - \psi(a)) + \varphi'(a)\,(x - \varphi(a)) = 0,$
$\psi''(a)\,(y - \psi(a)) + \varphi''(a)\,(x - \varphi(a)) = (\psi'(a))^2 + (\varphi'(a))^2\,.$

Ще напомним, че кривината $k(a)$ на кривата G в точката $(\varphi(a), \psi(a))$ се дава с формулата

$$k(a) \;=\; \frac{\varphi'(a)\psi''(a) - \varphi''(a)\psi'(a)}{(\varphi'(a)^2 + \psi'(a)^2)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Така, условието $k(a) \neq 0$ може да се напише във вида

$$\begin{vmatrix} \psi'(a) & \varphi'(a) \\ \psi''(a) & \varphi''(a) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Следователно, ако разгледаме горните уравнения като линейни уравнения спрямо променливите $y - \psi(a)$, $x - \varphi(a)$, то те притежават единствено решение. Използвайки формулите на Крамер, получаваме решенията на системата:

$$x(a) = \varphi(a) - \frac{\varphi'(a)^2 + \psi'(a)^2}{\varphi'(a)\psi''(a) - \varphi''(a)\psi'(a)}\,\psi'(a),$$

$$y(a) = \psi(a) + \frac{\varphi'(a)^2 + \psi'(a)^2}{\varphi'(a)\psi''(a) - \varphi''(a)\psi'(a)}\,\varphi'(a).$$

Лесно е да се види, че получените формули съвпадат с параметричното представяне на еволютата на G, изведено в том I, §4.4 по съвсем различен начин.

Упражнения.

1. (задача, дадена за кандидат-студентски изпит за ФМИ на СУ през 1999 г.) Дадено е уравнението

$$3x^2 - (6a+1)x + a^2 + 6a - 3 = 0.$$

Да се намерят стойностите на a, за които даденото уравнение притежава корен u, така че стойността на $\left|u - \sqrt{2}\right|$ да е минимална.

Упътване. Разбира се, задачата притежава елегантно елементарно решение. За да решите задачата с помощта на теорията на обвивките, намерете обвивката на съответното семейство от параболи, и разгледайте пресечните и точки с абсцисната ос.

2. Дадена е елипсата

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1.$$

За всяка стойност на $a \in [-p, p\,]$ да прекараме вертикалната хорда на елипсата през точката $(a, 0)$, и да означим с Γ_a окръжността, имаща тази хорда за диаметър. Докажете, че обвивката на фамилията $\{\Gamma_a\}$ е елипса със същите оси на симетрия като дадената.

Забележка. От доказателството се вижда, че обвивката ще докосва само тези криви Γ_a, за които $|a| \le \frac{p^2}{\sqrt{p^2+q^2}}$, т.е. обвивката съществува само за част от дадената фамилия.

3. (Характеристични точки). Нека е дадена фамилията $\{\Gamma_a\}$ от гладки криви. Нека фиксираме дадена стойност на a и за достатъчно малки стойности на нарастването h да означим с (x_h, y_h) някаква пресечна точка на кривите Γ_a и Γ_{a+h}. Да допуснем, че при $h \to 0$ пресечните точки (x_h, y_h) имат граница (x_0, y_0). Тогава точката (x_0, y_0) се нарича *характеристична точка* за фамилията $\{\Gamma_a\}$.

Докажете, че характеристичните точки лежат върху обвивката на фамилията.

Упътване. Очевидно координатите x_h, y_h на пресечната точка удовлетворяват уравненията

$$F(x_h, y_h, a) = 0, \quad F(x_h, y_h, a+h) = 0.$$

Използвайки теоремата за крайните нараствания, докажете, че тази система е еквивалентна на

$$F(x_h, y_h, a) = 0, \quad F'_a(x_h, y_h, a+\theta h) = 0, \quad \theta \in (0,1),$$

и направете граничен преход при $h \to 0$.

Забележка. От разгледания по-горе пример 4 се вижда, че не винаги точките от обвивката са характеристични.

1.11 Условни локални екстремуми. Множители на Лагранж.

В задачата за търсене на максимална и минимална стойности на функция на много променливи в област $D \subset \mathbb{R}^n$, разгледана в §7, остана открит следния проблем: да се намерят екстремалните стойности на функцията върху границата bD на областта D. Ако например D е кълбо, то възниква въпросът за търсене на екстремумите на функцията върху ограничаващата го сфера. На такава задача е посветен настоящият параграф.

Нека M е подмножество на $\mathbb{R}^n$ и $f(x)$ е функция, дефинирана върху M.

Определение. *Казваме, че точката $x^0 \in M$ е точка на условен локален максимум на функцията $f(x)$ върху множеството M, ако съществува $\varepsilon > 0$, така че за за всяка точка $x \in M$, за която $||x - x^0|| < \varepsilon$, да имаме*

$$f(x) \leq f\left(x^0\right).$$

Както се вижда, това определение се различава от даденото в §5 определение на (безусловен) локален максимум по това, че се разглеждат само стойностите на $f(x)$ върху множеството M.

Ако заместим горното неравенство с противоположното му, получаваме дефиницията на условен локален минимум. Най-сетне, двете дефиниции се обединяват в понятието условен локален екстремум.

Ще разгледаме една елементарна геометрична задача: измежду всички правоъгълници с даден периметър да се намери този с максимално лице. Ако означим с x и y страните на правоъгълника, стигаме до следната формулировка:

Ако множеството $M \subset \mathbb{R}^2$ е множеството на всички точки $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, удовлетворяващи условията $x > 0, y > 0, x + y = p$, да се намери максималната стойност върху M на функцията $f(x, y) = xy$.

Разбира се, задачата се решава елементарно, като се изрази y чрез x и след това се намери максимума на получената функция на една променлива. Ние обаче използваме задачата за илюстриране на развитите по-долу методи.

Множители на Лагранж - случай на едно уравнение в $\mathbb{R}^2$. За да изясним идеята, в тази точка ще разгледаме случая, когато M е множеството от всички точки $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, за които $F(x, y) = 0$. Тук $F(x, y)$ е еднократно гладка функция на 2 променливи, дефинирана в област в $\mathbb{R}^2$ и удовлетворяваща условието

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, F(x, y) \neq \vec{0},$$

т.е. първите ѝ частни производни никъде не се анулират едновременно. Налице е следното необходимо условие за условен локален екстремум:

Теорема 1. *Нека еднократно гладката функция $f(x, y)$ достига условен локален екстремум върху M в точката $(x_0, y_0) \in M$. Тогава съществува константа λ такава, че*

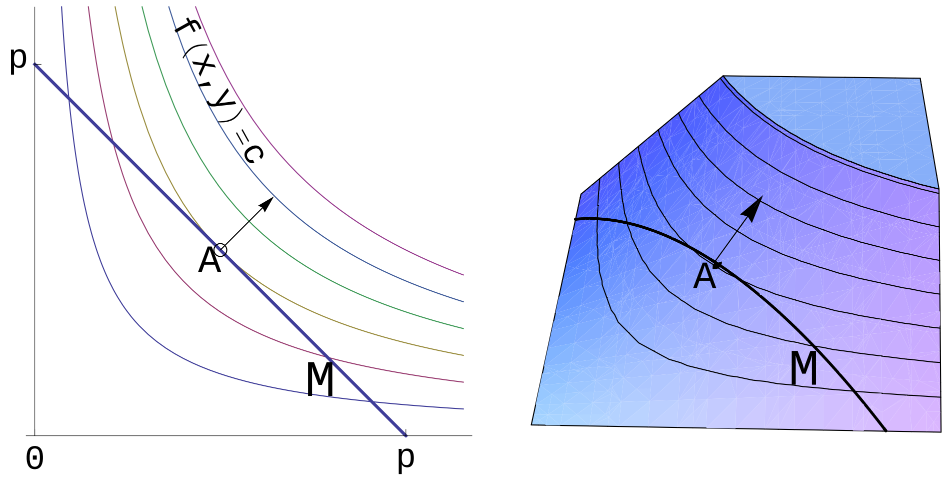
$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x_0, y_0) = \lambda\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, F(x_0, y_0).$$

Преди доказателството ще дадем геометрична интерпретация на твърдението на теоремата. Да си спомним Теорема 2 от §5, чието доказателство дадохме в предния параграф. Теоремата гласи, че градиентът на функцията в дадена точка е перпендикулярен на линията на ниво на функцията, минаваща през същата точка. Според Теорема 1, векторите $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x_0, y_0)$ и $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, F(x_0, y_0)$ са колинеарни; това означава, че линиите на ниво на функциите $f(x, y)$ и $F(x, y)$, минаващи през точката (x_0, y_0), имат обща тангента, т.е. се допират помежду си. Очевидно линията на ниво на $F(x, y)$, минаваща през (x_0, y_0), съвпада с множеството M, описвано с уравнението $F(x, y) = 0$. Така стигаме до следната формулировка на Теорема 1:

В точката (x_0, y_0) множеството M се допира до линията на ниво на $f(x, y)$, минаваща през тази точка.

На чертежа теоремата е илюстрирана за задачата за правоъгълниците, дадена по-горе; представени са множеството M (отсечка), и линиите на ниво на функцията $f(x, y) = xy$. Условният локален максимум се достига в точката $A = (p/2, p/2)$.

Можем да дадем и друга интерпретация на теоремата: да си представим, както в §5, планинска местност, като функцията $f(x, y)$ задава



Вляво -линии на ниво на функцията $f(x, y) = xy$,
точка на условен локален екстремум на $f(x, y)$ върху M.
Вдясно - съответните линии върху графиката на $f(x, y)$.

надморската височина в дадена точка, и множеството M - като пътека в тази местност. Тогава в най-високата си точка пътеката става хоризонтална, т.е. допира се до хоризонталата, минаваща през тази точка.

Доказателство на теорема 1. Трябва да докажем равенствата

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lambda \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lambda \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Ще използваме теоремата за неявната функция, за да параметризираме множеството M около точката (x_0, y_0). (Виж теорема 2 от предния параграф.) Тъй като $\overrightarrow{\text{grad}}\, F(x_0, y_0) \neq \vec{0}$, можем да предположим например, че $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Тогава в някаква околност на точката x_0 съществува еднократно гладка функция $\varphi(x)$, удовлетворяваща условията

$$\varphi(x_0) = y_0, \quad F(x, \varphi(x)) \equiv 0.$$

Диференцирайки последното равенство по x в точката x_0, получаваме

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) + \varphi'(x_0)\, \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

От друга страна, заествайки y с $\varphi(x)$, получаваме функцията на едно променливо $g(x) = f\left(x, \varphi(x)\right)$, определена в околност на x_0. Точките от вида $(x, \varphi(x))$ принадлежат на M; следователно, ако $f(x,y)$ притежава условен локален екстремум в точката (x_0, y_0), то $g(x)$ притежава локален екстремум от същия вид в точката x_0. Оттук следва, че производната и в тази точка се анулира:

$$g'\left(x_0\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0, y_0\right) + \varphi'\left(x_0\right) \frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0, y_0\right) = 0.$$

Да изразим $\varphi'\left(x_0\right)$ от предишното равенство и да го заместим тук; получаваме

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0, y_0\right) - \frac{\partial F}{\partial x}\left(x_0, y_0\right)\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0, y_0\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(x_0, y_0\right)}\right) = 0.$$

Полагайки $\lambda = \dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0, y_0\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(x_0, y_0\right)}$, виждаме, че и двете искани равенства са изпълнени. ■

Забележка. Лесно се вижда, че необходимото условие за локален екстремум, дадено в теоремата, не е достатъчно. Наистина, нека $F(x,y) = y$ (множеството M съвпада с абсцисната ос) и $f(x,y) = x^3 + y$. Тогава в точката $(0,0)$ градиентите на функциите f и F са колинеарни, но в тази точка нямаме условен локален екстремум.

Множители на Лагранж - общ случай. Нека сега M е подмножество на $\mathbb{R}^n$, зададено с условията

$$F_1\left(x_1, \ldots, x_n\right) = F_2\left(x_1, \ldots, x_n\right) = \ldots = F_k\left(x_1, \ldots, x_n\right) = 0,$$

където $F_1\left(x_1, \ldots, x_n\right), \ldots, F_k\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ е регулярна система от еднократно гладки функции, дефинирани в област в $\mathbb{R}^n$. Ще напомним, че условието за регулярност означава, че техните градиенти $\overrightarrow{\operatorname{grad}} F_1(x), \ldots, \overrightarrow{\operatorname{grad}} F_k(x)$ са линейно независими за всяко x от дефиниционната им област.*

*От условието за регулярност се вижда, че броят k на функциите не може да надвишава размерността n на пространството. Задачата е смислена само при $k < n$, което ще смятаме за изпълнено.

Теорема 2. *Нека еднократно гладката функция* $f(x_1, \dots, x_n)$ *достига условен локален екстремум върху* M *в точката* $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in M$. *Тогава съществуват константи* $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ *такива, че*

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} f\left(x^0\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{\operatorname{grad}} F_i\left(x^0\right).$$

Геометрична интерпретация. В теорема 6 от предния параграф беше показано, че векторите
$\overrightarrow{\operatorname{grad}} F_1(x^0), \dots, \overrightarrow{\operatorname{grad}} F_k(x^0)$ образуват базис в ортогоналното допълнение на допирателното пространство към M в точката x^0. Така твърдението на теоремата може да се формулира по следния начин:

Векторът $\overrightarrow{\operatorname{grad}} f(x^0)$ е перпендикулярен към допирателното пространство към M в точката x^0.

Казано по-свободно, линията на ниво на функцията f, минаваща през точката x^0, се допира към множеството M в тази точка.

Доказателство на теорема 2. Сменяйки, ако е нужно, номерата на променливите, можем да считаме, че

$$\frac{D(F_1, \dots, F_k)}{D(x_1, x_2, \dots, x_k)}\left(x^0\right) \neq 0.$$

Разсъждавайки както в теорема 5 от предния параграф, можем, в околност на точката x^0, можем да представим множеството M чрез равенствата

$$x_1 = \varphi_1(x_{k+1}, \dots, x_n)$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$x_k = \varphi_k(x_{k+1}, \dots, x_n).$$

Вземайки пред вид теорема 6 от предния параграф, виждаме, че доказателството ще бъде извършено, ако докажем, че $\overrightarrow{\operatorname{grad}} f(x^0)$ е ортогонален на векторите $\vec{l_1}, \dots, \vec{l_{n-k}}$, определени с формулите

$$\vec{l_p} = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{k+p}}\left(x^0\right), \dots, \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_{k+p}}\left(x^0\right), 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0\right),$$

като единицата е разположена на p-то място измежду последните $n-k$ координати на вектора $\vec{l_p}$.

Да разгледаме функцията

$$g\left(x_{k+1},\ldots,x_n\right)=f\left(\varphi_1\left(x_{k+1},\ldots,x_n\right),\ldots,\varphi_k\left(x_{k+1},\ldots,x_n\right),x_{k+1},\ldots,x_n\right).$$

Тъй като $f(x)$ достига условен локален екстремум в точката x^0, то функцията $g\left(x_{k+1},\ldots,x_n\right)$ достига локален екстремум от същия вид в точката $\left(x_{k+1}^0,\ldots,x_n^0\right)$. Следователно, в тази точка са изпълнени равенствата

$$\frac{\partial g}{\partial x_{k+1}}=\ldots=\frac{\partial g}{\partial x_n}=0.$$

По теоремата за диференциране на съставни функции при $p=1,\ldots,n-k$ имаме

$$\frac{\partial g}{\partial x_{k+p}}\left(x_{k+1}^0,\ldots,x_n^0\right)=\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^0\right)\cdot\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_{k+p}}\left(x_{k+1}^0,\ldots,x_n^0\right)+\frac{\partial f}{\partial x_{k+p}}\left(x^0\right),$$

или, с други думи, при $p=1,\ldots,n-k$ имаме

$$\left\langle\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f\left(x^0\right),\vec{l_p}\right\rangle=0,$$

което доказва твърдението на теоремата. ■

От твърдението на теоремата лесно се извежда рецепта за откриване на точките, в които може да се очаква условен локален екстремум. "Подозрителната"точка x трябва да удовлетворява уравненията

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x),\quad j=1,\ldots,n.$$

Като добавим и уравненията за връзка $F_1(x)=\ldots=F_k(x)=0$, получаваме $n+k$ уравнения за $n+k$ неизвестни $x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_k$. По-нататък целта е да се елиминират променливите $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ и да се намерят стойностите на $x_1,\ldots,x_n$. По-нататък трябва да се провери дали така получената точка е наистина точка на екстремум, и от какъв вид е той; обикновено това се вижда непосредствено.

Необходимото условие за условен локален екстремум, което току-що доказахме, засяга първите производни на изследваната функция и е аналогично на необходимото условие за обикновен екстремум - анулиране на всички първи производни в екстремалната точка (т. 1 от §7). Сега ще докажем и достатъчно условие за условен локален екстремум, използващо вторите производни на функцията, т.е. аналог на теорема 3 от същия параграф. Трябва да отбележим обаче, че при решаване на конкретни задачи това условия рядко се използва.

Разбира се, достатъчните условия, които търсим, трябва да включват и доказаните по-горе необходими условия. Нека $f, F_1, \ldots, F_k$ са както в теорема 2. Ще казваме, че точката x^0 е критична точка на функцията $f(x)$ върху множеството M, ако съществуват константи $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ такива, че

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} f\left(x^0\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{\operatorname{grad}} F_i\left(x^0\right).$$

Теорема 3. (Достатъчно условие за условен локален екстремум.) *Нека $F_1(x), \ldots, F_k(x)$ е регулярна система от двукратно гладки функции, определени в област в $\mathbb{R}^n$, $M \subset \mathbb{R}^n$ е множеството от техните общи нули, и $f(x)$ е двукратно гладка функция, определена в околност на M. Да предположим, че x^0 е критична точка на функцията $f(x)$ върху множеството M, и нека $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ са съответните константи. Да определим функцията $\Phi(x)$ с формулата:*

$$\Phi(x) = f(x) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i F_i\left(x\right).$$

Тогава, ако ограничението върху подпространството $T_{x^0}M$ на квадратичната форма

$$\mathcal{A}_\Phi\left(x^0\right)\vec{h} \;=\; \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i\, \partial x_j}\left(x^0\right)\; h_i h_j$$

е положително (отрицателно) определена квадратична форма, то x^0 е точка на локален екстремум на $f(x)$ върху M, и този екстремум е минимум (максимум).

Доказателство. Най-напред ще отбележим,че върху M функциите $f(x)$ и $\Phi(x)$ съвпадат, и е достатъчно да се докаже, че x^0 е локален условен екстремум за $\Phi(x)$. От дефиницията на функцията $\Phi(x)$ следва равенството $\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\Phi\left(x^0\right) = \vec{0}$, т.е. всички първи частни производни на $\Phi(x)$ се анулират в точката x^0.*

В предишния параграф беше отбелязано, че допирателното протранство $T_{x^0}M$ не зависи от избора на ортогонална координатна система в $\mathbb{R}^n$. Разбира се, същото е вярно и за понятието положително (или отрицателно) определена квадратична форма. Това ни позволява да опростим доказателството на теоремата, избирайки подходяща координатна система. Като начало можем да смятаме, че точката x^0 съвпада с началото 0 на координатната система.

По-нататък, можем да изберем координатите така, че $(n-k)$–мерното подпространство $T_{x^0}M$ на $\mathbb{R}^n$ съвпада с координатното подпространство, съответстващо

*Именно поради това в теоремата се разглежда $\Phi(x)$ вместо $f(x)$.

на координатите $x_{k+1}, \ldots, x_n$, т.е. се представя с равенствата $x_1 = \ldots = x_k = 0$. Да означим $x' = (x_{k+1}, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-k}$. Тогава условието за положителна или отрицателна определеност означава, че квадратичната форма

$$\mathcal{A}_\Phi(x') = \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=k+1}^{n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i\, \partial x_j}(0)\, x_i x_j$$

е положително (отрицателно) определена в $\mathbb{R}^{n-k}$.

При такъв избор на координати променливите $x_{k+1}, \ldots, x_n$ могат да бъдат използвани за локално параметризиране на множеството M около точката 0 (докажете!). Както по-горе, локално M се представя с равенствата

$$x_1 = \varphi_1(x'), \ldots, x_k = \varphi_k(x'), \quad \text{като} \quad \varphi_1(0) = \ldots = \varphi_k(0) = 0.$$

Знаем, че използваните в доказателството на теорема 2 вектори $\vec{l_1}, \ldots, \vec{l_{n-k}}$ пораждат допирателното пространство в точката 0. От избора на координатната система следва,че първите k координати на тези вектори се анулират, т.е. изпълнени са равенствата

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{k+p}}(0) = 0 \quad \text{за} \quad i = 1, \ldots, k,\, p = 1, \ldots, n-k.$$

От формулата на Тейлор следват равенствата

$$\varphi_i(x') = o\left(||x'||^2\right), \quad i = 1, \ldots, k, p = 1, \ldots, n-k.$$

Да въведем функцията

$$\Psi(x_{k+1}, \ldots, x_n) = \Phi(\varphi_1(x_{k+1}, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_k(x_{k+1}, \ldots, x_n), x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

Формулата на Тейлор от втори ред за функцията Φ ни дава представянето

$$\Delta\Phi = \Phi(x) - \Phi(0) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i\, \partial x_j}(0)\, x_i x_j + o\left(||x||^2\right).$$

За да получим оттук формула за нарастването на функцията Ψ, трябва да заместим $x_1, \ldots, x_k$ с $\varphi_1(x'), \ldots, \varphi_k(x')$. Получаваме

$$\Delta\Psi = \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=k+1}^{n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i\, \partial x_j}(0)\, x_i x_j + 2 \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i\, \partial x_j}(0)\, x_i \varphi_j(x') +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i\, \partial x_j}(0)\, \varphi_i(x')\, \varphi_j(x') + o\left(||x||^2\right).$$

Лесно се доказва, че изразите от вида $x_i\varphi_j(x')$, $\varphi_i(x')\varphi_j(x')$, $o\left(||x||^2\right)$ клонят към нула по-бързо от $||x'||^2$, т.е. могат да бъдат записани като $o\left(||x'||^2\right)$. Така горното представяне добива вида

$$\Delta\Psi = \sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=k+1}^{n}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\,\partial x_j}(0)\,x_i x_j + o\left(||x'||^2\right).$$

След като имаме това представяне за нарастването на Ψ, можем да използваме доказателството на теорема 3 от §7 , което показва, че $\Psi(x')$ има локален екстремум в точката $0 \in \mathbb{R}^{n-k}$, и следователно $f(x)$ има локален екстремум в точката $0 \in \mathbb{R}^n$. ■

Упражнения.

1. Намерете максималната стойност на функцията $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 x_2 \ldots x_n$ върху множеството M, зададено с условията $x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0, x_1 + \ldots + x_n = 1$.

2. Центрираното уравнение на елипса в равнината има вида $ax^2+2bxy+cy^2 = 1$, като квадратичната форма от лявата страна е положително определена. Намерете голямата и малката полуос на елипсата.

Решение. Да означим елипсата с M, и нека $f(x, y) = x^2+y^2$ (квадрата на разстоянието от точката (x, y) до началото на координатите). Тогава задачата се свежда към това, да се намерят максималната и минималната стойности на $f(x, y)$ върху M. Уравненията на критичните точки добиват вида

$$2x = \lambda(2ax + 2by)$$

$$2y = \lambda(2bx + 2cy)$$

От линейната алгебра знаем, че получената система хомогенни уравнения има ненулево решение точно тогава, когато детерминантата от коефициентите пред неизвестните е равна на нула. Така за λ получаваме квадратното уравнение

$$\begin{vmatrix} a - \frac{1}{\lambda} & b \\ b & c - \frac{1}{\lambda} \end{vmatrix} = 0.$$

Нека μ_1, μ_2, $0 < \mu_1 < \mu_2$ да са собствените стойности на матрицата от коефициентите на квадратичната форма. Тогава решенията на горното уравнение са $\frac{1}{\mu_1}$, $\frac{1}{\mu_2}$. От друга страна, умножавайки първото уравнение по x, второто по y и събирайки, получаваме

$$x^2 + y^2 = \lambda \left(ax^2 + 2bxy + cy^2 \right) = \lambda.$$

Така, малката и голямата полуос на елипсата (минималната и максимална стойности на разстоянието до началото) са равни на $\frac{1}{\sqrt{\mu_2}}$ и $\frac{1}{\sqrt{\mu_1}}$ съответно.

Забележка. Ние достигнахме по аналитичен път до процедурата, известна в алгебрата и в аналитичната геометрия като канонизиране на квадратична форма.

3. Нека елипсоидът M в $\mathbb{R}^n$ е зададен с уравнението

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = 1.$$

Докажете, че критичните точки на функцията $f(x) = ||x||^2$ върху M съвпадат с върховете на полуосите на елипсоида.

4. Нека е даден елипсоид в $\mathbb{R}^3$, зададен с каноничното си уравнение. Да се намерят полуосите на елипсата, получена като сечение на елипсоида с равнина в $\mathbb{R}^3$, минаваща през началото на координатите.

Упътване. Задачата се свежда към намирането на максималната и минимална стойност на функцията $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ върху множеството M, определено с уравненията

$$F_1(x, y, x) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$
$$F_2(x, y, x) = \alpha x + \beta y + \gamma z = 0.$$

Приравнявайки на нула частните производни на функцията
$f - \lambda F_1 - \mu F_2$, получаваме равенствата

$$\lambda = f(x, y, z), \quad x = \mu \frac{\alpha a^2}{a^2 - \lambda}, \quad y = \mu \frac{\beta b^2}{b^2 - \lambda}, \quad z = \mu \frac{\gamma c^2}{c^2 - \lambda}.$$

Умножавайки второто, третото и четвъртото равенство съответно с α, β, γ и събирайки резултатите, получаваме за λ квадратното уравнение

$$\frac{\alpha^2 a^2}{a^2 - \lambda} + \frac{\beta^2 b^2}{b^2 - \lambda} + \frac{\gamma^2 c^2}{c^2 - \lambda} = 0.$$

Ако λ_1 и λ_2 са корените на това уравнение, то $\sqrt{\lambda_1}$ и $\sqrt{\lambda_2}$ са дължините на полуосите на търсената елипса.

1.12 Функционална независимост. Ранг на система от функции.

Функционална независимост на система от функции. Нека в областта $D \in \mathbb{R}^n$ са дефинирани еднократно гладките функции $f_1(x), \dots, f_k(x)$, където $k \leq n$, и $x = (x_1, \dots, x_n) \in D$.

Определение. *Ще казваме, че функциите $f_1, \dots, f_k$ са функционално зависими в областта D, ако съществува номер i , $1 \leq i \leq k$, и еднократно гладка функция g на $k-1$ променливи, така че за всяко $x \in D$ е изпълнено тъждеството*

$$f_i(x) = g\left(f_1(x), \dots, f_{i-1}(x), f_{i+1}(x), \dots, f_k(x)\right).$$

С други думи, поне една от функциите $f_1, \dots, f_k$ се изразява чрез останалите.

Ще казваме, че функциите $f_1, \dots, f_k$ са функционално независими в областта D, ако зависимост от горния вид не съществува.

Пример. Да разгледаме дефинираните в $\mathbb{R}^3$ функции

$$f_1(x, y, z) = x + y + z,$$
$$f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2,$$
$$f_3(x, y, z) = xy + yz + zx.$$

Тогава очевидно тези функции удовлетворяват съотношението

$$f_2(x, y, z) = (f_1(x, y, z))^2 - 2f_3(x, y, z)$$

и следователно са функционално зависими.

Оказва се, че функционалната независимост на система от функции е свързана с ранга на матричната производна на изображението $f = (f_1, \dots, f_k)$:

$$Df\,(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\,(x)\right)_{\substack{i=1,\dots,k \\ j=1,\dots,n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}\,(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\,(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\,(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\,(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\,(x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\,(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}\,(x) & \frac{\partial f_k}{\partial x_2}\,(x) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}\,(x) \end{pmatrix}$$

Теорема 1. *Ако матрицата $Df\,(x)$ е с максимален ранг (равен на k) в областта D, то функциите $f_1, \ldots, f_k$ са функционално независими.*

Доказателство. Да предположим противното: че една от функциите, например f_k, се изразява чрез останалите; с други думи, съществува функция $g\,(y_1, \ldots, y_{k-1})$, за която е изпълнено тъждеството

$$f_k(x) = g\,(f_1(x), \ldots, f_{k-1}(x))\,.$$

Чрез диференциране получаваме при $i = 1, \ldots, n$ равенствата

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\partial g}{\partial y_j} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}.$$

С други думи, k-тият ред на матрицата $Df\,(x)$ се изразява като линейна комбинация на първите $k-1$ реда, и следователно тази матрица не може да има максимален ранг. ■

Ранг на система от функции. Нека, както по-горе, имаме еднократно гладките функции $f_1, \ldots, f_k$, и нека $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_k(x))$ е породеното от тях изображение от D в $\mathbb{R}^k$. Имайки пред вид теорема 1, можем да си зададем въпроса: колко е най-малкият брой функции измежду $f_1, \ldots, f_n$, така че всички останали да се изразяват чрез тях. Оказва се, че този въпрос е тясно свързан с ранга на разгледаната по-горе матрица $Df\,(x)$.

Определение. *Казваме, че изображението $f(x)$ има ранг p в точката x, ако рангът на матрицата $Df\,(x)$ е равен на p.*

Ще казваме, че изображението $f(x)$ има ранг p в областта D, ако $\operatorname{rang} Df\,(x) \leq p$ за всяко $x \in D$, и ако съществува поне едно $x^0 \in D$, така че $\operatorname{rang} Df\,(x^0) = p$ (в такъв случай ще казваме, че рангът на $f(x)$ се достига в точката x^0).

Очевидно последното условие може да бъде формулирано така: съществуват индекси $1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n$, $1 \leq j_1 < \ldots < j_p \leq k$, така че

$$\frac{D\left(f_{j_1}, \ldots, f_{j_p}\right)}{D\left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}\right)} \left(x^0\right) \neq 0.$$

Теорема 2. *Нека изображението $f(x)$ има ранг p, $p < k$, в областта D, и нека този ранг се достига в точката x^0. Да предположим, че номерацията на функциите и независимите променливи е така избрана, че*

$$\frac{D\left(f_1,\ldots,f_p\right)}{D\left(x_1,\ldots,x_p\right)}\left(x^0\right) \neq 0.$$

Тогава съществуват $k-p$ на брой еднократно гладки функции

$$g_1\left(y_1,\ldots,y_p\right),\ldots,g_{k-p}\left(y_1,\ldots,y_p\right)$$

такива, че в някаква околност на x^0 са изпълнени тъждествата

$$f_{p+1}(x) = g_1\left(f_1(x),\ldots,f_p(x)\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots,$$

$$f_k(x) = g_{k-p}\left(f_1(x),\ldots,f_p(x)\right).$$

Доказателство. Нека U е околност на x^0 в $\mathbb{R}^n$, в която продължава да бъде изпълнено равенството $\frac{D(f_1,\ldots,f_p)}{D(x_1,\ldots,x_p)}\left(x^0\right) \neq 0$. Доказателството се извършва с помощта на подходяща смяна на променливите в U. Нека изображението

$$u = \varphi(x) = \left(\varphi_1\left(x_1,\ldots,x_n\right),\ldots,\varphi_n\left(x_1,\ldots,x_n\right)\right)$$

е определено с формулите

$u_1 = \varphi_1(x) = f_1\left(x_1,\ldots,x_n\right),$
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$
$u_p = \varphi_p(x) = f_p\left(x_1,\ldots,x_n\right),$
$u_{p+1} = \varphi_{p+1}(x) = x_{p+1},$
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$
$u_n = \varphi_n(x) = x_n.$

Лесно се вижда равенството

$$\frac{D\left(\varphi_1,\ldots,\varphi_n\right)}{D\left(x_1,\ldots,x_n\right)}(x) = \frac{D\left(f_1,\ldots,f_p\right)}{D\left(x_1,\ldots,x_p\right)}(x) \neq 0.$$

Следователно, според теоремата за обратното изображение (т. 7 от §8) изображението $\varphi(x)$ притежава обратно изображение $\psi(u)$:

$$x = \psi(u) = \left(\psi_1\left(u_1, \ldots, u_n\right), \ldots, \psi_n\left(u_1, \ldots, u_n\right)\right).$$

като

$$\frac{D\left(\psi_1, \ldots, \psi_n\right)}{D\left(u_1, \ldots, u_n\right)} = \left(\frac{D\left(\varphi_1, \ldots, \varphi_n\right)}{D\left(x_1, \ldots, x_n\right)}\right)^{-1} \neq 0.$$

Разглеждайки първите p координати на равенството $\varphi(\psi(u)) = u$, получаваме

$$f_i(\psi(u)) = u_i \qquad i = 1, \ldots, p.$$

Да разгледаме изображението

$$g(u) = f\left(\psi(u)\right) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k,$$

определено като суперпозиция на изображенията ψ и f. Според матричната форма на теоремата за диференциране на съставно изображение (т. 4 от §8) имаме

$$Dg(u) = Df(\psi(u)) \circ D\psi(u).$$

Тъй като квадратната матрица $D\psi(u)$ е обратима, то матриците $Dg(u)$ и $Df(\psi(u))$ имат еднакъв ранг, равен на p.

От друга страна, както току-що показахме, налице са равенствата

$$g_1\left(u_1, \ldots, u_n\right) = u_1, \ldots, g_p\left(u_1, \ldots, u_n\right) = u_p.$$

Следователно, матричната производна на изображението g има вида

$$Dg(u) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \frac{\partial g_{p+1}}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_{p+1}}{\partial u_p} & \frac{\partial g_{p+1}}{\partial u_{p+1}} & \cdots & \frac{\partial g_{p+1}}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial u_1} & \frac{\partial g_k}{\partial u_{p+1}} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial u_n} \end{array}\right)$$

Сега ще използваме факта, че матрицата $Dg(u)$ има ранг p и следователно всяка нейна поддетерминанта от ред $p+1$ се анулира. Да вземем произволни номера i и j такива, че $1 \le i \le n-p$, $1 \le j \le k-p$. Да изберем редовете с номера $1, 2, \ldots, p, p+i$ и стълбовете с номера $1, 2, \ldots, p, p+j$. Получената поддетерминанта от ред $p+1$ има вида

$$\frac{D\left(g_1, \ldots, g_p, g_{p+j}\right)}{D\left(u_1, \ldots, u_p, u_{p+i}\right)} = \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \hline \frac{\partial g_{p+j}}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_{p+j}}{\partial u_p} & \frac{\partial g_{p+j}}{\partial u_{p+i}} \end{array}\right| = \frac{\partial g_{p+j}}{\partial u_{p+i}}.$$

Така ние получихме равенствата

$$\frac{\partial g_{p+j}}{\partial u_{p+i}} = 0 \quad \text{за} \quad i, j = 1, 2, \ldots, n-p.$$

С други думи, функциите $g_{p+1}, \ldots, g_k$ зависят само от променливите $u_1, \ldots, u_p$.

Да заместим обратно променливите u с $\varphi(x)$. Имаме

$$g(\varphi(x)) = f(\psi(\varphi(x))) = f(x).$$

Вземайки в горното равенство координатните функции с номера $p+1, p+2, \ldots, k$, получаваме равенствата

$$f_{p+1}(x) = g_{p+1}\left(f_1(x), \ldots, f_p(x)\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$f_k(x) = g_k\left(f_1(x), \ldots, f_p(x)\right),$$

които са тъждествено изпълнени за всяко $x \in U$. Сменяйки означенията и написвайки g_1 вместо g_{p+1}, g_2 вместо g_{p+2}, ..., g_{k-p} вместо g_k, получаваме твърдението на теоремата. ■

Геометричен смисъл на теоремата. Нека U е околността на x^0, в която е изпълнено твърдението на теорема 2. Тогава теоремата дава представа за геометрическата структура в $\mathbb{R}^k$ на образа $f(U)$ на U чрез изображението f. По-точно, нека V е образът в $\mathbb{R}^p$ на множеството U чрез функциите $f_1(x), \ldots, f_p(x)$. Поради регулярността на тази система от функции от т. 7 на §8 се вижда, че V е отворено в $\mathbb{R}^p$.

Тогава теорема 2 показва, че множеството $f(U)$ може да се определи в $\mathbb{R}^k$ с равенствата

$$y_{p+1} = g_1\left(y_1, \ldots, y_p\right), \ldots, y_k = g_{k-p}\left(y_1, \ldots, y_p\right), \ \left(y_1, \ldots, y_p\right) \in V.$$

С други думи, множеството $f(U)$ съвпада с графика на изображението $g = (g_1, \dots, g_{k-p}) : V \to \mathbb{R}^{k-p}$.

Ако предположим, че навсякъде в дефиниционната си област D изображението f има ранг p, то образът му $f(D)$ притежава подобно представяне около всяка своя точка (като при това изборът на p независими променливи измежду променливите $y_1, \dots, y_k$ може да бъде различен). Както ще видим по-нататък, подмножества с подобно локално представяне отговарят на интуитивната представа за "гладкост"и се наричат *p-мерни подмногообразия на* $\mathbb{R}^k$. Така стигаме до следната геометрична формулировка на теорема 2:

Теорема $2'$. *Нека еднократно гладкото изображение $f(x) : D \to \mathbb{R}^k$ има ранг p, $p < k$, навсякъде в областта $D \subset \mathbb{R}^n$. Тогава образът му $f(D)$ представлява p-мерно подмногообразие на $\mathbb{R}^k$.*

Забележка. Изискването за постоянство на ранга на изображението f, поставено в теоремата, е доста ограничително. В общия случай за ранга знаем само, че е полунепрекъсната отгоре функция на точката x (виж зад. 1). Образът на изображение с променлив ранг може да има сложна структура. Като прост пример можем да разгледаме изображението от $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^2$, зададено с формулите $x = t^3$, $y = t^2$. Рангът на това изображение е равен на единица при $t \neq 0$ и на нула при $t = 0$. Образът на изображението е крива в $\mathbb{R}^2$, която има особеност от вида "рогова точка"в началото на координатите.

При пространства от по-висока размерност структурата на образа се усложнява значително и не се поддава на систематично описание.

Упражнения.

1. Докажете, че рангът на матрицата $Df\,(x)$ е полунепрекъсната отгоре функция на x (с други думи, ако редицата $\{x^n\}$ клони към точката x^0, то $\operatorname{rang} Df\,(x^0) \leq \liminf \operatorname{rang} Df\,(x^n)$). Дайте пример, в който тази функция не е непрекъсната.

Глава 2

Интегрално смятане на функции на няколко променливи

2.1 Мярка на Пеано-Жордан.

Нашата първа стъпка към дефинирането на Римановия интеграл в равнината, както и в произволно крайномерно Евклидово пространство, ще бъде да въведем мярка в такива пространства: т.н. *мярка на Пеано-Жордан.* За да използваме геометричната интуиция, ние ще работим главно в случая на равнината $\mathbb{R}^2$, отбелязвайки какво е необходимо да се промени в случая на пространства с размерност по-голяма от 2. Трябва да се отбележи, че ако разликата между едномерния и двумерния случай е доста съществена (както читателят ще се убеди по-долу), то между размерност 2 и размерности 3,4,...,1000,.. такава почти няма, и всички определения и доказателства се пренасят почти без изменения.

Определение на мярката на Пеано - Жордан. Нашата цел ще бъде да определим мярката, или лицето, на равнинна фигура. Ще тръгнем от две естествени правила:

- Лицето на правоъгълник е равно на произведението на страните му, и
- По-голямата фигура има и по-голямо лице, т.е. ако D, D' са фигури в равнината и $D \subset D'$, то лицето на D не надминава лицето на D'.

Така, нашата основна "тухличка"при изграждането на мярката в равнината ще бъдат затворените правоъгълници, т.е. множества от вида

$$\Delta = [a,b] \times [c,d] = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b]\,, y \in [c,d]\Big\}.$$

За всеки правоъгълник ще въведем мярка (или лице): $\mu(\Delta) = (b-a)(d-c)$.

Нека подчертаем, че тук разглеждаме не какви да е правоъгълници, а само правоъгълници със страни, успоредни на координатните оси. Освен това, разглеждаме затворени правоъгълници; тяхната вътрешност се състои от произведението на съответните отворени интервали:

$$\Delta^o = (a,b) \times (c,d),$$

а контурът им се състои от четири отсечки.

В случая на пространство с размерност 3 и повече, навсякъде по-долу вместо "правоъгълник"трябва да се чете "правоъгълен паралелепипед" , като отново се разглеждат паралелепипеди със страни, успоредни на координатните оси. Под правоъгълен паралелепипед в $\mathbb{R}^n$ ще разбираме множество от вида

$$\Delta = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1 \in [a_1, b_1], \ldots, x_n \in [a_n, b_n]\},$$

което обикновено се записва във вида

$$\Delta = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n].$$

Мярката отново се определя като произведение на страните:

$$\mu(\Delta) = (b_1 - a_1) \ldots . (b_n - a_n).$$

Определение. *Казваме, че множеството $E \subset \mathbb{R}^2$ е елементарно, ако то може да се представи като обединение на краен брой затворени правоъгълници.*

Ще отбележим, че обединение, сечение и разлика на елементарни множества е също елементарно множество.

Лема 1. *Всяко елементарно множество E може да се представи като обединение на краен брой правоъгълници с непресичащи се вътрешности (за краткост ще ги наричаме непресичащи се правоъгълници).*

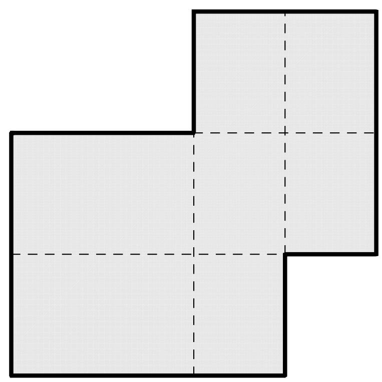
Доказателство. Да продължим отсечките, ограничаващи всеки от правоъгълниците, и да разсечем останалите правоъгълници по така получените прави. Полученото разбиване на множеството E очевидно удовлетворява изискванията на лемата. (На чертежа е представен случая, когато E е обединение на два правоъгълника.) ■

Определение. *Нека E е елементарно множество, представено като обединение на непресичащи се правоъгълници:*

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i, \quad \Delta_i^o \cap \Delta_j^o = \emptyset \quad \text{за} \quad i \neq j.$$

Ще определим мярката $\mu(E)$ като

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{n} \mu\left(\Delta_i\right).$$



Представяне на елементарно множество като обединение на непресичащи се правоъгълници.

Разбира се, трябва да докажем, че определението е коректно, т.е. не зависи от начина на представяне на E като обединение на непресичащи се правоъгълници. Нека най-напред E е правоъгълник, представен като обединение на други правоъгълници; тогава твърдението е очевидно (и става още по-очевидно, ако направим допълнителни разрези както в предната лема). В общия случай, нека

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i = \bigcup_{j=1}^{m} \widetilde{\Delta}_j$$

са две различни представяния на E като обединение на непресичащи се правоъгълници. За всяко i от 1 до n имаме $\Delta_i = \cup_{j=1}^{m} \left(\Delta_i \cap \widetilde{\Delta}_j\right)$, което дава представяне на правоъгълника Δ_i като обединение на непресичащи се правоъгълници, и според отбелязаното по-горе $\mu\left(\Delta_i\right) = \sum_{j=1}^{m} \mu\left(\Delta_i \cap \widetilde{\Delta}_j\right)$. Следователно

$$\sum_{i=1}^{n} \mu\left(\Delta_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mu\left(\Delta_i \cap \widetilde{\Delta}_j\right)$$

и по същият начин

$$\sum_{j=1}^{m} \mu\left(\widetilde{\Delta}_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} \mu\left(\Delta_i \cap \widetilde{\Delta}_j\right),$$

с което коректността на дефиницията е доказана. ■

Следващата стъпка е да се опитаме да апроксимираме произволна фигура в равнината чрез елементарни множества. Това може да стане по различни начини. За илюстрация, нека си представим, че имаме фигура, нарисувана върху милиметрова хартия, и искаме да пресметнем приблизително нейното лице. Единият начин е да сумираме лицата на квадратчета, които имат обши точки с фигурата; така ще получим оценка отгоре за лицето и. Другият начин е да броим само онези квадратчета, които се съдържат вътре във фигурата; така получаваме оценка отдолу. Другояче казано, ние апроксимираме отвън и отвътре нашата фигура с множества, съставени от квадратчета, т.е. с елементарни множества. Така се стига до понятията горна и долна мярка на множество:

Определение. *Нека A е ограничено подмножество на $\mathbb{R}^2$. Ще определим горна мярка на множеството A (с означение $\mu^*(A)$) като точната долна граница на мерките на всички елементарни множества, съдържащи A:*

$$\mu_*(A) = \inf\left\{\mu(E) : E \text{ - елементарно, } A \subset E\right\}.$$

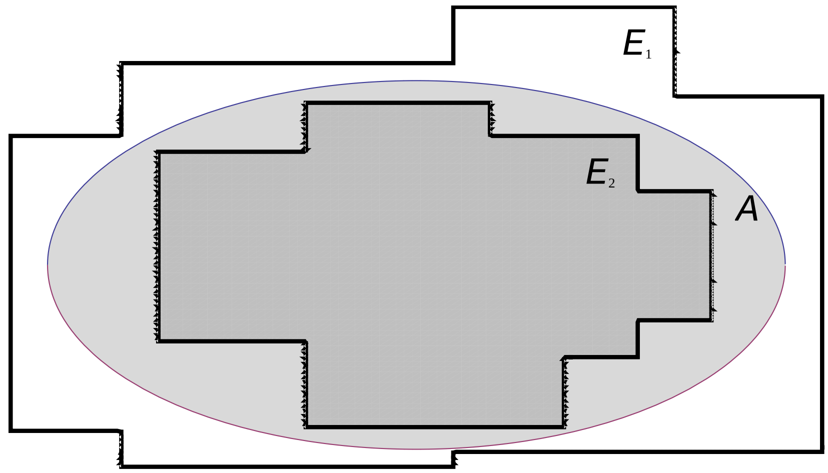
Аналогично, определяме долна мярка на A с формулата

$$\mu_*(A) = \sup\left\{\mu(E) : E \text{ - елементарно, } E \subset A\right\}.$$

Забележка. Понякога ще е удобно да налагаме малко по-силни условия: да искаме $A \subset E^o$ в дефиницията на горна мярка, и $E \subset A^o$ дефиницията на долна мярка. (Ще напомним, че A^o осначава вътрешността на множеството A, т.е. всички точки, които влизат в A заедно с някаква своя кръгова околност - виж §1.2). Лесно се вижда, че това не променя тен=хните стойности.

Очевидно за всяко множество A имаме $\mu_*(A) \leq \mu^*(A)$. За някои множества обаче тези две числа може да се различават. Например, да вземем множеството от всички точки в квадрата, които имат рационални координати:

$$A = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : x, y \in \mathbb{Q}\}.$$



Горна и долна мярка на множество.

Лесно се вижда, че $\mu^*(A) = 1$, но $\mu_*(A) = 0$ (множеството A не съдържа неизродени правоъгълници). Поради това ние ще определим мярката само върху някои множества в $\mathbb{R}^2$ - т. нар. измерими множества:

Определение. *Ограниченото множество $A \subset \mathbb{R}^2$ се нарича измеримо, ако неговата горна и долна мярки съвпадат. Общата им стойност се бележи с $\mu(A)$ и се нарича мярка на Пеано-Жордан на множеството A.*

Оставяме на читателя докаже следното твърдение, което представлява лека модификация на горната дефиниция:

Лема 2. *Множеството A е измеримо тогава и само тогава, когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществуват елементарни множества E_1, E_2, така че $E_2 \subset A \subset E_1$ и $\mu(E_1) - \mu(E_2) < \varepsilon$.*

Забележка. Горното определение на понятията "измеримо множество"и "мярка"има един сериозен недостатък - то използва фиксирана координатна система в равнината (съотв. в $\mathbb{R}^n$). Доказателството, че мярката не зависи от координатната система, ще бъде отложено до §6 (то се получава като следствие от теоремата за смяна на променливите при многократните интеграли).

Нека дадем някакво описание на измеримите множества в равнината и операциите, които могат да се извършват с тях.

Определение. *Множеството се нарича* <u>*пренебрежимо*</u> *по Пеано-Жордан, ако* $\mu^*(A) = 0$ *(от тук, разбира се, следва, че то е и измеримо).*

Лема 3. *Всяко подмножество на пренебрежимо множество е пренебрежимо. Обединение на краен брой пренебрежими множества също е пренебрежимо.*

Доказателство. Първото твърдение е очевидно. За второто, достатъчно е да докаже твърдението за случая на две множества.

Наистина, нека $\mu^*(A_1) = \mu^*(A_2) = 0$. Да изберем произволно $\varepsilon > 0$. Тогава според дефиницията на μ^* можем да намерим елементарни множества E_1, E_2, така че $\mu(E_1), \mu(E_2) < \varepsilon/2$, $A_1 \subset E_1$, $A_2 \subset E_2$. Множеството $E = E_1 \cup E_2$ е също елементарно, при което $A_1 \cup A_2 \subset E$, и $\mu(E) < \varepsilon$, т.е. $\mu^*(A_1 \cup A_2) = 0$. ■

Сега можем да формулираме необходимо и достатъчно условие за измеримост на множество. За тази цел ще използваме понятието контур на множество, въведено в §1.2.

Теорема 1 (критерий за измеримост). *Едно ограничено множество A е измеримо тогава и само тогава, когато неговият контур bA е пренебрежимо множество.*

Доказателство. Нека е измеримо множество, т.е. $\mu_*(A) = \mu^*(A) = \mu(A)$. Да изберем произволно $\varepsilon > 0$. От дефиницията на горна и долна мярка следва съществуването на елементарно множество E_1 такова, че $A \subset E_1^o$ и $\mu(E_1) < \mu(A) + \varepsilon/2$, и на елементарно множество E_2 такова, че $E_2 \subset A^o$ и $\mu(E_2) > \mu(A) - \varepsilon/2$. Очевидно $E_2 \subset E_1$. Да означим $E = E_1 \setminus E_2$; тогава $\mu(E) = \mu(E_1) - \mu(E_2) < \varepsilon$ и контурът bA на множеството A се съдържа в E, откъдето следва, че bA е пренебрежимо множество.

Обратно, да предположим, че bA е пренебрежимо, и да го включим във вътрешността на елементарното множество E, за което $\mu(E) < \varepsilon$. Тогава контурът bE на E не съдържа контурни точки на A и следователно може да се представи във вида $bE = C_1 \cup C_2$, където C_1 се състои само от външни точки на A, а C_2 - само от външни. Да положим $E_1 = E \cup A^o$ и $E_2 = E_1 \setminus E$. Тогава имаме $b(E_1) = C_1$ и $b(E_2) = C_2$.

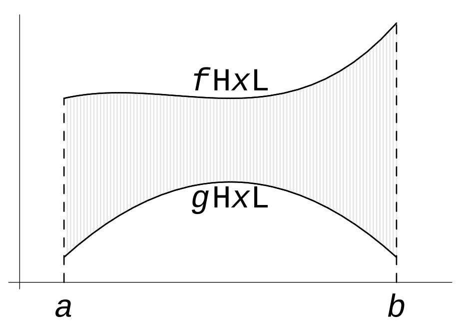
Тъй като контурите на E_1 и E_2 се състоят от отсечки, успоредни на координатните оси, то те са елементарни множества. Освен това, лесно се вижда, че $E_2 \subset A \subset E_1$ и $\mu(E_1) - \mu(E_2) = \mu(E) < \varepsilon$, което показва, че A е измеримо множество. ■

Следствие. *Обединението, сечението и разликата на две измерими множества е също измеримо.*

Доказателство. Нека A и B да са измерими множества, и нека множеството C да е равно или на тяхното обединение $A \cup B$, или на тяхното сечение $A \cap B$, или на разликата $B \setminus A$. Във всеки от тези три случая имаме

$$bC \subset bA \cup bB$$

(докажете!). Тъй като bA и bB са пренебрежими, то от направената погоре забележка следва, че и bC е пренебрежимо, т.е. множеството C е измеримо. ■



Криволинеен трапец.

Ще напомним един начин на аналитично описание на фигурите в равнината (виж I, §4.5):

Определение. *Нека в интервала $[a, b]$ са зададени непрекъснатите функции $g(x)$ и $f(x)$, като навсякъде е изпълнено $g(x) \leq f(x)$. Тогава криволинеен трапец, определен от функциите g и f, наричаме фигурата D, съставена от всички точки $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, удовлетворяващи неравенствата*

$$a \leq x \leq b \quad , \quad g(x) \leq y \leq f(x) \, .$$

Всички фигури, срещани в елементарната геометрия, могат да бъдат представени или като криволинеен трапец, или като обединение на краен брой криволинейни трапци. Следващата теорема показва, че категорията на измеримите множества е достатъчно широка и обхваща почти всички множества, срещани в анализа:

Теорема 2. *Всеки криволинеен трапец е измеримо множество.*

Доказателство. Да означим с Γ контура на областта D. Очевидно Γ се състои от четири части, които ще означим с Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4, където;

Γ_1 е графиката на непрекъсната функция $g(x)$ в интервала $[a, b]$.

Γ_2 е вертикалната отсечка, свързваща точката $(b, f(b))$ с $(b, g(b))$.

Γ_3 е графиката на $g(x)$ в интервала $[a, b]$.

Γ_4 е вертикалната отсечка, свързваща точката $(a, f(a))$ с $(a, g(a))$.

Оставяме на читателя да докаже, че отсечките Γ_2 и Γ_4 са пренебрежими множества. Тогава теоремата следва от критерия за измеримост и от следната лема, приложена за $g(x)$ и $f(x)$:

Лема 4. *Ако $f(x)$ е непрекъсната функция в интервала $[a, b]$, нейната графика*

$$\Gamma_f = \{(x, y) : x \in [a, b], y = f(x)\}$$

е пренебрежимо множество.

Доказателство на лемата. Да разделим интервала $[a, b]$ на подинтервали с помощта на делящите точки $a = x_0 < \ldots < x_n = b$, и нека m_i и M_i да означават съответно минималната и максималната стойности на $f(x)$ в интервала $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$. Функцията $f(x)$ е непрекъсната в компактния интервал $[a, b]$ и следователно равномерно непрекъсната в него. Тогава за всяко дадено $\varepsilon > 0$ можем да намерим разбиване такова, че $M_i - m_i < \varepsilon$ за всяко i от 1 до n. Да означим с Δ_i правоъгълника

$$\Delta_i = [x_{i-1}, x_i] \times [m_i, M_i], \quad i = 1, \ldots n.$$

Нека положим $E = \cup_{i=1}^n \Delta_i$. Очевидно $\Gamma_f \subset E$. От друга страна

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^n \mu(\Delta_i) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})(M_i - m_i) < \varepsilon \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon(b - a)$$

и може да бъде направено колкото си искаме малко. С това лема 4, а с нея и теорема 2, са доказани. ■

Забележка. Трябва да се отбележи, че за параметрично зададените криви в равнината ситуацията е съвсем различна: множеството от точките на една параметрично зададена чрез непрекъснати функции крива линия може и да не бъде пренебрежимо множество. Един пример за това се дава от т. нар. крива на Пеано: може да се покаже, че съществува непрекъснато изображение на интервала $I = [0,1]$ *върху* квадрата $I \times I$ (виж задача 3). С други думи, множеството от точките на тази непрекъсната крива съвпада с квадрата, който не е пренебрежимо множество.

За да докажем пренебрежимост на кривата, трябва да наложим по-силно условие. Ще напомним, че една крива се нарича *ректифицируема*, ако нейната дължина е крайна (виж I, §4.4). Изпълнена е:

Теорема 3. *Множеството на точките, лежащи на една непрекъсната ректифицируема крива, е пренебрежимо по Пеано-Жордан.*

Доказателство. Нека Γ е ректифицируема крива и l е нейната дължина. Разполагайки последователни точки $P_0, \ldots, P_n$ върху кривата, ние можем да я разделим на n части $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ с равна дължина, т.е. дължината на всяка от кривите Γ_i с краища P_{i-1}, P_i ще е равна на $\frac{l}{n}$. Нека Δ_i е квадрат с център точката P_i и дължина на всяка от страните $\frac{2l}{n}$. Тъй като за всяка точка $P \in \Gamma_i$ разстоянието $\varrho\,(P, P_i)$ не надминава дължината на Γ_i, очевидно имаме $\Gamma_i \subset \Delta_i$ и $\Gamma \subset \cup_{i=1}^{n} \Delta_i$. От друга страна, мярката

$$\mu\left(\cup_{i=1}^{n} \Delta_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu\left(\Delta_i\right) = n.\frac{4l^2}{n^2} = \frac{4l^2}{n}$$

и може да бъде направена колкото си искаме малка чрез увеличаване на n. ∎

Адитивност на мярката на Пеано - Жордан. Ще докажем основното свойство на мярката:

Теорема 3. *Нека A и B са измерими множества с непресичащи се вътрешности и нека $C = A \cup B$. Тогава*

$$\mu(C) = \mu\left(A\right) + \mu\left(B\right).$$

Можем да си представим ситуацията и по следния начин: с помощта на някаква крива линия или друго пренебрежимо множество измеримото множество C е разделено на две части; ще покажем, че при това общата мярка се запазва.

Доказателство. Да изберем елементарни множества E_1 и E_2 такива, че $A \subset E_1$, $E_2 \subset A^o$ и $\mu(E_1) < \mu(A) + \varepsilon/2$, $\mu(E_2) > \mu(A) - \varepsilon/2$. По същия начин можем да намерим елементарни множества F_1 и F_2 такива, че $B \subset F_1$, $F_2 \subset B^o$ и $\mu(F_1) < \mu(B) + \varepsilon/2$, $\mu(F_2) > \mu(B) - \varepsilon/2$. Тогава $C \subset E_1 \cup F_1$ и следователно

$$\mu(C) \leq \mu(E_1) + \mu(F_1) < \mu(A) + \mu(B) + \varepsilon,$$

откъдето следва, че $\mu(C) \leq \mu(A) + \mu(B)$.

За доказателство на обратното неравенство да отбележим, че E_2 и F_2 не се пресичат (тук използваме, че $A^o \cap B^o = \emptyset$) и следователно $\mu(E_2 \cup F_2) = \mu(E_2) + \mu(F_2)$. Тъй като $E_2 \cup F_2 \subset C$, то

$$\mu(C) \geq \mu(E_2) + \mu(F_2) > \mu(A) + \mu(B) - \varepsilon.$$

Тъй като ε е произволно, от тук следва теоремата. ■

Чрез индукция по броя на събираемите лесно се доказва следното

Следствие. *Ако $A_1, \ldots, A_k$ са измерими множества, като $A_i^o \cap A_j^o = \emptyset$ при $i \neq j$, то*

$$\mu(A_1 \cup \ldots \cup A_k) = \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i).$$

Упражнения.

1. Множество на Кантор. Ще конструираме едно интересно подмножество на интервала $[0, 1]$. Да разделим този интервал на три равни подинтервала, и нека E_0 е средният от тях - отвореният интервал $(1/3, 2/3)$. Да разделим всеки от останалите два интервала отново на три равни части, и нека E_1 е обединението на средните подинтервали, т.е. $E_2 = (1/9, 2/9) \cup (7/9, 8/9)$. Аналогично $E_2 = (1/27, 2/27) \cup (7/27, 8/27) \cup (19/27, 20/27) \cup (25/27, 26/27)$ и т.н. Нека $K_n = [0, 1] \setminus E_n$, $E = \cup_{n=0}^{\infty} E_n$, $K = \cap_{n=1}^{\infty} K_n = [0, 1] \setminus E$. Множеството K се нарича канторово множество и притежава редица интересни свойства.

За да опишем множеството на Кантор, е удобно да представяме числата от $[0, 1]$ като (крайни или безкрайни) троични дроби. Ако са дадени троичните цифри $a_1, \ldots, a_n$ (т.е. всяка от тях е равна на 0, 1, или 2), то с ${}_3\overline{0.a_1 \ldots a_n}$ ще означаваме числото $\sum_{k=1}^{n} a_k/3^k$. Аналогично ще означаваме и безкрайните троични дроби.

1 а/. Докажете, че множеството E_n се състои от 2^n непресичащи се отворени интервали с дължина $1/3^n$. Всеки от тях има вида

$$\left({}_3\overline{0.a_1 \ldots a_n\, 1}\ ,\ {}_3\overline{0.a_1 \ldots a_n\, 2}\right),$$

където всяко от числата $a_1, \ldots, a_n$ е равно на нула или две. Ние ще означим с K_0 множеството от крайните точки на описаните по-горе интервали; тогава K_0 е изброимо подмножество на K.

1 б/. Докажете, че множеството $K \setminus K_0$ се състои от всички троично ирационални* точки от $[0, 1]$, които не съдържат единицата в разлагането си в троична дроб.

1 в/. Докажете, че K е затворено множество без изолирани точки* и е пренебрежимо по Пеано-Жордан.

Упътване. Докажете, че $\mu(K_n) = (2/3)^n$.

*под троично ирационални числа разбираме такива, които не се представят като крайна троична дроб, т.е. не могат да се представят като дроб, в която в знаменателя стои степен на тройката.

*тополозите наричат такива множества "съвършени".

1 г/. Докажете, че K притежава мощността на континуума, т.е. съществува взаимно еднозначно и обратимо съответствие между част от K и интервала $[0,1]$.

Упътване. Да вземем двоичното разлагане на точка от $[0,1]$ и да заменим единиците с двойки. По-точно, ако $x = {}_2\overline{0.a_1 \dots a_n \dots}$, полагаме $s(x) = {}_3\overline{0.2a_1 \dots 2a_n \dots} \in K$. Покажете, че s дава влагане на $[0,1]$ в K.

1 д/. Покажете, че изображението $x \to x/3$ дава взаимно еднозначно и взаимно непрекъснато изображение на K в част от себе си. Докажете, че K е най-голямото възможно подмножество на $[0,1]$, което не съдържа точки от интервала $(1/3, 2/3)$ и се изобразява в себе си при изображенията $x \to x/3$ и $x \to 1-x$.

Забележка. Описаното по-горе множество на Кантор е един от най-простите примери на т.н. *фрактални* множества, т.е. множества, чиято размерност не е естествено число. Доказва се, че (при подходяща дефиниция на понятието размерност) имаме

$$\dim K = \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

2. Функция на Кантор. Ще дефинираме функцията на Кантор $\kappa(x)$ най-напред върху множеството E, като върху всеки от неговите интервали тя е равна на подходяща константа. За $x \in (1/3, 2/3)$ полагаме $\kappa(x) = 1/2$; по-нататък, $\kappa(x) = 1/4$ за $x \in (1/9, 2/9)$ и $\kappa(x) = 3/4$ за $x \in (7/9, 8/9)$, и т.н. Следвайки описанието от з. 1 а/, ако $a_1, \dots, a_n$ е крайна редица, съставена от нули и двойки, за всяко

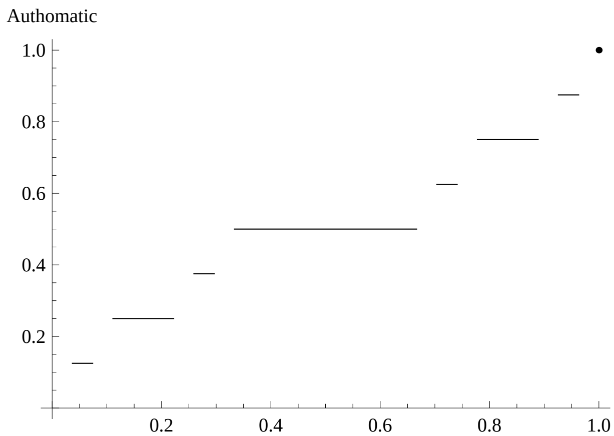
$$x \in \left({}_3\overline{0.a_1 \dots a_n\, 1}\ ,\ {}_3\overline{0.a_1 \dots a_n\, 2}\right) \text{ полагаме } \kappa(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

2 а/. Докажете, че $\kappa(x)$ е монотонно растяща и непрекъсната върху E. Освен това, ако $x_0 \notin E$, то

$$\sup_{x \in E,\ x < x_0} \kappa(x) \ = \ \inf_{x \in E,\ x > x_0} \kappa(x).$$

Като следствие докажете, че $\kappa(x)$ притежава единствено непрекъснато продължение върху цялото $[0,1]$, което обикновено се нарича функция на Кантор*.

*Или, понякога "стълба на Кантор".



Функция на Кантор.

2 б/. Докажете, че за стойности на y, които са двоично ирационални, изображението $s(y)$, конструирано в 1 г/, е обратно на $\kappa(x)$, т.е. $x = s(y) \Leftrightarrow y = \kappa(x)$, като в този случай $x \in K \setminus K_0$.

2 в/. Построената тук функция $\kappa(x)$ дава пример на функция, която е диференцируема и има нулева производна почти навсякъде по Пеано-Жордан, но не е константа.

2 г/. Докажете, че $\kappa(x)$ е единствената монотонна функция в $[0,1]$, удовлетворяваща функционалните уравнения $\kappa(x/3) = \kappa(x)/2$ и $\kappa(1-x) = 1 - \kappa(x)$.

3. Крива на Пеано. Ще докажем, че съществува непрекъснато (но не взаимно еднозначно) изображение на интервала $I = [0,1]$ върху целия квадрат $I \times I = [0,1] \times [0,1]$.

3 а/. Ще дефинираме взаимно еднозначно (но не непрекъснато) изображение $P_+(t) = (x(t), y(t))$ на I върху $I \times I$. Нека $t = {}_2\overline{0.a_1 a_2 \dots a_n \dots}$ е представянето на t като крайна или безкрайна двоична дроб (всички цифри a_n са равни на нула или едно). В двоично-рационалните точки вземаме представянето с краен брой разреди (виж следващата точка). Полагаме

$$x(t) = {}_2\overline{0.a_1 a_3 a_5 \dots a_{2n-1} \dots} \quad , \quad y(t) = {}_2\overline{0.a_2 a_4 a_6 \dots a_{2n} \dots} \ .$$

Докажете, че $P_+(t)$ дава взаимно еднозначно съответствие между I и $I \times I$. Докажете, че това изображение е непрекъснато във всички двоично-ирационални стойности на t , но в двоично-рационалните точки t то е непрекъснато само от дясно.

3 б/. Всяко двоично-рационално число може да се представи в двоичната система по два начина: всяко такова число има вида ${}_2\overline{0.a_1a_2\dots a_n1} = {}_2\overline{0.a_1a_2\dots a_n0111111\dots} = {}_2\overline{0.a_1a_2\dots a_n0(1)}$. Съответно изображението $P(t)$ от 3 а/ може да бъде дефинирано по два различни начина. Да означим с $P_+(t)$ това, което съответства на представянето на двоичните дроби чрез краен брой разреди (от лявата страна в горната формула), и с $P_-(t)$ това, което отговаря на представянето от дясната страна, с единица в период. Докажете, че в двоично-рационалните точки $P_+(t)$ е непрекъснато отдясно, а $P_-(t)$ - отляво. Ще дефинираме избражението на Пеано $P(t) : I \to I \times I$ по следния начин:

- За $t \in K \setminus K_0$ (виж 1 б/) полагаме $P(t) = P_+(\kappa(t)) = P_-(\kappa(t))$.
- Нека $\left({}_3\overline{0.a_1\dots a_n\,1}\,,\ {}_3\overline{0.a_1\dots a_n\,2}\right)$ е интервал от E. В краищата му определяме $P(t)$ по следния начин:
  - Ако t съвпада с левия край на интервала, т.е. $t = {}_3\overline{0.a_1\dots a_n\,1}$, полагаме $P(t) = P_-(\kappa(t))$;
  - Ако t съвпада с десния край на интервала, т.е. $t = {}_3\overline{0.a_1\dots a_n\,2}$, полагаме $P(t) = P_+(\kappa(t))$;
- Във вътрешността на интервала $\left({}_3\overline{0.a_1\dots a_n\,1}\,,\ {}_3\overline{0.a_1\dots a_n\,2}\right)$ продължаваме $P(t)$ като линейно изображение* (тъй като квадратът е изпъкнало множество, стойностите на $P(t)$ остават в него).

Докажете, че сега вече $P(t)$ е непрекъснато изображение, и множеството от неговите стойности съвпада с целия квадрат $I \times I$.

4. Построеното изображение $P(t)$ не е инективно, т.е. различни точки от интервала I може да се изобразяват в една и съща точка от $I \times I$. Докажете, че не съществува взаимно еднозначно и непрекъснато изображение на I върху $I \times I$.

Упътване. Да допуснем, че $P(t)$ е такова изображение.

*Покажете, че графиката на това изображение е хоризонтална или вертикална отсечка.

а/ Използвайки компактността на I (т.е. теоремата на Болцано-Вайерщрас), докажете, че ако $Q(x, y) : I \times I \to I$ е изображението, обратно на $P(t)$, то Q е също непрекъснато.

б/ Нека A и B са две различни точки от квадрата $I \times I$, а Γ_1 и Γ_1 са две непрекъснати криви в квадрата, с начало в A и край в B, които нямат общи точки освен началото и края. Тогава $Q(\Gamma_1)$, $Q(\Gamma_2)$ са линейно свързани подмножества на I и следователно всяко от тях съдържа интервала $[Q(A), Q(B)]$. Но от изискването за взаимна еднозначност на $P(t)$ следва, че тези две множества не бива да имат общи точки освен двете точки $Q(A)$, $Q(B)$, с което стигаме до противоречие.

Забележка. Горното твърдение е частен случай на една от дълбоките теореми на топологията, която твърди, че размерността е топологически инвариант: с други думи, не съществува взаимно еднозначно и взаимно непрекъснато съответствие между две множества с различна размерност.

2.2 Дефиниция на многомерния интеграл.

В настоящия параграф ще дадем дефиниция на двоен интеграл (която лесно се прехвърля и за интеграл върху пространство с по-висока от две размерност). Ще напомним, че в едномерния случай имаме две еквивалентни дефиниции на определения интеграл - дефиниция на Риман и дефиниция на Дарбу. В многомерния случай ситуацията е по-сложна - въвеждат се четири дефиниции, специална дефиниция - съответно на Риман и Дарбу, и обща дефиниция - също на Риман и Дарбу. (Смисълът на тези думи ще бъде обяснен по-долу.)

Специална дефиниция на двойния интеграл. Нека $f(x, y)$ е функция, дефинирана в измеримо (и следователно ограничено) подмножество на равнината. Ще започнем с частния случай, когато дефиниционното множество е правоъгълник.

Двоен интеграл върху правоъгълник: дефиниция на Риман. Нека $f(x, y)$ е дефинирана в правоъгълника $\Delta = [a, b] \times [c, d]$. Да изберем делящи точки $x_0, \ldots, x_n$, $y_0, \ldots, y_m$ така че $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = d$. Ще означим с Δ_{ij} правоъгълника $\Delta_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$; тогава

$$\Delta = \cup_{i=1}^{n} \cup_{j=1}^{m} \Delta_{ij}.$$

Да изберем по една точка $P_{ij} = (\xi_{ij}, \eta_{ij}) \in \Delta_{ij}$; това означава, че $\xi_{ij} \in [x_{i-1}, x_i]$, $\eta_{ij} \in [y_{j-1}, y_j]$.

Съвокупността от всички делящи и междинни точки ще наричаме <u>разбиване</u> на Δ. За всяко такова разбиване τ ще означаваме с $R_\tau(f)$ (или просто R_τ) съответната <u>риманова сума</u>:

$$R_\tau(f) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\xi_{ij}, \eta_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(P_{ij}) \mu(\Delta_{ij}).$$

Ще въведем понятието <u>диаметър</u> на разбиването τ:

$$\operatorname{diam} \tau = \max_{i=1,\ldots,n, j=1,\ldots,m} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2}.$$

(Ще отбележим, че диаметърът не зависи от избора на междинните точки, а само от делящите.)

Определение. *Казваме, че двойният интеграл от $f(x, y)$ по правоъгълника Δ е равен на числото $I(f)$, ако*

$$I(f) = \lim_{diam\,\tau \to 0} R_\tau(f).$$

Забележка. Лесно се вижда, че изискването "diam $\tau \to 0$"е равносилно с това, максималната дължина на подинтервалите $[x_{i-1}, x_i]$, $[y_{j-1}, y_j]$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ също да клони към нула.

Двойният интеграл се означава по следния начин:

$$I(f) = \iint\limits_{\Delta} f(x, y)\, dxdy.$$

Ще опишем по-подробно понятието за граница, използвано в горната дефиниция:

Равенството $I(f) = \lim_{diam\,\tau \to 0} R_\tau(f)$ означава, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, така че за всяко разбиване τ, за което diam $\tau < \delta$, да имаме $|I(f) - R_\tau(f)| < \varepsilon$.

Разбира се, тази граница не е длъжна да съществува; ако тя съществува, функцията $f(x, y)$ се нарича интегруема по Риман в Δ.

Двоен интеграл върху правоъгълник: дефиниция на Дарбу. Тук ще предположим предварително, че $f(x, y)$ е ограничена в Δ, и ще положим

$$m_{ij} = \inf f(P) : P \in \Delta_{ij}, \quad M_{ij} = \sup f(P) : P \in \Delta_{ij}.$$

Както в едномерния случай, за всяко разбиване τ ще образуваме съответната малка и голяма сума на Дарбу:

$$s_\tau(f) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} m_{ij}.\mu\left(\Delta_{ij}\right), \quad S_\tau(f) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} M_{ij}.\mu\left(\Delta_{ij}\right).$$

Лесно се вижда, че множествата от всички малки и от всички големи суми на Дарбу са ограничени; наистина, ако m и M са съответно долна и горна граница за функцията $f(x, y)$ върху Δ, то за всяко τ имаме неравенствата $m \leq m_{ij} \leq M_{ij} \leq M$ и следователно

$$m.\mu\left(\Delta\right) \leq s_\tau(f) \leq S_\tau(f) \leq M.\mu\left(\Delta\right).$$

Тогава можем да дефинираме числата $\underline{I}(f)$, $\overline{I}(f)$, наречени долен и горен интеграл от $f(x,y)$, с формулите

$$\underline{I}(f) = \sup_{\tau} s_\tau(f), \quad \overline{I}(f) = \inf_{\tau} S_\tau(f).$$

Малко по-надолу ще докажем, че винаги $\underline{I}(f) \leq \overline{I}(f)$; за нас е важен случая, когато те съвпадат.

Определение. *Казваме, че функцията $f(x,y)$ е интегруема по Дарбу в Δ, ако $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$; общата им стойност се бележи с $I(f)$ и се нарича интеграл от f върху Δ.*

Двоен интеграл върху произволно измеримо множество. Нека $f(x,y)$ е дефинирана за $(x,y) \in D$, където D е измеримо подмножество на равнината. Тъй като D е и ограничено, можем да изберем правоъгълник Δ, съдържащ D. Да означим с $\widetilde{f}(x,y)$ или $\widetilde{f}(P)$, продължението на функцията f с нулеви стойности върху цялото Δ:

$$\widetilde{f}(P) = \begin{cases} f(P), & P \in D \\ 0, & P \in \Delta \setminus D \end{cases}$$

Определение. *Ще дефинираме двойния интеграл от $f(x,y)$ върху D като равен на двойния интеграл от $\widetilde{f}(x,y)$ върху Δ, определен в предния абзац:*

$$\iint\limits_D f(x,y)\, dxdy \stackrel{def}{=} \iint\limits_\Delta \widetilde{f}(x,y)\, dxdy.$$

Лесно се вижда, че стойността на интеграла не зависи от избора на правоъгълника Δ.

По този начин дефинициите на Риман и Дарбу се пренасят към случая на произволно измеримо дефиниционно множество; ще ги наричаме специални дефиниции, съответно на Риман и Дарбу.

Обща дефиниция на двойния интеграл. Ще дадем една по-обща дефиниция на разбиване. Нека D е измеримо множество в равнината, и нека D_i, $i = 1, \ldots, n$, са измерими подмножества на D, такива, че

$$D = \cup_{i=1}^n D_i \quad \text{и} \quad D_i^o \cap D_j^o = \emptyset \text{ за } i \neq j$$

- ще казваме, че в този случай имаме измеримо разбиване на D. Ще казваме, че разбиването е специално, ако то се получава чрез разрязване по хоризонтални и вертикални линии, както беше направено в предишните точки на този параграф. Всъщност, разликата между общите и специални дефиниции (на Риман и Дарбу) се състои в това, дали се използват произволни разбивания на дефиниционната област, или само специални.

Обща дефиниция на Риман. Нека D е измеримо множество в равнината, и $f(x, y)$ е функция, дефинирана в D. Нека $\tau : D = \cup_{i=1}^{n} D_i$ е разбиване на измеримото множество D. Да изберем по една точка $P_i \in D_i$, $i = 1, \dots, n$. Под риманова сума, съответстваща на разбиването τ и точките $\{P_i\}$, разбираме израза

$$R_\tau(f) = \sum_{i=1}^{n} f\left(P_i\right) \mu\left(D_i\right).$$

Нуждаем се от определение на понятието диаметър на разбиването. Ще напомним, че ако A е ограничено подмножество в равнината, неговия диаметър е максималното разстояние * между две негови точки.

$$\operatorname{diam} A = \sup_{P,Q \in A} \rho(P, Q).$$

Ако τ е горното разбиване, дефинираме

$$\operatorname{diam} \tau = \max_{i=1,\dots,n} \left(\operatorname{diam} D_i\right).$$

Лесно се вижда, че за специални разбивания тази дефиниция съвпада с дадената по-горе. Сега можем да възпроизведем дефиницията на Риман. Отново дефинираме

$$I(f) = \lim_{\operatorname{diam} \tau \to 0} R_\tau(f),$$

като тук се разглеждат произволни измерими разбивания на D.

Обща дефиниция на Дарбу. Аналогично на горното, полагаме

$$m_i = \inf f(P) : P \in D_i, \ M_{ij} = \sup f(P) : P \in D_i,$$

*Така, диаметърът на един правоъгълник е равен на неговия диагонал, а диаметърът на един кръг е равен на неговия диаметър.

$$s_\tau(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \mu\left(D_i\right), \quad S_\tau(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \mu\left(D_i\right),$$

и отново

$$\underline{I}(f) = \sup_\tau s_\tau(f), \quad \overline{I}(f) = \inf_\tau S_\tau(f).$$

Ще покажем, че $\underline{I}(f) \leq \overline{I}(f)$. Ще казваме, че разбиването τ' следва разбиването τ (записва се $\tau' \succ \tau$), ако τ' е получено от τ чрез допълнително разбиване на някои от неговите делящи множества.

Лема 1. *При допълнително разбиване малките суми се увеличават, а големите намаляват. По-точно, ако $\tau' \succ \tau$, то*

$$s_{\tau'}(f) \geq s_\tau(f), \quad S_{\tau'}(f) \leq S_\tau(f).$$

Доказателство. Достатъчно е да докажем твърдението, когато τ' е получено от τ чрез разбиване на едно от делящите множества на τ на две части. Наистина, в общия случай може да се счита, че τ' се получава от τ чрез краен брой такива стъпки; ако на всяка стъпка е доказано, че големите суми намаляват, оттук се вижда, че $S_{\tau'}(f) \leq S_\tau(f)$, и аналогично за малките суми.

Така, нека имаме разбиването $\tau : D = \cup_{i=1}^{n} D_i$, нека D_1 е разбито на две измерими подмножества с непресичащи се вътрешности: $D_1 = D' \cup D''$, и нека разбиването τ' се определя с $D = D' \cup D'' \cup D_2 \cup \ldots \cup D_n$. Да означим с m', m'' точните долни граници на f върху множествата D', D'', и съответно с M', M'' - нейните точни горни граници върху същите множества. Очевидно имаме $m', m'' \geq m_1$ и $M', M'' \leq M_1$. Тогава имаме

$$s_{\tau'}(f) - s_\tau(f) = m'.\mu\left(D'\right) + m''.\mu\left(D''\right) - m_1.\mu\left(D_1\right) =$$

$$= m'.\mu\left(D'\right) + m''.\mu\left(D''\right) - m_1.\left(\mu\left(D'\right) + \mu\left(D''\right)\right) =$$

$$= \left(m' - m_1\right)\mu\left(D'\right) + \left(m'' - m_1\right)\mu\left(D''\right) \geq 0,$$

и по същия начин доказателството протича за големите суми (направете го!). ■

Лема 2. *Ако τ', τ'' са две разбивания на D, то $s_{\tau'}(f) \leq S_{\tau''}(f)$ (т.е. коя да е малка сума на Дарбу не надминава коя да е голяма).*

Доказателство. Нека $\tau' : D = \cup_{i=1}^{n} D_i'$ и $\tau'' : D = \cup_{j=1}^{m} D_j''$. Да означим с τ разбиването

$$\tau : D = \cup_{i=1}^{n} \cup_{j=1}^{m} \left(D_i' \cap D_j'' \right).$$

Очевидно τ е измеримо разбиване, и лесно се вижда, че $\tau \succ \tau'$ и $\tau \succ \tau''$. От лема 1 имаме

$$s_{\tau'}(f) \le s_\tau(f) \le S_\tau(f) \le S_{\tau''}(f).$$

■

Забележка. *Ако τ и τ' са специални разбивания, то τ'' е също специално разбиване. Следователно твърдението на лема 2, както и следващото следствие, са валидни и за специалната дефиниция на Дарбу.*

Следствие. *За всяка функция f е изпълнено неравенството $\underline{I}(f) \le \overline{I}(f)$.*

Наистина, в лявата страна на неравенството $s_{\tau'}(f) \le S_{\tau''}(f)$ можем да вземем супремума по всички разбивания τ', с което получаваме $\underline{I}(f) \le S_{\tau''}(f)$. Вземайки отдясно инфимума по всички τ'', получаваме исканото неравенство. ■

От горните твърдения непосредствено следва:

Критерий за интегруемост по Дарбу. *Функцията $f(x, y)$ е интегруема (в общия или специалния смисъл) по Дарбу точно тогава, когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществува разбиване τ (общо или специално) на дефиниционната област такова, че*

$$S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon.$$

Наистина, ако горното условие е изпълнено, то веднага се вижда, че $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$; обратно, ако долният и горният интеграл съвпадат и са равни на I, то можем да намерим разбивания τ', τ'', така че

$$s_{\tau'}(f) > I - \varepsilon/2, \quad S_{\tau''}(f) < I + \varepsilon/2, \text{ и следователно } S_{\tau''}(f) - s_{\tau'}(f) < \varepsilon.$$

Да изберем разбиването τ такова, че $\tau \succ \tau', \tau''$. Тогава от установените в лема 2 неравенства следва, че $S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon$. ■

Еквивалентност на различните дефиници на двойния интеграл*. По-горе изложихме четири различни дефиниции на двойния (и изобщо многомерния) интеграл: дефиниции на Риман и на Дарбу, всяка от тях в общ и специален вариант. Ще докажем, че тези дефиниции са еквивалентни, и по-точно, че е в сила твърдението:

Теорема (еквивалентност на дефинициите). *Ако една функция е интегруема по една от горните дефиниции, тя е интегруема и по всички останали, и съответните стойности на интеграла по всяка от тях съвпадат.*

Доказателство. Доказателството ще проведем по следната схема:

$$\begin{array}{ccc} \text{Риман обща} & \Rightarrow & \text{Риман специална} \\ \Uparrow & & \Downarrow \\ \text{Дарбу обща} & \Leftarrow & \text{Дарбу специална} \end{array}$$

Ще докажем всяка от горните импликации.

1/ Риман обща $\Rightarrow$ Риман специална: Принципът на доказателството може да бъде формулиран така: ако границата съществува за общи разбивания с диаметър, клонящ към нула, то тя съществува и за частния случай на специални разбивания. Това разсъждение е вярно в случая, когато дефиниционната област е правоъгълник, но в общия случай то трябва да бъде проведено по-прецизно. Римановите суми за $f(x,y)$ и за нейното продължение $\widetilde{f}(x,y)$ могат да се различават близо до контура на дефиниционната област. Ще използваме следната

Лема 3. *Нека D е измеримо подмножество на равнината, и Δ е правоъгълник, съдържащ D. Тогава за всяко $\varepsilon > 0$ може да се намери $\delta > 0$ такова, че за всяко специално разбиване $\tau : \Delta = \cup_{i=1}^{n} \cup_{j=1}^{m} \Delta_{ij}$ с $\operatorname{diam} \tau < \delta$ сумата от лицата на тези правоъгълници Δ_{ij}, които имат общи точки с контура bD на D, да бъде по-малка от ε.*

Доказателство. Тъй като D е измеримо, то bD е пренебрежимо по Пеано-Жордан. Да изберем елементарно множество E такова, че $bD \subset E^0$ и $\mu(E) < \varepsilon$. Тогава двете компактни множества bD и bE не се пресичат, и следователно разстоянието между тях $\rho\,(bD, bE)$ е положително (виж §1.3, упр. 3). Да го означим с δ. Тогава, ако $\operatorname{diam} \tau < \delta$, то

*Читателят, който не се интересува от доказателството на този факт, може да прескочи остатъка на параграфа.

за всеки правоъгълник Δ_{ij}, който има общи точки с bD, е изпълнено $\Delta_{ij} \subset E$. Следователно сумата на лицата на всички такива правоъгълници не надминава лицето на E, т.е е по-малко от ε. (Да отбележим, че доказателството е в сила и за общи разбивания. Освен това, твърдението остава вярно, ако вместо bD се разглежда произволно затворено и пренебрежимо подмножество на D.) ■

Доказателство на импликацията 1/. Нека f е интегруема върху D в смисъл на общата дефиниция на Риман, и нека I да е съответния интеграл. Да изберем правоъгълник Δ, съдържащ D, и нека $\widetilde{f}(x,y)$ е продължението на f с нула върху цялото Δ, което беше използвано по-горе в специалните дефиниции. Да фиксираме $\varepsilon > 0$, и да вземем такова $\delta_1 > 0$, така че за всяко разбиване τ на D с $\operatorname{diam} \tau < \delta_1$ да имаме $|I - R_\tau(f)| < \varepsilon$. Да изберем δ, съответстваща на ε както в лема 3.

Нека сега $\widetilde{\tau}$: $\Delta = \cup_{i=1}^{n} \cup_{j=1}^{m} \Delta_{ij}$ е специално разбиване на правоъгълника Δ с $\operatorname{diam} \widetilde{\tau} < \min(\delta, \delta_1)$, и $\widetilde{P}_{ij} \in \Delta_{ij}$. Нека означим с τ съответното разбиване на D, породено от множествата $D_{ij} = D \cap \Delta_{ij}$, и да изберем точките $P_{ij} \in D_{ij}$ така, че $P_{ij} = \widetilde{P}_{ij}$ в случая, когато Δ_{ij} се съдържа във вътрешността на D (ако Δ_{ij} пресича bD, то може да имаме $\widetilde{P}_{ij} \notin D$). Нека $R_\tau f$ да е римановата сума, съответстваща на общото разбиване τ и на междинните точки P_{ij}. По построение $|I - R_\tau f| < \varepsilon$. От друга страна,

$$R_{\widetilde{\tau}} \widetilde{f} - R_\tau f = \sum_{\Delta_{ij} \cap bD \neq \emptyset} \left(\widetilde{f}\left(\widetilde{P}_{ij}\right) - f\left(P_{ij}\right) \right) \mu\left(\Delta_{ij}\right)$$

и следователно, ако означим с C една горна граница за $|f(P)|$, получаваме

$$\left| R_{\widetilde{\tau}} \widetilde{f} - R_\tau f \right| \le 2C \sum_{\Delta_{ij} \cap bD \neq \emptyset} \mu\left(\Delta_{ij}\right) < 2C\varepsilon$$

В крайна сметка получаваме

$$\left| I - R_{\widetilde{\tau}} \widetilde{f} \right| \le |I - R_\tau f| + \left| R_{\widetilde{\tau}} \widetilde{f} - R_\tau f \right| < (1 + 2C)\varepsilon$$

и може да бъде направено произволно малко. ■

2/ Риман специална $\Rightarrow$ Дарбу специална: Да изберем $\varepsilon > 0$. За всички разбивания τ на дефиниционната област Δ на $\widetilde{f}$ с достатъчно малък диаметър имаме

$$R_\tau \widetilde{f} = \sum_{i,j} \widetilde{f}\left(P_{ij}\right) \mu\left(\Delta_{ij}\right) \in (I - \varepsilon, I + \varepsilon)$$

независимо от избора на междинните точки P_{ij}. Променяйки тези точки, можем да накараме функционалните стойности $\widetilde{f}\,(P_{ij})$ да клонят към минималната m_{ij} или максималната M_{ij} стойности на функцията в Δ_{ij}; тогава римановата сума $R_\tau \widetilde{f}$ ще клони съответно към малката $s_\tau \widetilde{f}$ или към голямата $S_\tau \widetilde{f}$ суми на Дарбу за τ. Чрез граничен преход получаваме, че

$$I - \varepsilon \leq s_\tau \widetilde{f} \leq S_\tau \widetilde{f} \leq I + \varepsilon,$$

откъдето $S_\tau \widetilde{f} - s_\tau \widetilde{f} \leq 2\varepsilon$. Според критерия на Дарбу, доказан по-горе, това означава, че $\widetilde{f}$ е интегруема по Дарбу върху Δ.

3/ Дарбу специална $\Rightarrow$ Дарбу обща: Нека, както и по-горе, е дадена функцията f с дефиниционна област D, Δ е правоъгълник, съдържащ D, и $\widetilde{f}$ е продължението на f с нулеви стойности. Предполагаме, че $\widetilde{f}$ е интегруема по специалната дефиниция на Дарбу в Δ. Да фиксираме $\varepsilon > 0$, и нека $\widetilde{\tau}$: $\Delta = \cup_{i=1}^{n} \cup_{j=1}^{m} \Delta_{ij}$ е специално разбиване на Δ такова, че $S_{\widetilde{\tau}} \widetilde{f} - s_{\widetilde{\tau}} \widetilde{f} < \varepsilon$. Отново ще означим с τ съответното разбиване на D: $\tau: \ D = \cup_{i,j} \left(\Delta_{ij} \cap D\right)$. Очевидно имаме

$$s_{\widetilde{\tau}} \widetilde{f} \leq s_\tau f, \quad S_{\widetilde{\tau}} \widetilde{f} \geq S_\tau f$$

(докажете!) и следователно $S_\tau f - s_\tau f < \varepsilon$, т.е. критерият на Дарбу е удовлетворен.

4/ Дарбу обща $\Rightarrow$ Риман обща: В това доказателство основната тежест се носи от следната теорема, чието доказателство ще дадем понататък:

Теорема на Дарбу. *Ако $f(x, y)$ е ограничена функция върху измеримото множество D, и τ пробягва всички разбивания на D от общ вид, то са налице съотношенията*

$$\lim_{\operatorname{diam} \tau \to 0} s_\tau f = \underline{I}(f), \quad \lim_{\operatorname{diam} \tau \to 0} S_\tau f = \overline{I}(f).$$

Ако сметнем теоремата на Дарбу за доказана, то твърдението се получава чрез прилагане на лемата за полицаите към очевидното неравенство

$$s_\tau f \leq R_\tau f \leq S_\tau f.$$

По-подробно, нека f е интегруема върху D според общата дефиниция на Дарбу. Тогава по горната теорема за всяко $\varepsilon > 0$ можем да намерим $\delta > 0$, така че за всяко разбиване τ с $\operatorname{diam}\tau < \delta$ да имаме $s_\tau f > I(f)-\varepsilon$, $S_\tau f < I(f)+\varepsilon$, и следователно за всяко такова τ ще бъде изпълнено $I(f)-\varepsilon < R_\tau f < I(f)+\varepsilon$.

Доказаните импликации позволяват да се твърди, че ако една от дефинициите е изпълнена, то са изпълнени и останалите три, и, разбира се, стойността на интеграла се получава една и съща. Остава само да докажем теоремата на Дарбу. ■

Доказателство на теоремата на Дарбу. Ще докажем твърдението за малките суми, за големите то се доказва аналогично.

Да фиксираме $\varepsilon > 0$. По дефиниция можем да намерим измеримо разбиване τ^* на D: $\tau^* : D = \cup_{i=1}^k D_i^*$ такова, че

$$s_{\tau^*} f = \sum_{i=1}^k m_i^* \mu\left(D_i^*\right) > \underline{I}(f) - \varepsilon,$$

където $m_i^* = \inf\limits_{P \in D_i^*} f(P)$.

Нека A е обединението на контурите на всички D_i^*: $A = \cup_{i=1}^k bD_i^*$. Тъй като всички множества D_i^* са измерими, то по критерия за измеримост от предния параграф получаваме, че A е пренебрежимо множество. Лесно се вижда, че то е и затворено. Нека изберем $\delta > 0$ както в лема 3. Това означава, че ако $\tau : D = \cup_{j=1}^n D_j$ е произволно покритие на D с $\operatorname{diam}\tau < \delta$, то

$$\sum_{D_j \cap A \neq \emptyset} \mu\left(D_j\right) < \varepsilon.$$

Теоремата ще бъде доказана, ако успеем да покажем, че за всички такива τ съответната малка сума $s_\tau f$ е достатъчно близко до $\underline{I}(f)$.

В доказателството на лема 2 ние видяхме как се конструира разбиване, което да следва две дадени разбивания. Тук ще намерим разбиване τ_1, което да следва τ и τ^*. Това разбиване има вида

$$\tau_1 : D = \cup_{j=1}^n \cup_{i=1}^k \left(D_i^* \cap D_j\right).$$

От една страна, от факта, че $\tau_1 \succ \tau^*$ според лема 2 следва, че $s_{\tau_1} f \geq s_{\tau^*} f > \underline{I}(f) - \varepsilon$. От друга страна, след като $\tau_1 \succ \tau$, ние можем да разгледаме разбиването τ_1 като получено от разбиването τ чрез раздробяване на неговите делящи множества. Ще покажем, че при това малката сума на Дарбу не може много да се промени. Това следва от следното твърдение (донякъде сходно с лема 1, но оценката е в противоположна посока):

Лема. *Нека в разбиването* $\tau : D = \cup_{i=1}^{n} D_i$*, множеството* D_1 *е разбито на* p *на брой измерими подмножества с непресичащи се вътрешности:* $D_1 = D_{1,1} \cup D_{1,2} \cup \ldots \cup D_{1,p}$*. Да определим разбиването* τ' *като* $D = D_{1,1} \cup D_{1,2} \cup \ldots \cup D_{1,p} \cup D_2 \cup \ldots \cup D_n$*. Тогава*

$$0 \leq s_{\tau'} f - s_{\tau} f \leq (M - m)\mu\left(D_1\right),$$

където m *и* M *са съответно долна и горна граница за функцията* $f(x, y)$ *върху* D*.*

Доказателство. Лявото неравенство е доказано в лема 1; да докажем дясното. Нека, аналогично на лема 1, да означим с m_1, $m_{1,1}$, $m_{1,2}$,... точните долни граници на $f(x,y)$ върху D_1, $D_{1,1}$, $D_{1,2}$.... съответно. Тогава, както в лема 1, получаваме

$$s_{\tau'}(f) - s_{\tau}(f) = \left(m_{1,1} - m_1\right) \mu\left(D_{1,1}\right) + \ldots + \left(m_{1,p} - m_1\right) \mu\left(D_{1,p}\right).$$

Тъй като очевидно разликите $m_{1,1} - m_1$,... $m_{1,p} - m_1$ не надминават $M - m$, то

$$s_{\tau'}(f) - s_{\tau}(f) \leq \sum_{s=1}^{p} (M - m) \mu\left(D_{1,s}\right) = (M - m) \mu\left(D_1\right).$$

■

Продължаваме доказателството на теоремата на Дарбу. Ще приложим многократно горната лема, за да стигнем от разбиването τ до разбиването τ_1. Очевидно като разделящи линии служат контурите на множествата D_i^*, $i = 1, \ldots, k$. Важно е да отбележим, че при тази процедура ние разделяме само тези множества от τ, които имат общи точки с някой от тези контури, т.е. с тяхното обединение A. От лемата получаваме

$$s_{\tau_1}(f) - s_{\tau}(f) \leq (M - m) \sum_{D_j \cap A \neq \emptyset} \mu\left(D_j\right) < (M - m)\, \varepsilon.$$

В крайна сметка

$$\underline{I}(f) \geq s_{\tau}(f) = s_{\tau_1}(f) - \left(s_{\tau_1}(f) - s_{\tau}(f)\right) \geq \underline{I}(f) - \varepsilon - (M - m)\, \varepsilon =$$

$$= \underline{I}(f) - (M - m + 1)\,\varepsilon,$$

от което се вижда, че

$$|\underline{I}(f) - s_\tau(f)| < (M - m + 1)\,\varepsilon.$$

Тази оценка е валидна за произволно разбиване τ с $\operatorname{diam}\tau < \delta$, което показва, че $s_\tau(f)$ може да бъде направено произволно близко до $\underline{I}(f)$, когато $\operatorname{diam}\tau \to 0$. Теоремата на Дарбу е доказана, с което приключва и доказателството на еквивалентността на четирите дефиниции на двойния интеграл. ■

2.3 Основни свойства на многомерния интеграл.

Тук ще изброим и докажем основните свойства на двойния интеграл. Те не се различават особено от свойствата на едномерния риманов интеграл, изучени в първата част. В предния параграф ние въведохме няколко еквивалентни дефиниции на интеграла, и при доказателството на всяко свойство ще използваме тази от тях, която е най-удобна за случая. Интеграла от $f(x, y)$ върху D ще означаваме с $\iint_D f(x, y)\, dxdy$ или просто с $I(f)$.

Свойство 1. Линейност и хомогенност. Ако функциите $f(x, y)$ и $g(x, y)$ са интегруеми върху D, то и $f(x, y) + g(x, y)$, $\lambda f(x, y)$ са също интегруеми, и

$$\iint_D (f(x, y) + g(x, y))\, dxdy = \iint_D f(x, y) dxdy + \iint_D f(x, y) dxdy,$$

$$\iint_D \lambda f(x, y) dxdy = \lambda \iint_D f(x, y)\, dxdy.$$

Доказателство. Ще използваме дефиницията на Риман (без значение - обща или специална). Нека $\tau : D = \cup_{i=1}^n D_i$ е какво да е разбиване на D и $P_i \in D_i$. Имаме

$$R_\tau(f+g) = \sum_{i=1}^n \left(f\left(P_i\right) + g\left(P_i\right)\right) \mu\left(D_i\right) = R_\tau(f) + R_\tau(g),\ R_\tau(\lambda f) = \lambda R_\tau(f),$$

откъдето чрез граничен преход при $\operatorname{diam} \tau \to 0$ получаваме исканите равенства. ■

Свойство 2. Позитивност. Ако $f(x, y) \geq 0$ навсякъде върху D, то и $I(f) \geq 0$.

Доказателство. Очевидно за всяко разбиване τ ще имаме $R_\tau(f) \geq 0$, откъдето чрез граничен преход получаваме $I(f) \geq 0$. ■

Позитивността на интеграла автоматично влече след себе си още няколко свойства.

Свойство 3. Монотонност. Ако $f(x, y) \geq g(x, y)$ навсякъде върху D, то $I(f) \geq I(g)$ (с други думи, неравенствата могат да се интегрират).

Доказателство. Тъй като $f(x,y) - g(x,y) \geq 0$, то по свойство 2 имаме $I(f-g) \geq 0$, откъдето по свойство 1 получаваме $I(f) - I(g) \geq 0$. ■

Свойство 4. Ако функцията $f(x,y)$ е интегруема върху D, то нейният модул $|f(x,y)|$ е също интегруем, и $|I(f)| \leq I\left(|f|\right)$.

Доказателство. Нека предположим, че вече сме доказали, че $|f(x,y)|$ е интегруема. Ще докажем исканото неравенство. Наистина, навсякъде е изпълнено неравенството

$$-\left|f(x,y)\right| \leq f(x,y) \leq \left|f(x,y)\right|,$$

откъдето по свойство 3 следва, че

$$-I\left(|f|\right) \leq I\left(f\right) \leq I\left(|f|\right).$$

Следователно,

$$|I(f)| = \max\left(I(f), -I(f)\right) \leq I\left(|f|\right).$$

Малко по-трудно е да докажем, че от интегруемостта на f следва интегруемостта на $|f|$. За целта ще използваме критерия на Дарбу за интегруемост, доказан в предния параграф. Нека $\tau : D = \cup_{i=1}^{n} D_i$ е произволно разбиване на D. Да означим с m_i, M_i съответно точната долна и горна граница на $f(x,y)$ върху D_i, а с $\widetilde{m_i}$, $\widetilde{M_i}$ - точната долна и горна граница на $|f(x,y)|$ върху същото множество. Очевидно имаме $\widetilde{M_i} - \widetilde{m_i} \leq M_i - m_i$ (докажете!), откъдето

$$S_\tau(|f|) - s_\tau(|f|) = \sum_{i=1}^{n} \left(\widetilde{M_i} - \widetilde{m_i}\right) \mu\left(D_i\right) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left(M_i - m_i\right) \mu\left(D_i\right) = S_\tau(f) - s_\tau(f).$$

Тъй като f е интегруема, по критерия на Дарбу за всяко $\varepsilon > 0$ съществува разбиване τ такова, че $S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon$. Тогава за това разбиване ще имаме и $S_\tau(|f|) - s_\tau(|f|) < \varepsilon$, т.е функцията $|f|$ удовлетворява условието на критерия на Дарбу и следователно е интегруема. ■

Забележка. В част I беше даден пример на неинтегруема по Риман функция $f(x)$ такава, че $|f(x)|$ е интегруема. Подобен пример лесно може да се построи и за функция на две (или повече) променливи.

Свойство 5. (Връзка между интеграла и мярката). За всяко измеримо множество D имаме:

$$\iint_D 1\, dxdy = \mu(D).$$

Доказателство. Очевидно за произволно разбиване
$\tau : D = \cup_{i=1}^n D_i$ е в сила $R_\tau(1) = \sum_{i=1}^n \mu\left(D_i\right) = \mu(D)$. ■

Свойство 6. (Теорема за средните стойности). Нека D е затворено, измеримо и линейно свързано множество (виж §1.3. за дефиниция на линейно свързано множество), и $f(x, y)$ е непрекъсната* върху D. Тогава съществува точка $P_0 \in D$ такава, че

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy = f\left(P_0\right) \mu(D).$$

Доказателство. Да означим с m и M съответно точната долна и горна граница на стойностите на $f(x,y)$ върху D. Според теоремите на Вайерщрас (теореми 7 и 8 на §1.3) тези граници се достигат, т.е. съществуват точки $P_{min}, P_{max} \in D$ такива, че $f\left(P_{min}\right) = m$, $f\left(P_{max}\right) = M$. Интегрирайки неравенствата $m \leq f(x,y) \leq M$, получаваме $m\mu(D) \leq \iint_D f(x,y) dxdy \leq M\mu(D)$, (виж свойство 5), откъдето

$$f\left(P_{min}\right) = m \leq \frac{1}{\mu(D)} \iint_D f(x,y)\, dxdy \leq M = f\left(P_{max}\right).$$

По теоремата за междинните стойности (теорема 11 на §1.3) всяко число, намиращо се между две стойности на функцията, е също стойност на функцията, откъдето следва съществуването на точка $P_0 \in D$ такава, че $f\left(P_0\right) = \frac{1}{\mu(D)} \iint_D f(x,y) dxdy$. ■

Забележка. Числото $f\left(P_0\right) = \frac{1}{\mu(D)} \iint_D f(x,y) dxdy$ се нарича <u>средна стойност</u> на функцията $f(x,y)$ върху D.

Свойство 7. (Адитивност по множество). Нека $D = D' \cup D''$ е разбиване на измеримото множество D на две измерими подмножества D' и D'' с непресичащи се вътрешности, и $f(x,y)$ е функция, дефинирана върху D. Тогава

---

*По-долу ще покажем, че всяка непрекъсната функция върху затворено и измеримо множество е интегруема.

1/ $f(x,y)$ е интегруема върху D точно тогава, когато тя е интегруема върху D' и D'', и

2/

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D'} f(x,y)\,dxdy + \iint_{D''} f(x,y)\,dxdy.$$

Доказателство. И тук ще докажем най-напред лесната част, т.е. 2/. Да предположим, че е известно, че f е интегруема върху D, D' и D''. Нека $\tau' : D_1 = \cup_{i=1}^n D_i'$ е разбиване на D', и $\tau'' : D'' = \cup_{j=1}^m D_i''$ е разбиване на D''. Елементите на тези две разбивания образуват разбиване на D:

$$\tau : D = \left(\cup_{i=1}^n D_i'\right) \cup \left(\cup_{j=1}^m D_j''\right).$$

Да изберем и междинните точки $P_i' \in D_i'$, $P_j'' \in D_j''$. Тогава, чрез граничен преход в равенството

$$R_\tau(f) = R_{\tau'}(f) + R_{\tau''}(f)$$

при $\operatorname{diam}\tau'$ и $\operatorname{diam}\tau''$ клонящи към нула (тогава очевидно и $\operatorname{diam}\tau$ клони към нула) получаваме по дефиницията на Риман равенството 2/.

За доказателството на твърдението 1/ ще използваме критерия на Дарбу за интегруемост. Нека е дадено, че f е интегруема върху D' и върху D''. Нека τ', τ'' са разбивания съответно на D' и D'' такива, че

$$S_{\tau'}(f) - s_{\tau'}(f) < \varepsilon,\ S_{\tau''}(f) - s_{\tau'}(f) < \varepsilon.$$

Нека τ е разбиването на D, образувано от елементите на τ_1 и τ_2 както по-горе. Тогава

$$S_\tau(f) = S_{\tau'}(f) + S_{\tau''}(f),\ s_\tau(f) = s_{\tau'}(f) + s_{\tau''}(f)$$

и следователно

$$S_\tau(f) - s_\tau(f) < 2\varepsilon,$$

т.е. функцията $f(x,y)$ е интегруема върху D.

Обратно, нека f да е интегруема върху D, и нека $\tau : D = \cup_{i=1}^n D_i$ е разбиване на D такова, че $S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon$. Да образуваме породеното от него разбиване τ' на D': $\tau' : D' = \cup_{i=1}^n D_i'$, където $D_i' = D_i \cap D'$. Да означим с m_i, M_i съответно точната долна и горна граница на $f(x,y)$

върху D_i, а с m'_i, M'_i - точната долна и горна граница на тази функция върху D'_i. Лесно се вижда, че $M'_i - m'_i \leq M_i - m_i$, и следователно

$$S_{\tau'}(f) - s_{\tau'}(f) \leq S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon,$$

т.е. f е интегруема върху D'. Абсолютно по същия начин се вижда, че f е интегруема и върху D''. ■

2.4 Класове интегруеми функции.

Използвайки критерия на Дарбу, ще дадем някои достатъчни условия за интегруемост. Най-просто, и най-често използвано, е следното твърдение:

Теорема 1. *Ако функцията $f(x, y)$ е непрекъсната върху затвореното и измеримо множество D, тя е интегруема върху него.*

Доказателство. Най-напред ще отбележим, че D е ограничено (това влиза в дефиницията на измеримост) и затворено, т.е. то е компактно, и за функцията f са в сила теоремите на Вайерщрас и Кантор (виж §1.3). Специално, теоремата на Кантор (виж §1.3, теор. 10) гласи, че всяка непрекъсната функция върху D е и равномерно непрекъсната.

Приложено към функцията f, това означава следното: за всяко $\varepsilon > 0$ можем да намерим $\delta > 0$, така че за всеки две точки $P, Q \in D$, за които $\rho(P, Q) < \delta$, е изпълнено $|f(P) - f(Q)| < \varepsilon$.

Нека сега фиксираме $\varepsilon > 0$, и нека $\tau : D = \cup_{i=1}^{n} D_i$ е измеримо разбиване на D с $\operatorname{diam} \tau < \delta$. Тогава за всеки две точки P, Q, принадлежащи на едно и също множество D_i, ще имаме $\rho(P, Q) < \delta$ и следователно $|f(P) - f(Q)| < \varepsilon$. Ако накараме $f(P)$ да се доближава към максималната стойност M_i на f върху D_i, а $f(Q)$ - към минималната и стойност m_i, получаваме, че за всяко $i = 1, \ldots, n$ е изпълнено $M_i - m_i \leq \varepsilon$. Следователно

$$S_\tau(f) - s_\tau(f) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\, \mu(D_i) \leq \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \mu(D_i) = \varepsilon \mu(D)$$

и по критерия на Дарбу получаваме твърдението на теоремата. ■

В някои случаи изискването за непрекъснатост навсякъде е прекалено силно и не обхваща някои важни случаи като например стъпаловидните функции. Оказва се, че то може съществено да се отслаби, като се поиска функцията да е ограничена и множеството на нейните точки на прекъсване да е пренебрежимо:

Теорема 2. *Нека функцията $f(x, y)$ е дефинирана и ограничена върху измеримото множество D. Да предположим, че съществува пренебрежимо подмножество A на D, така че $f(x, y)$ е непрекъсната във всички точки на $D \setminus A$. Тогава f е интегруема върху D.*

Доказателство. От §1 знаем, че контурът bD на измеримото множество D е пренебрежим, и следователно множеството $\widetilde{A} = A \cup bD$ е също пренебрежимо. Да фиксираме $\varepsilon > 0$, и нека E е елементарно множество такова, че $\widetilde{A} \subset E^o$ и $\mu(E) < \varepsilon$. Тогава множеството $\widetilde{D} = D \setminus E^o$ е измеримо и затворено. Наистина, ако означим $\overline{D} = D \cup bD$, то $\overline{D}$ е затворено ($\overline{D}$ се нарича затворена обвивка на D), и неговото допълнение в равнината $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ е отворено.* Тогава множеството

$$\mathbb{R}^2 \setminus \widetilde{D} = \left(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}\right) \cup E^o$$

е също отворено като обединение на две отворени множества, и следователно $\widetilde{D}$ е затворено. Като разлика на две измерими множества $\widetilde{D}$ е и измеримо.

От условието на теоремата се вижда, че $f(x, y)$ е непрекъсната навсякъде върху $\widetilde{D}$. Както в теорема 1, можем да приложим теоремата на Кантор и да намерим $\delta > 0$, така че за всеки две точки $P, Q \in \widetilde{D}$, за които $\rho(P, Q) < \delta$, е изпълнено $|f(P) - f(Q)| < \varepsilon$. Нека сега $\widetilde{\tau} : D = \cup_{i=1}^{n} D_i$ е измеримо разбиване на $\widetilde{D}$ с $\operatorname{diam} \tau < \delta$. Нека $D_0 = E \cap D$. Да означим с m_i, съотв. M_i, точната долна и точната горна граница на $f(x, y)$ върху D_i, $i = 0, 1, \ldots, n$. Както и в доказателството на теорема 1, ще получим, че $M_i - m_i \leq \varepsilon$ при $i = 1, \ldots, n$ (при $i = 0$ това, разбира се, не е вярно). Да означим с τ следното разбиване на D:

$$\tau : D = D_0 \cup \left(\cup_{i=1}^{n} D_i\right).$$

Нека m и M са съответно долна и горна граница за стойностите на $f(x, y)$; очевидно $M_0 - m_0 \leq M - m$ и $\mu(D_0) \leq \mu(E) < \varepsilon$. Тогава можем да оценим разликата между съответната голяма и малка сума на Дарбу:

$$S_\tau(f) - s_\tau(f) = (M_0 - m_0)\, \mu(D_0) + \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\, \mu(D_i) \leq$$

$$\leq (M - m)\varepsilon + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \mu(D_i) \leq \varepsilon\, (M - m + \mu(D))$$

и следователно тази разлика може да бъде направена произволно малка.
■

*Ще напомним на читателя, че понятията вътрешност, контур, отворено и затворено множество и т.н. са въведени в §1.2.

Забележка. Условието на теорема 2 отново е достатъчно, но не и необходимо условие за интегруемост. В §4.1 на част I беше въведена така наречената *функция на Риман* $f(x)$, $x \in [0,1]$:

$f(x) = \dfrac{1}{q}$, аko x е рационално и се представя чрез несъкратимата дроб $\dfrac{p}{q}$;

$f(x) = 0$, ако x е ирационално.

На посоченото място беше доказано, че тази функция е интегруема в $[0,1]$; от друга страна, $f(x)$ е непрекъсната в ирационалните и прекъсната в рационалните точки на интервала $[0,1]$, т.е. множеството на нейните точки на прекъсване не е пренебрежимо по Пеано-Жордан подмножество на правата*. Подобен пример лесно може да се построи и за функции на две променливи.

По-долу ние ще видим как с малка промяна на дефиницията за пребрежимо множество може да се получи необходимо и достатъчно условие за интегруемост.

Критерий на Лебег за интегруемост по Риман. Ще въведем едно ново определение за пренебрежимост:

Определение. *Подмножеството* A *на равнината се нарича* <u>*пренебрежимо по Лебег,*</u> *ако за всяко* $\varepsilon > 0$ *съществува* изброима *фамилия от правоъгълници* $\{\Delta_i\}, i = 1, 2, \dots$ *такива, че*

$$A \subset \cup_{i=1}^{\infty} \Delta_i \quad \textit{и} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mu\left(\Delta_i\right) < \varepsilon.$$

Ако в горната дефиниция заменим думата 'изброима' с думата 'крайна', ще получим именно дефиницията на пренебрежимост по Пеано-Жордан, въведена в §1. Следователно, всяко множество, пренебрежимо по Пеано-Жордан, е и пренебрежимо по Лебег. Ще видим, че обратното не е вярно.

Лема. *Всяко изброимо множество е пренебрежимо по Лебег.*

---

*Лесно се вижда, че понятието пренебрежимост по Пеано-Жордан, въведено в §1, се пренася без изменения в едномерния случай, като вместо правоъгълници се използват интервали. Множеството на рационалните точки в $[0,1]$ не е пренебрежимо по Пеано-Жордан (докажете!).

Доказателство. Нека A е изброимо множество, състоящо се от точките $P_1, P_2, \ldots$. Да изберем $\varepsilon > 0$. За всяко $i = 1, 2, \ldots$ да означим с Δ_i правоъгълника с център в точката P_i и лице $\frac{\varepsilon}{2^i}$. Очевидно $A \subset \cup \Delta_i$ и $\sum \mu(\Delta_i) = \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} 1/2^i = \varepsilon$. ■

Обобщение. По същия начин може да се докаже и едно по-общо твърдение: Ако $\{A_i\}, i = 1, 2, \ldots$, е изброима фамилия от пренебрежими по Лебег множества, то тяхното обединение $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ е също пренебрежимо по Лебег (виж задача 2).

Твърдението на лемата не е валидно за понятието пренебрежимост по Пеано-Жордан; наистина, да разгледаме множеството $\mathbb{Q}^2 \cap ([0,1] \times [0,1])$ от всички точки в квадрата $[0,1] \times [0,1]$ с рационални координати. Това множество е изброимо, но не е пренебрежимо по Пеано-Жордан: неговата горна мярка съвпада с мярката на квадрата и е равна на 1.

Сега може да формулираме необходимото и достатъчно условие за интегруемост.

Теорема 3 (Критерий на Лебег за интегруемост по Риман). *Нека $f(x, y)$ е ограничена функция, дефинирана върху измеримото по Пеано-Жордан множество D. Тогава f е интегруема тогава и само тогава, когато множеството от точките, в които не е непрекъсната, е пренебрежимо по Лебег.*

Като илюстрация може да послужи дефинираната по-горе функция на Риман. Множеството от нейните точки на прекъсване е изброимо и следователно пренебрежимо по Лебег. Оттук следва, че тя е интегруема (което беше доказано и без използването на този критерий в §4.1 на част I).

Доказателство на критерия на Лебег. За простота на изложението ще докажем критерия за функции на една променлива. Многомерният случай се доказва по същия начин, с някои несъществени технически корекции.

Нека $f(x)$ е ограничена функция в интервала $[0,1]$. За всяко естествено n ще определим разбиването τ_n на интервала $[0,1]$ чрез делящите точки $\frac{k}{2^n}$, $k = 0, \ldots 2^n$. С други думи, разбиването τ_n има вида $0 < 1/2^n < \ldots < k/2^n < \ldots < 1$. Лесно се вижда, че $\tau_1 \prec \tau_2 \prec \ldots$, и всяко следващо разбиване τ_{n+1} се получава от τ_n чрез разполовяване на всички негови делящи интервали. Да означим с $m_{k,n}$, $M_{k,n}$ съответно точната долна и точната горна граница на $f(x)$ в интервала $[(k-1)/2^n, k/2^n]$. Ще въведем т.н. *долна и горна функция*, съотв. $s_n(x)$ и $S_n(x)$, съответстващи на функцията $f(x)$ и разбиването τ_n:

- $s_n(0) = S_n(0) = f(0)$, и
- в интервала $((k-1)/2^n, k/2^n]$ полагаме $s_n(x) = m_{k,n}$, $S_n(x) = M_{k,n}$.

Лесно се виждат следните свойства на функциите $s_n(x)$ и $S_n(x)$:

1/ От съотношенията $\tau_1 \prec \tau_2 \prec \ldots$ следва, че $s_1(x) \leq s_2(x) \leq \ldots$ и $S_1(x) \geq S_2(x) \geq \ldots$.

2/ $\int_0^1 s_n(x)dx = s_{\tau_n}(f)$, $\int_0^1 S_n(x)dx = S_{\tau_n}(f)$.

3/ Нека x_0 е точка в $[0,1]$, която не съвпада с нито една от делящите точки $\frac{k}{2^n}$, $k = 0, \ldots, 2^n$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогава x_0 е точка на непрекъснатост на $f(x)$ точно тогава, когато

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x_0) = \lim_{n\to\infty} S_n(x_0).$$

Твърденията 1/ и 2/ са очевидни. Да докажем 3/. Нека x_0 е точка на непрекъснатост, $\varepsilon > 0$, и нека $\delta > 0$ е такова, че от $|x - x_0| < \delta$ следва $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Ако $1/2^n < \delta$ и $x_0 \in ((k-1)/2^n, k/2^n)$, то $((k-1)/2^n, k/2^n] \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ и следователно

$$S_n(x_0) - s_n(x_0) = M_{k,n} - m_{k,n} \leq 2\varepsilon.$$

Обратно, ако $\lim(S_n(x_0) - s_n(x_0)) = 0$, то за достатъчно голямо n ще имаме $S_n(x_0) - s_n(x_0) < \varepsilon$. Нека $x_0 \in ((k-1)/2^n, k/2^n)$. Тогава $M_{k,n} - m_{k,n} = S_n(x_0) - s_n(x_0) < \varepsilon$. Следователно за всяко $x \in ((k-1)/2^n, k/2^n)$ ще имаме $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, което доказва 3/.

Да означим $\varphi_n(x) = S_n(x) - s_n(x)$. Очевидно $\varphi_n(x) \geq 0$, и от свойство 1/ следва, че редицата $\varphi_n(x)$ е монотонно намаляваща. Функциите $\varphi_n(x)$, както и $S_n(x)$, $s_n(x)$, са *стъпаловидни функции*, т.е. функции от вида

$$(*) \quad \varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{k_n} C_{k,n}\chi_{\Delta_{k,n}}(x),$$

където $C_{k,n}$ са константи, за всяко фиксирано n интервалите $\Delta_{k,n}$ не се пресичат помежду си и покриват интервала $[0,1]$, а $\chi_\Delta(x)$ означава характеристичната функция на интервала Δ, т.е. $\chi_\Delta(x) = 1$ за $x \in \Delta$ и $\chi_\Delta(x) = 0$ за $x \notin \Delta$. Доказателството на критерия на Лебег се основава на следното твърдение:

Основна лема. *Нека $\varphi_n(x)$ е монотонно намаляваща редица от неотрицателни стъпаловидни функции в $[0,1]$. Тогава следните две твърдения са еквивалентни:*

а/ Множеството A от онези x, за които $\varphi_n(x)$ не клони към 0, е пренебрежимо по Лебег.

б/ $\int_0^1 \varphi_n(x)dx \to 0$.

Доказателство на лемата. Нека за всяко $h > 0$ да означим с A_h множеството от онези x, за които $\varphi_n(x) \geq h$ при всяко n. Ще отбележим следният

Факт: Множеството A е пренебрежимо по Лебег точно тогава, когато A_h са пренебрежими по Лебег за всяко $h > 0$.

Наистина, тъй като $A_h \subset A$, то ако A е пренебрежимо по Лебег, то същото е вярно и за всяко от множествата A_h. Обратно, нека всяко от множествата A_h е пренебрежимо, и нека $h_n \searrow 0$. Тогава $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_{h_n}$, и по формулираното по-горе обобщение (виж зад. 2) следва, че и A е пренебрежимо.

Нека допуснем, че е изпълнено б/, и да фиксираме $h > 0$. Ще докажем, че A_h е пренебрежимо по Лебег (и дори по Пеано-Жордан). Наистина, да изберем произволно $\varepsilon > 0$, и да вземем номер n такъв, че $\int_0^1 \varphi_n(x)dx < \varepsilon$. Ако някой от интервалите $\Delta_{k,n}$ в представянето $(*)$ има обща точка с A_h, то за съответната константа $C_{k,n}$ е изпълнено $C_{k,n} \geq h$. Ако означим с $E_{n,h}$ обединението на всички такива интервали, то $\int_0^1 \varphi_n(x)dx \geq h.\mu(E_{n,h})$ и следователно $\mu(E_{n,h}) \leq \frac{1}{h}\varepsilon$, т.е. може да бъде направено произволно малко при неограничено нарастване на номера n. Тъй като $A_h \subset E_{n,h}$, то горната мярка $\mu^*(A_h)$ на множеството A_h в смисъл на Пеано-Жордан е равна на нула.

Обратно, нека допуснем, че е изпълнено условието а/. Да допуснем, че б/ не е удовлетворено, т.е. че съществува $\varepsilon > 0$ такова, че $\int_0^1 \varphi_n(x)dx \geq \varepsilon$ за всяко n. Да означим с $\widetilde{A}$ множеството, получено с добавяне към множеството A на всички точки на прекъсване на стъпаловидните функции $\varphi_n(x)$, т.е. на краищата на всички интервали $\Delta_{k,n}$. Тъй като добавените точки са изброимо много, то $\widetilde{A}$ продължава да бъде пренебрежимо по Лебег. Следователно можем да намерим множество E, което е обединение на изброимо много отворени интервали Δ_i и такова, че

$$E = \cup_{i=1}^{\infty} \Delta_i \ , \ \widetilde{A} \subset E \text{ и } \mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu\left(\Delta_i\right) < \frac{\varepsilon}{2C},$$

където с C сме означили една горна граница за функцията $\varphi_1(x)$ (и следователно за всяка от функциите $\varphi_n(x)$). Да означим $F = [0,1] \setminus E$; тогава F е затворено подмножество на $[0,1]$, всички функции $\varphi_n(x)$ са непрекъснати върху него, и за всяко $x \in F$ имаме $\varphi_n(x) \searrow 0$. Лесно може да се докаже, че при тези условия сходимостта на функциите $\varphi_n(x)$ към нулата е равномерна (виж зад. 3). Следователно, можем да намерим достатъчно голям номер n_0 такъв, че $\varphi_{n_0}(x) < \frac{\varepsilon}{2}$ върху F. Оттук следва оценката

$$\int_0^1 \varphi_{n_0}(x)dx \leq \sup_{x\in F} \varphi_{n_0}(x).\mu(F) + \sup_{x\in E} \varphi_{n_0}(x).\mu(E) < \frac{\varepsilon}{2}.1 + C.\frac{\varepsilon}{2C} = \varepsilon,$$

което противоречи на направеното допускане, че б/ не е изпълнено. С това доказателството на лемата е завършено. ■

Сега вече е лесно да довършим доказателството на критерия на Лебег. Нека множеството A на точките на прекъсване на $f(x)$ да е пренебрежимо по Лебег. Като използваме свойство 3/ и импликацията а/$\Rightarrow$ б/ в лемата, получаваме, че $\int_0^1 \varphi_n(x)dx \to 0$. Като вземем пред вид, че по свойство 2/

$$\int_0^1 \varphi_n(x)dx = \int_0^1 S_n(x)dx - \int_0^1 s_n(x)dx = S_{\tau_n}(f) - s_{\tau_n}(f),$$

получаваме според критерия на Дарбу интегруемостта на $f(x)$.

Обратно, нека е дадено, че $f(x)$ е интегруема върху $[0,1]$. Тъй като $\operatorname{diam}\tau_n = \frac{1}{2^n} \to 0$, то по теоремата на Дарбу имаме

$$\int_0^1 \varphi_n(x)dx = S_{\tau_n}(f) - s_{\tau_n}(f) \to \overline{I}(f) - \underline{I}(f) = 0.$$

От импликацията б/$\Rightarrow$ а/ в лемата се вижда, че множеството тези x, за които $\varphi_n(x)$ не клони към нула, т.е. множеството на точките на прекъсване на $f(x)$, е пренебрежимо по Лебег. ■

Упражнения.

1. Докажете, че ако $f(P)$ и $g(P)$ са интегруеми функции върху измеримото множество D, то тяхното произведение $f(P)g(P)$ е също интегруема функция. (В едномерния случай това е доказано в §4.1 на част I).

Упътване. Разсъжденията са същите както в част I. Използвайте равенството

$$f(P)g(P) - f(Q)g(Q) = f(P)\left(g(P) - g(Q)\right) + g(Q)\left(f(P) - f(Q)\right),$$

за да докажете, че ако е дадено разбиване на D и m_i, M_i, m_i', M_i', m_i'', M_i'' са съответните долни и горни граници за функциите $f(P)$, $g(P)$, $f(P)g(P)$, то

$$M_i'' - m_i'' \le C\left(M_i - m_i\right) + C\left(M_i' - m_i'\right),$$

където с C сме означили някаква обща горна граница за функциите $|f(P)|$, $|g(P)|$ върху D. Тогава твърдението следва от критерия на Дарбу.

2. Докажете следното твърдение, което използвахме в горния текст:

Ако $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$ е изброимо обединение на пренебрежимите по Лебег множества A_i, то A е също пренебрежимо по Лебег.

Упътване. За всяко i изберете изброимо обединение на интервали E_i такова, че $A_i \subset E_i$ и $\mu(E_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$. Положете $E = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$. Тогава са изпълнени съотношенията $A \subset E$ и $\mu(E) < \varepsilon$.

3. (Теорема на Дини). Нека F е компактно подмножество на $\mathbb{R}^n$, и $\varphi_n(x)$ е монотонно намаляваща редица от неотрицателни и непрекъснати функции, дефинирани върху F. Нека е дадено, че редицата $\varphi_n(x)$ поточково клони към нула, т.е. за всяко $x \in F$ имаме $\varphi_n(x) \to 0$. Тогава редицата $\varphi_n(x)$ клони към нула равномерно върху F.

Упътване. Ако сходимостта не е равномерна, това означава, че съществуват число $\varepsilon > 0$ и редица от точки $x_n \in F$, така че $\varphi_n(x_n) \geq \varepsilon$. Тъй като редицата x_n притежава сходяща подредица, след преномериране можем да считаме, че самата редица x_n е сходяща и $x_n \to x_0$. Да фиксираме произволен номер m. При номера $n > m$ ще имаме

$$\varphi_m(x_n) \geq \varphi_n(x_n) \geq \varepsilon,$$

откъдето след граничен преход при $n \to \infty$ получаваме $\varphi_m(x_0) \geq \varepsilon$ за всяко m. Това обаче противоречи на условието $\lim_{m\to\infty} \varphi_m(x_0) = 0$.

2.5 Пресмятане на многомерните интеграли.

Теорема на Фубини. Както ще покажем в настоящия параграф, основният начин на пресмятане на многомерните интеграли е свеждането им към последователни едномерни интеграли. Така, двойният интеграл се свежда към две последователни интегрирания по всяка от променливите, и т.н.

Да разгледаме пространствата $\mathbb{R}^n$ с координати $x = (x_1, \ldots, x_n)$, и $\mathbb{R}^k$ с координати $y = (y_1, \ldots, y_k)$. Нека $A \subset \mathbb{R}^n$ и $B \subset \mathbb{R}^k$; тогава под декартово произведение $A \times B$ на множествата A и B се разбира множеството

$$A \times B = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+k} : x \in A,\ y \in B\Big\}.$$

Следното твърдение е лесно доказуемо (виж зад. 1):

Лема 1. *Ако A и B са измерими подмножества съответно на $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^k$, то тяхното произведение $A \times B$ е измеримо подмножество на $\mathbb{R}^{n+k}$, при което имаме*

$$\mu(A \times B) = \mu(A).\mu(B).$$

Ако функцията $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ е интегруема върху измеримото множество $A \subset \mathbb{R}^n$, съответният интеграл ще бележим с

$$\int\!\!\ldots\!\int_A f(x_1, \ldots, x_n)\ dx_1 \ldots dx_n \quad \text{или, съкратено, с} \quad \int_A f(x)\ dx.$$

Следващото твърдение, което често се нарича теорема на Фубини,* играе основна роля в настоящия параграф.

Теорема 1. (Теорема на Фубини). *Нека A и B са измерими подмножества на $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^k$, и функцията $f(x, y) = f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k)$ е интегруема върху множеството $A \times B \subset \mathbb{R}^{n+k}$. Тогава интегралът*

$$I(x) = \int_B f(x, y)\ dy$$

*Това твърдение е било известно много време преди работите на Фубини, който обаче е доказал по-обща теорема.

съществува за почти всички $x \in A$, *и*

$$\int\limits_{A\times B} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{A} I(x)\,dx = \int\limits_{A}\left(\int\limits_{B} f(x,y)\,dy\right)dx.$$

Забележка. Разбира се, твърдението остава вярно, ако разменим местата на x и y, което дава

$$\int\limits_{A\times B} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{B}\left(\int\limits_{A} f(x,y)\,dx\right)dy.$$

Доказателство на теоремата на Фубини. Най-напред ще докажем лесната част на теоремата: ще предположим, че интегралът $I(x) = \int_B f(x,y)\,dy$ съществува за всяко $x \in A$, и ще докажем горната формула за равенство на интегралите. Нека $\tau' : A = \cup_{i=1}^{n} A_i$, $\tau'' : B = \cup_{j=1}^{m} B_j$ са измерими разбивания съответно на A и B. Да означим с $\tau = \tau' \times \tau''$ разбиването

$$\tau : A \times B = \cup_{i=1}^{n} \cup_{j=1}^{m} A_i \times B_j.$$

Нека m_{ij}, M_{ij} да са съответно точната долна и горна граница на стойностите на функцията $f(x,y)$ върху множеството $A_i \times B_j$. Да изберем по една точка $x^i \in A_i$ и да образуваме съответната римановата сума за $I(x)$: $R_{\tau'}(I) = \sum_{i=1}^{n} I\left(x^i\right)\mu\left(A_i\right)$. Имаме

$$I\left(x^i\right) = \int\limits_{B} f\left(x^i,y\right)dy = \sum_{j=1}^{m}\int_{B_j} f\left(x^i,y\right)dy.$$

Тъй като в последния интеграл имаме $(x_i,y) \in A_i \times B_j$, то $m_{ij}\mu\left(B_j\right) \leq \int_{B_j} f\left(x^i,y\right)dy \leq M_{ij}\mu\left(B_j\right)$, откъдето

$$\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\mu\left(B_j\right) \leq I\left(x^i\right) \leq \sum_{j=1}^{m} M_{ij}\mu\left(B_j\right)$$

и следователно, умножавайки горното равенство с $\mu\left(A_i\right)$ и сумирайки по всички $i = 1,\ldots,n$, получаваме

$$s_\tau(f) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\mu\left(A_i\right)\mu\left(B_j\right) \le R_{\tau'}(I) \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij}\mu\left(A_i\right)\mu\left(B_j\right) = S_\tau(f).$$

Нека $\operatorname{diam}\tau'$ и $\operatorname{diam}\tau''$ да клонят към нула; тогава $\operatorname{diam}\tau$ също клони към нула. По теоремата на Дарбу имаме $s_\tau(f), S_\tau(f) \to \int_{A\times B} f(x,y)\ dxdy$ и следователно от лемата за полицаите получаваме $R_{\tau'}(I) \to \int_{A\times B} f(x,y)\ dxdy$, с което равенството $\int_{A\times B} f(x,y)\ dxdy = \int_A I(x)\ dx$ е доказано.

Общия случай на теоремата се нуждае от известно разяснение. За всяка стойност на $x \in A$ съществуват долният и горният интеграл в смисъл на Дарбу от функцията $f(x,y)$, разглеждана като функция на y върху B; означаваме ги съответно с $\underline{I}(x)$ и с $\overline{I}(x)$. За всяко x е изпълнено неравенството $\underline{I}(x) \le \overline{I}(x)$. Целта е да докажем, че:

1/ равенството $\underline{I}(x) = \overline{I}(x)$ е изпълнено почти навсякъде, т.е. множеството F от точки x такива, че $\underline{I}(x) < \overline{I}(x)$, е пренебрежимо в смисъл на Лебег, и

2/ ако продължим функцията $I(x)$, дефинирана еднозначно върху $A \setminus F$, по произволен начин върху F, така че $\underline{I}(x) \le I(x) \le \overline{I}(x)$*, то е вярно равенството $\int_{A\times B} f(x,y)\,dxdy = \int_A I(x)\,dx$.

Доказателството на общата форма на теоремата е близко по идея до доказателството на критерия на Лебег, дадено в предния параграф. И тук, за да подчертаем основната идея, ще проведем доказателството в случая, когато A и B са интервали върху правата; многомерния случай идейно не се различава от едномерния.

Нека $A = [a,b]$, $B = [c,d]$. Ще са ни необходими редици от разбивания τ_n' на A и τ_n'' на B такива, че $\tau_1' \prec \tau_2' \prec \ldots$, $\tau_1'' \prec \tau_2'' \prec \ldots$, $\operatorname{diam}\tau_n' \to 0$, $\operatorname{diam}\tau_n'' \to 0$. Те се конструират както в предния параграф, като разбиване на 2^n равни части; τ_n' се дава с интервалите $\Delta_{i,n}' = \left[a + \frac{(b-a)(i-1)}{2^n}, a + \frac{(b-a)i}{2^n}\right]$, $i = 0, \ldots 2^n$, а τ_n'' - с интервалите $\Delta_{j,n}'' = \left[c + \frac{(d-c)(j-1)}{2^n}, c + \frac{(d-c)j}{2^n}\right]$, $j = 0, \ldots 2^n$. Както по-горе, въвеждаме разбиването $\tau_n = \tau_n' \times \tau_n''$ на $A \times B$, определено от правоъгълниците $\Delta_{i,n}' \times \Delta_{j,n}''$. Да означим с $m_{ij}^{(n)}$, $M_{ij}^{(n)}$ съответно точната долна и точната горна граница на функцията $f(x,y)$ върху множеството $\Delta_{i,n}' \times \Delta_{j,n}''$. Ще дефинираме n-тата долна функция $s_n(x)$, и n-тата горна функция $S_n(x)$ върху A с формулите:

$$s_n(x) = \sum_{j=1}^{2^n} m_{ij}^{(n)}\mu\left(\Delta_{j,n}''\right) \text{ за } x \in \left(a + \tfrac{(b-a)(i-1)}{2^n}, a + \tfrac{(b-a)i}{2^n}\right],$$

---

*Това изискване е съществено - виж задача 3.

$$S_n(x) = \sum_{j=1}^{2^n} M_{ij}^{(n)} \mu\left(\Delta''_{j,n}\right) \text{ за } x \in \left(c + \tfrac{(d-c)(i-1)}{2^n}, c + \tfrac{(d-c)i}{2^n}\right].$$

Тук $s_n(x)$ и $S_n(x)$ са стъпаловидни функции. Лесно се вижда,че за всяко x функционалните стойности $s_n(x)$ образуват монотонно растяща редица, а $S_n(x)$ - монотонно намаляваща. Лесно се вижда също, че за всяко $x_0 \in A$, което не е деляща точка, имаме

$$s_n(x_0) \le s_{\tau''_n}\left(f(x_0, y)\right) \le \underline{I}(x_0) \le \overline{I}(x_0) \le S_{\tau''_n}\left(f(x_0, y)\right) \le S_n(x_0)$$

(докажете това, като напишете подробно малките и големи суми на Дарбу за функцията на y $f(x_0, y)$, съответстващи на разбиването τ''_n). Следователно, ако за някое $x_0 \in A$ знаем, че $S_n(x_0) - s_n(x_0) \to 0$, то функцията $f(x_0, y)$ е интегруема по y, т.е. $x_0 \notin F$.

Непосредствено се доказват равенствата

$$\int_A s_n(x)\, dx = s_{\tau_n}(f),\ \int_A S_n(x)\, dx = S_{\tau_n}(f).$$

Да означим $\varphi_n(x) = S_n(x) - s_n(x)$; тъй като по предположение $f(x, y)$ е интегруема върху $A \times B$, то $\int_A \varphi_n(x)\, dx \to 0$, и според основната лема от предния параграф множеството от точки x, за които $\varphi_n(x)$ не клони към нула, е пренебрежимо по Лебег. Както беше отбелязано преди малко, ако за някое x_0 функцията $f(x_0, y)$ не е интегруема по y, то $\varphi_n(x_0)$ не може да клони към нула. Следователно множеството F от онези x, за които $f(x, y)$ не е интегруема по y, е пренебрежимо по Лебег, т.е. точка $1/$ е доказана.

Доказателство на $2/$. За всяко $x \in A$ доказахме неравенствата

$$s_n(x) \le \underline{I}(x) \le I(x) \le \overline{I}(x) \le S_n(x),$$

откъдето следва, че

$$m_{ij}^{(n)} \le \min_{x \in \Delta'_{i,n}} I(x)\ ,\ M_{ij}^{(n)} \ge \max_{x \in \Delta'_{i,n}} I(x),$$

и следователно

$$s_{\tau_n}(f) \le s_{\tau'_n}(I) \le S_{\tau'_n}(I) \le S_{\tau_n}(f).$$

Твърдението се получава чрез граничен преход по n.

Пресмятане на двумерните интеграли. Ще покажем как теоремата на Фубини се прилага във важните за нас случаи на размерност 2 и 3. Нека $f(x, y)$ е функция, интегруема върху правоъгълника $\Delta = [a, b] \times [c, d]$. Тогава получаваме

Теорема 2.

$$\iint\limits_{\Delta} f(x, y)\, dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x, y)\, dy \right) dx.$$

Разбира се, и тук интегриранията по x и y могат да бъдат разменени.

По-интересен е случаят, когато функцията е дефинирана върху множество с по-сложна форма. Ще пресметнем интеграла, ако дефиниционната област на функцията е криволинейният трапец D, състоящ се от всички точки (x, y) в равнината, за които $x \in [a, b]$ и $\varphi(x) \leq y \leq \psi(x)$. Тук $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ са непрекъснати функции в интервала $[a, b]$ такива, че $\varphi(x) \leq \psi(x)$ за всяко x. Нека $f(x, y)$ е интегруема върху D.

Теорема 3.

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Доказателство. Според специалната дефиниция на двойния интеграл, трябва да изберем правоъгълник $\Delta = [a, b] \times [c, d]$, който да съдържа D. (Това е изпълнено, ако $c \leq \min \varphi(x)$ и $d \geq \max \psi(x)$). Нека $\widetilde{f}(x, y)$ да означава продължението на $f(x, y)$ върху цялото Δ, равно на нула върху $\Delta \setminus D$. По дефиниция имаме

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_\Delta \widetilde{f}(x,y)\,dxdy =$$

$$= \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d \widetilde{f}(x,y)\,dy \right) dx = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx,$$

тъй като при всяко x функцията $\widetilde{f}(x, y)$ е равна на нула в интервалите $[c, \varphi(x)]$ и $[\psi(x), d]$. ■

Пример. Да пресметнем лицето на кръга D_R с център в началото на координатите и радиус R. Имаме представянето

$$D_R = \left\{ (x,y) : -R \leq x \leq R, -\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2} \right\},$$

и следователно по горната формула

$$\mu\left(D_R\right) = \iint\limits_{D_R} 1\,dxdy = \int\limits_{-R}^{R} \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \right) dx = 2 \int\limits_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\,dx.$$

Последният интеграл се решава чрез субституцията $x = R\sin t$, откъдето

$$\mu(D_R) = 2R^2 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = R^2 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2t)\, dt = \pi R^2.$$

Пресмятане на тримерните интеграли. Ако функцията $f(x, y, z)$ е дефинирана и интегруема върху правоъгълния паралелепипед $\Delta = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$, то от теоремата на Фубини получаваме

$$\iiint_\Delta f(x, y, z)\, dxdydz = \int_a^b \left(\int\limits_c^d \left(\int_e^f f(x, y, z)\, dz \right) dy \right) dx.$$

За да можем да пресмятаме тримерни интеграли върху по-сложни фигури, трябва да въведем тримерен аналог на понятието криволинеен трапец:

Определение. *Нека е даденото измеримото и затворено множество D в равнината Oxy, и нека $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ са две функции, дефинирани и непрекъснати върху D, за които във всяка точка (x, y) е изпълнено $\varphi(x, y) \leq \psi(x, y)$. Тогава под криволинеен цилиндър с основа D, зададен чрез функциите φ и ψ, ще разбираме тялото $V \subset \mathbb{R}^3$, определено с условията*

$$V = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}.$$

Лема 4. *Множеството V е измеримо подмножество на $\mathbb{R}^3$.*

Доказателство. Ще докажем, че контурът bV на множеството V е пренебрежимо по Пеано-Жордан подмножество на $\mathbb{R}^3$. Контурът bV се състои три части: долна основа, съвпадаща с графиката Γ_φ на функцията φ, горна основа, съвпадаща с Γ_ψ, и околна повърхност S, зададена като

$$S = \{(x, y, z) : (x, y) \in bD, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}.$$

Фактът, че графиката на непрекъсната функция на две променливи е пренебрежима по Пеано-Жордан, се доказва по същия начин, както и за функция на едно променливо (виж лема 4 от §1). Остава да докажем пренебрежимостта на S. Да изберем константи e, f такива, че

$$e \leq \min_D \varphi(x,y) \text{ и } f \geq \max_D \psi(x,y),$$

и елементарно подмножество E на равнината такова, че $bD \subset E$ и $\mu(E) < \varepsilon$. Тогава $S \subset E \times [e,f]$ и следователно $\mu^*(S) \leq \mu(E \times [e,f]) < \varepsilon(f-e)$, т.е. може да бъде направена произволно малка. ■

Нека $f(x,y,z)$ е функция, интегруема върху V. Тримерният аналог на теорема 3 е:

Теорема 5.

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_D \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dxdy.$$

Доказателство. Нека $\Delta = [a,b] \times [c,d]$ е правоъгълник в равнината Oxy, съдържащ множеството D, и нека константите e, f са избрани както в предната лема. Тогава правоъгълният паралелопипед $\widetilde{\Delta} = \Delta \times [e,f]$ съдържа тялото V. Нека $\widetilde{f}(x,y,z)$ е продължението на $f(x,y,z)$ върху цялото $\widetilde{\Delta}$ с нулеви стойности извън V. Тогава имаме

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{\widetilde{\Delta}} \widetilde{f}(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$= \iint_\Delta \left(\int_e^f \widetilde{f}(x,y,z)\,dz \right) dxdy = \iint_D \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dxdy.$$

■

Пример. Да пресметнем лицето на кълбото B_R с център в началото на координатите и радиус R. Имаме представянето

$$B_R = \left\{ (x,y,z) : (x,y) \in D_R, -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \right\},$$

и следователно по горната формула

$$\mu\left(B_R\right) = \iiint_{B_R} 1\,dxdydz = 2 \iint_{D_R} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dxdy =$$

$$= 2\int\limits_{-R}^{R}\left(\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dy\right)dx.$$

В последният интеграл да означим временно $a=\sqrt{R^2-x^2}$; както пресметнахме малко по-горе, $\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-y^2}\,dy=\pi a^2/2$ и следователно

$$\mu\left(B_R\right)=\pi\int\limits_{-R}^{R}\left(R^2-x^2\right)\,dx=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Упражнения.

1. Докажете лема 1 от параграфа.

Упътване. Нека E_1 и E_2, съответно F_1 и F_2, са елементарни множества в $\mathbb{R}^n$, съответно в $\mathbb{R}^k$, такива, че $E_1\subset A\subset E_2$, $F_1\subset B\subset F_2$. Тогава $E_1\times F_1$, $E_2\times F_2$ са също елементарни множества в $\mathbb{R}^{n+k}$, и $E_1\times F_1\subset A\times B\subset E_2\times F_2$. Изведете от тук, че $A\times B$ е измеримо и $\mu(A\times B)=\mu(A).\mu(B)$

2. (Пример на функция, за която съществуват повторните интеграли, но не съществува двойният.)

Да означим с A множеството от всички точки в квадрата $[0,1]\times[0,1]$ от вида $\left(\frac{k}{2^n},\frac{l}{2^n}\right)$, където k и l са нечетни цели числа и $n=1,2,\ldots$. Докажете, че

1/ множеството A е навсякъде гъсто в квадрата, т.е всяка точка от квадрата може да се представи като граница на точки от A (еквивалентно: всеки правоъгълник съдържа поне една точка от A).

2/ всяка вертикална или хоризонтална права съдържа само краен брой точки от A.

Да означим с $f(x,y)$ функцията, равна на 1 върху точките от A, и на нула върху точките от квадрата, не принадлежащи на A. Докажете като следствие от 1/, че $f(x,y)$ не е интегруема върху квадрата. От друга страна, покажете като следствие от 2/, че за всеки $x_0,y_0\in[0,1]$ интегралите $\int_0^1 f(x_0,y)dy$, $\int_0^1 f(x,y_0)dx$ съществуват и са равни на нула, т.е и двата повторни интеграли съществуват.

3. При доказателството на втората част на теоремата на Фубини беше доказано, че $\underline{I}(x)=\overline{I}(x)$ почти навсякъде. За да се осмисли формулата за равенство между повторния и двойния интеграл, функцията

$I(x)$ трябва да се продължи върху оставащото (пренебрежимо в смисъл на Лебег) множество. По-нататък беше доказано, че ако на $I(x)$ се даде произволна стойност в интервала $\left[\underline{I}(x), \overline{I}(x)\right]$, то получената функция е интегруема и равенството от теоремата е изпълнено. Следващият пример показва, че ако изберем $I(x)$ извън този интервал (например ако положим просто $I(x) = 0$), рискуваме да получим неинтегруема функция.

Нека временно да означим с $\varphi(x)$ функцията на Риман в $[0,1]$, т.е. $\varphi(x) = 0$ за x ирационално и $\varphi(x) = 1/q$, ако x е равно на несъкратимата дроб p/q. Нека $\psi(x)$ да означава функцията на Дирихле, равна на нула в ирационалните и на единица в рационалните точки, и, накрая, да означим

$$f(x,y) = 1 - \varphi(x).\psi(y).$$

Нека, както по-горе, $\underline{I}(x)$, $\overline{I}(x)$ да означават съответно долния и горния интеграл от $f(x,y)$ като функция на y.

1/ Докажете, че за ирационални стойности на x имаме $\underline{I}(x) = \overline{I}(x) = 1$, а за $x = p/q$ (несъкратима) е изпълнено $\underline{I}(x) = 1 - 1/q$, $\overline{I}(x) = 1$.

2/ Покажете, че ако за рационални x дефинираме $I(x) = 0$, то така продължената функция $I(x)$ не е интегруема (тя съвпада с функцията $1 - \psi(x)$).

2.6 Смяна на променливите в многомерните интеграли.

Като начало ще си припомним съответната теорема в едномерния случай. Нека $f(x)$ е дефинирана и интегруема за $x \in [a, b]$, и нека $\varphi(t)$ е еднократно гладка в интервала $[\alpha, \beta]$ (или $[\beta, \alpha]$), като $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Тогава

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt.$$

Нека се опитаме да осмислим тази формула в частния случай на монотонно растяща $\varphi(t)$. Нека $\alpha = t_0 < \ldots < t_n = \beta$ е разбиване на $[\alpha, \beta]$, и нека точките $x_i = \varphi(t_i)$ да дават съответното разбиване на интервала $[a, b]$. По теоремата за крайните нараствания имаме $x_i - x_{i-1} = \varphi'(\eta_i)$ за подходящо $\eta_i \in (t_{i-1}, t_i)$. Да положим $\xi_i = \varphi(\eta_i)$. Като използваме теоремата за крайните нараствания, получаваме

$$\sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=0}^{n} f(\varphi(\eta_i))(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} f(\varphi(\eta_i))\,\varphi'(\eta_i)(t_i - t_{i-1}).$$

Лявата сума клони към левия интеграл във формулата за смяна на променливите, а дясната сума - към десния интеграл. Така ние получаваме друго доказателство на формулата.

Макар и по-сложно от стандартното, това доказателство има преимуществото, че ни показва от къде се взема допълнителният множител $\varphi'(t)$ в интеграла отдясно; този множител показва колко пъти дължината на съответния подинтервал се растяга (или свива) след прилагане на функцията $\varphi(t)$. Естествено е да се зададе същия въпрос, когато вместо функцията $\varphi(t)$ имаме преобразование от $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, зададено с n функции на n променливи; оказва се, че в този случай съответният "коефициент на разтягане на обема"се определя от функционалната детерминанта (или якобиана) на съответното изображение (виж §1.4).

Отначало ще припомним някои понятия. Нека D е измеримо и затворено подмножество на $\mathbb{R}^n$ с координати $t = (t_1, \ldots, t_n)$,и $\Phi(t)$:

$D \to \mathbb{R}^n$, зададено с формулите

$$x_1 = \varphi_1\left(t_1, \ldots, t_n\right), \ldots, x_n = \varphi_n\left(t_1, \ldots, t_n\right).$$

Ще казваме, че Φ е еднократно гладко, ако функциите $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ се продължават в някаква околност U на D, диференцируеми са в U и притежават непрекъснати първи производни. Да си припомним определенията от §1.4: под матрична производна на изображението $\Phi(t)$ в точката t^0 ще разбираме матрицата

$$D\Phi\left(t^0\right) = \left\{\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}\left(t^0\right)\right\}_{\substack{i=1,\ldots,n\\ j=1,\ldots,n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}\left(x^0\right) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_2}\left(t^0\right) & \ldots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_n}\left(t^0\right) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1}\left(t^0\right) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_2}\left(t^0\right) & \ldots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_n}\left(t^0\right) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1}\left(t^0\right) & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_2}\left(t^0\right) & \ldots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_n}\left(t^0\right) \end{pmatrix}.$$

Под функционална детерминанта, или якобиан, на $\Phi(t)$ в точката t^0, ще разбираме числото

$$J_\Phi(t^0) = \frac{D\left(\varphi_1, \ldots, \varphi_n\right)}{D\left(t_1, \ldots, t_n\right)}\left(t^0\right) \;=\; \det\left(D\Phi\left(t^0\right)\right).$$

В §1.4, теорема 5, беше доказано основното свойство на функционалните детерминанти: функционалната детерминанта на произведението на две изображения е равна на произведението на техните функционални детерминанти. В нашите означения то може да се напише като

$$J_{\Psi\circ\Phi}(t) = J_\Psi(\Phi(t))J_\Phi(t).$$

Ще напомним и теоремата за обратното изображение (виж теорема 7 от §1.8 и забележката след нея): Ако $\Phi : D \to E = \Phi(D)$ е взаимно еднозначно, еднократно гладко, и $J_\Phi(t) \neq 0$ за всяко $t \in D$ (в такъв случай казваме, че Φ е регулярно), то обратното изображение $\Psi = (\Phi)^{-1} : E \to D$ е също еднократно гладко, и $J_\Psi(x) = \frac{1}{J_\Phi(\Psi(x))}$.

Сега можем да формулираме основната теорема на този параграф.

Теорема за смяна на променливите в многомерните интеграли. *Нека, както по-горе, $\Phi : D \to E$ е регулярно изображение, и нека $f(x) = f\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ е интегруема функция върху E. Тогава е в сила равенството*

$$\int_E f(x)\, dx_1 \ldots dx_n = \int_D f(\Phi(t))\left|J_\Phi(t)\right|\, dt_1 \ldots dt_n.$$

Забележка. Читателят може би забелязва, че многомерната формула се различава от едномерната. Наистина, в едномерния случай функционалната детерминанта съвпада с производната на функцията, но в известната ни формула тя не е под знака на модула. Разликата не е случайна. В едномерния случай модулът може да бъде избягнат, тъй като там е въведено понятието *ориентиран интеграл*, или интеграл с разменени граници (виж *Конвенцията* от §4.2 на част 1). В многомерния случай това също може да бъде направено, но изисква по-сериозни средства, включително апарата на т. нар. диференциални форми. Тези средства ще бъде изложен в следващите части на учебника.

Ако вземем $f(x)$ да е тъждествено единица, то като частен случай на теоремата получаваме равенството

$$\mu(\Phi(D)) = \int_D |J_\Phi(t)| \ dt_1 \dots dt_n = |J_\Phi(P)| \, \mu(D)$$

за подходяща точка $P \in D$. Оттук се вижда и геометричният смисъл на якобиана като отношение на обемите; по-точно, ако фиксираме точка $P_0 \in D$ и D_k е например редица от кълба с център P_0 и радиуси, клонящи към нула, ще имаме

$$\lim \frac{\mu(\Phi(D_k))}{\mu(D_k)} = |J_\Phi(P_0)| \, .$$

Оказва се, че при доказателството на теоремата е удобно да се започне именно с това. Основната тежест на доказателството се поема от следното твърдение:

Основна лема. *За всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, така че за всяко измеримо $D_1 \subset D$ с $\operatorname{diam} D_1 < \delta$ и за всяка точка $Q \in D_1$ е изпълнено*

$$\left| \frac{\mu\left(\Phi\left(D_1\right)\right)}{\mu\left(D_1\right)} - \left|J_\Phi\left(Q\right)\right| \right| < \varepsilon.$$

Доказателство на теоремата като следствие от основната лема. Нека $\tau : D = \cup_{i=1}^k D_i$ е произволно измеримо разбиване на D, и нека $E_i = \Phi\left(D_i\right)^*$; тогава $\widetilde{\tau} : E = \cup_{i=1}^k E_i$ е измеримо разбиване на

---

*Фактът, че E_i са също измерими, ще бъде доказан по-долу.

$E = \Phi(D)$. Да изберем по една точка $Q_i \in D_i$, и нека $P_i = \Phi(Q_i) \in E_i$. Да образуваме съответните риманови суми

$$R_{\widetilde{\tau}} = \sum_{i=1}^{k} f(P_i)\,\mu(E_i) \quad \text{и} \quad R_\tau = \sum_{i=1}^{k} f(\Phi(Q_i))\,|J_\Phi(Q_i)|\,\mu(D_i)\,.$$

Ако $\operatorname{diam}\tau \to 0$, то и $\operatorname{diam}\widetilde{\tau} \to 0$, и по дефиниция имаме

$$\lim_{\operatorname{diam}\widetilde{\tau}\to 0} R_{\widetilde{\tau}} = \int_E f(x)\; dx_1 \dots dx_n,$$

$$\lim_{\operatorname{diam}\tau\to 0} R_\tau = \int_D f(\Phi(t))\,|J_\Phi(t)|\; dt_1 \dots dt_n.$$

Нека сега изберем произволно $\varepsilon > 0$, нека $\delta > 0$ е избрано както в основната лема, и нека $\operatorname{diam}\tau < \delta$. Нека C да е една горна граница за $|f(x)|$. Тогава

$$|R_{\widetilde{\tau}} - R_\tau| \le \sum_{i=1}^{k} |f(P_i)|\,|\mu(E_i) - |J_\Phi(Q_i)|\,\mu(D_i)| =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} |f(P_i)| \left|\frac{\mu(E_i)}{\mu(D_i)} - |J_\Phi(Q_i)|\right| \mu(D_i) \le C\varepsilon \sum_{i=1}^{k} \mu(D_i) = C\varepsilon\mu(D)$$

и следователно

$$\lim_{\operatorname{diam}\tau\to 0} |R_{\widetilde{\tau}} - R_\tau| = 0,$$

откъдето следва равенството между интегралите. ■

Преди да преминем към доказателството на основната лема, ще се опитаме да я онагледим в двумерния случай и да покажем защо именно якобиана дава отношението между обемите. Тръгваме от елементарната формула за лице на успоредник, породен от два вектора. Нека $\vec{a} = (a_1, a_2)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2)$ са два вектора в равнината; тогава лицето S на успоредника, построен върху тях, е равно на

$$S = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\,\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\,\right|.$$

Нека Φ е изображението на равнината с координати (u, v) в равнината с координати (x, y), зададено с уравнения $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$.

Нека Δ е правоъгълник с върхове $A = (u_0, v_0)$, $B = (u_0 + h, v_0)$, $C = (u_0 + h, v_0 + k)$, $D = (u_0, v_0 + k)$, $\mu(\Delta) = hk$. Да означим техните образи чрез Φ с $A_1 = \Phi(A)$, $B_1 = \Phi(B)$ и т.н. Тогава очевидно фигурата $\Phi(\Delta)$ е близка до успоредника, построен върху векторите $\vec{A_1B_1}$, $\vec{A_1D_1}$ (виж чертежа). По теоремата за крайните нараствания имаме

$$\vec{A_1B_1} = (x(u_0 + h, v_0) - x(u_0, v_0), y(u_0 + h, v_0) - y(u_0, v_0)) =$$

$$= h\left(x'_u(u_0 + \theta_1 h, v_0), y'_u(u_0 + \theta_2 h, v_0)\right)$$

и аналогично

$$\vec{A_1D_1} = (x(u_0, v_0 + k) - x(u_0, v_0), y(u_0, v_0 + k) - y(u_0, v_0)) =$$

$$= k\left(x'_v(u_0, v_0 + \theta_3 k), y'_v(u_0, v_0 + \theta_4 k)\right).$$

Оттук при h и k малки получаваме приблизителната формула

$$\frac{\mu(\Phi(\Delta))}{\mu(\Delta)} \approx \left| \begin{vmatrix} x'_u(u_0, v_0) & y'_u(u_0, v_0) \\ x'_v(u_0, v_0) & y'_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} \right| = \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)}(u_0, v_0) \right|.$$

Аналогична е картината и за по-високите размерности.

Като конкретни примери ще разгледаме полярната (в $\mathbb{R}^2$) и сферичната (в $\mathbb{R}^3$) смени на координатите, въведени в §1.9. Нека D е правоъгълник в равнината (ρ, θ): $D = [\rho, \rho + \Delta\rho] \times [\theta, \theta + \Delta\theta]$, и Φ е полярното преобразование, зададено с формулите $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$. Тогава множеството $E = \Phi(D)$ представлява сектор с ъгъл $\Delta\theta$, изрязан от кръгов пръстен, намиращ се между две окръжности с център началото и радиуси съответно ρ и $\rho + \Delta\rho$. Елементарната формула за лице на такава фигура (тя е аналогична на формулата за лице на трапец) ни дава

$$\mu(E) = \Delta\rho\left(\frac{\rho.\Delta\theta + (\rho + \Delta\rho)\Delta\theta}{2}\right) = \Delta\rho.\Delta\theta\left(\rho + \frac{\Delta\rho}{2}\right),$$

откъдето

$$\lim_{\Delta\rho, \Delta\theta \to 0} \frac{\mu(E)}{\mu(D)} = \lim_{\Delta\rho \to 0}\left(\rho + \frac{\Delta\rho}{2}\right) = \rho,$$

което съвпада с пресметнатата в §1.9 стойност на $\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}$.

Аналогично е положението в тримерното пространство. Нека е дадена сфера с радиус ρ, и F да е сферичният правоъгълник, затворен между меридианите с "географска дължина"съответно θ и $\theta + \Delta\theta$, и паралелите с "географска ширина"съответно φ и $\varphi + \Delta\varphi$. Тъй като паралелите и меридианите се пресичат под прави ъгли, то лицето на F е приблизително равно на произведението на дължините на двете му страни, които са дъги от окръжности. Знаем, че всички меридиани са окръжности с радиус, равен на радиуса на сферата ρ, а паралелът, отговарящ на "географска ширина"φ, е окръжност с радиус $\rho.\sin\varphi$. Оттук получаваме

$$\mu(F) \approx (\rho.\Delta\theta)\,(\rho.\sin\varphi.\Delta\varphi) = \rho^2 \sin\varphi.\Delta\theta.\Delta\varphi.$$

Ако E е "стълбче"над F с височина $\Delta\rho$, то $\mu(E) = \Delta\rho.\mu(F)$. Ако означим с D правоъгълният паралелепипед $D = [\rho, \rho + \Delta\rho] \times [\theta, \theta + \Delta\theta] \times [\varphi, \varphi + \Delta\varphi]$, а Φ е сферичното преобразование, то $\Phi(D)$ съвпада с множеството E, и получаваме

$$\lim_{\Delta\rho, \Delta\theta, \Delta\varphi \to 0} \frac{\mu(E)}{\mu(D)} = \rho^2 \sin\varphi,$$

което отново съвпада с известната от §1.9 функционална детерминанта $\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)}$.

Доказателство на основната лема. Идеята на доказателството е следната: първо твърдението се доказва за линейни изображения, и след това локално, в близост до дадена точка, даденото изображение се апроксимира с най-близкото до него линейно, т.е. линейното изображение, определено от матричната производна в тази точка.

Нека $A = \{a_{ij}\}_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ е $n \times n$-матрица. Отново с $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ще означаваме линейното изображение, определено от тази матрица:

$$\text{Ако } x = (x_1, \dots, x_n)\,, \text{ то } Ax = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j \right).$$

Ще отбележим, че функционалната детерминанта J_A на това изображение е константа и съвпада със самата матрица A.

Следващото твърдение показва, че основната лема е в сила за линейни изображения. Нека A означава обратима $n \times n$-матрица, както и определеното от нея изображение на $\mathbb{R}^n$ в себе си.

Лема 1. *За всяко измеримо множество $D \subset \mathbb{R}^n$ имаме*

$$\mu(A(D)) = |\det A| \, \mu(D).$$

Доказателството на този факт е техническо и ще бъде отложено до края на параграфа.

Забележка. Както беше отбелязано в §1.1, досегашната дефиниция на мярка на Пеано-Жордан и на интеграл в $\mathbb{R}^n$ формално зависи от избора на координатната система в това пространство. Сега вече се вижда, че това не е така. Наистина, ако вземем две различни ортонормирани координатни системи в $\mathbb{R}^n$, то съществува ортогонално преобразование, прехвърлящо векторите от едната система във векторите от другата. Тъй като детерминантата на едно ортогонално преобразование е равна на ± 1, то според лема 1 мярката остава инвариантна спрямо него. Следователно същото е в сила и за интеграла.

За да се проведе процеса на апроксимация, споменат по-горе, е удобно да се въведе в $\mathbb{R}^n$ норма, различна от евклидовата. Ще използваме нормата $||x||_\infty$ (една от нормите, описани в §1.1). Полагаме

$$||x||_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i| \, .$$

Ще въведем и съответната норма $||A||_\infty$ за всяка $n \times n$-матрица[*] A:

$$||A||_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right) .$$

Следните твърдения следват непосредствено от дефинициите:

Лема 2. *1/ За всяка матрица A и вектор $x \in \mathbb{R}^n$ имаме* $||Ax||_\infty \leq ||A||_\infty \, . \, ||x||_\infty$.

[*]За запознатите с някои елементи на функционалния анализ ще отбележим, че числото $||A||_\infty$ е равно на нормата на линейния оператор A, действащ в пространството $\mathbb{R}^n$, снабдено с нормата $||\cdot||_\infty$.

2/ За всеки две матрици A и B и $\lambda \in \mathbb{R}$ имаме $||A+B||_\infty \leq ||A||_\infty + ||B||_\infty$, $||\lambda A||_\infty = |\lambda|\,||A||_\infty$, $||AB||_\infty \leq ||A||_\infty . ||B||_\infty$.

Нека, както по-горе, D е измеримо множество, и $\Phi(t) = (\varphi_1(t), \dots \varphi_n(t))$ е регулярно изображение, дефинирано в околност U на D. Следващата оценка е ключовия момент в доказателството:

Лема 3. *Нека $||D\Phi(t)||_\infty \leq C$ за всяко $t \in U$. Тогава $\Phi(D)$ е измеримо и*

$$\mu(\Phi(D)) \leq C^n \mu(D).$$

Доказателство. Отначало ще докажем неравенството $\mu^*(\Phi(D)) \leq C^n \mu(D)$, което ще извършим на няколко стъпки в зависимост от вида на D.

1/ Първо ще разгледаме случая, когато D е n-мерен куб. Ако означим с $t^0 = (t_1^0, \dots, t_n^0)$ означим центъра на куба, а с $2h$ - дължината на страната му, то D се състои от всички точки $t = (t_1, \dots, t_n)$ такива, че $|t_i - t_i^0| \leq h$ за $i = 1, \dots, n$.

Условието $||D\Phi(t)||_\infty \leq C$ означава, че за всяко i от 1 до n и за всяко $t \in U$ имаме $\sum_{j=1}^n \left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}(t)\right| \leq C$. Нека сега $t \in D$. Тогава по многомерната теорема за крайните нараствания (теорема 3 от §1.5) за всяко $i = 1, \dots, n$ получаваме, при подходящо $\theta \in (0,1)$:

$$\left|\varphi_i(t) - \varphi_i(t^0)\right| = \left|\sum_{j=1}^n \left(t_j - t_j^0\right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}\left(t^0 + \theta(t - t^0)\right)\right| \leq$$

$$\leq h \sum_{j=1}^n \left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}\left(t^0 + \theta(t - t^0)\right)\right| \leq Ch,$$

което означава, че $\Phi(D)$ се съдържа в куб с център $\Phi(t^0) = (\varphi_1(t^0), \dots, \varphi_n(t^0))$ и дължина на страната $2Ch$. Оттук получаваме

$$\mu^*(\Phi(D)) \leq (2Ch)^n = C^n (2h)^n = C^n \mu(D).$$

2/ Нека сега D е правоъгълен паралелепипед в $\mathbb{R}^n$. Ако дължините на всичките му страни са рационални числа, то D може да бъде разрязан на краен брой n-мерни кубове. (Наистина, ако $p_1/q_1, \dots, p_n/q_n$ са дължините на страните, то разрязването се получава, като разделим всяка от страните на подинтервали с дължина $1/q_1 \dots q_n$.) Прилагайки за всяка от частите резултата от точка 1/, получаваме неравенството $\mu^*(\Phi(D)) \leq C^n \mu(D)$. За произволен паралелепипед неравенството се доказва с граничен преход.

Нека сега D е елементарно множество, т.е. обединение на краен брой непресичащи се правоъгълни паралелепипеди. Отново, прилагайки доказаното неравенство за всеки от тях, получаваме същото неравенство за D.

3/ Нека D е измеримо множество. Да изберем елементарно множество E такова, че $D \subset E \subset U$ и $\mu(E) < \mu(D) + \varepsilon$. От доказаното по-горе получаваме, че

$$\mu^*(\Phi(D)) \leq \mu^*(\Phi(E)) \leq C^n(\mu(D) + \varepsilon),$$

откъдето чрез граничен преход по ε получаваме исканото неравенство.

4/ Остава да заменим горната мярка $\mu^*(\Phi(D))$ с $\mu^(\Phi(D))$, т.е да докажем, че $\Phi(D)$ е измеримо. Наистина, D е измеримо и следователно неговия контур bD е пренебрежим по Пеано-Жордан, т.е. $\mu^*(bD) = 0$. От задача 5 на §1.2 се вижда, че $b(\Phi(D)) = \Phi(bD)$. Но от резултата на пункт 3/, приложен към множеството bD, следва, че $\mu^*(\Phi(bD)) = 0$, т.е. множеството $\Phi(D)$ е измеримо по Пеано-Жордан. ■

Сега можем да докажем оценката отгоре в основната лема.

Лема 4. *Нека Φ е регулярно изображение, дефинирано в околност U на измеримото множество D, и $\varepsilon > 0$. Тогава съществува $\delta > 0$ такова, че за всяко измеримо $D_1 \subset D$ такова, че $\operatorname{diam} D_1 < \delta$, и произволна точка $t^0 \in D_1$, да имаме $\mu(\Phi(D_1)) < (|J_\Phi(t^0)| + \varepsilon)\, \mu(D_1)$.*

Доказателство. Нека ε_1 е произволно положително число. Тогава, тъй като частните производни на функциите $\varphi_i(t)$ са непрекъснати, съществува $\delta = \delta(\varepsilon_1) > 0$ такова, че за всеки $t', t'' \in D$ от $\rho(t', t'') < \delta$ да следва $||D\Phi(t') - D\Phi(t'')||_\infty < \varepsilon_1$.

Нека $\operatorname{diam} D_1 < \delta$ и $t^0 \in D_1$. Да означим с A обратимата $n \times n$-матрица $D\Phi(t^0)$, и нека $\widetilde{\Phi}(t) = A^{-1} \circ \Phi(t)$; лесно се вижда, че $D\widetilde{\Phi}(t^0) = I$, $D\widetilde{\Phi}(t) = A^{-1} D\Phi(t)$ и следователно $J_{\widetilde{\Phi}}(t) = (J_\Phi(t^0))^{-1} J_\Phi(t)$. За всяко $t \in D_1$ имаме

$$\left|\left|D\widetilde{\Phi}(t)\right|\right|_\infty \leq \left|\left|D\widetilde{\Phi}(t^0)\right|\right|_\infty + \left|\left|D\widetilde{\Phi}(t) - D\widetilde{\Phi}(t^0)\right|\right|_\infty \leq$$

$$\leq 1 + \left\|A^{-1}\right\|_\infty \left\|D\Phi(t^0) - D\Phi(t)\right\|_\infty .$$

Да означим с C една обща горна граница върху D на двете непрекъснати функции $\left\|(D\Phi(t))^{-1}\right\|_\infty$, $|J_\Phi(t)|$. Тогава от горното равенство следва, че за $t \in D_1$ имаме $\left\|D\widetilde{\Phi}(t)\right\|_\infty < 1 + C\varepsilon_1$.

Да изберем сега ε_1 такова, че $(1 + C\varepsilon_1)^n < 1 + \varepsilon/C$. Тогава по лема 3

$$\mu(\widetilde{\Phi}(D_1)) \leq (1 + C\varepsilon_1)^n \, \mu(D_1) < (1 + \varepsilon/C)\, \mu(D_1).$$

От друга страна, имаме $\Phi(t) = A \circ \widetilde{\Phi}(t)$ и следователно, използвайки лема 1, получаваме

$$\mu(\Phi(D_1)) = \mu(A(\widetilde{\Phi}(D_1))) = |\det A| \, .\mu(\widetilde{\Phi}(D_1)) = \left|J_\Phi(t^0)\right| .\mu(\widetilde{\Phi}(D_1)) <$$

$$< \left|J_\Phi(t^0)\right| . (1 + \varepsilon/C)\, \mu(D_1) \leq \left(\left|J_\Phi(t^0)\right| + \varepsilon\right) \mu(D_1).$$

Горното неравенство е изпълнено за всяко D_1 с $\operatorname{diam} D_1 < \delta$ и за всяко $t^0 \in D_1$, с което лема 4 е доказана. ∎

За да довършим доказателството на основната лема, трябва да докажем и оценката отдолу за $\mu(\Phi(D_1))$. Това се доказва, като се приложи оценката отгоре от лема 4 към обратното изображение $\Psi = (\Phi)^{-1}$, което, по теоремата за обратното изображение, е също регулярно.

Нека означим $E_1 = \Phi(D_1)$. От непрекъснатостта на Φ следва, че ако $\operatorname{diam} D_1 \to 0$, то и $\operatorname{diam} E_1 \to 0$. Нека $\varepsilon_1 > 0$. По лема 4, приложена към изображението Ψ, може да се намери $\delta_1 > 0$ такова, че при $\operatorname{diam} E_1 < \delta_1$ за произволно $x^0 \in E$ да имаме

$$\mu(\Psi(E_1)) < \left(\left|J_\Psi(x^0)\right| + \varepsilon_1\right) \mu(E_1).$$

Нека $x^0 = \Phi(t^0)$. Тогава горното неравенство може да се напише във вида

$$\mu(D_1) < \left(\frac{1}{|J_\Phi(t^0)|} + \varepsilon_1\right) \mu(\Phi(D_1)),$$

откъдето

$$\frac{\mu(\Phi(D_1))}{\mu(D_1)} > \frac{1}{\frac{1}{|J_\Phi(t^0)|} + \varepsilon_1} = \left|J_\Phi(t^0)\right| \frac{1}{1 + |J_\Phi(t^0)| \, .\varepsilon_1} =$$

$$= \left|J_\Phi(t^0)\right| - \frac{\left|J_\Phi(t^0)\right|^2.\varepsilon_1}{1+\left|J_\Phi(t^0)\right|.\varepsilon_1} > \left|J_\Phi(t^0)\right| - \left|J_\Phi(t^0)\right|^2.\varepsilon_1 > \left|J_\Phi(t^0)\right| - C^2.\varepsilon_1,$$

където с C сме означили някаква горна граница за функцията $|J_\Phi(t)|$ върху D.

Да фиксираме $\varepsilon > 0$ и да положим $\varepsilon_1 = \varepsilon/C^2$. Нека $\delta > 0$ да е толкова малко, че при $\operatorname{diam} D_1 < \delta$ да бъде изпълнена оценката от лема 4 (с избраното ε), и освен това да имаме $\operatorname{diam} E_1 < \delta_1$. Тогава от горните неравенства получаваме

$$\frac{\mu(\Phi(D_1))}{\mu(D_1)} > \left|J_\Phi(t^0)\right| - C^2.\varepsilon_1 > \left|J_\Phi(t^0)\right| - \varepsilon.$$

Като комбинираме това с оценката отгоре от лема 4, получаваме, че при $\operatorname{diam} D_1 < \delta$ за произволно $t^0 \in D_1$ имаме неравенството от основната лема

$$\left|\frac{\mu\left(\Phi\left(D_1\right)\right)}{\mu\left(D_1\right)} - \left|J_\Phi\left(t^0\right)\right|\right| < \varepsilon.$$

За да се довърши доказателството на основната лема, а с нея и на теоремата за смяна на променливите, остава да се докаже лема 1, т.е. равенството $\mu(A(D)) = |\det A|\,\mu(D)$, където $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ е произволно линейно изображение.

Доказателство на лема 1. Едно линейно изображение $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ще наричаме *елементарно*, ако то е от един от следващите три вида:

1/ A размества местата на две от координатите,

2/ A умножава едно от координатите с константа $\lambda \neq 0$: ако $A\left(t_1, \ldots, t_n\right) = \left(x_1, \ldots, x_n\right)$, то $x_k = \lambda t_k$ и $x_i = t_i$ при $i \neq k$,

3/ A прибавя към една от координатите друга координата, умножена с числото λ: $x_k = t_k + \lambda t_l$ и $x_i = t_i$ при $i \neq k$.

Матриците, пораждащи елементарни изображения, ще наричаме *елементарни матрици* (опишете ги!). В случаите 1/ и 3/ имаме $\det A = 1$, а в случай 2/ - $\det A = \lambda$. Ще отбележим още, че ако едно изображение е елементарно, то и обратното му изображение е елементарно от същия вид.

Тогава лема 1 следва от следните две леми:

Лема 5. *Всяко елементарно изображение удовлетворява равенството от лема 1.*

Лема 6. *Всяко обратимо линейно изображение се представя като произведение на елементарни.*

Доказателство на лема 5. Достатъчно е да се разгледа случая, когато D е правоъгълен паралелепипед, т.е. $D = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$. Тогава при елементарни изображения от тип 1/ и 2/ образът $A(D)$ е също правоъгълник, като в първият случай обемът се запазва, а във втория - се умножава с $|\lambda|$. В третият случай, например при $k = 1$, $l = 2$, $A(D)$ е (неправоъгълен) паралелепипед, който може да се представи като криволинеен цилиндър:

$$A(D) = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : (x_2, \ldots, x_n) \in [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n],$$

$$a_1 + \lambda x_2 \leq x_1 \leq b_1 + \lambda x_2\}$$

и от теорема 3 на §5 се вижда, че $\mu(A(D)) = \mu(D)$. И в трите случая равенството от лема 1 е удовлетворено. ■

Доказателство на лема 6. Нека A е обратима $n \times n$-матрица. Ще се опитаме да я превърнем в единичната матрица, умножавайки отляво и отдясно с елементарни матрици. Това ще докаже лемата; наистина, ако имаме $A_1 \ldots A_p \; A \; B_1 \ldots B_q = I$ с $A_1, \ldots, A_p, B_1, \ldots, B_q$ елементарни, то от тук ще следва, че $A = A_p^{-1} \ldots A_1^{-1} B_q^{-1} \ldots B_1^{-1}$.

Ще опишем как действа на матрицата A умножаването отляво и отдясно с елементарни матрици. За елементарни матрици от вид 1/ умножението отляво дава разместване на редовете, а отдясно - на стълбовете. За елементарни матрици от вид 2/ умножението отляво дава умножение на k-тият ред с λ, умножението отдясно - умножение на k-тият стълб с него. Накрая, умножението отляво с елементарни матрици от вид 3/ дава прибавяне към k-тият ред на матрицата на нейния l-ти ред, умножен с λ, а умножението отдясно - същата процедура за стълбовете.

Ще опишем как всяка обратима матрица може да бъде сведена чрез прилагането на подобни операции до единичната матрица*. Да изберем произволен ненулев елемент a_{kl} на A. Чрез умножаване с матрици от вид 1/ можем да закараме този елемент в позицията (n, n), т.е.

*Подобен алгоритъм се прилага при изчисляването на детерминанти и при решаването на системи линейни уравнения.

да сведем към случая, когато $a_{nn} \neq 0$. След това, чрез умножаване с матрица от тип 2/ можем да получим $a_{nn} = 1$. Накрая, умножавайки отляво и отдясно с матрици от тип 3/ с подходящи стойности на λ, можем да получим матрица, в която всички елементи a_{in}, a_{nj} са нулеви за $i, j = 1, 2, \ldots, n-1$. С други думи, получава се блокова матрица с блокове A' и 1, където A' е обратима $(n-1)\times(n-1)$-матрица, а другият блок се състои само от елемента $a_{nn} = 1$. Прилагайки към матрицата A' същата процедура, можем да достигнем до матрица от ред $n-2$, при което стойностите на елементите от n-тия ред и n-тия стълб няма да се променят. Така след краен брой стъпки ние ще достигнем до единичната матрица I. ■

За да довършим доказателството на лема 1, е достатъчно да отбележим, че ако равенството $\mu(A(D)) = |\det A|\,\mu(D)$ при всяко D е изпълнено за матриците A_1 и A_2, то е изпълнено и за тяхното произведение A_1A_2. Следователно, от леми 5 и 6 следва, че то е изпълнено за всяка обратима матрица A. С това е приключено доказателството на лема 1 и на основната лема, а следователно и на Теоремата за смяна на променливите при многомерните интеграли. ■

Премахване на условието за регулярност. Лема на Сард. Нека D е затворено и измеримо подмножество на $\mathbb{R}^n$, U е околност на D, и $\Phi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ е еднократно гладко изображение на U в $\mathbb{R}^n$. Точката $t \in D$ ще наричаме *критична точка* за изображението Φ, ако рангът на матрицата $D\Phi(t)$ е строго по-малък от n, или, еквивалентно, за нейната детерминанта е изпълнено $J_\Phi(t) = 0$. Да означим с K_Φ, или, съкратено, с K, множеството от всички критични точки на Φ. Множеството K може да бъде произволно затворено подмножество на D (или да съвпада с цялото D), но се оказва, че неговият образ не може да бъде какъв да е:

Лема на Сард[*]. *Множеството $\Phi(K)$ е пренебрежимо по Пеано-Жордан подмножество на $\mathbb{R}^n$.*

Доказателство. Ще приложим към компонентите $\varphi_i(t)$ на изображението $\Phi(t)$ формулата за нарастването на еднократно гладка функция на много променливи, доказана в теорема 1 на §1.4. За $i = 1, \ldots, n$, $a \in D$ и за достатъчно малки

[*]Твърдението е частен случай и етап от доказателството на по-общото твърдение, известно като теорема на Сард, в което се разглеждат изображения между пространства с различна размерност.

стойности на[*] $||t-a||$ имаме:

$$\varphi_i(t) = \varphi_i(a) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}(a) + r_i(t-a),$$

където $|r_i(t-a)| \leq \alpha_i(||t-a||)\,||t-a||$ и $\alpha_i(s) \to 0$ при $s \to 0$. Нещо повече, в забележки 2 и 3 към теоремата беше показано, че функцията $\alpha_i(s)$ може да бъде избрана така, че да не зависи от началната точка $a \in D$. Да означим

$$\widetilde{\alpha}(s) = \max_{i=1,\ldots,n} \alpha_i(s) \text{ и } \alpha(s) = \sup_{0 \leq \tau \leq s} \widetilde{\alpha}(\tau).$$

Тогава функцията $\alpha(s)$ е монотонно намаляваща и отново $\alpha(s) \to 0$ при $s \to 0$, като $|r_i(t-a)| \leq \alpha(||t-a||)\,||t-a||$ за всяко i.

Следното твърдение се проверява непосредствено:

Лема 7. *Нека $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, и $\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 = 1$. Да означим $\psi(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i(t)$. Тогава за всеки две достатъчно близки точки $a, t \in D$ е изпълнено*

$$\left| \psi(t) - \psi(a) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi_i}{\partial t_j}(a) \right| \leq \sqrt{n}\alpha(||t-a||)\,||t-a||\,.$$

Доказателство. Очевидно

$$\left| \psi(t) - \psi(a) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi_i}{\partial t_j}(a) \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i r_i(t-a) \right|.$$

По неравенството на Коши-Шварц-Буняковски имаме

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i r_i(t-a) \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |r_i(t-a)|^2} \leq \sqrt{n}\alpha(||t-a||)\,||t-a||\,.$$

■

Ще докажем

Лема 8. *Нека $a \in K \cap D$ е критична точка на изображението Φ, и $B = B(a, \varepsilon)$ е кълбо с център a и радиус $\varepsilon > 0$. Тогава съществува не зависеща от a и ε константа C, така че при достатъчно малки $\varepsilon > 0$ да имаме*

$$\mu^*(\Phi(B)) \leq C\alpha(\varepsilon)\varepsilon^n.$$

---

[*] Тук $||t||$ означава, както обикновено, евклидовата норма на t: $||t|| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |t_i|^2}$.

Доказателство. Да изберем константа C_1 такава, че за всяко $t \in D$ и $i = 1, \ldots, n$ да е изпълнено

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}(t) \right)^2} \leq C_1.$$

Тогава по една от формулите за крайните нараствания (виж следствие 4 от §1.5) ще получим, че за всяко $t \in D$ и $i = 1, \ldots, n$ ще имаме $|\varphi_i(t) - \varphi_i(a)| \leq C_1 \, ||t - a||$ и следователно

$$||\Phi(t) - \Phi(a)|| \leq C_1 \sqrt{n}. \, ||t - a|| \leq C_1 \sqrt{n}.\varepsilon,$$

т.е. $\Phi(t)$ принадлежи на кълбото $B(\Phi(a), C_1\sqrt{n}.\varepsilon)$ с център $\Phi(a)$ и радиус $C_1\sqrt{n}.\varepsilon$.

Сега ще използваме, че a е критична точка на Φ. Това означава, че $J_\Phi(a) = \det D\Phi(a) = 0$. Следователно съществуват константи $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, не всички равни на нула, така че линейната комбинация на редовете на матрицата $D\Phi(a)$ с такива коефициенти да дава нулевия вектор. С други думи, за всяко $j = 1, \ldots, n$ имаме

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}(a) = 0.$$

Нека $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq \vec{0}$. Можем да умножим числата $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ с една и съща константа, така че да получим $\left|\left|\vec{\lambda}\right|\right| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2} = 1$. Да положим $\psi(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i(t)$. Тогава горните равенства означават, че

$$\frac{\partial \psi}{\partial t_1}(a) = \ldots = \frac{\partial \psi}{\partial t_n}(a) = 0,$$

и от лема 7 се вижда, че при достатъчно малко ε за всяко t от Δ_ε ще имаме

$$|\psi(t) - \psi(a)| \leq \sqrt{n}\alpha(||t - a||) \, ||t - a|| \leq \sqrt{n}\alpha(\varepsilon)\varepsilon,$$

откъдето

$$\psi(a) - \sqrt{n}\alpha(\varepsilon)\varepsilon \leq \psi(t) \leq \psi(a) + \sqrt{n}\alpha(\varepsilon)\varepsilon.$$

Да означим с $\Lambda(x)$ линейната функция в $\mathbb{R}^n$, определена с формулата $\Lambda(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \left\langle \vec{x}, \vec{\lambda} \right\rangle$; тогава очевидно $\psi(t) = \Lambda(\Phi(t))$, и от горната оценка се вижда, че за всяко t от Δ_ε точката $\Phi(t)$ принадлежи на множеството

$$H = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \Lambda(\Phi(a)) - \sqrt{n}\alpha(\varepsilon)\varepsilon \leq \Lambda(x) \leq \Lambda(\Phi(a)) + \sqrt{n}\alpha(\varepsilon)\varepsilon \right\},$$

което представлява ивица, заградена от две равнини.

И така, за t от Δ_ε точката $\Phi(t)$ принадлежи на сечението на ивица и кълбо в $\mathbb{R}^n$; ще оценим мярката на това сечение. Нека $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $B(x^0, R)$ е кълбото с център

x^0 и радиус R, $\Lambda(x) = \left\langle \vec{x}, \vec{\lambda} \right\rangle$ с $\left|\left|\vec{\lambda}\right|\right| = 1$ е линеен функционал, и ивицата H_l е определена с неравенствата

$$H_l = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \Lambda(x^0) - l \le \Lambda(x) \le \Lambda(x^0) + l \right\}.$$

Ще оценим обема на $H_l \cap B(x^0, R)$. Нека H_0 е средната равнина на H_l, т.е. равнината определена от равенството $\Lambda(x) = \Lambda(x^0)$. Сечението $H_0 \cap B(x^0, R)$ е екваториално и представлява $n-1$-мерно кълбо с радиус R и $n-1$-мерен обем $V_{n-1} R^{n-1}$, където с V_{n-1} сме означили обема на единичното кълбо в $\mathbb{R}^{n-1}$. Ако вземем два цилиндъра с основа $H_0 \cap B(x^0, R)$ и височина l (в двете възможни посоки), то тяхното обединение ще съдържа $H_l \cap B(x^0, R)$ (виж чертежа), и следователно имаме

$$\mu\left(H_l \cap B(x^0, R)\right) \le 2l\mu\left(H_0 \cap B(x^0, R)\right) = 2V_{n-1} l R^{n-1}.$$

В случая, който ни интересува, имаме $l = \sqrt{n}\alpha(\varepsilon)\varepsilon$ и $R = C_1\sqrt{n}.\varepsilon$, и следователно

$$\mu(\Phi(B(a, \varepsilon))) \le 2V_{n-1}.n^{n/2} C_1^{n-1} \alpha(\varepsilon)\varepsilon^n,$$

което при $C = 2V_{n-1}.n^{n/2} C_1^{n-1}$ дава твърдението на лемата. ■

Ще преминем към доказателството на лемата на Сард. Нека Δ е n-мерен куб със страна L, съдържащ D. Да разделим всяка страна на Δ на N равни части; тогава Δ се разделя на N^n еднакви куба Δ_i със страна L/N: $\Delta = \cup_{i=1}^{N^n} \Delta_i$. Нека Δ_i е някой от тези кубове, и да предположим, че той съдържа поне една критична точка на Φ върху D; да означим една такава точка с a_i. За всяка точка $t \in \Delta_i$ разстоянието $||t - a_i||$ не надминава диагонала на куба, т.е. $||t - a_i|| \le \sqrt{n}.L/N$, и следователно $\Delta_i \subset B\left(a_i, \sqrt{n}.L/N\right)$. От лема 8 се вижда, че за такъв куб ще имаме

$$\mu^*\left(\Phi(\Delta_i \cap D)\right) \le C\ \alpha\left(\sqrt{n}\frac{L}{N}\right)\left(\sqrt{n}\frac{L}{N}\right)^n = C.n^{n/2}\ \alpha\left(\sqrt{n}\frac{L}{N}\right)\ \mu\left(\Delta_i\right).$$

Нека означим с E_N обединението на всички кубове, които съдържат поне една критична точка на Φ върху D; тогава $K \cap D \subset E_N$. От горното неравенство получаваме

$$\mu^*(\Phi(K \cap D)) \le \mu^*(\Phi(E_N)) \le C.n^{n/2}\alpha\left(\sqrt{n}\frac{L}{N}\right)\ \mu(E_N) \le C.n^{n/2}\alpha\left(\sqrt{n}\frac{L}{N}\right)\mu(\Delta).$$

При $N \to \infty$ дясната страна клони към нула, и следователно $\mu^*(\Phi(K \cap D)) = 0$. Лемата на Сард е доказана. ■

Следствие. *Формулата за смяна на променливите*

$$\int_{\Phi(D)} f(x)\ dx_1 \dots dx_n = \int_D f(\Phi(t))\left|J_\Phi(t)\right|\ dt_1 \dots dt_n.$$

е вярна за всяко еднократно гладко и взаимно еднозначно изображение Φ (т.е. условието за регулярност $J_\Phi(t) \neq 0$ може да бъде пропуснато).

Доказателство. Нека $\tau : D = \cup_{i=1}^{k} D_i$ е произволно измеримо разбиване на D, нека $E_i = \Phi(D_i)$ и $\widetilde{\tau} : E = \cup_{i=1}^{k} E_i$ е съответното разбиване на $E = \Phi(D)$. Ще означаваме с D'_τ обединението на онези D_i, които нямат общи точки с критичното множество K_Φ, и с D''_τ - обединението на останалите. Съответно, нека $E'_\tau = \Phi(D'_\tau)$, $E''_\tau = \Phi(D''_\tau)$. Да изберем $\varepsilon > 0$; при $\operatorname{diam}\tau$ достатъчно малко за $t \in D''_\tau$ ще имаме $|J_\Phi(t)| < \varepsilon$ и следователно $\left|\int_{D''_\tau} f(\Phi(t))\,|J_\Phi(t)|\;dt\right| < C\mu(D)\varepsilon$, където C е една горна граница за $|f(x)|$. От друга страна, поради лемата на Сард при достатъчно малко $\operatorname{diam}\widetilde{\tau}$ можем да получим $\mu(E''_\tau) < \varepsilon$ и следователно $\left|\int_{E''_\tau} f(x)\,dx\right| < C\varepsilon$. Тъй като върху множеството D'_τ имаме $J_\Phi(t) \neq 0$, то по формулата за смяна на променливите получаваме

$$\int_{D'_\tau} f(\Phi(t))\,|J_\Phi(t)|\;dt = \int_{E'_\tau} f(x)\,dx$$

и следователно

$$\left|\int_{\Phi(D)} f(x)\,dx - \int_D f(\Phi(t))\,|J_\Phi(t)|\;dt\right| \le \left|\int_{D''_\tau} f(\Phi(t))\,|J_\Phi(t)|\;dt\right| + \left|\int_{E''_\tau} f(x)\,dx\right| <$$

$$< C\,(1 + \mu(D))\,\varepsilon$$

за всяко $\varepsilon > 0$, т.е.разликата на интегралите е равна на нула. ■

Упражнения.

1. Пресметнете лицето на кръга и обема на тримерното кълбо, като използвате съответно полярна и сферична смяна на променливите в съответните интеграли.

2. Пресметнете обема на n-мерното кълбо $B_n(R)$ с център в началото и радиус R:

$$B_n(R) = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le R^2\right\},$$

като използвате обобщените сферични координати в $\mathbb{R}^n$ (виж края на §1.9).

2.7 Приложения на двойните и тройни интеграли.

Като първо приложение ще дадем вече доказаните в §5 формули за лице на криволинеен трапец и обем на криволинеен цилиндър. Като непосредствени следствия от теореми 3 и 5 от този параграф получаваме:

Теорема 1. *Нека D е криволинейният трапец, състоящ се от всички точки (x, y) в равнината, за които $x \in [a, b]$ и $\varphi(x) \leq y \leq \psi(x)$. Тогава*

$$\mu(D) = \iint\limits_D 1 \; dxdy = \int\limits_a^b (\psi(x) - \varphi(x)) \; dydx.$$

Теорема 2. *Нека тялото $V \subset \mathbb{R}^3$, е криволинеен цилиндър, определен с условията*

$$V = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}.$$

Тогава

$$\mu(V) = \iiint\limits_V 1 \; dxdydz = \iint\limits_D (\psi(x, y) - \varphi(x, y)) \; dxdy.$$

Понякога е удобно формулата за обем на тяло да се изрази по малко по-различен начин. Нека $V \in \mathbb{R}^3$ е измеримо множество, и нека проекцията на V върху оста x да съвпада с интервала $[a, b]$. За всяко $x \in [a, b]$ да означим с L_x равнината, успоредна на равнината Oxy и минаваща през точката $(x, 0, 0)$ (L_x се състои от всички точки в $\mathbb{R}^3$, чиято първа координата е равна на x). Нека $Q_V(x) = \mu(V \cap L_x)$ да е двумерната мярка на Пеано-Жордан на множеството $V \cap L_x$, разглеждано като подмножество[*] на равнината L_x.

Теорема 3 (Принцип на Кавалиери). *За обема на V е в сила формулата*

$$\mu(V) = \int\limits_a^b Q_V(x) \; dx.$$

---

[*] От теоремата на Фубини в §5 следва, че това множество ще бъде измеримо за почти всички x.

Забележка. Италианският математик от XVII век Кавалиери е формулирал принципа си по следния начин: Нека за телата V_1, V_2 знаем, че при всяко $x \in [a,b]$ сеченията $(V_1 \cap L_x)$ и $(V_2 \cap L_x)$ имат еднакви лица; тогава обемите на V_1 и V_2 са равни.

Доказателство на теорема 3. Да изберем правоъгълен паралелепипед $\Delta = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$, който да съдържа V, и нека $\widetilde{f}(x,y)$ да означава функцията, равна на единица върху V и на нула в $\Delta \setminus V$. Тогава

$$\mu(V) = \iiint\limits_{\Delta} \widetilde{f}(x,y)\, dxdydz = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d \int\limits_e^f \widetilde{f}(x,y)\, dydz \right) dx = \int\limits_a^b Q_V(x)\, dx.$$

■

Обем на ротационно тяло. Нека $\varphi(x)$ е непрекъсната и неотрицателна за $x \in [a,b]$. Да завъртим графиката на функцията на пълен оборот около оста x; тогава тялото V_φ, ограничавано от получената повърхнина, се нарича ротационно тяло, определено от $\varphi(x)$. Тялото V_φ се състои от всички точки $P = (x,y,z)$ такива, че разстоянието от P до оста x не надминава $\varphi(x)$. По-точно,

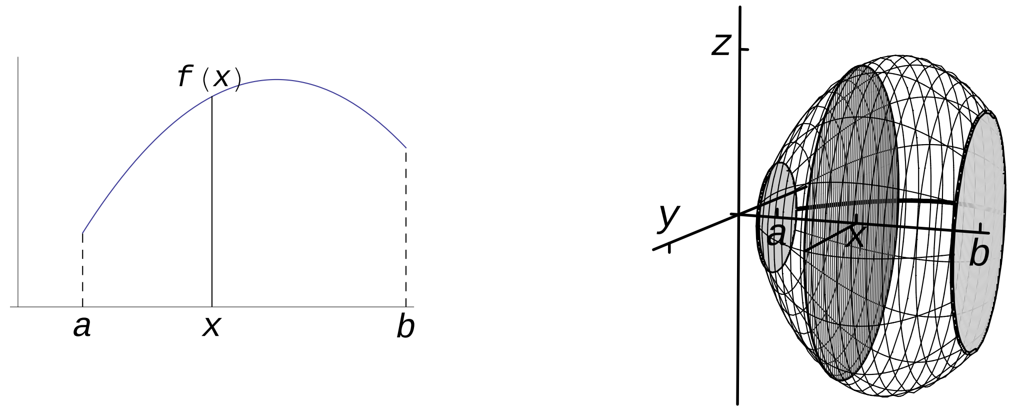
$$V_\varphi = \left\{ (x,y,z) : a \le x \le b,\ y^2 + z^2 \le \varphi^2(x) \right\}.$$

От горното описание се вижда, че за $x \in [a,b]$ сечението $V_\phi \cap L_x$ представлява окръжност с център началото и радиус $\varphi(x)$. Оттук $Q_{V_\varphi}(x) = \pi\varphi^2(x)$, и от принципа на Кавалиери получаваме

Теорема 4. (Формула за обема на ротационно тяло). *Обемът на ротационното тяло V_φ, определено от функцията $\varphi(x)$, се дава от формулата*

$$\mu(V_\varphi) = \pi \int\limits_a^b \varphi^2(x)\, dx.$$

Тази формула може да бъде леко обобщена: нека D е криволинейният трапец, определен с неравенствата $x \in [a,b]$, $\varphi(x) \le y \le \psi(x)$, и



Графика на функция и ротационно тяло, породено от нея.

нека V_D е ротационното тяло, получено чрез въртене на D около оста x. Тогава $V_D = V_\psi \setminus V_\varphi$, откъдето получаваме

Следствие 5. *Обемът на V_D се дава с формулата*

$$\mu\left(V_D\right) = \pi \int\limits_a^b \Big(\psi^2(x) - \varphi^2(x)\Big)\ dx.$$

Обеми на n-мерни тела. Ще използваме многомерен аналог на принципа на Кавалиери, за да намерим n-мерните обеми на n-мерното кълбо* и на n-мерния симплекс.

Обем на n-мерно кълбо. n-мерното кълбо $B_n(R)$ с център в началото и радиус R се задава с неравенството $B_n(R) = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq R^2\right\}$. Да означим неговия обем с $b_n(R) = \mu\left(B_n(R)\right)$. Очевидно $b_n(R) = b_n R^n$, където с $b_n = b_n(1)$ сме означили

*Този обем може да бъде намерен и с обобщена сферична смяна на координатите (зад. 2 от предния параграф).

обема на n-мерното кълбо с радиус единица; наистина, ако разгледаме трансформацията в $\mathbb{R}^n$, умножаваща всички координати с R, то тя прехвърля $B_n(1)$ в $B_n(R)$ и има якобиан R^n. Достатъчно е да намерим числата b_n за всяко n.

За всяко $t \in [-1,1]$ да означим с L_t $n-1$-мерната равнина в $\mathbb{R}^n$, определена с равенството $x_n = t$. Очевидно сечението $B_n(1) \cap L_t$ представлява $n-1$-мерно кълбо с радиус $\sqrt{1-t^2}$ и следователно, прилагайки многомерен аналог на принципа на Кавалиери, получаваме

$$b_n = \int_{-1}^{1} b_{n-1} \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{n-1} \, dt = b_{n-1} \int_0^{\pi} \sin^n\theta \, d\theta$$

(чрез субституцията $t = \cos\theta$). Ако означим $I_n = \int_0^{\pi} \sin^n(\theta)\, d\theta$, получаваме, че $b_n = I_0 I_1 \ldots I_n$. В зад. 7 на §4.3 от част 1 са доказани формулите

$$I_{2n} = \frac{\pi}{2} \frac{1.3.5.\ldots.(2n-1)}{2.4.\ldots.2n}\, ;\; I_{2n+1} = \frac{2.4.\ldots.2n}{1.3.5.\ldots.(2n-1).(2n+1)}\, ,$$

откъдето получаваме

$$\mu\left(B_n(R)\right) = \frac{2^{k+1}\pi^k}{1.3.5.\ldots.(2k+1)} R^{2k+1} \;\text{ за }\; n = 2k+1,$$

$$\mu\left(B_n(R)\right) = \frac{2^k \pi^k}{2.4.6.\ldots.2k} R^{2k} \;\text{ за }\; n = 2k.$$

Обем на n-мерен симплекс. Ще дефинираме n-мерния симплекс $C_n(R)$ в $\mathbb{R}^n$ с неравенствата

$$C_n(R) = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \; x_1, \ldots, x_n \geq 0, \; \sum_{i=1}^{n} x_i \leq R \right\}.$$

Отново имаме $\mu\left(C_n(R)\right) = c_n R^n$, където $c_n = \mu\left(C_n(1)\right)$. Нека за $t \in [0,1]$ равнината L_t е както по-горе; тогава сечението $B_n(1) \cap L_t$ представлява $n-1$-мерен симплекс $C_{n-1}(1-t)$ и следователно

$$c_n = \int_0^1 c_{n-1} \left(1-t\right)^{n-1} \, dt = c_{n-1} \frac{1}{n},$$

откъдето

$$\mu\left(C_n(R)\right) = \frac{1}{n!} R^n.$$

Маса и център на тежестта. В тази точка ще се занимаваме с т.н. *материални тела*, т.е двумерни или тримерни множества, в които е дадена функция на плътността $\rho(P) \geq 0$. Физическият смисъл на плътността е отношението на масата към обема, т.е. имаме $\frac{m(U)}{\mu(U)} \approx \rho(P)$, където U е достатъчно малка околност на точката P, а $m(U)$ означава масата на U. Разбира се, ако $\rho(P) \equiv 1$, то масата съвпада с обема.

Маса. Нека $D \subset \mathbb{R}^2$ е измеримо множество, върху което е зададена плътност $\rho(x, y) \geq 0$. Да вземем разбиване $D = \cup_{i=1}^n D_i$, и точки $P_i \in D_i$. В първо приближение можем да считаме, че плътността навсякъде в D_i е равна на $\rho(P_i)$, откъдето

$$m(D) = \sum_{i=1}^{n} m(D_i) \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(P_i)\mu(D_i).$$

Като намаляваме диаметъра на разбиването, тази формула става все по-точна, и чрез граничен преход получаваме равенството

$$m(D) = \iint\limits_D \rho(x, y)\, dxdy.$$

Формулата за маса на тримерно тяло е същата, с единствената разлика, че се използва тримерен интеграл вместо двумерен.

Център на тежестта. Ще напомним понятието център на тежестта на крайна система от материални точки. Нека са дадени точките $P_1, \ldots, P_n$ (в $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$), с маси съответно $m_1, \ldots, m_n$. Под център на тежестта на тази система разбираме точката

$$\vec{P}_* = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{P}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

На основата на горното равенство ще изведем формула за център на тежестта на материална фигура и материално тяло. Нека $D \subset \mathbb{R}^2$ е материална фигура, т.е. измеримо множество със зададена плътност. Нека имаме разбиване $D = \cup_{i=1}^n D_i$ и точки $P_i = (x_i, y_i) \in D_i$. За извеждане на приближената формула можем да считаме, че масата на всяко от парчетата D_i е съсредоточена в точката P_i, т.е.

$$P_* \approx \frac{1}{\sum_{i=1}^n m(D_i)} \left(\sum_{i=1}^{n} \rho(P_i)\mu(D_i).\vec{P}_i \right),$$

или, ако (x_*, y_*) са координатите на P_*,

$$x_* \approx \frac{1}{\sum_{i=1}^n m(D_i)} \left(\sum_{i=1}^n x_i \rho(x_i, y_i) \mu(D_i) \right) , \quad y_* \approx \frac{1}{\sum_{i=1}^n m(D_i)} \left(\sum_{i=1}^n y_i \rho(x_i, y_i) \mu(D_i) \right).$$

След граничен преход получаваме

$$x_* = \frac{1}{m(D)} \iint_D x\rho(x,y)\, dxdy , \quad y_* = \frac{1}{m(D)} \iint_D y\rho(x,y)\, dxdy.$$

Оставяме на читателя да напише съответните формули за тримерно материално тяло.

Център на тежестта на еднороден криволинеен трапец и цилиндър. Нека $D = \{x \in [a,b],\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$ е криволинеен трапец, и нека $\rho(x,y) \equiv 1$. Тогава горните формули дават

$$x_* = \frac{1}{\mu(D)} \int_a^b x \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \right) dx = \frac{1}{\mu(D)} \int_a^b x \left(\psi(x) - \varphi(x)\right)\, dx,$$

$$y_* = \frac{1}{\mu(D)} \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} y\, dy \right) dx = \frac{1}{2\mu(D)} \int_a^b \left(\psi^2(x) - \varphi^2(x)\right)\, dx.$$

Аналогично, за еднородният криволинеен цилиндър

$$V = \{(x,y,z) : (x,y) \in D, \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y)\}$$

са в сила формулите

$$x_* = \frac{1}{\mu(V)} \iint_D x \left(\psi(x,y) - \varphi(x,y)\right)\, dxdy , \quad y_* = \frac{1}{\mu(V)} \iint_D y \left(\psi(x,y) - \varphi(x,y)\right)\, dxdy,$$

$$z_* = \frac{1}{2\mu(V)} \iint_D \left(\psi^2(x,y) - \varphi^2(x,y)\right)\, dxdy.$$

Пример. Ще намерим центъра на тежестта на горното полукълбо на кълбо с радиус R, което се представя като

$$B_R^+ = \left\{(x,y,z) : (x,y) \in D_R,\ 0 \le z \le \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\right\},$$

където с D_R сме означили кръга с център в началото и радиус R. Интересува ни само z-координатата (защо?):

$$z_* = \frac{3}{4\pi R^3} \iint\limits_{D_R} \left(R^2 - x^2 - y^2\right)\, dxdy = \frac{3}{4\pi R^3} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \left(R^2 - \rho^2\right) \rho\, d\rho = \frac{3}{8} R,$$

т.е. височината на центъра на тежестта е 37.5 процента от радиуса.

Теорема на Гулдин. Нека V_D е тялото, получено от въртене на криволинейния трапец $D = \{x \in [a,b],\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$ около оста x. Да сравним формулата за обема на V_D:

$$\mu\left(V_D\right) = \pi \int_a^b \left(\psi^2(x) - \varphi^2(x)\right)\, dx$$

с формулата за y-координатата на центъра на тежестта на D:

$$y_* = \frac{1}{2\mu(D)} \int_a^b \left(\psi^2(x) - \varphi^2(x)\right)\, dx.$$

Оттук получаваме

$$\mu\left(V_D\right) = 2\pi y_* \,.\, \mu(D).$$

С други думи, изпълнена е

Теорема 6. (Втора теорема на Гулдин[*]). *Обемът на ротационното тяло, получено от въртенето на фигурата D, е равен на лицето на тази фигура, умножена по дължината на окръжността, описана от центъра на тежестта при въртенето.*

Пример. Нека $0 < r < R$. Да означим с D кръга с радиус r и център в точката $(0, R)$. Фигурата T, получена от въртенето на D около абсцисната ос, се нарича <u>тор</u>. Очевидно центърът на тежестта на един кръг съвпада с неговия център, и следователно за обема на тора T получаваме формулата

$$\mu(T) = 2\pi R . \pi r^2 = 2\pi^2 R r^2.$$

[*]Първата теорема на Гулдин звучи аналогично, но се отнася до повърхнината на ротационното тяло и ще бъде разгледана по-нататък. Тези две теореми носят името на Паул Гулдин, швейцарски йезуит, работил в началото на 17 в. Те са били известни обаче и на александрийския математик Пап, IV в. н.е. (последният велик математик на античността).

Лице на повърхност, представена като графика на функция. Нека $f(x,y)$ е еднократно гладка функция на две променливи, дефинирана в околност на измеримото и затворено множество D. Нека $G_f \subset \mathbb{R}^3$ е графиката на тази функция:

$$G_f = \{(x,y,z) : (x,y) \in D, z = f(x,y)\}.$$

Ще припомним понятието *допирателна равнина* (или допирателно подпространство) към G_f в точката $P_0 = (x_0, y_0, f(x_0,y_0)) \in G_f$.

Да фиксираме y_0; Получаваме кривата, образувана от всички точки от вида $P_1(x) = (x, y_0, f(x,y_0))$, лежаща върху G_f. Ще означим с l_1 нейният допирателен вектор в точката x_0: $l_1 = P_1'(x_0) = (1, 0, f_x'(x_0,y_0))$. Аналогично, ако фиксираме x_0, получаваме кривата $P_2(y) = (x_0, y, f(x_0,y))$ с допирателен вектор в y_0 равен на $l_2 = P_2'(y_0) = (0, 1, f_y'(x_0,y_0))$. Множеството от всички линейни комбинации $\lambda l_1 + \mu l_2$ на векторите l_1 и l_2 представлява двумерно векторно подпространство на $\mathbb{R}^3$, което се нарича допирателна равнина към G_f в т. P_0 и се бележи с $T_{P_0}(G_f)$.

Ще ни бъде необходим и единственият (с точност до умножение с константа) вектор, перпендикулярен на $T_{P_0}(G_f)$. Такъв вектор се нарича <u>нормален вектор</u> към G_f в точката P_0. Има един лесен начин да намерим такъв вектор: това е векторното произведение на векторите l_1 и l_2. Означаваме

$$\vec{N}(P_0) = l_1 \times l_2 = \begin{vmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ 1 & 0 & f_x'(x_0,y_0) \\ 0 & 1 & f_y'(x_0,y_0) \end{vmatrix} = \Big(-f_x'(x_0,y_0), -f_y'(x_0,y_0), 1\Big).$$

Да си припомним формулата за промяна на лицето при проектиране, известна ни от елементарната математика. Нека α и β са две равнини в тримерното пространство, нека Π_β да означава ортогоналната проекция на $\mathbb{R}^3$ върху β, и нека G е измеримо подмножество на α (в смисъл на мярката на Пеано-Жордан върху α). Тогава

$$\frac{\mu(\Pi_\beta(G))}{\mu(G)} = \cos \angle(\alpha, \beta).$$

Наистина, това твърдение лесно се проверява за правоъгълници, едната страна на които е успоредна на пресечницата на равнините α и

β; следователно твърдението е вярно за обединение на такива правоъгълници (т.е. за елементарните множества) и чрез граничен преход то се получава за всяко измеримо множество. Ще отбележим, че ако $\vec{N}_\alpha$, $\vec{N}_\beta$ са нормалните вектори съответно към α и β, то ъгълът между тях $\angle(\alpha, \beta)$ е равен на ъгъла между техните нормали $\angle\left(\vec{N}_\alpha, \vec{N}_\beta\right)$.

Вече можем да изведем формулата за лицето на G_f. Нека $\tau : D = \cup_{i=1}^n D_i$ е разбиване на D, и нека $Q_i = (x_i, y_i) \in D_i$, $P_i = (Q_i, f(Q_i) \in G_f$. Нека G_i е частта от G_f, лежаща над D_i. Нека T_{P_i} е допирателната равнина към G_f в точката P_i. Ще смятаме, че лицето на G_i е приблизително равно на лицето на съответната част от T_{P_i}; тогава, ако положим $T_{P_i} = \alpha$ и $0xy = \beta$, по формулата за проекцията

$$\frac{\mu(D_i)}{\mu(G_i)} \approx \cos\angle\left(T_{P_i}, 0xy\right) = \cos\angle\left(\vec{N}(P_i), \vec{z}\right).$$

От формулата за скаларно произведение на вектори знаем, че $\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle}{|\vec{a}||\vec{a}|}$. Лесно се вижда, че $\left\langle\vec{N}(P_i), \vec{z}\right\rangle = 1$. Оттук пресмятаме, че

$$\cos\angle\left(\vec{N}(P_i), \vec{z}\right) = \frac{1}{\left|\vec{N}(P_i)\right|} = \frac{1}{\sqrt{1 + f'_x(P_i)^2 + f'_y(P_i)^2}}$$

и следователно

$$\mu(G_i) \approx \sqrt{1 + f'_x(P_i)^2 + f'_y(P_i)^2}\,\mu(D_i).$$

Оттук

$$\mu(G) = \sum_{i=1}^n \mu(G_i) \approx \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f'_x(P_i)^2 + f'_y(P_i)^2}\,\mu(D_i).$$

Чрез граничен преход при $\operatorname{diam}\tau \to 0$ получаваме исканата формула:

Теорема 7. *Лицето на графиката G_f на функцията $f(x, y)$ е равно на*

$$\mu(G_f) = \iint\limits_D \sqrt{1 + f'_x(x, y)^2 + f'_y(x, y)^2}\,dxdy.$$

Забележка. Даденият по-горе извод на формулата се базира на интуитивни съображения; точната дефиниция на лице на повърхност, и извод на формулата като частен случай от много по-обща формула, ще бъдат дадени в следващата част.

Лице на ротационна повърхност. Нека, както по-горе, ротационното тяло V_φ е породено от въртенето на еднократно гладката в интервала $[a, b]$ функция $\varphi(x) \geq 0$. Нека с S_φ означим ограничаващата V_φ повърхност, породена от въртенето на графиката на $\varphi(x)$:

$$S_\varphi = \Big\{(x, y, z) : a \leq x \leq b,\ y^2 + z^2 = \varphi^2(x)\Big\}.$$

Нека означим с S_φ^+ горната половина на S_φ, т.е. частта, е която $z \geq 0$. Тогава S_φ^+ може да се представи като графика на функцията

$$z = f(x, y) = \sqrt{\varphi^2(x) - y^2},$$

определена в криволинейния трапец

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, -\varphi(x) \leq y \leq \varphi(x)\}.$$

Имаме

$$f'_x(x, y) = \frac{\varphi'(x)\varphi(x)}{\sqrt{\varphi^2(x) - y^2}}\,, \quad f'_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{\varphi^2(x) - y^2}}\,,$$

$$\sqrt{1 + (f'_x)^2 + \left(f'_y\right)^2} = \frac{\sqrt{\varphi^2(x)\left(1 + \varphi'(x)^2\right)}}{\sqrt{\varphi^2(x) - y^2}}.$$

По формулата за лице на графиката получаваме

$$\mu(S_\varphi) = 2\mu(S_\varphi^+) = 2\int_a^b \sqrt{\varphi^2(x)\left(1 + \varphi'(x)^2\right)} \left(\int_{-\varphi(x)}^{\varphi(x)} \frac{dy}{\sqrt{\varphi^2(x) - y^2}}\right) dx.$$

Лесно се пресмята (чрез субституцията $y = c\,\sin t$), че $\int\limits_{-c}^{c} \frac{dy}{\sqrt{c^2 - y^2}} = \pi$ независимо от стойността на $c > 0$, и следователно

$$\mu(S_\varphi) = 2\pi \int_a^b \varphi(x)\sqrt{1 + \varphi'(x)^2}\, dx.$$

Пример. Ще намерим лицето на сфера S_R с радиус R. В този случай $\varphi(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [-R, R]$. Имаме

$$\sqrt{1 + \varphi'(x)^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

и следователно

$$\mu\left(S_R\right) = 2\pi \int_{-R}^{R} R\, dx = 4\pi R^2.$$

Първа теорема на Гулдин. Нека D е измеримо множество в равнината Oxy, ограничено от частично гладката крива Γ. Нека S_Γ е повърхнината, породена от въртенето на Γ около оста x. Първата теорема на Гулдин гласи, че

$$\mu\left(S_\Gamma\right) = 2\pi y_*(\Gamma).l(\Gamma),$$

където $l(\Gamma)$е дължината на кривата Γ, а $y_*(\Gamma)$ е y-координатата на центъра на тежестта на Γ, разгледана като еднородна материална крива. Доказателството ще бъде дадено в следващата част.

Упражнения.

1. Нека $V \in \mathbb{R}^3$ е материално тяло. Докажете, че единствената тройка числа x_*, y_*, z_*, за които са изпълнени равенствата

$$\int\limits_V (x - x_*)\, \rho(x, y, z)\, dxdydz = \int\limits_V (y - y_*)\, \rho(x, y, z)\, dxdydz =$$

$$= \int\limits_V (z - z_*)\, \rho(x, y, z)\, dxdydz = 0$$

са координатите на центъра на тежестта на V.

2. Инерчен момент. Нека l е права в $\mathbb{R}^3$, и P_0 е материална точка с маса m. Под <u>инерчен момент</u> $I_l(P_0)$ на точката P_0 спрямо l разбираме числото $I_l(P_0) = m.d\left(P_0, l\right)^2$, където $d\left(P_0, l\right)$ означава дължината на перпендикуляра, спуснат от P_0 към l. Нека $V \subset \mathbb{R}^3$ е материално тяло.

а/ Покажете, че инерчният момент $I_l(V)$ на V спрямо оста l се задава с формулата

$$I_l(V) = \int\limits_V d\left((x, y, z), l\right)^2 \rho(x, y, z)\, dxdydz.$$

б/ Нека тялото V се върти около оста l с ъглова скорост ω (т.е. се завърта на ъгъл ω за единица време). Покажете, че кинетичната енергия на V се задава с формулата $E = I_l(V).\omega^2/2$.

Упътване. Ако имаме материална точка P с маса m, то нейната линейна скорост е равна на $v(P) = \omega.d\,(P, l)$, а нейната кинетична енергия - на $m.v(P)^2/2 = I_l(P).\omega^2/2$.

Нека $\{V_i\}$, $i = 1, \dots, n$, е разбиване на V, P_i е точка от V_i, $m_i = \rho(P_i)\mu(V_i)$ е приблизителната маса на V_i, съсредоточена в точката P_i. Пресметнете кинетичната енергия на тази система от точки и чрез граничен преход получете горната формула.

3. Нека l е права, и l_0 е права, успоредна на l и минаваща през центъра на тежестта на тялото V. Нека h е разстоянието между правите l и l_0. Покажете, че

$$I_l(V) = I_{l_0}(V) + m(V).h^2.$$

Упътване. Можем да считаме, че правата съвпада с абсцисната ос, и тогава

$$I_l(V) = \int\limits_V \left(y^2 + z^2\right) \rho(x, y, z)\, dxdydz,$$

$$I_{l_0}(V) = \int\limits_V \left((y - y_*)^2 + (z - z_*)^2\right) \rho(x, y, z)\, dxdydz.$$

4. Нека $\vec{e} = (\lambda, \mu, \nu)$ е единичен вектор: $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$. Да означим с $I_x(V)$, $I_y(V)$, $I_z(V)$ (или, съкратено, I_x, I_y, I_z) моментите на V спрямо координатните оси, и нека $K_{xy}(V)$, $K_{yz}(V)$, $K_{zx}(V)$ са така наречените центробежни моменти:

$$K_{xy}(V) = \int\limits_V xy\rho(x, y, z)\, dxdydz, \ \dots$$

Докажете, че инерчният момент $I_{\vec{e}}(V)$ на тялото V спрямо правата $l_{\vec{e}}$, минаваща през началото и колинеарна с $\vec{e}$, се дава с формулата

$$I_{\vec{e}}(V) = I_x\lambda^2 + I_y\mu^2 + I_z\nu^2 - 2K_{xy}\lambda\mu - 2K_{yz}\mu\nu - 2K_{zx}\nu\lambda.$$

Упътване. Използвайте, че квадрата $d\left(P, l_{\vec{e}}\right)^2$ на разстоянието от точката $P(x, y, z)$ до правата $l_{\vec{e}}$ е равен на

$$d\left(P, l_{\vec{e}}\right)^2 = \left\|P^2\right\| - \left\langle \vec{P}, \vec{e} \right\rangle^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (\lambda x + \mu y + \nu z)^2 =$$

$$= (\mu^2 + \nu^2)x^2 + (\nu^2 + \lambda^2)y^2 + (\lambda^2 + \mu^2)z^2 - 2\lambda\mu xy - 2\mu\nu yz - 2\nu\lambda zx =$$
$$= \nu^2(x^2 + y^2) + \mu^2(z^2 + x^2) + \lambda^2(y^2 + z^2) - 2\lambda\mu xy - 2\mu\nu yz - 2\nu\lambda zx.$$

Забележка. Горната формула може да се онагледи по следния начин: да разгледаме в пространството $\mathbb{R}^3$ квадратичната форма

$$\mathcal{I}(\lambda, \mu, \nu) = I_x\lambda^2 + I_y\mu^2 + I_z\nu^2 - 2K_{xy}\lambda\mu - 2K_{yz}\mu\nu - 2K_{zx}\nu\lambda.$$

Нека M е множеството от точките в $\mathbb{R}^3$, за които $\mathcal{I}(\lambda, \mu, \nu) = 1$. Тъй като квадратичната форма $\mathcal{I}$ е положително определена, повърхността M е триосен елипсоид; осите на получения елипсоид (виж напр. задачи 2 и 3 на §1. 11) се наричат *главни инерчни оси* на тялото V. Тяхното значение се вижда от следния важен факт, който лесно се доказва с помощта на изложения тук материал:

Нека материалното тяло V се върти около материалната ос l. Единствените случаи, когато оста не изпитва центробежна сила или усукващ момент, е ако l минава през центъра на тежестта на тялото V и съвпада с някоя от неговите главни инерчни оси.

5. Нека $\mathcal{I}(\lambda, \mu, \nu)$ и M са както в горната забележка.

а/ Докажете, че за ако за всеки единичен вектор $\vec{e}$ означим с $M(\vec{e})$ пресечната точка на лъча, породен от $\vec{e}$, с множеството M, то $|OM(\vec{e})| = 1/\sqrt{I_{\vec{e}}(V)}$.

б/ Докажете, че главните оси на инерция на V съвпадат с координатните оси точно тогава, когато центробежните моменти* са нула, т.е. $K_{xy}(V) = K_{yz}(V) = K_{zx}(V) = 0$.

6.(Гравитационен потенциал на тяло). В зад. 2 на §1.5 беше въведено понятието *гравитационен потенциал* на материална точка: ако P_0 е материална точка с маса M, то гравитационният и потенциал

*В случая на произволна ос именно центробежните моменти определят силите на усукване, действащи върху нея.

в точката P е равен на $\Phi(P) = \frac{kM}{||\vec{P}-\vec{P_0}||}$. Породеното от материалната точка силово поле е равно на $\vec{F}(P) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Phi(P)$.

Нека V е материално тяло в $\mathbb{R}^3$ с плътност $\rho(x,y,z)$. Покажете, че гравитационния потенциал на V се дава с формулата

$$\Phi_V(\xi,\eta,\zeta) = k\int\limits_V \frac{\rho(x,y,z)\ dxdydz}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}$$

за $(\xi,\eta,\zeta) \notin V$, и че съответното силово поле се дава с

$$\vec{F}_V(\xi,\eta,\zeta) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Phi_V(\xi,\eta,\zeta) = \left(-k\int\limits_V \frac{(x-\xi)\rho(x,y,z)\ dxdydz}{\left(\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}\right)^3},\dots\right).$$

Забележка. В случая, когато $(\xi,\eta,\zeta) \in V$, съответният интеграл е несобствен, но сходящ (виж следващия параграф) и следователно гравитационния потенциал продължава да бъде дефиниран.

7. Нека B_R е еднородно (т.е. с плътност единица) кълбо с радиус R. Докажете, че за точки извън него то поражда същия гравитационен потенциал, както ако цялата му маса беше съсредоточена в центъра му.

Упътване. Фиксирайте точката $P \notin B_R$ и вземете координатна система такава, че началото да съвпада с центъра на кълбото и точката P да лежи на оста z, т.е. $P = (0,0,a)$ с $a > R$. След въвеждане на полярни координати получаваме

$$\Phi_{B_R}(P) = k\int_0^{2\pi} d\theta . \int_0^R \rho^2 \left(\int_0^\pi \frac{\sin\varphi\ d\varphi}{\sqrt{a^2+\rho^2-2a\rho\cos\varphi}}\right) d\rho =$$

$$= 2\pi k\int_0^R \frac{\rho}{a}\left(\int_{|a-\rho|}^{a+\rho} dt\right) d\rho,$$

където сме означили $t = \sqrt{a^2+\rho^2-2a\rho\cos\varphi}$. Тъй като $\rho < a$, получаваме

$$\Phi_{B_R}(P) = k\frac{4\pi R^3}{3}.\frac{1}{a}.$$

8. Нека сега $V = \left\{(x, y, z) : R_1 \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq R_2\right\}$, т.е. V е еднородното тяло, ограничено от две концентрични сфери с център в началото и радиуси R_1, R_2. Докажете, че във вътрешността на по-малката сфера (т.е. при $||P|| < R_1$) потенциалът $\Phi_V(P)$ не зависи от P и следователно гравитационното поле в нея е равно на нула.

Забележка. Това означава, че във вътрешността на куха материална сфера* телата са в безтегловност. Това е един от сензационните за времето си резултати на Нютон.

Упътване. Използвайте изчисленията от зад. 7, като вземете пред вид, че тук ρ се изменя от R_1 до R_2, и винаги имаме $|a - \rho| = \rho - a$. Изчисленията от зад. 7 в този случай дават, че $\Phi_V(P) = 2\pi k \left(R_2^2 - R_1^2\right)$ и следователно не зависи от P.

* и при липсата на други гравитационни полета

2.8 Несобствени многомерни интеграли.

В дефиницията на римановия интеграл се разглеждат ограничени функции, дефинирани върху ограничени множества. Ако някое от тези условия е нарушено, говорим за несобствен интеграл.

Дефиниция на многомерен несобствен интеграл.

Изчерпваща система. *Нека U е подмножество на $\mathbb{R}^n$ с непразна вътрешност. Под изчерпваща система $\{U_k\}_{n=1,2,\dots}$ за U ще разбираме монотонно растяща редица от измерими отворени подмножества U_k на U, така че за всяко n затворената обвивка $\overline{U}_k$ на U_k се съдържа в U_{k+1}, и $\cup_{k=1}^{\infty} U_k = U$.*

Дефиниция на несобствения интеграл. *Нека $f(x)$ е функция, дефинирана за $x \in U$ и интегруема върху всяко компактно (т.е. ограничено и затворено) подмножество на U. (Такава функция ще наричаме* локално интегруема върху U. *Казваме, че $f(x)$ е интегруема в несобствен смисъл върху U, ако за всяка изчерпваща система $\{U_k\}$ на U имаме*

$$\int\limits_U f(x)\, dx_1 \dots dx_n = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\overline{U}_k} f(x)\, dx_1 \dots dx_n,$$

като границата отдясно съществува и не зависи от избора на изчерпващата система.

В такива случаи се казва, че несобственият интеграл е *сходящ*; в противен случай казваме, че той е *разходящ*.

Както и за едномерните несобствени интеграли (виж част I, §4.6), ще разгледаме отделно случаите на функции с постоянен знак и на функции, променящи знака си.

Несобствени интеграли от неотрицателни функции. В този случай дефиницията значително се опростява. За да се установи сходимостта на интеграла, е достатъчно да се разгледа само една изчерпваща система.

Теорема 1. *Нека U е подмножество на $\mathbb{R}^n$ с непразна вътрешност, и нека $f(x) \geq 0$ е неотрицателна функция, дефинирана за $x \in U$*

и интегруема върху всяко компактно подмножество на U. Ако границата $\lim_{k\to\infty}\int_{\overline{U}_k} f(x)\ dx_1\dots dx_n$ съществува за някоя изчерпваща система $\{U_k\}$ за U, то тя съществува за всяка друга изчерпваща система $\{V_l\}$, и

$$\lim_{l\to\infty}\int\limits_{\overline{V}_l} f(x)\ dx_1\dots dx_n = \lim_{k\to\infty}\int\limits_{\overline{U}_k} f(x)\ dx_1\dots dx_n.$$

Доказателство. Да фиксираме номер l. Тъй като $\overline{V}_l \subset \cup_{k=1}^{\infty} U_k$, то множествата U_k образуват безкрайно отворено покритие на компактното множество $\overline{V}_l$, и по теоремата на Хайне-Борел (теорема 11 на §1.2) следва, че от него може да се избере крайно подпокритие. Тъй като множествата монотонно нарастват, това означава, че съществува номер $k = k(l)$ такъв, че $\overline{V}_l \subset U_{k(l)}$. Оттук, тъй като $f(x) \ge 0$, то

$$\int\limits_{\overline{V}_l} f(x)\ dx_1\dots dx_n \le \int\limits_{\overline{U}_{k(l)}} f(x)\ dx_1\dots dx_n \le \lim_{k\to\infty}\int\limits_{\overline{U}_k} f(x)\ dx_1\dots dx_n.$$

Така монотонно растящата редица $\int_{\overline{V}_l} f(x)\ dx_1\dots dx_n$ е ограничена и следователно сходяща, като

$$\lim_{l\to\infty}\int\limits_{\overline{V}_l} f(x)\ dx_1\dots dx_n \le \lim_{k\to\infty}\int\limits_{\overline{U}_k} f(x)\ dx_1\dots dx_n.$$

Разменяйки местата на $\{U_k\}$ и $\{V_l\}$, получаваме обратното неравенство

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{\overline{U}_k} f(x)\ dx_1\dots dx_n \le \lim_{l\to\infty}\int\limits_{\overline{V}_l} f(x)\ dx_1\dots dx_n,$$

което доказва твърдението. ■

Забележка. От доказателството на теоремата веднага се вижда следния критерий за сходимост на интеграла от неотрицателна функция: Ако за някоя изчерпваща система $\{U_k\}$ частичните интеграли $\int_{U_k} f(x)\ dx_1\dots dx_n$ са ограничени отгоре от една и съща константа, то несобствения интеграл $\int_U f(x)\ dx_1\dots dx_n$ е сходящ.

И тук е валиден същия принцип за сравняване, както за едномерните несобствени интеграли (и за безкрайните редове).

Теорема 2. Принцип за сравняване. *Нека $f(x)$ и $g(x)$ са две локално интегруеми функции върху множеството U такива, че за всяко $x \in U$ е изпълнени $0 \le f(x) \le g(x)$. Тогава*

- *Ако несобственият интеграл от по-голямата функция $\int_U g(x)\, dx_1 \dots dx_n$ е сходящ, то и интеграла от по-малката $\int_U f(x)\, dx_1 \dots dx_n$ е също сходящ.*
- *Ако $\int_U f(x)\, dx_1 \dots dx_n$ е разходящ, то и $\int_U g(x)\, dx_1 \dots dx_n$ е също разходящ.*

Доказателство. Нека $\{U_k\}$ е изчерпваща система за U. Ако $\int_U g(x)\, dx_1 \dots dx_n$ е сходящ, то за всяко k имаме

$$\int\limits_{\overline{U}_k} f(x)\, dx_1 \dots dx_n \le \int\limits_{\overline{U}_k} g(x)\, dx_1 \dots dx_n \le \int\limits_{U} g(x)\, dx_1 \dots dx_n,$$

и от предходната забележка следва, че $\int_U f(x)\, dx_1 \dots dx_n$ е също сходящ.

Обратно, ако $\int_U f(x)\, dx_1 \dots dx_n$ е разходящ, и допуснем, че $\int_U g(x)\, dx_1 \dots dx_n$ е сходящ, ще стигнем до противоречие, което доказва и второто твърдение. ■

Примери. 1. Нека $D \subset \mathbb{R}^n$ е измеримо и затворено множество, $P_0 \in D^o$, и $U = D \setminus \{P_0\}$. Тогава интегралът

$$\int\limits_U \frac{dx_1 \dots dx_n}{||P - P_0||^\alpha}$$

е сходящ при $\alpha < n$ и разходящ при $\alpha \ge n$.

Доказателство. Можем да считаме, че D представлява затворено кълбо от вида $\overline{B}(P_0, r)$ с център в точката P_0. Наистина, в противен случай ние може да вземем достатъчно малко $r > 0$ такова, че $B(P_0, r) \subset D$, и да представим $D = \overline{B}(P_0, r) \cup (D \setminus B(P_0, r))$; интегралът върху второто събираемо е собствен и може да не се взема пред вид при изследване на сходимостта. Освен това може да смятаме, че P_0 съвпада с началото на координатите.

За да изследваме интеграла $\int_{\overline{B}(0,r)} \frac{dx_1 \ldots dx_n}{||P||^\alpha}$, ще разгледаме изчерпващата система* $U_\varepsilon = \overline{B}(0,r) \setminus \overline{B}(0,\varepsilon)$, и в интеграла върху $\overline{U_\varepsilon}$ ще направим обобщена полярна смяна на координатите в $\mathbb{R}^n$ с функционална детерминанта $\rho^{n-1} \sin^{n-2}\varphi_{n-2} \ldots \sin\varphi_1$ (виж края на §1.9). В тези координати $\overline{U_\varepsilon}$ се описва с условията $\rho \in [\varepsilon, r]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2} \in [0, \pi]$. Получаваме

$$\int\limits_{\overline{U_\varepsilon}} \frac{dx_1 \ldots dx_n}{||P||^\alpha} = \int_0^{2\pi} d\theta . \int_0^\pi \sin^{n-2}\varphi_{n-2}\, d\varphi_{n-2} . \ldots . \int_0^\pi \sin\varphi_1 \, d\varphi_1 . \int_\varepsilon^r \frac{d\rho}{\rho^{\alpha-n+1}} .$$

Тук само последният интеграл зависи от ε. Както знаем от част 1, той притежава граница при $\varepsilon \to 0$ само ако $\alpha - n + 1 < 1$, т.е. ако $\alpha < n$. ■

Следствие. *Интегралът*

$$\Phi_V(\xi, \eta, \zeta) = k \int\limits_V \frac{\rho(x,y,z)\; dxdydz}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}},$$

определящ гравитационния потенциал на материалното тяло V в точката $Q = (\xi, \eta, \zeta)$, е сходящ и при $Q \in V$.

Доказателство. Интегралът може да бъде написан във вида

$$\Phi_V(Q) = \int\limits_V \frac{\rho(P)\; dxdydz}{||P - Q||} \le \int\limits_V \frac{C\; dxdydz}{||P-Q||},$$

където с P сме означили точката с координати (x, y, z), а C е една горна граница за непрекъснатата функция $\rho(P)$ върху V. Остава да отбележим, че $1 < 3$. ■

2. Нека D означава външността на отворено кълбо с център точката P_0: $D = \mathbb{R}^n \setminus B(P_0, r)$, $r > 0$. Тогава интегралът

$$\int\limits_D \frac{dx_1 \ldots dx_n}{||P - P_0||^\alpha}$$

---

*В дефиницията за изчерпваща система се иска тя да бъде изброима; това може да се направи, ако се избере произволна редица $\varepsilon_k \searrow 0$ и се вземе редицата от множества U_{ε_k}.

е сходящ при $\alpha > n$ и разходящ при $\alpha \leq n$.

Доказателство. Отново можем да вземем точката P_0 в началото на координатите. Да изберем изчерпващата за D система от множества-та
$\overline{U}_N = \overline{B}(0, N) \setminus B(0, r)$, $N = 1, 2, \ldots$. Извършвайки отново обобщена полярна смяна, получаваме

$$\int\limits_{\overline{U_N}} \frac{dx_1 \ldots dx_n}{||P||^\alpha} = \int_0^{2\pi} d\theta . \int_0^\pi \sin^{n-2}\varphi_{n-2}\, d\varphi_{n-2} . \ldots . \int_0^\pi \sin\varphi_1\, d\varphi_1 . \int_r^N \frac{d\rho}{\rho^{\alpha-n+1}}.$$

В този случай последният интеграл притежава граница при $N \to +\infty$ само когато $\alpha - n + 1 > 1$, т.е когато $\alpha > n$. ■

Следствие. *Нека D е неограничено затворено множество, не съдържащо точката P_0. Тогава интегралът*

$$\int\limits_D \frac{dx_1 \ldots dx_n}{||P - P_0||^\alpha}$$

е сходящ при $\alpha > n$.

Доказателство. Нека $r > 0$ е такова, че кълбото $B(P_0, r)$ не се пресича с D. Да означим с $\widetilde{f}(P)$ продължението на функцията $\frac{1}{||P-P_0||^\alpha}$ от D върху цялото $\mathbb{R}^n \setminus B(P_0, r)$, което взема нулеви стойности извън D. Тогава $0 \leq \widetilde{f}(P) \leq \frac{1}{||P-P_0||^\alpha}$ върху $\mathbb{R}^n \setminus B(P_0, r)$, и

$$\int\limits_D \frac{dx_1 \ldots dx_n}{||P - P_0||^\alpha} = \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B(P_0, r)} \widetilde{f}(P)\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Твърдението следва от принципа за сравняване. ■

Пресмятане на интеграла на Поасон. Като приложение на теорема 1 ще докажем равенството

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

Интегралът отляво се нарича интеграл на Поасон и играе важна роля в теорията на вероятностите, както и в други дялове на математиката. Разпределението на вероятностите с плътност $\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ се нарича

Гаусово, или нормално, разпределение, и е едно от най-често срещаните в приложенията.

Да означим стойността на интеграла на Поасон с I (неговата сходимост е очевидна). Ще пресметнем по два начина несобствения двоен интеграл

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\, dxdy,$$

като използваме изчерпващи системи, съставени от кръгове или от квадрати. Нека B_R означава кръг с център в началото и радиус R. Очевидно при $R = 1, 2, \dots$ получаваме изчерпваща система за $\mathbb{R}^2$. Използвайки полярна смяна на координатите, получаваме

$$\iint\limits_{B_R} e^{-x^2-y^2}\, dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta . \int_0^R e^{-\rho^2} \rho\, d\rho = 2\pi . -\frac{1}{2} e^{-\rho^2}|_0^R = \pi \left(1 - e^{-R^2}\right),$$

откъдето

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\, dxdy = \lim_{R\to+\infty} \iint\limits_{B_R} e^{-x^2-y^2}\, dxdy = \pi.$$

Друга изчерпваща система за $\mathbb{R}^2$ се получава от квадратите $K_N = [-N, N] \times [-N, N]$. Имаме

$$\iint\limits_{K_N} e^{-x^2-y^2}\, dxdy = \int_{-N}^{N} \int_{-N}^{N} e^{-x^2-y^2}\, dxdy = \int_{-N}^{N} e^{-x^2}\, dx \ . \ \int_{-N}^{N} e^{-y^2}\, dy$$

и следователно

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\, dxdy = \lim_{N\to+\infty} \iint\limits_{K_N} e^{-x^2-y^2}\, dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx \ . \ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\, dy = I^2.$$

Получихме, че $I^2 = \pi$, т.е. $I = \sqrt{\pi}$. ∎

Несобствени интеграли от функции, които си променят знака. Следната теорема е доказвана за едномерни несобствени интеграли, както и за числови редове:

Теорема 3. *Ако несобственият интеграл върху U от функцията $|f(x)|$ е сходящ, то и интегралът от самата функция $f(x)$ е също сходящ.*

Доказателство. Ще въведем означенията:

$$f_+(x) = \max(f(x), 0)\ ,\ f_-(x) = \min(f(x), 0).$$

С други думи, $f_+(x)$ съвпада с $f(x)$ в точките, в които тя е положителна, и е равна на нула в останалите, а $f_-(x)$ съвпада с $f(x)$ в точките, в които тя е отрицателна, а в останалите е нула. Очевидни са равенствата $f(x) = f_+(x) + f_-(x)$,
$|f(x)| = f_+(x) - f_-(x)$. От второто от тях следват неравенствата

$$0 \leq f_+(x) \leq |f(x)|\ ,\ 0 \leq (-f_-(x)) \leq |f(x)|\,.$$

Ако допуснем, че несобственият интеграл $\int_U |f(x)|\ dx_1 \ldots dx_n$ е сходящ, то от принципа за сравняване следва, че $\int_U f_+(x)\ dx_1 \ldots dx_n$ и $\int_U (-f_-(x))\ dx_1 \ldots dx_n$ са също сходящи, и следователно е сходяща и тяхната разлика $\int_U f(x)\ dx_1 \ldots dx_n$. ■

За разлика от едномерния случай обаче, тук е валидно обратното твърдение, т.е. тук не съществуват т.н. условно сходящи интеграли:

Теорема 4. *Ако $\int_U f(x)\ dx_1 \ldots dx_n$ е сходящ, то и $\int_U |f(x)|\ dx_1 \ldots dx_n$ е също сходящ.*

Доказателство. За улеснение ще разглеждаме случая, когато $f(x)$ е непрекъсната. За краткост интеграла от функцията f върху U ще означаваме с $I_U(f)$, и аналогично - интегралите от $|f|$, f_+, f_-. Да допуснем, че твърдението на теоремата не е изпълнено, т.е. че $I_U(f)$ е сходящ, а $I_U(|f|)$ - разходящ. Ще докажем, че при тези предположения и двата интеграла $I_U(f_+)$, $I_U(-f_-)$ са разходящи. Наистина, ако и двата интеграла са сходящи, то и тяхната сума $I_U(|f|)$ ще бъде сходящ интеграл. Ако например $I_U(f_+)$ е разходящ, а $I_U(-f_-)$ - сходящ, то за всяка изчерпваща система U_k ще имаме $I_{U_k}(f) = I_{U_k}(f_+) + I_{U_k}(f_-) \to +\infty$ в противоречие с предположенията.

Ще покажем, че, (за разлика от едномерния случай), ако $I_U(f_+)$ и $I_U(f_-)$ са разходящи, то $I_U(f)$ не може да бъде сходящ. Нека U_k е произволна изчерпваща система за U. От разходимостта на интеграла $I_U(f_+)$ следва, че за достатъчно голям номер $l = l(k)$ ще имаме

$$I_{U_l}(f_+) > I_{U_k}(-f_-) + k.$$

Да означим с U_l^+ отвореното множество от всички точки на U_l, в които $f(x) > 0$, и нека $V_k = U_k \cup U_l^+$. Очевидно множествата V_k също образуват изчерпваща система за U. Тъй като $f_-(x)$ е равна на нула върху множеството $V_k \setminus U_k$, е в сила оценката

$$I_{V_k}(f) = I_{V_k}(f_+) + I_{U_k}(f_-) > I_{U_k}(-f_-) + k + I_{U_k}(f_-) = k.$$

С други думи $I_{V_k}(f) \to +\infty$, в противоречие с допускането. ■

Забележка. Естествено възниква въпросът защо в едномерния случай теорема 4 не е вярна и съществуват условно сходящи интеграли (като например $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$). Разликата се състои в това, че в едномерната дефиниция се изисква изчерпващата система да се състои от *интервали*, т.е. от линейно свързани множества, а в многомерния случай такова ограничение няма. Поради това в едномерния случай конструкцията от теорема 4 не е възможна.

Може да се попита, дали в многомерния случай не можем да променим дефиницията за сходимост на интеграла, като поискаме изчерпващата система да се състои от линейно свързани множества. Оказва се, че при такава модификация дефиницията няма да се промени съществено. Наистина, в размерности 2 и нагоре ние можем да съединим отделните компоненти на свързаност на дадено множество U_k с "коридори"с произволно малка мярка (или, по-точно, с произволно малък интеграл от функцията върху тях). Добавянето на такива коридори ще направи всяко U_k да бъде линейно свързано, но няма да промени границата на редицата от интеграли върху множествата U_k. В едномерния случай това не е възможно.

Теорема на Фубини за несобствени интеграли. В теорема 1 от §5 доказахме, че при определени условия многомерният интеграл може да се пресмята като повторен. Оказва се, че подобна теорема е в сила и за несобствени интеграли. Нека са дадени множествата $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ с непразна вътрешност, и нека $f(x, y) = f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$

е локално интегруема функция върху тяхното произведение $U \times V \subset \mathbb{R}^{n+m}$.

Теорема 5. (Теорема на Фубини за несобствени интеграли). *Да предположим, че $f(x,y)$ е абсолютно интегруема, т.е., че несобственият интеграл*

$$\int\limits_{U\times V} |f(x,y)|\ dx_1\dots dx_n dy_1\dots dy_m$$

е сходящ. Тогава е в сила равенството

$$\int\limits_{U\times V} f(x,y)\ dx_1\dots dx_n dy_1\dots dy_m = \int\limits_{U}\left(\int\limits_{V} f(x,y)\ dy_1\dots dy_m\right) dx_1\dots dx_n =$$

$$= \int\limits_{V}\left(\int\limits_{U} f(x,y)\ dx_1\dots dx_n\right) dy_1\dots dy_m\ .$$

Доказателство. Достатъчно е да докажем първото равенство. Може да се докаже, че интегралите $F(x) = \int_V f(x,y)\ dy_1\dots dy_m$ съществуват при почти всяко $x \in U$, и че получената функция $F(x)$ е локално интегруема; ще смятаме това за дадено. (Сходимостта на интеграла отляво следва от теорема 3.)

Нека $\{U_k\}$ е изчерпваща система за множеството U, а $\{V_k\}$ - за множеството V. Тогава $\{U_k \times V_k\}$ е изчерпваща система за $U \times V$. Според условието на теоремата за всяко $\varepsilon > 0$ можем да намерим номер ν такъв, че за всяко $k > \nu$ да имаме

$$\int\limits_{\overline{U_k\times V_k}} |f(x,y)|\ dx_1\dots dx_n dy_1\dots dy_m > \int\limits_{U\times V} |f(x,y)|\ dx_1\dots dx_n dy_1\dots dy_m - \varepsilon.$$

Следователно, за несобствения интеграл от $|f(x,y)|$ върху разликата $(U\times V)\setminus(U_k\times V_k)$ на множествата $U \times V$ и $\overline{U_k \times V_k}$ ще бъде изпълнено

$$\int\limits_{(U\times V)\setminus\left(\overline{U_k\times V_k}\right)} |f(x,y)|\ dx_1\dots dx_n dy_1\dots dy_m < \varepsilon.$$

Да фиксираме $\varepsilon > 0$, ν и $k > \nu$, и нека $I(x)$ означава интеграла от $f(x,y)$ по yкакто по горе. Може да се докаже (тук го вземаме наготово), че

$$\int\limits_{\overline{U}_k} I(x)\,dx_1\dots dx_n = \lim_{l\to\infty} \int\limits_{\overline{U_k\times V_l}} f(x,y)\,dx_1\dots dx_n dy_1\dots dy_m =$$

$$= \int\limits_{\left(\overline{U}_k\times V\right)} f(x,y)\,dx_1\dots dx_n dy_1\dots dy_m.$$

Следователно

$$\left|\int\limits_{\overline{U}_k} I(x)\,dx_1\dots dx_n - \int\limits_{\overline{U_k\times V}_k} f(x,y)\,dx_1\dots dx_n dy_1\dots dy_m\right| =$$

$$= \left|\int\limits_{\left(\overline{U}_k\times V\right)\setminus\left(\overline{U_k\times V_k}\right)} f(x,y)\,dx_1\dots dx_n dy_1\dots dy_m\right| \le$$

$$\le \int\limits_{\left(\overline{U}_k\times V\right)\setminus\left(\overline{U}_k\times V_k\right)} |f(x,y)|\;dx_1\dots dx_n dy_1\dots dy_m < \varepsilon,$$

тъй като $(U_k\times V)\setminus(U_k\times V_k)\subset(U\times V)\setminus(U_k\times V_k)$.

От друга страна,

$$\left|\int\limits_{U\times V} f(x,y)\,dx_1\dots dx_n dy_1\dots dy_m - \int\limits_{U_k\times V_k} f(x,y)\,dx_1\dots dx_n dy_1\dots dy_m\right| \le$$

$$\le \int\limits_{(U\times V)\setminus(U_k\times V_k)} |f(x,y)|\;dx_1\dots dx_n dy_1\dots dy_m < \varepsilon.$$

Съпоставяйки горните неравенства, виждаме, че за всяко $\varepsilon > 0$ при достатъчно големи k е изпълнено

$$\left|\int\limits_{U_k} I(x)\,dx_1\dots dx_n - \int\limits_{U\times V} f(x,y)\,dx_1\dots dx_n dy_1\dots dy_m\right| < 2\varepsilon,$$

което означава, че

$$\int\limits_U I(x)\,dx_1\dots dx_n = \lim_{k\to\infty}\int\limits_{U_k} I(x)\,dx_1\dots dx_n = \int\limits_{U\times V} f(x,y)\,dx_1\dots dx_n dy_1\dots dy_m . \blacksquare$$

Забележка. Много често горната теорема се използва, за да се обоснове размяната на реда на интегриране по x и y; според теоремата едно достатъчно условие за равенството на повторните интеграли е сходимостта на двойния интеграл от модула на подинтегралната функция. Без това условие размяната на реда на интегриране може да доведе до погрешен резултат; един такъв пример е даден в задача 3.

Упражнения.

1. Докажете, че ако $f(x)\geq 0$, то

$$\int\limits_U f(x)\,dx_1\dots dx_n = \sup\int\limits_K f(x)\,dx_1\dots dx_n,$$

където K се мени измежду всички компактни измерими подмножества на U.

2. Нека B_R означава кълбо в $\mathbb{R}^3$ с център в началото и радиус R, и P е точка от B_R. Докажете, че гравитационният потенциал на B_R в точката P се дава с формулата

$$\Phi_{B_R}(P) = \frac{4}{3}\pi\,||P||^2,$$

т.е. той е същият, както на кълбо с радиус $||P||$.

3. Нека с U означим квадрата $I\times I$, от който са извадени двете отсечки, в които той пресича координатните оси, и нека функцията $f(x,y)$ е определена на U с формулата

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

а/ Докажете, че

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right)\,dx = \frac{\pi}{4}\;,\;\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\,dx\right)\,dy = -\frac{\pi}{4}.$$

б/ Докажете директно, че несобственият двоен интеграл от $f(x,y)$ върху U е разходящ, и следователно теоремата на Фубини е неприложима.

в/ За изчерпващата система $U_n = [1/n, 1] \times [1/n, 1]$ покажете, че границата на интегралите от $f(x,y)$ върху U_n съществува. Проследете в този случай доказателството на теорема 4 и, в частност, посочете как трябва да се избере V_n.

4. Докажете, че за неотрицателни функции пример като горния е невъзможен, т.е. за такива функции от съществуването на един от повторните интеграли следва съществуването на двойния.

5. Намерете за кои стойности на α и β е сходящ интегралът

$$\int\limits_U \frac{dxdy}{|x|^\alpha + |y|^\beta},$$

където U е прободена ограничена околност (например кръгова) на началото на координатите.

6. Нека $f(x)$ е непрекъсната функция, дефинирана върху множеството $U \subset \mathbb{R}^n$, за която несобствените интеграли върху U от функциите $f_+(x)$, $f_-(x)$ са разходящи. Използвайки конструкцията от теорема 4, докажете, че ако λ е произволно реално число или някой от символите $+\infty$, $-\infty$, то съществува изчерпваща система U_k за Uтакава, че

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{U_k} f(x)\, dx_1 \dots dx_n = \lambda.$$

2.9 Мярка и интеграл на Лебег.

В настоящия параграф ще изложим накратко конструкцията и основните свойства на т.н. лебегов интеграл, наречен на името на френския математик А. Лебег. Въпреки, че тази дефиниция е по-сложна от класическата дефиниция, изложена по-горе, тя позволява редица важни за приложенията резултати да бъдат изложени в най-обща и завършена форма, при което читателят може да добие и нов поглед върху резултатите на предните параграфи.

Съществуват два основни начина за построяване на теорията на лебеговия интеграл. Единият от тях се основава на разглеждането на обичайния риманов интеграл като линеен функционал, дефиниран върху линейното пространство от всички непрекъснати функции с компактен носител, и продължението му върху най-широкото възможно пространство от функции, върху които той запазва свойствата си (т.н. схема на Даниел). Този начин на построяване на интеграла е елегантен и сравнително бърз, но изисква високо ниво на абстрактно мислене. В настоящия параграф ние сме избрали втория, по-стандартен начин: конструиране на интеграла чрез т.н. лебегова мярка, със следните основни етапи:

1/ Продължение на мярката на Пеано-Жордан върху по-широк клас от множества, и

2/ Конструкция на интеграла, съответстващ на така построената мярка, по начин, донякъде аналогичен на този, по който многомерния Риманов интеграл е построен на основата на мярката на Пеано-Жордан (виж §2).

Изложението в настоящия параграф е близко до даденото в глава 11 на известния учебник "Основи на математическия анализ"от Уолтер Рудин.

2.9.1 Мярка на Лебег.

Дефиниция. *Нека $\mathcal{A}$ е фамилия от подмножества на дадено пространство (например $\mathbb{R}^m$). Казваме, че $\mathcal{A}$ е алгебра от множества, ако за всеки две множества $A, B \in \mathcal{A}$ тяхното обединение, сечение и разлика (означавани с $A \cup B$, $A \cap B$, и $A \setminus B$ съответно) също принад-*

лежат на $\mathcal{A}$

Ще напомним, че разликата $A \setminus B$ на множествата A и B се състои от онези точки от множеството A, които не принадлежат на множеството B. В горната дефиниция изискването за сечение е излишно; наистина, ако поискаме алгебрата $\mathcal{A}$ да е затворена относно операциите обединение и разлика, то равенството $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$ показва, че тя ще бъде затворена и относно операцията сечение.

Дефиниция. *Казваме, че* $\mathcal{A}$ *е* <u>*σ-алгебра*</u> *от множества, ако за всяка изброима фамилия* $\{A_n\}_{n=1,2,\ldots}$ *от елементи на* $\mathcal{A}$ *обединението* $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ *също принадлежи на* $\mathcal{A}$*.*

Както по-горе, лесно се вижда, че и сечението

$$\cap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \setminus \left(\cup_{n=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_n)\right)$$

също ще принадлежи на $\mathcal{A}$.

Пример. Фамилията $\mathcal{M}_0$ от всички елементарни множества в $\mathbb{R}^n$ (виж §1) е алгебра, но не е σ-алгебра. Същото е вярно и за фамилията на всички измерими по Пеано-Жордан множества; наистина, множеството $\{r_n\}$ от всички рационални числа в интервала $[0,1]$ е изброимо обединение от едноточкови (и следователно измерими) множества, но самото то не е измеримо.

Лема 1. *Казваме, че* μ *е* <u>*мярка*</u> *върху алгебрата от множества* $\mathcal{A}$*, ако тя съпоставя на всеки елемент* $A \in \mathcal{A}$ *стойността* $\mu(A)$*, която е неотрицателно число или* $+\infty$*, като за всеки два елемента* $A, B \in \mathcal{A}$*, удовлетворяващи* $A \cap B = \emptyset$*, е изпълнено равенството* $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$*.*

Лесно се вижда, че в общия случай (без да се иска множествата A и B да са непресичащи се) получаваме равенството

$$\mu\left(A \cup B\right) = \mu(A) + \mu(B) - \mu\left(A \cap B\right).$$

От горното свойство следва, че мярката е монотонна, т.е. за всеки две множества A, B с $A \subset B$ имаме $\mu(A) \leq \mu(B)$; това следва от представянето $B = A \cup (B \setminus A)$. Освен това, условието за адитивност лесно се обобщава за произволен краен брой непресичащи се две по две множества: ако $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ са такива, че $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$, то

$\mu\left(\cup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu\left(A_k\right)$. Оказва се обаче, че това условие (наричано крайна адитивност) не е достатъчно за нашите цели, и трябва да бъде усилено.

Дефиниция. *Казваме, че мярката μ е <u>σ-адитивна</u>, ако за всяка изброима фамилия $\{A_n\}_{n=1,2,\ldots}$ от елементи на $\mathcal{A}$, удовлетворяваща $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$, е изпълнено равенството*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(A_n\right).$$

Тази дефиниция може да се изкаже и в друга форма.

Лема 2. *Нека μ е σ-адитивна мярка върху $\mathcal{A}$, и нека $A_1 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$ е монотонно нарастваща редица от елементи на $\mathcal{A}$: тогава*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(A_n\right).$$

Доказателство. Да положим $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ при $n > 1$, и нека $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Тогава

$$A_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_k \quad \text{и} \quad A = \cup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Следователно

$$\mu\left(A_n\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu\left(B_k\right) \quad \text{и} \quad \mu\left(A\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(B_n\right),$$

което доказва твърдението. ■

Лесно се вижда, че и обратното е вярно: ако горното твърдение е изпълнено, то мярката μ е σ-адитивна.

Първата основна цел на настоящия параграф може да се формулира така: да се разшири алгебрата на всички елементарни множества в $\mathbb{R}^m$ до σ-алгебра, и да се продължи стандартната мярка от алгебрата на елементарните множества до σ-адитивна мярка върху тази алгебра. Донякъде, конструкцията наподобява тази, която използвахме в §1 при построяване на мярката на Пеано-Жордан, с една основна разлика: използват се не крайни, а *изброими* покрития с правоъгълници.

Засега ще се ограничим със стандартната мярка в $\mathbb{R}^m$, която беше използвана в §1: мярка на един правоъгълен паралелепипед е произведението на дължините на страните му. (Тази мярка ще наричаме *обичайна*, или *стандартна*)*. Ако E е елементарно множество, т.е. може да се представи като обединение на краен брой непресичащи се правоъгълни паралелепипеди, то неговата мярка $\mu(E)$ е равна на сумата на мерките на тези паралелепипеди. Лесно се вижда, че мярката μ е σ-адитивна върху алгебрата $\mathcal{M}_0$ на елементарните множества.

Аналогично на §1, ще въведем понятието <u>външна мярка</u> на множество.

Дефиниция. *За всяко множество $A \in \mathbb{R}^m$, ще дефинираме външната му мярка $\mu^*(A)$ с формулата*

$$\mu^*(A) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(E_n\right),$$

където инфинимумът отдясно се взема по всички изброими фамилии от елементарни множества $\{E_n\}$ такива, че $A \subset \cup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Множествата A, за които $\mu^*(A) = 0$, ще наричаме <u>пренебрежими по Лебег</u>, или, накратко, пренебрежими.

Ще казваме, че дадено свойство (равенство, неравенство,...) е изпълнено <u>почти навсякъде</u>, ако множеството от точките $x \in \mathbb{R}^m$, в които то не се изпълнява, е пренебрежимо.

Забележка. В горната дефиниция ние можем да разглеждаме само отворени елементарни множества (т.е. крайни обединения на отворени правоъгълници), и очевидно дефиницията на $\mu^*(A)$ няма да се промени. Същото е вярно и ако с ограничим до затворени елементарни множества.

Лема 3. *Ако $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, то*

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*\left(A_n\right).$$

*Както ще видим по-нататък, по-нататъшните разсъждения са валидни за широк клас мерки, но стандартната мярка е най-често срещана.

В частност, ако всяко от множествата A_n е пренебрежимо, то тяхното обединение $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ е също пренебрежимо.

Доказателство. Да изберем произволно $\varepsilon > 0$, и за всяко n да вземем фамилия $\{E_{n,k}\}_{k=1,2,\dots}$ от елементарни множества такава, че

$$A_n \subset \cup_{k=1}^{\infty} E_{n,k} \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(E_{n,k}\right) \leq \mu^*\left(A_n\right) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Тогава A се съдържа в обединението на всички множества $E_{n,k}$ за $n, k = 1, 2, \dots$, и

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(E_{n,k}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu^*\left(A_n\right) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*\left(A_n\right) + \varepsilon.$$

Като накараме ε да клони към нула, получаваме исканото твърдение.■

Аналогията с мярката на Пеано-Жордан свършва до тук: в този случай понятието вътрешна мярка не може да бъде въведено по начина, използван в §1. Една от причините например е, че това понятие е смислено само за множества с непразна вътрешност, което е прекалено ограничително изискване.

За целите на по-нататъшната конструкция ние ще въведем понятието симетрична разлика на две множества:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Следните свойства на симетричната разлика се доказват с непосредствена проверка.

Лема 4. *Изпълнени са следните съотношения::*

1/ $A \triangle A = \emptyset$,

2/ $A \triangle B = B \triangle A$,

3/ $A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (C \triangle B)$,

4/ множествата $(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2)$, $(A_1 \cap A_2) \triangle (B_1 \cap B_2)$ *и* $(A_1 \setminus A_2) \triangle (B_1 \setminus B_2)$ *се съдържат в множеството* $(A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$.

Дефиниция. *Ще дефинираме разстояние между множества. Ако* $A, B \subset \mathbb{R}^m$, *полагаме*

$$\rho(A, B) = \mu^*(A \triangle B).$$

Ще казваме, че $A_n \to A$, *ако* $\rho(A_n, A) \to 0$.

Лема 5. *Така въведеното разстояние притежава следните свойства:*

1/ $\rho(A, A) = 0$,

2/ $\rho(A, B) = \rho(B, A)$,

3/ $\rho(A, B) \leq \rho(A, C) + \rho(C, B)$,

4/ числата $\rho((A_1 \cup A_2), (B_1 \cup B_2))$, $\rho((A_1 \cap A_2), (B_1 \cap B_2))$ *и* $\rho((A_1 \setminus A_2), (B_1 \setminus B_2))$ *не надминават* $\rho(A_1, B_1) + \rho(A_2, B_2)$.

5/ $|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \rho(A, B)$.

Доказателство. Всяко от свойствата 1/ - 4/ следва от съответното свойство на симетричната разлика. За да докажем 5/, да приложим неравенството на триъгълника 3/ към множествата $A, B, \emptyset$. Тъй като $\rho(A, \emptyset) = \mu*(A)$, то неравенството добива вида $\mu*(A) \leq \rho(A, B) + \mu*(B)$, т.е. $\mu*(A) - \mu*(B) \leq \rho(A, B)$. Повтаряйки тези разсъждения с размяна на местата на A и B, получаваме неравенството 5/. ■

Забележка. Може би читателят е забелязал, че свойствата 1/ - 3/ в горното твърдение съответстват на дефиниционните свойства на понятието разстояние, дадени в §1 на част I. Едно от свойствата на разстоянието обаче тук не е изпълнено: именно, разстоянието между две множества може да е равно на нула без те да съвпадат. Например, ако A е пренебрежимо по Лебег, а B е празното множество, то $\rho(A, B) = 0$. Това води до една естествена релация на еквивалентност: казваме, че A и B са <u>еквивалентни множества</u>, ако $\rho(A, B) = 0$, т.е. ако множествата $A \setminus B$ и $B \setminus A$ са пренебрежими по Лебег. Тогава по-горе дефинираното разстояние ρ може да се разглежда като разстояние не между множества, а между съответните класове на еквивалентност (докажете!). Тази интерпретация не е съществена в по-нататъшните доказателства, но изяснява някои идейни моменти в конструкцията на мярката и интеграла на Лебег.

Минаваме към основните дефиниции.

Дефиниция. *Ще казваме, че множеството А е <u>крайно измеримо</u> (по Лебег), ако съществува редица* A_n *от елементарни множества такава, че* $A_n \to A$ *(т.е.* $\rho(A_n, A) \to 0$*).*

Ще казваме, че множеството А е <u>измеримо</u>, ако сечението му със всеки (ограничен) правоъгълен паралелепипед в $\mathbb{R}^n$ *е крайно изме-*

римо.

Да означим с $\mathcal{M}$ класа на всички измерими множества, и с $\mathcal{M}_F$ - класа на всички крайно измерими множества.

Теорема 6. *$\mathcal{M}$ е σ-алгебра от множества. Горната мярка μ^* е σ-адитивна върху $\mathcal{M}$.*

Доказателство. От лема 5 се вижда, че ако $A_n \to A$ и $B_n \to B$, то $A_n \cap B_n \to A \cap B$, $A_n \cup B_n \to A \cup B$, $A_n \setminus B_n \to A \setminus B$. Следователно обединение, сечение и разлика на крайно измерими множества е също крайно измеримо, т.е. $\mathcal{M}_F$ е алгебра, и очевидно това е вярно и за $\mathcal{M}$. Освен това, неравенството 5/ от лема 5 показва, че от $A_n \to A$ следва, че $\mu^*(A_n) \to \mu^*(A)$. Оттук следва, че μ^* е адитивна върху $\mathcal{M}_F$; наистина, чрез граничен преход в равенството $\mu(A_n \cup B_n) = \mu(A_n) + \mu(B_n) - \mu(A_n \cap B_n)$ получаваме, че

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

за всеки $A, B \in \mathcal{M}_F$.

Ще докажем, че $\mathcal{M}$ е σ-алгебра. Всяко множество от $\mathcal{M}$ може да се представи като обединение на непресичащи се множества от $\mathcal{M}_F$. Наистина, ако означим с K_n кубът в $\mathbb{R}^m$ с център в началото и дължина на страната $2n$, то очевидно имаме

$$A = \bigcup_n \left((A \cap K_n) \setminus (A \cap K_{n-1})\right).$$

Така, нека $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, където A_n са непресичащи се крайно измерими множества. По лема 3, имаме

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

От друга страна, от факта, че $B_n := \cup_{k=1}^{n} A_k \subset A$ за всяко n, и от доказаната по-горе адитивност, получаваме, че

$$\sum_{k=1}^{n} \mu^*(A_k) = \mu^*(B_n) \leq \mu^*(A),$$

откъдето следва равенството

$$\mu^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n),$$

като се допуска и двете страни да са евентуално равни на $+\infty$.

Да допуснем, че $\mu^*(A)$ е крайно, тоест, редът отдясно е сходящ. Лесно се вижда, че

$$\rho(A, B_n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu^*(A_k) \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

т.е. $B_n \to A$, $B_n \in \mathcal{M}_F$. Ако E_n са такива елементарни множества, за които $\rho(E_n, B_n) < 1/n$, то лесно се вижда, че $E_n \to A$, т.е. и A принадлежи на $\mathcal{M}_F$.*

В случая $\mu^*(A) = +\infty$ горните разсъждения могат да се приложат за множествата от вида $A \cap K$, където K е ограничен правоъгълен паралелепипед в $\mathbb{R}^m$. Тогава $A \cap K \in \mathcal{M}_F$, т.е. $A \in \mathcal{M}$.

Остава да се докаже, че μ^* е σ-адитивна върху σ-алгебрата $\mathcal{M}$. Нека $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, A_n са непресичащи се множества от $\mathcal{M}$. Тогава лесно се вижда, че $\mu^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$. Наистина, ако $\mu^*(A_n) \neq +\infty$ за всяко n, то всички A_n са крайно измерими, и твърдението е вече доказано. Ако за някое n имаме $\mu^*(A_n) = +\infty$, то равенството е очевидно, с което приключва доказателството на теоремата. ■

Така конструираната σ-адитивна мярка върху σ-алгебрата $\mathcal{M}$ ще наричаме мярка на Лебег и че означаваме с μ (вместо с μ^*, както беше досега).

2.9.2 Структура на измеримите множества.

Трудно е да се даде конструктивно описание на измеримите по Лебег множества в $\mathbb{R}^n$ - тук няма критерий, аналогичен на критерия за измеримост по Пеано-Жордан от теорема 1, §1. Ще опишем част от алгебрата $\mathcal{M}$. Първо, лесно се вижда, че всички отворени множества в $\mathbb{R}^n$ принадлежат на $\mathcal{M}$ (виж задача 2). Следователно, всяка редица от операции върху отворени множества също остава в рамките на $\mathcal{M}$.

Дефиниция. *Едно множество в $\mathbb{R}^n$ се нарича борелево, ако то може да се получи чрез изброима редица от теоретико-множествени операции (обединение, сечение, допълнение, разлика), приложени към*

*Тук ние доказахме, че ако $A \in \mathcal{M}$ и $\mu^*(A) < \infty$, то $A \in \mathcal{M}_F$.

отворени множества. Всички Борелеви множества образуват σ-алгебра, която се съдържа в σ-алгебрата $\mathcal{M}$ на всички измерими по Лебег множества.

Така, борелеви са: всички отворени и затворени множества, сечението на отворено и затворено множество и т.н. Борелевите множества не изчерпват алгебрата $\mathcal{M}$ - виж зад. 5. Ще покажем обаче, че в известен смисъл всяко измеримо множество в $\mathbb{R}^n$ може да се апроксимира отвътре и отвън с борелеви множества.

Теорема 7. *Нека M е измеримо множество в $\mathbb{R}^n$. Тогава съществуват борелеви множества F и G такива, че*

$$F \subset M \subset G \ \text{ и } \ \mu(M \setminus F) = \mu(G \setminus M) = 0.$$

В частност, всяко измеримо множество е еквивалентно на някое борелево множество.

Доказателство. Да фиксираме $\varepsilon > 0$. Можем да намерим затворено множество F_ε и отворено множество G_ε такива, че

$$F_\varepsilon \subset M \subset G_\varepsilon, \ \text{ като } \ \mu(M \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon \ \text{ и } \ \mu(G_\varepsilon \setminus M) < \varepsilon.$$

Наистина, съществуването на G_ε следва от дефиницията на горната мярка μ^* и последвалата след нея забележка. Да приложим тази конструкция и за измеримото множество $\overline{M} = \mathbb{R}^n \setminus M$; ще получим отворено множество U_ε такова, че $U_\varepsilon \subset \overline{M}$ $\mu\left(U_\varepsilon \setminus \overline{M}\right) < \varepsilon$. Полагайки $F_\varepsilon = R^n \setminus U_\varepsilon$, получаваме необходимото.

Давайки на ε стойности $1, 1/2, \ldots, 1/k, \ldots$, и полагайки $F = \cup_{k=1}^{\infty} F_{1/k}$, $G = \cap_{k=1}^{\infty} G_{1/k}$, ние завършваме доказателството. ■

Дефиниция. *Ще казваме, че множеството G е от вида G_δ, ако то може да се представи като изброимо сечение на отворени множества*.*

Множествата от вида G_δ не са задължени да са отворени; например, всички едноточкови множества са от този вид. Очевидно обаче те са борелеви.

*Съществува и дуална дефиниция: множеството F е от вида F_σ, ако то може да се представи като изброимо обединение на затворени множества. В настоящия текст обаче тя не се използва.

Очевидно в доказателството на горната теорема множеството G е по построение от вида G_δ. От това следва следният факт, който се използва по-нататък:

Следствие 8. *Всяко измеримо множество M в $\mathbb{R}^n$ може да се представи във вида*

$$M = G \setminus A,$$

където G е от вида G_δ, а A е пренебрежимо множество.

2.9.3 Измерими функции.

В следващите четири раздела. посветени на дефиницията и свойствата на лебеговия интеграл, ще работим в следната ситуация: дадено е множество X, σ-алгебра $\mathcal{M}$ от негови подмножества, и σ-адитивна мярка μ върху $\mathcal{M}$. Накратко ще казваме, че X е пространство с мярка, а множествата от $\mathcal{M}$ ще наричаме измерими. В пространството X не се изисква дори съществуването на топология (в смисъл на §2). Разбира се, евклидовото пространство и построената върху него мярка на Лебег ще останат основен пример за нас, но тяхните специфични свойства никъде няма да бъдат използвани.*

Ще означаваме с $\{x \in X : f(x) > a\}$, или, накратко, $\{x : f(x) > a\}$, множеството от точките $x \in X$, за които е изпълнено неравенството $f(x) > a$. По подобен начин ще означаваме множествата от точки, в които се изпълнява друго неравенство от подобен вид.

Дефиниция. *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана върху пространството X. Ще казваме, че $f(x)$ е измерима функция, ако за всяко реално число а множеството $\{x : f(x) > a\}$ е измеримо.*

Забележка. В настоящия параграф ние разглеждаме функции, които могат да приемат и стойности $\pm\infty$. От горната дефиниция и от следващата лема се вижда, че множествата от точки, в които една измерима функция е равна на $+\infty$, или на $-\infty$, са измерими.

Лема 9. *Множествата от вида*

*В теорията на вероятностите, която е една от най-важните области на приложение на лебеговия интеграл, множеството X е абстрактното "пространство на елементарните събития", а мярката се определя от вероятността на дадена съвокупност от събития.

а/ $\{x : f(x) \le a\}$,
б/ $\{x : f(x) < a\}$,
в/ $\{x : f(x) \ge a\}$
са също измерими.

Доказателство. Това следва от равенствата
$\{x : f(x) \le a\} = X \setminus \{x : f(x) > a\}$,
$\{x : f(x) < a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : f(x) \le (a - 1/n)\}$,
$\{x : f(x) \ge a\} = X \setminus \{x : f(x) < a\}$. ■

Забележка. Лесно се вижда, че ако в дефиницията на измерима функция вместо множества от вида $\{x : f(x) > a\}$ използваме множествата, определени в а/, б/, или в/, ще получим еквивалентна дефиниция.

Теорема 10. *Нека $f(x)$, $g(x)$ са измерими функции върху X, и $F(u, v)$ е непрекъсната функция на две реални променливи. Тогава функцията $h(x) = F(f(x), g(x))$ е също измерима.*

Доказателство. Нека подмножеството $U_a \subset \mathbb{R}^2$ е определено с неравенството $U_a = \Big\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : F(u, v) > a\Big\}$. Тъй като F е непрекъсната функция, то U_a е отворено множество, и следователно може да се представи като обединение на изброимо много правоъгълници (виж задача 2):

$$U_a = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n, \quad \Delta_n = (a_n, b_n) \times (c_n, d_n)$$

и следователно

$$\{x : h(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : (f(x), g(x)) \in \Delta_n\} =$$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : a_n < f(x) < b_n\} \cap \{x : c_n < g(x) < d_n\},$$

за което лесно се вижда, че е измеримо множество. ■

Следствие 11. *Ако $f(x)$ и $g(x)$ са измерими функции, то $f(x) + g(x)$, $f(x).g(x)$ и $|f(x)|$ са също измерими. Ако при това $g(x) \ge c$ за някое $c > 0$, то и $f(x)/g(x)$ е измерима.*

Доказателство. За първото, второто и третото твърдение, вземаме $F(u, v)$ да бъде равна на $u + v$, $u.v$ и $|u|$ съответно. В последния случай, можем да вземем $F(u,v) = u/v$ при $|v| > c$ и $F(u,v) = u/c$ при $|v| \leq c$. ■

Освен спрямо аритметичните операции, множеството на измеримите функции е устойчиво и спрямо граничния преход:

Теорема 12. *Нека* $\{f_k(x)\}_{n=1,2,\dots}$ *е редица от измерими функции. Тогава функциите* $\sup_k f_k(x)$, $\inf_k f_k(x)$, $\limsup_k f_k x)$, $\liminf_k f_k(x)$ *са също измерими.*

Доказателство. Нека означим $g(x) = \sup_n f_k(x)$. Тогава

$$\{x : g(x) > a\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{f_k(x) > a\}$$

и следователно $g(x)$ е измерима. По същият начин се доказва твърдението за $\inf_k f_k(x)$ (направете го). По дефиницията за $\limsup_k f_k(x)$ имаме

$$\limsup_k f_k(x) = \inf_m g_m(x), \quad \text{където} \quad g_m(x) = \sup_{k \geq m} f_k(x),$$

откъдето се вижда, че $\limsup_k f_k(x)$ е също измерима, и аналогично доказателство е в сила и за $\liminf_k f_k(x)$. ■

Разбира се, от теоремата следва, че ако $f_k(x)$ е поточково сходяща редица от измерими функции, то нейната поточкова граница ще бъде също измерима функция.

Забележка. Току-що ние показахме, че обичайните в анализа операции върху функциите не могат да ни изведат извън множеството на измеримите функции. Въпреки това, някои факти могат да противоречат на нашата интуиция: така, ако $f(x)$ е измерима функция, а $g(x)$ - непрекъсната, то функцията $f(g(x))$ може и да не бъде измерима (виж зад. 6).

2.9.4 Дефиниция на лебеговия интеграл.

Ще покажем как от дадената σ-адитивна мярка μ може по естествен път да се премине към интеграл, дефиниран върху подходящ клас от функции.

Дефиниция. *Нека A е измеримо подмножество на X. Да означим с $\chi_A(x)$ неговата <u>характеристична</u> функция, т.е. $\chi_A(x) = 1$ за*

$x \in A$ и $\chi_A(x) = 0$ за $x \notin A$. Ще дефинираме лебеговия интеграл $I(\chi_A)$ с формулата

$$I(\chi_A) = \mu(A).$$

(Това може да бъде реално число или $+\infty$.)

Дефиниция. *Функцията $s(x)$ се нарича <u>стъпаловидна</u>, ако съществуват различни реални числа $c_1, \ldots, c_k$ и непресичащи се множества $A_1, \ldots, A_k$, така че**

$$s(x) = \sum_{p=1}^{k} c_p \chi_{A_p}(x).$$

Очевидно функцията $s(x)$ е измерима точно тогава, когато всички множества $A_1, \ldots, A_k$ са измерими. Нека $s(x)$ е измерима и неотрицателна. В такъв случай дефинираме

$$I(s) = \sum_{p=1}^{k} c_p \mu(A_p).$$

Ако A е измеримо подмножество на X, по подобен начин можем да дефинираме интеграл от $s(x)$ върху A:

$$I_A(s) = \sum_{p=1}^{k} c_p \mu(A \cap A_p).$$

Отново интегралът може да бъде реално число или $+\infty$. Ще отбележим, че изискването $s(x) \geq 0$ е направено, за да се избягват неопределени изрази от вида $\infty - \infty$.

Лесно се вижда, че интегралът е линеен функционал върху пространството на елементарните функции; наистина, ако $s(x) = \sum_{p=1}^{k} c_p \chi_{A_p}(x)$, $l(x) = \sum_{q=1}^{m} d_q \chi_{B_q}(x)$, то

$$s(x) + l(x) = \sum_{p=1}^{k} \sum_{q=1}^{m} (c_p + d_q) \chi_{A_p \cap B_q},$$

и равенството $I(s + l) = I(s) + I(l)$ се проверява непосредствено.

*Еквивалентна дефиниция: $s(x)$ приема само краен брой стойности.

Оказва се, че всяка функция може да се апроксимира със стъпаловидни функции:

Теорема 13. *Нека $f(x)$ е функция, дефинирана върху X. Тогава съществува редица $s_n(x)$ от стъпаловидни функции, така че за всяко $x \in X$ да имаме $s_n(x) \to f(x)$. Ако $f(x)$ е измерима, то и функциите $s_n(x)$ могат да бъдат избрани измерими. Ако $f(x) \geq 0$, то редицата $s_n(x)$ може да бъде избрана неотрицателна и монотонно растяща.*

Доказателство. Да разгледаме най-напред случая $f(x) \geq 0$. За всяко естествено n да разделим интервала $[0, n]$ на $n.2^n$ равни части от вида $\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right)$, $i = 1, \ldots, n.2^n$. За тези x, за които $f(x) \in \left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right)$, ще определим $s_n(x) = \frac{i-1}{2^n}$, а там, където $f(x) \geq n$, полагаме $s_n(x) = n$. Очевидно редицата $s_n(x)$ удовлетворява условията на теоремата. В общия случай, ще представим $f(x)$ като разлика на две неотрицателни функции, за всяка от тях ще приложим горната конструкция, и ще разгледаме разликата на получените две редици от стъпаловидни функции. ■

Горната теорема позволява да разширим дефиницията на интеграла на Лебег от стъпаловидните към значително по-широк клас от функции:

Дефиниция. *Нека $f(x)$ е неотрицателна измерима функция. Ще определим интеграла от $f(x)$ с формулата $I(f) = \sup_s I(s)$, където $s(x)$ пробягва множеството на всички измерими стъпаловидни функции такива, че $0 \leq s(x) \leq f(x)$.*

Аналогично, ако A е измеримо подмножество на X, ще дефинираме $I_A(f) = \sup_s I_A(s)$, където $s(x)$ пробягва същото множество от функции както по-горе.

Вместо $I(f)$ и $I_A(f)$ по-нататък ще пишем и $\int_X f(x)\, d\mu$, $\int_A f(x)\, d\mu$ съответно.

В общия случай ще разгледаме положителната част $f_+(x)$ и отрицателната $f_-(x)$ на $f(x)$. По дефиниция

$$f_+(x) = \max\left(f(x), 0\right), \quad f_-(x) = -\min\left(f(x), 0\right).$$

Лесно се вижда, че $f_+(x)$ и $f_-(x)$ са неотрицателни функции, и

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x).$$

Дефиниция. *Нека $f(x)$ е измерима функция, и нека поне едно от числата $I_A(f_+(x))$, $I_A(f_-(x))$ да е крайно. Тогава дефинираме*

$$\int_A f(x)\,d\mu = \int_A f_+(x)\,d\mu - \int_A f_-(x)\,d\mu.$$

Дефиниция. *Ако $\int_A f_+(x)\,d\mu$ и $\int_A f_-(x)\,d\mu$ са крайни, то $f(x)$ се нарича интегруема, или сумируема по мярката μ върху множеството A. Класът на всички сумируеми по μ функции се бележи с $L(\mu)$. В случая, когато μ съвпада с лебеговата мярка, се пише просто L. Ще отбележим, че ако $f(x)$ е сумируема върху A, а B е измеримо подмножество на A, то $f(x)$ е сумируема и върху B.*

Ще отбележим, че интегралът от една измерима функция (ако е определен) може да е равен на някой от символите $+\infty$ или $-\infty$. Интегралът от една интегруема функция по дефиниция е крайно число.

Забележка. Донякъде горната конструкция наподобява начина, по който обичайният риманов интеграл се дефинира - чрез риманови суми или чрез суми на Дарбу. Разликата е, че при римановия интеграк разделяме областта под графиката на функцията на "вертикални ивици", а тук - на "хоризонтални ивици".

Конвенция. Казваме, че измеримата функция $f(x)$ е дефинирана почти навсякъде върху X, ако тя е дефинирана върху множество от вида $X \setminus A$, където A е пренебрежимо. Очевидно сума, произведение и т.н. на функции, дефинирани почти навсякъде, е също дефинирано почти навсякъде.

Ако дефинираната почти навсякъде функция $f(x)$ е интегруема върху множеството $X \setminus A$, полагаме

$$\int_X f(x)\,d\mu = \int_{X\setminus A} f(x)\,d\mu.$$

Тази дефиниция не зависи от избора на пренебрежимото множество A: наистина, ако B е друго такова пренебрежимо множество, по свойства 5 и 6 от следващия раздел получаваме

$$\int_{X\setminus B} f(x)\,d\mu = \int_{X\setminus A} f(x)\,d\mu + \int_{B\setminus A} f(x)\,d\mu - \int_{A\setminus B} f(x)\,d\mu = \int_{X\setminus A} f(x)\,d\mu.$$

По-нататък ние ще работим главно с функции, дефинирани почти навсякъде.

2.9.5 Свойства на лебеговия интеграл.

В този раздел ще покажем, че основните свойства, познати ни от римановия интеграл, се изпълняват и за интеграла на Лебег. Почти всички те следват директно от дефиницията. Изключение прави линейността на интеграла (свойство 1). В случая на лебегов интеграл неговото доказателство е трудно, и ще бъде отложено до следващия раздел. Тук ще докажем само свойство 4, като оставяме доказателствата на свойствата $1'$, 2 и 3 на читателя.

Свойство 1. Линейност. *Ако* $f(x)$ *и* $g(x)$ *са интегруеми, то* $I(f+g) = I(f) + I(g)$.

Свойство $1'$. Хомогенност. *Ако* $f(x)$ *е интегруема и* $c \in \mathbb{R}$, *то* $I(c.f) = c.I(f)$.

Свойство 2. Позитивност. *Ако* $f(x)$ *е интегруема и* $f(x) \geq 0$, *то* $I(f) \geq 0$.

Свойство 3. Монотонност. $f(x)$ *и* $g(x)$ *са интегруеми и* $f(x) \leq g(x)$, *то* $I(f) \leq I(g)$. *Ако е дадено, че* $g(x)$ *е интегруема,* $f(x)$ *е измерима, и* $0 \leq f(x) \leq g(x)$, *то* $f(x)$ *също е интегруема.*

Свойство 4. *Измеримата функция* $f(x)$ *е интегруема тогава и само тогава, когато нейния модул* $|f(x)|$ *е интегруем. Изпълнено е неравенството*

$$|I(f)| \leq I\left(|f|\right).$$

Доказателство на свойство 4. По дефиниция, ако $f(x)$ е интегруема, то нейните положителна и отрицателна части $f_+(x)$ и $f_-(x)$ са интегруеми, и $|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$ също е интегруема (според недоказаното все още свойство 1). Обратно, ако $|f(x)|$ е интегруема, то от неравенствата $0 \leq f_+(x), f_-(x) \leq |f(x)|$ следва, че $f_+(x)$ и $f_-(x)$ също са интегруеми, а следователно интегруема е и тяхната разлика $f(x)$. Неравенството в условието се доказва, както и при римановия интеграл - чрез интегриране на очевидното неравенство $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$.■

Забележка. Горното свойство показва, че за разлика от несобствения риманов интеграл, в лебеговия интеграл не е възможна условна (неабсолютна) сходимост. Както знаем, съществуват важни примери на неабсолютно сходящи несобствени интеграли - например интеграла на Поасон $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$. Това е единствения въпрос, в който римановия интеграл дава повече възможности от лебеговия. За да се обединят положителните страни на двата интеграла, са създадени редица по-нататъшни обобщения на понятието интеграл, които обаче имат доста ограничено приложение.

Свойство 5. *Ако $f(x) = 0$ почти навсякъде (т.е. множеството от точките, в които $f(x) \neq 0$, е пренебрежимо), то $f(x)$ е интегруема, и $I(f) = 0$. Обратно, ако $f(x)$ е измерима и неотрицателна, и $I(f) = 0$, то $f(x) = 0$ почти навсякъде.*

Доказателство. От доказателство се нуждае само обратното твърдение. Нека означим $A_n = \{x : f(x) \geq 1/n\}$ и $A = \{x : f(x) > 0\}$. Тъй като

$$\int_X f(x)\, d\mu \geq \int_{A_n} f(x)\, d\mu \geq \frac{1}{n}\mu\left(A_n\right),$$

то $\mu\left(A_n\right) = 0$. След като всички множества A_n са пренебрежими, то същото е вярно и за множеството $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. ∎

Свойство 6. (σ-адитивност по множества). *Нека $f(x)$ е интегруема. Тогава функцията на множество*

$$\varphi(A) = \int_A f(x)\, d\mu$$

е σ-адитивна.

Доказателство. Трябва да докажем, че ако $\{A_n\}$ е изброима фамилия от непресичащи се измерими множества, и $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, то

$$\int_A f(x)\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x)\, d\mu.$$

В случая, когато $f(x)$ е характеристична функция на измеримо множество, равенството веднага следва от σ-адитивността на мярката μ (докажете). Тъй като всяка стъпаловидна функция е крайна линейна комбинация на характеристични, то горното равенство автоматично е в сила и за стъпаловидни функции.

Нека сега $f(x) \geq 0$ и $s(x)$ е стъпаловидна функция, такава че $0 \leq s(x) \leq f(x)$. От доказаното по-горе се вижда, че

$$\int_A s(x)\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} s(x)\, d\mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x)\, d\mu.$$

Вземайки супремума по $s(x)$, получаваме неравенството

$$\int_A f(x)\,d\mu \le \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x)\,d\mu.$$

За да докажем обратното неравенство, да означим $B_n = A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Тогава за всяко $\varepsilon > 0$ и $k = 1, \ldots, n$ можем да намерим стъпаловидна функция $s_k(x)$ на A_k такава, че $0 \le s_k(x) \le f(x)$ и $\int_{A_k} s_k(x)\,d\mu > \int_{A_k} f(x)\,d\mu - \varepsilon/n$. Нека $s(x) = \sum_{k=1}^{n} s_k(x)$; тогава $0 \le s(x) \le f(x)$ и

$$\int_A f(x)\,d\mu \ge \int_{B_n} f(x)\,d\mu \ge \int_{B_n} s(x)\,d\mu =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} s_k(x)\,d\mu > \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} f(x)\,d\mu - \varepsilon.$$

Правейки граничен преход при $\varepsilon \to 0$ и след това при $n \to \infty$, получаваме неравенството

$$\int_A f(x)\,d\mu \ge \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x)\,d\mu,$$

с което твърдението е доказано за неотрицателни функции.

В случая на произволна интегруема функция $f(x)$, прилагаме доказаното по-горе за нейната положителна част $f_+(x)$ и за отрицателната и част $f_-(x)$, след което изваждаме получените равенства. ∎

2.9.6 Теореми за граничен преход в интеграла на Лебег.

От изложеното до тук не става ясно с какво интегралът на Лебег е по-добър от стандартния риманов интеграл. В този раздел ще изложим три теореми за граничен преход под знака на лебеговия интеграл, които нямат аналог в римановия интеграл, и дават възможност за доста по-широк клас операции.

Теорема 14. (Теорема на Лебег за монотонната сходимост.)[*] *Нека* $0 \le f_1(x) \le \ldots \le f_n(x) \le \ldots$ *е монотонно растяща*

[*] На много места тази теорема се нарича теорема на Бепо Леви.

редица от неотрицателни измерими функции, и нека $f(x) = \lim f_n(x)$ *(тук допускаме функциите* $f_n(x)$*, както и функцията* $f(x)$*, да вземат стойности* $+\infty$*). Тогава*

$$\lim \int_X f_n(x)\, d\mu = \int_X f(x)\, d\mu$$

Доказателство. Нека $l = \lim \int_X f_n(x)\, d\mu$ (l може да бъде число или $+\infty$). Тъй като $f_n(x) \leq f(x)$ за всяко n, то $l \leq \int_X f(x)\, d\mu$.

За да получим и обратното неравенство, трябва да покажем, че за всяка измерима стъпаловидна функция $s(x)$, удовлетворяваща $0 \leq s(x) \leq f(x)$, е изпълнено $\int_X s(x)\, d\mu \leq l$. Нека $s(x)$ е такава функция. Да фиксираме за момента числото $\lambda \in (0, 1)$. Да означим с X_n множеството от точки x, за които $f_n(x) \geq \lambda s(x)$. От условията на теоремата следва, че $X_1 \subset X_2 \subset \ldots$ и $\cup_{n=1}^{\infty} X_n = X$ (именно заради последното равенство беше въведен множителя λ). Следователно

$$\int_X f_n(x)\, d\mu \geq \int_{X_n} f_n(x)\, d\mu \geq \int_{X_n} \lambda s(x)\, d\mu.$$

Ако в това неравенство направим граничен преход при $n \to \infty$, използвайки σ-адитивността на интеграла (свойство 6), получаваме $l \geq \lambda \int_X s(x)\, d\mu$, откъдето на свой ред, при $\lambda \nearrow 1$, получаваме търсеното неравенство

$$l \geq \int_X s(x)\, d\mu. \qquad \blacksquare$$

Забележка 1. Теоремата очевидно остава вярна, ако вместо по цялото X интегрираме по произволно негово измеримо подмножество.

Забележка 2. Изискванията на теоремата може да бъдат отслабени, като се иска всяко от неравенствата $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ и съотношението $f(x) = \lim f_n(x)$ да бъдат изпълнени почти навсякъде (а не навсякъде). Тогава твърдението остава в сила. Наистина, да означим с E множеството на точките, в което поне едно от тези изисквания не е изпълнено. Тогава E, като обединение на изброимо много пренебрежими множества, е също пренебрежимо. Ние можем да проведем доказателството на теоремата върху пространството $X \setminus E$, като по свойство 5 интегралите от всички функции по него ще имат същите стойности, както върху цялото X.

Забележка 3. Да предположим, че всички функции $f_n(x)$ са интегруеми, и освен това числовата редица $\int_X f_n(x)\ d\mu$ е ограничена (и следователно сходяща в обичайния смисъл). Тогава според теоремата $\int_X f(x)\, d\mu$ е крайно число, и следователно $f(x)$ е също интегруема.

Като следствие от теоремата ще докажем линейността на лебеговия интеграл.

Доказателство на свойство 1. Трябва да докажем, че

$$\int_X (f(x)+g(x))\ d\mu = \int_X f(x)\, d\mu + \int_X g(x)\, d\mu.$$

Най-напред ще разгледаме случая, когато $f(x)$ и $g(x)$ са неотрицателни. Нека $s_n(x)$ е монотонно растяща редица от неотрицателни измерими стъпаловидни функции, поточково клоняща към $f(x)$ (виж теорема 10), и $t_n(x)$ е също такава редица за $g(x)$. Тогава $s_n(x)+t_n(x)$ е монотонна и клони към $f(x)+g(x)$. Следователно, според току-що доказаната теорема, имаме

$$\int_X (f(x)+g(x))\ d\mu = \lim \int_X (s_n(x)+t_n(x))\ d\mu =$$

$$= \lim \int_X s_n(x)\, d\mu + \lim \int_X t_n(x)\, d\mu = \int_X f(x)\, d\mu + \int_X g(x)\, d\mu.$$

Горното доказателство лесно се модифицира и за случая $f(x) \leq 0$, $g(x) \leq 0$.

Да разгледаме сега случая, когато навсякъде върху X имаме $f(x) \geq 0$, $g(x) \leq 0$. Да означим с A и B множествата

$$A = \{x : f(x)+g(x) \geq 0\}\,, \quad B = \{x : f(x)+g(x) < 0\}\,.$$

Върху множеството A към равенството $f(x) = (f(x)+g(x)) + (-g(x))$, в което и двете събираеми отдясно са неотрицателни, можем да приложим доказаното по-горе, откъдето следва търсеното равенство за интегралите. Върху B може да разгледаме равенството
$(-g(x)) = f(x) + (-f(x)-g(x))$, отново с неотрицателни събираеми,

което доказва търсеното равенство върху B. Сумирайки, получаваме равенството върху цялото X.

Най-сетне, в общия случай ние можем да представим X като обединение на четири непресичащи се измерими множества, като в първото $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$, върху второто $f(x) \geq 0$, $g(x) < 0$ и т.н. Както доказахме, свойство 1 е изпълнено върху всяко от тях, и следователно е изпълнено върху цялото X. ■

Теоремата за монотонната сходимост може да се формулира - по еквивалентен начин - като теорема за почленно интегриране на редове:

Теорема $14'$. *Нека $f_n(x)$ е редица от неотрицателни измерими функции, и $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Тогава $f(x)$ е дефинирана почти навсякъде, и*

$$\int_X f(x)\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n(x)\, d\mu.$$

За доказателството на това равенство е достатъчно да приложим теорема 11 към редицата от частичните суми на реда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Следващата важна теорема е т.н. Лема на Фату:

Теорема 15. *Нека $f_n(x)$ е редица от неотрицателни измерими функции. Тогава*

$$\int_X \liminf f_n(x)\, d\mu \leq \liminf \int_X f_n(x)\, d\mu.$$

Доказателство. Да означим $f(x) = \liminf \int_X f_n(x)$. Ако положим

$$g_n(x) = \inf\left(f_n(x), f_{n+1}(x), f_{n+2}(x), \ldots\right)\ ,$$

то функциите $g_n(x)$ са измерими (виж теорема 12). Имаме $g_n(x) \leq f_m(x)$ за всяко $m \geq n$ и следователно

$$\int_X g_n(x)\, d\mu \leq \inf_{m \geq n} \int_X f_m(x)\, d\mu.$$

От друга страна, $f(x) = \lim g_n(x)$, и следователно по теоремата за монотонната сходимост получаваме

$$\int_X f(x)\, d\mu = \lim_n \int_X g_n(x)\, d\mu \leq$$

$$\leq \lim_n \left(\inf_{m \geq n} \int_X f_m(x)\, d\mu \right) = \liminf \int_X f_n(x)\, d\mu. \qquad \blacksquare$$

Забележка. Възможно е неравенството от теоремата да бъде строго. Наистина, нека в интервала $[-1, 1]$, снабден с обичайната мярка, да положим $f_n(x) = (-1)^n.x$. Тогава $\liminf f_n(x) = -|x|$ (докажете!), докато $\int_{[-1,1]} f_n(x)\, d\mu = 0$ за всяко n.

Следва най-важната и най-често използвана теорема за граничен преход в лебеговия интеграл:

Теорема 16. (Теорема на Лебег за мажорираната сходимост). *Нека $f_n(x)$ е редица от измерими функции, и $f_n(x) \to f(x)$ за всяко $x \in X$. Нека освен това съществува интегруема функция* $g(x)$ такава, че $|f_n(x)| \leq g(x)$. Тогава*

$$\int_X f(x)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\, d\mu.$$

Доказателство. Като граница на измерими функции функцията $f(x)$ е също измерима. От неравенството $|f(x)| \leq g(x)$ и от сумируемостта на $g(x)$ следва, че $f(x)$ е и сумируема.

Неравенството $|f_n(x)| \leq g(x)$ означава, че при всяко n функциите $g(x) + f_n(x)$ и $g(x) - f_n(x)$ са неотрицателни. Като приложим лемата на Фату към първата редица, получаваме

$$\int_X (g(x) + f(x))\ d\mu \leq \liminf \int_X (g(x) + f_n(x))\ d\mu,$$

и следователно

$$\int_X f(x)\, d\mu \leq \liminf \int_X f_n(x)\, d\mu.$$

Прилагайки лемата на Фату към втората от редиците, имаме

$$\int_X (g(x) - f(x))\ d\mu \leq \liminf \int_X (g(x) - f_n(x))\ d\mu,$$

и следователно

$$-\int_X f(x)\, d\mu \leq \liminf \left(-\int_X f_n(x)\, d\mu \right).$$

*Функцията $g(x)$ се нарича интегруема мажоранта за редицата $f_n(x)$.

Последното неравенство може да се напише във вида

$$\int_X f(x)\,d\mu \geq \limsup \int_X f_n(x)\,d\mu.$$

Комбинирано с полученото по-горе неравенство
$\int_X f(x)\,d\mu \leq \liminf \int_X f_n(x)\,d\mu$, това дава доказателство на равенството от теоремата. ■

Забележка. В случая, когато $\mu(X) < +\infty$ и $|f_n(x)| \leq C$ за всяко n, интегруема мажоранта съществува, например константата C.

Пример. Нека $f(x)$ е сумируема функция върху $\mathbb{R}$ спрямо стандартната мярка. Ще определим нейното преобразование на Фурие* $\widehat{f}(\xi)$ с формулата:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_R f(x)e^{i\xi x}\,dx.$$

Ще докажем, че $\widehat{f}(\xi)$ е непрекъсната и ограничена.* Нека $\xi_n \to \xi_0$, и $f_n(x) = f(x)e^{i\xi_n x}$. Тогава $f_n(x) \to f_0(x) = f(x)e^{i\xi_0 x}$ поточково, и за да можем да приложим горната теорема, е достатъчно да намерим интегруема мажоранта за редицата $f_n(x)$. От неравенството $|f_n(x)| = |f(x)|$ се вижда, че за такава може да бъде избрана функцията $|f(x)|$, което ни осигурява законността на граничния преход под знака на интеграла.

Ограничеността на $\widehat{f}(\xi)$ се вижда от неравенството

$$\left|\widehat{f}(\xi)\right| \leq \int_R |f(x)|\,dx.$$

2.9.7 Връзка между лебеговия и римановия интеграл.

В този раздел отново ще разглеждаме функции върху $\mathbb{R}^n$, и μ ще бъде стандартната мярка от раздел 1. Сега ще докажем отново даденият в Теорема 3 на §4 критерий на Лебег за интегруемост по Риман. Читателят ще се убеди, че развитата в настоящият параграф техника позволява

*Това понятие играе извънредно важна роля в теоретичната и приложна математика.

*Още свойства на преобразованието на Фурие са дадени в задачи 8, 10 и 11.

значително да се опрости това доказателство и да се избегнат някои изкуствени моменти.

Тъй като в този раздел се използват и двата интеграла, за да ги различаваме, с $I_{\mathcal{L}}(f)$ ще означаваме лебеговия интеграл от f, а с $I_{\mathcal{R}}(f)$ - римановият. Символите $\underline{I}(f)$ и $\overline{I}(f)$, както обикновено, означават долния и горен интеграл в смисъл на Дарбу. Под μ тук разбираме стандартната лебегова мярка върху $\mathbb{R}$.

Критерий на Лебег за интегруемост по Риман. *Нека $f(x)$ е ограничена функция, дефинирана върху измеримото по Пеано-Жордан множество D. Тогава f е интегруема тогава и само тогава, когато множеството от точките, в които не е непрекъсната, е пренебрежимо по Лебег.*

Доказателство. И тук за улеснение ще разглеждаме случая, когато дефиниционното множество е интервал; този случай съдържа всички важни идейни моменти. Началото на доказателството е както в §4; конструираме една издребняваща редица $\tau_1 \prec \tau_2 \prec \ldots$ от разбивания на дадения интервал, и нека $s_1(x) \leq s_2(x) \leq \ldots$ и $S_1(x) \geq S_2(x) \geq \ldots$ са съответните редици от долни и горни стъпаловидни функции. Ще използваме свойствата $1/, 2/, 3/$, отбелязани на стр. 165. Тук обаче можем да въведем новите функции

$$s(x) = \lim s_n(x), \quad S(x) = \lim S_n(x).$$

Според теоремата за мажорирана сходимост тези две функции са интегруеми по Лебег, и

$$I_{\mathcal{L}}(s) = \lim I_{\mathcal{L}}(s_n) = \underline{I}(f),$$

$$I_{\mathcal{L}}(S) = \lim I_{\mathcal{L}}(S_n) = \overline{I}(f).$$

Да означим $\varphi(x) = S(x) - s(x) \geq 0$. По свойство 5 на лебеговия интеграл $I_{\mathcal{L}}(\varphi) = 0$ тогава и само тогава, когато $\varphi(x) = 0$ почти навсякъде (по Лебег). Ако x не съвпада с някоя от делящите точки на разбиванията τ_n, то $\varphi(x) = 0$ точно тогава, когато функцията f е непрекъсната в точката x; от друга страна, $I_{\mathcal{L}}(\varphi) = \overline{I}(f) - \underline{I}(f)$ е равен на нула точно тогава, когато функцията f е интегруема по Дарбу (т.е. по Риман). Твърдението е доказано. ■

Следствие. *Всяка функция, интегруема по Риман, е интегруема и по Лебег, и интегралите на Риман и Лебег от нея имат една и съща стойност.*

Доказателство. Нека $s(x)$ и $S(x)$ са функциите, построени в предното доказателство. Очевидно имаме $s(x) \leq f(x) \leq S(x)$. Ако $f(x)$ е интегруема по Риман, то според доказаното тя ще съвпада почти навсякъде с $s(x)$ и $S(x)$, т.е. е интегруема по Лебег. Тъй като

$$\underline{I}(f) = I_{\mathcal{L}}(s) \leq I_{\mathcal{L}}(f) \leq I_{\mathcal{L}}(S) = \overline{I}(f),$$

то $I_{\mathcal{L}}(f) = I_{\mathcal{R}}(f)$. ■

Забележка. Обратното твърдение не е вярно: лебеговият интеграл е дефиниран върху много по-широк клас функции, отколкото римановият. Така например, функцията на Дирихле (нула върху ирационалните точки и единица върху рационалните) не е интегруема по Риман, но очевидно е интегруема по Лебег.

2.9.8 Повторен лебегов интеграл. Теореми на Фубини и Тонели.

В този раздел ще дадем "лебеговия вариант"на теоремата за равенство между повторния и двойния интеграл, доказана за риманови интеграли в §5. Както и в теоремите за граничен преход под знака на интеграла, използването на лебеговия интеграл позволява да се докажат теореми, които са едновременно по-общи, и в същото време по-прозрачни, отколкото в класическия случай.

Ще разглеждаме пространствата $\mathbb{R}^n$ с координати $x = (x_1, \dots, x_n)$, и $\mathbb{R}^m$ с координати $y = (y_1, \dots, y_m)$. Използвайки досегашните конструкции, ще въведем мярката и интеграла на Лебег върху всяко от пространствата $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. За интеграла на Лебег ще използваме същите означения, както и за римановия интеграл. Така, след функцията под знака на интеграла ще поставяме dy, ако интегрираме по $y \in \mathbb{R}^m$, dx, ако интегрираме по $x \in \mathbb{R}^n$, и $dxdy$, ако интегрираме по $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}$.

Теорема 17. (Теорема на Фубини. *Нека функцията* $f(x, y) = f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k)$ *е интегруема върху* $\mathbb{R}_{n+m}$. *Тогава за почти* *всички* $x^0 \in \mathbb{R}^n$ *функцията* $f(x^0, y)$ *е интегруема по* $y \in \mathbb{R}_m$*, нейният интеграл*

$$I(x) = \int\limits_{R^m} f(x,y)\,dy$$

е интегруема функция върху $\mathbb{R}_n$*, и*

$$\int\limits_{R_{n+m}} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{R^n} I(x)\,dx = \int\limits_{R^n} \left(\int\limits_{R^m} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Доказателство. Ще ни трябва следната

Лема 18. *Нека* $\{f_k(x,y)\}$ *е монотонно растяща или монотонно намаляваща редица от интегруеми функции върху* $\mathbb{R}^{n+m}$*, клоняща навсякъде поточково към интегруемата функция* $f(x,y)$*. Тогава, ако твърдението на теоремата е изпълнено за всяка от функциите* $f_k(x,y)$*, то е изпълнено и за граничната функция* $f(x,y)$*.*

Доказателство на лемата. Достатъчно е да докажем лемата в случая на монотонно растяща редица: в случая на монотонно намаляваща редица можем да разгледаме редицата $-f_k(x,y)$. По теоремата за монотонна сходимост имаме

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{R^{n+m}} f_k(x,y)\,dxdy = \int\limits_{R^{n+m}} f(x,y)\,dxdy.$$

За всеки номер k да означим с E_k "изключителното множество"за функцията $f_k(x,y)$, т.е. множеството от точки $x \in \mathbb{R}^n$, за които функцията $f_k(x,y)$ не е интегруема по $y \in \mathbb{R}_m$. Тъй като всяко от множествата E_k е пренебрежимо в $\mathbb{R}^n$, то същото е вярно и за тяхното обединение $E = \cup_k E_k$. Нека $I_k(x) = \int\limits_{R^m} f_k(x,y)\,dy$ за $x \notin E$. Отново по теоремата за монотонната сходимост (виж забележка 2 след теоремата) имаме

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{R^n} I_k(x)\,dx = \int\limits_{R^n} I(x)\,dx.$$

Тъй като левите страни в горните две равенства са равни помежду си, то същото е вярно и за десните. ■

За да докажем теоремата, отначало ще разгледаме случая, когато подинтегралната функция $f(x, y)$ е характеристична функция на някакво измеримо подмножество M на $\mathbb{R}^{n+m}$: $f = \chi_M$. Доказателството на теоремата за такива функции се извършва в няколко последователни стъпки.

Стъпка 1. Нека $M = \Delta$, където Δ е затворен правоъгълен паралелепипед в $\mathbb{R}^{n+m}$. Тогава имаме представянето $\Delta = \Delta_x \times \Delta_y$, където Δ_x и Δ_y са затворени правоъгълни паралелепипеди съответно в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$, и равенството на теоремата се проверява непосредствено.

Стъпка 2. Нека $M = E$, където E е елементарно множество. Тогава E може да се представи като крайно обединение на правоъгълни паралелепипеди с непресичащи се вътрешности. Достатъчно е да се разгледа случая на два паралелепипеда: $E = \Delta_1 \cup \Delta_2$. Тогава $\chi_E = \chi_{\Delta_1} + \chi_{\Delta_2} - \chi_{\Delta_1 \cap \Delta_2}$. Тъй като $\Delta_1 \cap \Delta_2$ е изроден паралелепипед (проекцията му върху $\mathbb{R}^n$ или върху $\mathbb{R}^m$ се свежда до една точка), то и двойният, и повторният интеграл от функцията $\chi_{\Delta_1 \cap \Delta_2}$ са нули. Твърдението на теоремата за f следва от стъпка 1 и от линейността на интеграла.

Стъпка 3. Нека $M = \chi_U$, където U е отворено множество в $\mathbb{R}^{n+m}$. Тогава U може да се представи като обединение на монотонно растяща редица от елементарни множества (виж задача 3). Следователно редицата от функции χ_{E_k} монотонно клони към функцията $f = \chi_U$, и ние можем да приложим доказаната по-горе лема.

Стъпка 4. Нека $M = G$, където множеството G е от тип G_δ (изброимо сечение на отворени множества.) Нека $G = \cap_k U_k$. Ако G е крайно измеримо, то множествата U_k могат да бъдат избрани също крайно измерими. Наистина, нека U да е елементарно отворено множество, съдържащо G; тогава множествата $U \cap U_k$ са отворени и крайно измерими, и е в сила представянето $G = \cap_k (U \cap U_k)$.

Ако имаме представянето $G = \cap_k U_k$ с крайно измерими и отворени U_k, да означим $V_k = U_1 \cap \ldots \cap U_k$, и нека $f_k = \chi_{V_k}$. Тогава $f_k(x)$ клони, монотонно намалявайки, към $f(x)$. Използвайки стъпка 3 и лемата, получаваме, че твърдението на теоремата е вярно и за $f = \chi_G$.

Стъпка 5. Нека M е пренебрежимо подмножество на $\mathbb{R}^{n+m}$. Тогава според следствие 13 съществува G_δ-множество G такова, че $M \subset G$ и $\mu(G) = 0$. Според предната стъпка за функцията χ_G е изпълнено равенството на теоремата, и следователно

$$\int_{R^n}\left(\int_{R^m}\chi_G(x,y)\,dy\right)\,dx=\int_{R^{n+m}}\chi_G(x,y)\,dxdy=0.$$

Тъй като $0\le\chi_M(x,y)\le\chi_G(x,y)$, то $\int_{R^n}\left(\int_{R^m}\chi_M(x,y)\,dy\right)\,dx=0$. Разбира се, същата стойност има и интеграла $\int_{R^{n+m}}\chi_M(x,y)\,dxdy$. Следователно, и в този случай функцията f удовлетворява равенството от теоремата.

Стъпка 6. Най-сетне, нека M е произволно крайно измеримо множество. Тогава, отново по следствие 13, съществува G_δ-множество G такова, че $M\subset G$ и множеството $A=G\setminus M$ е пренебрежимо. Тъй като $\chi_M=\chi_G-\chi_A$, и за функциите χ_G и χ_A е изпълнено твърдението на теоремата, то същото равенство е изпълнено и за χ_M.

Вече можем да завършим доказателството. Тъй като всяка измерима стъпаловидна функция е крайна линейна комбинация на индикаторни функции на измерими множества, то теоремата е вярна и за такива функции. Всяка неотрицателна интегруема функция може да се представи, както в теорема 13, като граница на монотонно растяща редица от стъпаловидни измерими функции. Използвайки лемата, получаваме, че теоремата на Фубини е вярна за всички неотрицателни интегруеми функции. Тъй като всяка интегруема функция $f(x,y)$ може да се представи като разлика на две неотрицателни интегруеми функции (например на $f_+(x,y)$ и $f_-(x,y)$), получаваме, че теоремата на Фубини е вярна за всички интегруеми функции на $\mathbb{R}^{n+m}$. ■

Накратко, теоремата на Фубини твърди, че ако двойният интеграл съществува, то съществува и повторният. За неотрицателни функции е вярно и обратното твърдение, известно под името теорема на Тонели:

Теорема 19. *Нека $f(x,y)$ е неотрицателна и измерима функция върху $\mathbb{R}^{n+m}$. Тогава за почти всички $x^0\in\mathbb{R}^n$ функцията $f(x^0,y)$ е измерима по $y\in\mathbb{R}^m$. Съответният интеграл*

$$I(x)=\int_{R^m}f(x,y)\,dy$$

е измерима функция на x, и е в сила равенството

$$\int_{R^{n+m}}f(x,y)\,dxdy=\int_{R^n}I(x)\,dx$$

(възможно е и двете страни да са равни на $+\infty$).

Лесно се вижда, че допълнителното условие за неотрицателност на $f(x, y)$ е съществено. Наистина, нека $\varphi(y)$ е ненулева интегруема функция на $\mathbb{R}^m$ такава, че $\int_{R^m} \varphi(y)\, dy = 0$. Тогава функцията $f(x, y) = \varphi(y)$ не е интегруема върху $\mathbb{R}^{n+m}$, макар че повторният интеграл очевидно съществува.

Доказателство на теоремата. Ще въведем "срязаните" функции $f_k(x, y)$:

$$f_k(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{ако} \;\; ||(x,y)|| < k \;\; \text{и} \;\; f(x,y) < k, \\ 0, & \text{ако поне едно от двете неравенства не е изпълнено.} \end{cases}$$

Така дефинираната редица от функции монотонно нараства и клони към $f(x, y)$ навсякъде върху $\mathbb{R}^{n+m}$. По теоремата за монотонната сходимост

$$\int_{R^{n+m}} f_k(x,y)\, dxdy \to \int_{R^{n+m}} f(x,y)\, dxdy$$

(засега не знаем дали това е крайно число или $+\infty$)

Очевидно всяка от функциите $f_k(x, y)$ е интегруема върху $\mathbb{R}^{n+m}$, и ние можем да приложим теоремата на Фубини, която показва, че

$$\int_{R^{n+m}} f_k(x,y)\, dxdy = \int_{R^n} \left(\int_{R^m} f_k(x,y)\, dy \right) dx.$$

Пак от тази теорема, ние получаваме редица E_k от пренебрежими подмножества на $\mathbb{R}^n$ такива, че функцията $f_k(x, y)$ е измерима по y при $x \notin E_k$. Тяхното обединение $E = \cup_k E_k$ е също пренебрежимо. По теоремата за монотонната сходимост за всяко $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$ имаме

$$I_k(x) := \int_{R^m} f_k(x,y)\, dy \nearrow I(x).$$

Интегрирайки по x и отново прилагайки теоремата за монотонната сходимост, получаваме

$$\int_{R^n} I_k(x)\, dx \to \int_{R^n} I(x)\, dx.$$

Както обаче отбелязахме по-горе,

$$\int_{R^n} I_k(x)\, dx \to \int_{R^{n+m}} f(x,y)\, dxdy,$$

с което теоремата е доказана. ■

Като следствие от теоремата на Фубини ще дадем по-обща формулировка на принципа на Кавалиери (теорема 3 от §7). Нека $M \in \mathbb{R}^{n+m}$ е крайно измеримо множество. За всяко $x \in \mathbb{R}^n$ да означим с L_x праобразът на точката x при координатната проекция $\mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$ (L_x се състои от всички точки от вида (x, y), $y \in \mathbb{R}^m$, и може да бъде отъждествено с пространството $\mathbb{R}^m$). Нека $M_x = M \cap L_x$, и $Q_M(x) = \mu(M_x)$ за тези x, за които M_x е крайно измеримо.

Следствие 20. *За почти всички $x \in \mathbb{R}^n$ множеството M_x е крайно измеримо, и се изпълнява равенството*

$$\mu(M) = \int_{R^n} Q_M(x)\, dx.$$

За доказателство е достатъчно да приложим теоремата на Фубини към характеристичната функция на множеството M.

Едно от най-често срещаните приложения на теоремите на Фубини и Тонели е за обосноваваме на размяната на реда на интегриране.

Следствие 21. *Нека $f(x, y)$ е измерима функция върху $\mathbb{R}^{n+m}$, и да предположим, че повторният интеграл*

$$\int_{R^n} \left(\int_{R^m} |f(x, y)|\, dy \right) dx$$

съществува (т.е., че функцията $\widetilde{I}(x) = \int_{R^m} f(x, y)\, dy$ е дефинирана почти навсякъде и интегруема върху $\mathbb{R}^n$). Тогава съществува повторният интеграл $\int_{R^m} \left(\int_{R^n} f(x, y)\, dx \right) dy$, и е в сила равенството

$$\int_{R^m} \left(\int_{R^n} f(x, y)\, dx \right) dy = \int_{R^n} \left(\int_{R^m} f(x, y)\, dy \right) dx.$$

Доказателство. От теоремата на Тонели следва, че $|f(x, y)|$ е интегруема върху $\mathbb{R}^{n+m}$. Следователно същото е вярно и за самата функция $f(x, y)$. Сега от теоремата на Фубини следва, че $\int_{R^n} f(x, y)\, dx$ съществува за почти всички $y \in \mathbb{R}^m$ и е интегруема върху $\mathbb{R}^n$, като

$$\int_{R^m} \left(\int_{R^n} f(x, y)\, dx \right) dy = \int_{R^{n+m}} f(x, y)\, dxdy = \int_{R^n} \left(\int_{R^m} f(x, y)\, dy \right) dx.$$

Пример. Нека $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми функции върху $\mathbb{R}^n$. Да образуваме функцията

$$(f * g)(x) = \int_{R^n} f(x-y)g(y)\, dy.$$

(тя се нарича <u>конволюция</u> на функциите $f(x)$ и $g(x)$). Ще докажем, че $(f * g)(x)$ е дефинирана почти навсякъде и интегруема върху $\mathbb{R}^n$.

Наистина, да разгледаме функцията $F(x,y) = f(x-y)g(y)$ върху $\mathbb{R}^{2n}$. Лесно се вижда, че $F(x,y)$ е измерима функция (докажете!). Имаме

$$\int_{R^n} \Big(\int_{R^n} |F(x,y)|\ dx \Big)\ dy = \int_{R^n} |g(y)| \Big(\int_{R^n} |f(x-y|\ dx \Big)\ dy =$$

$$= \Big(\int_{R^n} |g(y)|\ dy \Big) \Big(\int_{R^n} |f(x-y|\ dx \Big) =$$

$$= \Big(\int_{R^n} |g(y)|\ dy \Big) \Big(\int_{R^n} |f(x)|\ dx \Big) < +\infty.$$

От горното твърдение следва, че $(f * g)(x) = \int_{R^m} F(x,y)\, dy$ съществува за почти всички $x \in R^n$, и

$$\int_{R^n} (f * g)(x)\, dx = \int_{R^n} \Big(\int_{R^m} F(x,y)\, dy \Big) dx =$$

$$= \int_{R^m} \Big(\int_{R^n} F(x,y)\, dx \Big) dy = \Big(\int_{R^m} g(y)\, dy \Big) \Big(\int_{R^n} f(x)\, dx \Big).$$

2.9.9 Интеграл на Лебег по дадена мярка.

Както отбелязахме по-горе, в редица приложения на теорията на интеграла, и най-вече в теорията на вероятностите, се налага да се разглеждат мярки върху $\mathbb{R}^n$, различни от стандартната мярка, с която работихме досега.

Нека, както в раздел 1, $\mathcal{M}_0$ да означава алгебрата от всички елементарни подмножества на $\mathbb{R}^n$. В този раздел μ ще бъде произволна σ-адитивна мярка върху $\mathcal{M}_0$, с едно допълнително изискване:

Дефиниция. *Мярката μ се нарича <u>регулярна</u>, ако за всяко множество $M \in \mathcal{M}_0$ и $\varepsilon > 0$ съществуват затворено множество F и отворено множество G такива, че $F \subset M \subset G$ и*

$$\mu(M) - \varepsilon < \mu(F) \leq \mu(M) \leq \mu(G) < \mu(M) + \varepsilon.$$

В раздел 1 беше използвана стандартната мярка върху алгебрата на елементарните множества, в която мярката на правоъгълен паралелепипед е равна на произведението на страните му. Очевидно тази мярка е регулярна (докажете!). Ако проследим конструкцията в раздел 1, водеща до теорема 6, ще видим, че всички разсъждения са приложими в общия случай. Повтаряйки ги дословно, ние получаваме:

Теорема 6′**.** *За всяка регулярна σ-адитивна мярка μ върху $\mathcal{M}_0$ съществува еднозначно определена σ-алгебра $\mathcal{M}_\mu$, съдържаща $\mathcal{M}_0$, върху която мярката μ се продължава, запазвайки свойството да е σ-адитивна.*

Запазват силата си и резултатите от раздел 2, и по-специално теорема 7, според която всяко измеримо множество може да се представи като обединение на борелево и на пренебрежимо множество. Ще отбележим, че алгебрата на борелевите множества не зависи от мярката μ, но класът на пренебрежимите множества съществено зависи от избора на тази мярка. Следователно, и попълнената σ-алгебра $\mathcal{M}_\mu$ също съществено зависи от μ.

Както беше отбелязано, конструкциите и резултатите на раздели 3 до 6 зависят само от наличието на дадена σ-алгебра и на σ-адитивна мярка върху нея, и всичко остава в сила и в общия случай. Трябва да се отбележи, че класовете от измерими и интегруеми функции отново зависят от избора на мярката μ, така че по-точно е да се говори за μ-измерими и μ-интегруеми функции.

Теоремите на Фубини и Тонели също се пренасят за случая на произволна мярка. Нека $\mathcal{M}_x$, μ_x да са съответно σ-алгебра от подмножества на $\mathbb{R}^n$ и σ-адитивна мярка върху нея, а $\mathcal{M}_y$ и μ_y - също такива обекти върху друго евклидово пространство $\mathbb{R}^m$. В пространството $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ще разгледаме алгебрата от множества $\mathcal{M}_x \otimes \mathcal{M}_y$, състояща се от всички множества от вида

$$M = \cup_{i=1}^{l} M_i \times N_i,$$

където $M_1, \ldots, M_l$ са от $\mathcal{M}_x$, а $N_1, \ldots, N_l$ - от $\mathcal{M}_y$. Очевидно $\mathcal{M}_x \otimes \mathcal{M}_y$ е алгебра, но не е σ-алгебра. Върху нея се дефинира мярка $\mu_x \otimes \mu_y$ с формулата

$$(\mu_x \otimes \mu_y)(M) = \sum_{i=1}^{l} \mu_x(M_i) . \mu_y(N_i) .$$

Ако означим с $\mathcal{M}$ минималната σ-алгебра от множества, съдържаща $\mathcal{M}_x \otimes \mathcal{M}_y$, то конструкцията от раздел 1 ни дава σ-адитивна мярка μ върху $\mathcal{M}$, продължаваща мярката $\mu_x \otimes \mu_y$. Тогава всички твърдения от раздел 6 се пренасят без изменение. В частност, за всяка μ-интегруема функция $f(x, y)$ върху $\mathbb{R}^{n+m}$ получаваме равенство на двойния и повторния интеграл:

$$\int_{R^n} \left(\int_{R^m} f(x,y)\, d\mu_y \right) \, d\mu_x = \int_{R^{n+m}} f(x,y)\, d\mu.$$

Описание на мерките върху правата. Ще покажем, че регулярните и σ-адитивни мерки върху правата се описват просто посредством монотонни функции.

Ще напомним, че ако $\alpha(x)$ е монотонно растяща функция върху $\mathbb{R}$, то за всяко x_0 съществуват границите $\alpha(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0, x < x_0}$ и $\alpha(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0, x > x_0}$. Ако x_0 е точка на прекъсване на $\alpha(x)$, то $\alpha(x_0 - 0) < \alpha(x_0 + 0)$; точките на прекъсване на една монотонна функция могат да бъдат най-много изброимо много. Разликата $\alpha(x_0 + 0) - \alpha(x_0 - 0)$ се нарича скок на $\alpha(x)$ в точката x_0. За полунепрекъснатите отляво функции е изпълнено $\alpha(x_0 - 0) = \alpha(x_0)$.

Теорема 21. *Съществува взаимно еднозначно съответствие между регулярните σ-адитивни мерки върху реалната права $\mathbb{R}$ и монотонно растящите и непрекъснати отляво функции $\alpha(x)$ върху нея, нормирани с условието $\alpha(0) = 0$.*

Доказателство. Нека $\alpha(x)$ е монотонно растяща функция. Ще конструираме съответната мярка μ_α върху алгебрата от елементарни подмножества на $\mathbb{R}$. Очевидни това са множествата, които се представят като обединение на краен брой непресичащи се ограничени интервали - отворени, затворени или полуотворени. Значи трябва да определим μ_α върху всеки такъв интервал. Полагаме

$$\mu_\alpha((a,b)) = \alpha(b-0) - \alpha(a+0), \;\; \mu_\alpha([a,b]) = \alpha(b+0) - \alpha(a-0),$$

$$\mu_\alpha([a,b)) = \alpha(b-0) - \alpha(a-0), \;\; \mu_\alpha((a,b]) = \alpha(b+0) - \alpha(a+0).$$

Като продължим по очевиден начин μ_α върху обединенията на краен брой непресичащи се интервали, получаваме регулярна σ-адитивна мярка върху елементарните подмножества на $\mathbb{R}$ (докажете!). Очевидно, ако две функции съвпадат във всички точки на непрекъснатост, те пораждат една и съща мярка. Същото е вярно, за две функции, различаващи се с константа. Затова, налагайки върху $\alpha(x)$ условията $\alpha(0) = 0$ и полунепрекъснатост отляво, ние получаваме еднозначно изображение на всички такива функции в множеството на мерките.

Ще конструираме и обратното изображение. Нека μ е регулярна и σ-адитивна мярка върху $\mathbb{R}$. Полагаме

$$\alpha(x) = \mu([0, x)) \text{ при } x > 0, \quad \alpha(x) = \mu((x, 0)) \text{ при } x < 0, \quad \alpha(0) = 0.$$

Оставяме на читателя да докаже, че от регулярността и σ-адитивността на μ следват исканите свойства на функцията $\alpha(x)$, както и това, че μ съвпада с породената по описания по-горе начин от функцията $\alpha(x)$ мярка. ■

Ще отбележим, че за така конструираните мерки едноточковите множества не са непременно с нулева мярка. Наистина, ако x_0 е точка на прекъсване на $\alpha(x)$, то $\mu_\alpha(\{x_0\})$ е строго положителна и е равна на скока на функцията в точката x_0.

Интегралът от дадена функция $f(x)$ върху $\mathbb{R}$ по мярката μ_α се бележи с $\int_R f(x)\, d\alpha(x)$ и се нарича интеграл на Стилтес. Най-често той се дефинира без използване на теорията на Лебег, т.е. аналогично на обичайния риманов интеграл.

2.9.10 Дефиниция и свойства на пространството на сумируемите функции $L_1(\mathbb{R}^n, \mu)$.

Нека μ е мярка върху $\mathbb{R}^n$. За всяка интегруема относно μ функция $f(x)$ (евентуално дефинирана почти навсякъде) върху $\mathbb{R}^n$ полагаме*

$$||f(x)||_1 = \int_{R^n} |f(x)|\ d\mu.$$

Числото $||f(x)||_1$ се нарича първа интегрална норма на функцията $f(x)$. В §1 беше въведено понятието норма и съответните аксиоми (там са разгледани само норми върху крайномерни линейни пространства, но без

*Смисълът на индекса 1 ще бъде обяснен по-долу.

никакви изменения понятието норма се въвежда в произволно линейно пространство). Ще напомним трите аксиоми на нормата в нашия случай:

1/ $||f||_1 \geq 0$; $||f||_1 = 0$ тогава и само тогава, когато $f(x) \equiv 0$.

2/ $||\lambda f||_1 = |\lambda| \, ||f||_1$ за всеки $\lambda \in \mathbb{R}$ и f.

3/ (неравенство на триъгълника) За всеки две интегруеми функции f и g имаме $||f + g||_1 \leq ||f||_1 + ||g||_1$.

Свойствата 2/ и 3/ се доказват директно (оставяме това на читателя). Свойството 1/ изисква малко повече внимание. Ясно е, че $||f(x)||_1 = 0$ точно тогава, когато $f(x) = 0$ почти навсякъде; за да бъде изпълнено свойство 1/, трябва да отъждествим такава функция с нулата. Това води до следната релация на еквивалентност:

Дефиниция. *Ще казваме, че интегруемите, дефинирани почти навсякъде функции $f(x)$ и $g(x)$ са еквивалентни, ако те съвпадат почти навсякъде.*

Отъждествявайки еквивалентните интегруеми функции, стигаме до следното понятие, основно за дадения раздел:

Дефиниция. *Под $L_1(\mathbb{R}^n, \mu)$ (или накратко $L_1(\mu)$) ще разбираме пространството от всички класове на еквивалентност относно горната релация.*

Ако μ е стандартната мярка върху $\mathbb{R}^n$, горното пространство се означава с $L_1(\mathbb{R}^n)$.

Очевидно операциите сума на две функции и произведение на функция с число се пренасят и върху класовете на еквивалентност, което ппоказва, че $L_1(\mu)$ е линейно пространство. Можем да боравим с тези класове на еквивалентност по същия начин, както с функции, и ние ще продължаваме да ги наричаме "функции".

Очевидно нормата $||f(x)||_1$ има една и съща стойност за всички функции от даден клас на еквивалентност, и следователно е коректно дефинирана върху $L_1(\mu)$. Сега вече и аксиомата 1/ е изпълнена, и следователно пространството $L_1(\mu)$, снабдено с нормата $|| \; ||_1$, се превръща в *нормирано линейно пространство.* Както в §1, нормата автоматично поражда и разстояние:

$$\rho_1(f(x), g(x)) = ||f(x) - g(x)||_1 = \int_{R^n} |f(x) - g(x)| \; d\mu.$$

На свой ред, разстоянието определя сходимостта на редици от функции;

казваме, че редицата $f_k(x)$ клони към функцията $f(x)$ относно нормата $|| \, ||_1$, ако $||f_k(x) - f(x)||_1 \to 0$.

Ние бихме могли да разгледаме подобно пространство, съставено само от интегруемите по Риман функции, но използването на интегруемите по Лебег функции има едно решаващо предимство: $L_1(\mu)$ е пълно нормирано линейно пространство.

Ще поясним термина "пълно пространство". Както знаем, математическият анализ не може да бъде развит пълноценно в полето $\mathbb{Q}$ на рационалните числа, и се налага да се добавят още елементи, за да се получи реалната права $\mathbb{R}$. Формалната разлика между $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ се състои в т.н. принцип на Коши за сходимост, който гласи, че всяка фундаментална редица от числа е и сходяща. Този принцип е изпълнен в $\mathbb{R}$, но не е изпълнен в $\mathbb{Q}$. Оказва се, че този принцип играе важна роля и за по-общи метрични пространства.

Дефиниция. *Нека M е метрично пространство с разстояние $\rho(x, y)$ между елементите x и y (за аксиомите на разстоянието виж §1). За една редица от точки $x_n \in M$ казваме, че е фундаментална, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува номер $\nu = \nu(\varepsilon)$ такъв, че за всеки два номера $n, m > \nu$ е изпълнено $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.*

Дефиниция. *Метричното пространство M се нарича пълно, ако в него всяка фундаментална редица притежава граница.*

Интуитивно можем да си представяме, че пълното пространство съдържа "достатъчен брой елементи".

Теорема 22. *Пространството $L_1(\mu)$ е пълно.*

Доказателство. Нека $\{f_k\}$ е фундаментална редица от функции в $L_1(\mu)$. Това означава, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\nu = \nu(\varepsilon)$, така че при $k, l > \nu(\varepsilon)$ имаме $\int_{R^n} |f_k(x) - f_l(x)| \ d\mu < \varepsilon$. Ще изберем подредица f_{k_s} на редицата f_k по следния начин: вземаме $k_1 > \nu(1/2)$, $k_2 > \max(\nu(1/4), k_1)$,...,$k_{s+1} > \max(\nu(1/2^{s+1}), k_s)$,... Така получаваме монотонно растяща редица k_s от индекси такава, че

$$\int_{R^n} \left| f_{k_{s+1}}(x) - f_{k_s}(x) \right| \ dx < 1/2^s.$$

Следователно, за реда

$$\widetilde{f}(x) = |f_{k_1}(x)| + \sum_{s=1}^{\infty} \left| f_{k_{s+1}}(x) - f_{k_s}(x) \right|$$

можем да приложим теорема 14′, според която неговата сума $\widetilde{f}(x)$ е определена почти навсякъде. Тъй като всеки абсолютно сходящ ред е и сходящ, то горното е вярно и за реда

$$f(x) = f_{k_1}(x) + \sum_{s=1}^{\infty} \Big(f_{k_{s+1}}(x) - f_{k_s}(x) \Big) .$$

Тъй като редицата на частичните суми на този ред съвпада с редицата $f_{k_s}(x)$, ние получихме, че редицата от функции $f_{k_s}(x)$ е сходяща почти навсякъде. Да означим нейната граница с $f(x)$; по теоремата за мажорираната сходимост $f(x)$ е интегруема, и

$$\int f_{k_s}(x)\, dx \to \int f(x)\, dx,$$

като за мажоранта можем да вземем функцията $\widetilde{f}(x)$. Отново по същата теорема, имаме

$$||f_{k_s} - f||_1 = \int_{R^n} |f_{k_s}(x) - f(x)|\; dx \to 0$$

(тук за мажоранта можем да вземем $|f(x)| + \widetilde{f}(x)$).

За да завършим доказателството на теоремата, да изберем $\varepsilon > 0$, и нека $k > \nu(\varepsilon/2)$. Да изберем индекса s така, че $||f_{k_s} - f||_1 < \varepsilon/2$ и $k_s > k$. Тогава

$$||f_k - f||_1 \leq ||f_k - f_{k_s}||_1 + ||f_{k_s} - f||_1 < \varepsilon,$$

което показва, че $\lim_k ||f_k - f||_1 = 0$. ■

В хода на доказателството установихме и следния факт:

Следствие 23. *Нека редицата $\{f_k(x)\}$ клони към $f(x)$ относно нормата $||\,||_1$. Тогава съществува нейна подредица $\{f_{k_s}(x)\}$, сходяща почти навсякъде към $f(x)$.*

Друго важно свойство на пространството $L_1(\mu)$ е, че в него всяка функция може да се апроксимира с непрекъснати. Тъй като не всички непрекъснати функции са интегруеми, това твърдение трябва да бъде уточнено.

Дефиниция. *Под носител на функцията $f(x)$ се разбира най-малкото затворено множество K такова, че $f(x) = 0$ за всяко $x \notin K$.*

За нашите цели е удобно да се разглеждат не всички непрекъснати функции, а непрекъснатите функции с компактен носител, т.е. такива непрекъснати функции, които се анулират тъждествено извън някакво компактно подмножество на $\mathbb{R}^n$. Очевидно всички непрекъснати функции с компактен носител са интегруеми.

Удобно е да се въведе следното понятие:

Дефиниция. *Нека M е метрично пространство с разстояние $\rho(x, y)$, и нека L е негово подмножество. Казваме, че множеството L е навсякъде гъсто в M, ако за всеки $x \in M$ и $\varepsilon > 0$ може да се намери $y \in L$ такова, че $\rho(x, y) < \varepsilon$.*

Лесно се вижда, че L е навсякъде гъсто в M точно тогава, когато за всяко $x \in M$ може да се намери редица y_k от елементи на L такава, че $\rho(y_k, x) \to 0$. (В такъв случай казваме, че x се апроксимира с елементи на L относно метриката ρ.) Ще отбележим, че ако са дадени множествата $N \subset L \subset M$ и N е навсякъде гъсто в L, а L - навсякъде гъсто в M, то и N е навсякъде гъсто в M.

Сега можем да формулираме нашето твърдение:

Теорема 24. *Множеството от всички непрекъснати функции с компактен носител е навсякъде гъсто в $L_1(\mu)$.*

Доказателство. Стъпка 1: Ще докажем, че стъпаловидните функции са навсякъде гъсто в $L_1(\mu)$. Наистина, достатъчно е да докажем твърдението за неотрицателни функции; общият случай следва от разлагането $f = f_+ - f_-$. В теорема 13 за всяка неотрицателна интегруема функция $f(x)$ беше построена монотонно растяща редица от стъпаловидни функции $s_k(x)$, поточково клоняща към $f(x)$. От теоремата за монотонната сходимост следва, че $\int_{R^n} s_k(x)\, d\mu \to \int_{R^n} f(x)\, d\mu$, и следователно $\rho_1(s_k, f) \to 0$.

Стъпка 2: Ще казваме, че една стъпаловидна функция е *елементарна.* ако тя може да се представи като крайна линейна комбинация на характеристически функции на правоъгълни паралелепипеди. Ще докажем, че елементарните стъпаловидни функции са навсякъде гъсто в $L_1(\mu)$.

Имайки пред вид стъпка 1, е достатъчно да докажем, че характеристичната функция на всяко крайно измеримо множество може да бъде апроксимирана с елементарни стъпаловидни функции. Ще използваме разсъжденията от доказателството на теорема 17. Всъщност, стъпка 3 от въпросното доказателство доказва, че характеристичната функция на произволно отворено множество може да се апроксимира с елементарни стъпаловидни функции. В стъпка 4 се показва как характеристичната функция на произволно множество от вида G_δ може да се апроксимира с характеристични функции на отворени множества. Най-сетне, използвайки следствие 8, виждаме, че характеристичната функция на произволно крайно измеримо множество е еквивалентна в $L_1(\mu)$ на характеристичната функция на подходящо G_δ-множество. Тези твърдения, взети заедно, доказват стъпка 2.

Стъпка 3: Накрая, доказателството ще бъде завършено, ако покажем, че всяка елементарна стъпаловидна функция може да бъде апроксимирана със непрекъснати функции с компактен носител. Нека $\varphi(x)$ е характеристичната функция на интервала $[a, b]$. Тогава редицата от "трапецовидни"функции

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако } x \le a - 1/k \text{ или } x \ge b + 1/k, \\ 1, & \text{ако } x \in [a, b]\,, \\ \text{линейна} & \text{в интервалите } [a - 1/k, a] \text{ и } [b, b + 1/k]\,. \end{cases}$$

клони към $\varphi(x)$ в $L_1(\mu)$, което доказва твърдението в едномерния случай. Ако имаме правоъгълен паралелепипед в $\mathbb{R}^n$, т.е. произведение на интервали, трябва да разгледаме произведението на съответните трапецовидни функции по всяка от променливите. Това доказва стъпка 3, а с нея и теоремата. ■

Следствие 25. *Безкрайно гладките функции с компактен носител са навсякъде гъсто в $L_1(\mu)$.*

Доказателство. Имайки пред вид горната теорема, достатъчно е да докажем, че всяка непрекъсната функция с компактен носител може да се представи като граница в $L_1(\mu)$ на редица от безкрайно гладки функции с компактен носител. Нека $f(x)$ е такава функция и K е куб в $\mathbb{R}^n$, съдържащ носителя на $f(x)$ във вътрешността си. По първата теорема на Вайерщрас за апроксимацията непрекъснатата функция

$f(x)$ може да се представи като равномерна граница върху K на редица $\{p_k(x)\}$ от алгебраични полиноми. Липсва ни компактният носител; за тази цел да изберем безкрайно гладка функция $\varphi(x)$, равна на единица върху носителя на $f(x)$ и на нула извън K. Тогава функциите $f_k(x) = \varphi(x)p_k(x)$ са безкрайно гладки, имат компактен носител и клонят равномерно към $f(x)$ върху K.

Остава да докажем, че равномерната сходимост върху множество K с крайна мярка влече след себе си и сходимост в $L_1(\mu)$. Това следва веднага от неравенството

$$||f - f_k||_1 \leq \sup_{x \in K} |f(x) - f_k(x)| .\mu(K),$$

и следователно $||f - f_k||_1 \to 0$. ■

Следващото твърдение се отнася за пространството $L_1(\mathbb{R}^n)$, т.е. за случая, когато μ е стандартната мярка в $\mathbb{R}^n$. Нека $h \in \mathbb{R}^n$. Функциите от вида $f_h(x) = f(x - h)$ ще наричаме *транслации* на $f(x)$. Тъй като стандартната мярка е инвариантна спрямо транслациите в $\mathbb{R}^n$, то ако $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, то $f_h \in L_1(\mathbb{R}^n)$ и $||f_h||_1 = ||f||_1$.

Следствие 26. *Нека* $f(x) \in L_1(\mathbb{R}^n)$. *Тогава*

$$\lim_{h \to 0} ||f - f_h||_1 = 0.$$

Доказателство. Очевидно твърдението е вярно за непрекъснати функции с компактен носител. Наистина, ако $f(x)$ е такава функция, то при $h \to 0$ транслациите $f_h(x)$ клонят равномерно към $f(x)$ (това следва от равномерната непрекъснатост на $f(x)$). Както видяхме по-горе, това влече след себе си и сходимост в $L_1(\mathbb{R}^n)$.

Нека сега $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ и $\varepsilon > 0$. Да изберем непрекъсната функция с компактен носител $g(x)$ такава, че $||f - g||_1 < \varepsilon$. Можем да намерим $\delta > 0$ такова, че при $|h| < \delta$ да имаме $||g - g_h||_1 < \varepsilon$. Тогава при $|h| < \delta$ имаме

$$||f - f_h||_1 \leq ||f - g||_1 + ||g - g_h||_1 + ||g_h - f_h||_1 < 3\varepsilon. \blacksquare$$

2.9.11 Дефиниция и свойства на хилбертовото пространство $L_2(\mathbb{R}^n, \mu)$.

За всяко $p \geq 1$ ще означаваме с $L_p(\mathbb{R}^n, \mu)$ пространството от всички измерими на $\mathbb{R}^n$ функции $f(x)$ такива, че функцията $|f(x)|^p$ е интегруема. Ще дефинираме

$$||f||_p = \left(\int_{R^n} |f(x)|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Очевидно при $p = 1$ това пространство съвпада с въведеното в предния раздел. Може да се докаже, че при $p \geq 1$ * $L_p(\mathbb{R}^n, \mu)$ е линейно пространство, $||f||_p$ е норма в него и го превръща в пълно нормирано пространство. Ние ще докажем тези факти само за пространството $L_2(\mathbb{R}^n, \mu)$, което е най-интересно от гледна точка на теорията и приложенията.

Дефиниция. *Със $L_2(\mathbb{R}^n, \mu)$ ще означаваме множеството от всички класове на еквивалентност от измерими функции $f(x)$ на $\mathbb{R}^n$, за които $|f(x)|^2$ е интегруема спрямо мярката μ. Ако $f(x)$ и $g(x)$ са елементи на $L_2(\mathbb{R}^n, \mu)$, ще дефинираме тяхното скаларно произведение $\langle f, g \rangle$ с формулата*

$$\langle f, g \rangle = \int_{R^n} f(x) g(x) \, d\mu.$$

Лема 27. *$L_2(\mathbb{R}^n, \mu)$ е линейно пространство от функции. Скаларното произведение $\langle f, g \rangle$ в него е коректно дефинирано и удовлетворява аксиомите $1'' - 3''$ от §1.*

Доказателство. Най-напред ще отбележим, че от неравенството

$$0 \leq |f(x) g(x)| \leq \frac{1}{2} \left(|f(x)|^2 + |g(x)|^2 \right)$$

следва, че $f(x)g(x)$ е интегруема и интегралът, определящ скаларното произведение, съществува. Разбира се, този интеграл няма да се промени, ако заменим $f(x)$ или $g(x)$ с някоя еквивалентна на нея (т.е. равна на

*При $0 < p < 1$ величината $||f||_p$ не удовлетворява третата аксиома на нормата - неравенството на триъгълника. Аналогична е ситуацията в R^n - виж зад. 1 и 2 на §1.

нея почти навсякъде) функция. За да бъде $L_2(\mathbb{R}^n, \mu)$ линейно пространство, трябва да се убедим, че ако $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат на $L_2(\mathbb{R}^n, \mu)$, то същото е вярно и за $f(x) + g(x)$. Това следва от неравенството

$$|f(x) + g(x)|^2 \leq |f(x)|^2 + 2\,|f(x)g(x)| + |g(x)|^2\,,$$

където всички събираеми отдясно са интегруеми. Най-сетне, аксиомите $1'' - 3''$ на скаларното произведение се проверяват тривиално. ■

Забележка. В §1 ние говорихме само за скаларно произведение в реални линейни пространства. С малки изменения, същото е вярно и за комплексни линейни пространства, т.е. такива, в които е дефинирано умножение на елементите с комплексни числа. Единственото, което трябва да се промени, е аксиома $2''$ - тя добива вида
$2''/ \qquad \langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$
(в дясната част чертата отгоре означава вземането на комплексно спрегнато число). Ако в дефиницията на $L_2(\mathbb{R}^n, \mu)$ ние разгледаме не реалнозначните, а комплекснозначните функции, ние ще получим комплексно линейно пространство. В него скаларното произведение се определя с формулата

$$\langle f, g\rangle = \int_{R^n} f(x)\overline{g(x)}\; d\mu.$$

Ако $f(x)$ и $g(x)$ са реалнозначни, то съвпада с дефинираното по-горе. Всички получени по-долу резултати са в сила и за това скаларно произведение.

В §1 беше показано, че всяко скаларно произведение дефинира норма. В нащия случай получаваме

$$||f||_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\int_{R^n} |f(x)|^2\; d\mu}.$$

Така дефинираната норма ще наричаме втора интегрална норма. Както беше доказано в §1, тази норма удовлетворява аксиомите $1' - 3'$ на нормата. Важна роля в доказателството играеше неравенството на Коши-Шварц=Буняковски: $|\langle x, y\rangle| \leq ||x||\,||y||$. В нашия случай това неравенство добива вида

$$\left|\int_{R^n} f(x)g(x)\; d\mu\right| \leq \sqrt{\int_{R^n} |f(x)|^2\; d\mu}.\sqrt{\int_{R^n} |g(x)|^2\; d\mu}.$$

Както и в предишния раздел, и тук получаваме пълно пространство:

Теорема 28. *Пространството $L_2(\mu)$, снабдено с метриката $\rho_2(f,g) = ||f-g||_2$, е пълно метрично пространство.*

Доказателство. Почти без изменения ще повторим доказателството на теорема 22, в която същият факт бе доказан за $L_1(\mu)$. Нека $\{f_k\}$ е фундаментална редица от елементи на $L_2(\mu)$. Можем да изберем нейна подредица f_{k_s}такава, че $\left|\left|f_{k_{s+1}} - f_{k_s}\right|\right|_2 < 1/2^s$. Да разгледаме реда

$$\widetilde{f}(x) = |f_{k_1}(x)| + \sum_{s=1}^{\infty} \left| f_{k_{s+1}}(x) - f_{k_s}(x) \right|,$$

и да означим с $\widetilde{S}_N(x)$ неговата N-та частична сума. От неравенството на триъгълника за нормата $||\cdot||_2$ получаваме, че

$$\left|\left|\widetilde{S}_N(x)\right|\right|_2 \leq ||f_{k_1}||_2 + \sum_{s=1}^{N} \frac{1}{2^s} \leq ||f_{k_1}||_2 + 1.$$

Следователно, интегралите от функциите $\left|\widetilde{S}_N(x)\right|^2$ са ограничени. Прилагайки теоремата за монотонната сходимост, получаваме, че функциите $\left|\widetilde{S}_N(x)\right|^2$ клонят почти навсякъде към някоя интегруема функция, което означава, че определената по-горе сума на реда $\widetilde{f}(x)$ съществува почти навсякъде, и нейния квадрат $\widetilde{f}(x)^2$ е интегруем.

Оттук на свой ред следва, че редът

$$f_{k_1}(x) + \sum_{s=1}^{\infty} \Big(f_{k_{s+1}}(x) - f_{k_s}(x) \Big)$$

е сходящ почти навсякъде. s-тата частична сума на този ред съвпада с $f_{k_s}(x)$. Ако с $f(x)$ означим неговата сума, това означава, че почти навсякъде $f(x) = \lim_s f_{k_s}(x)$.

Ще докажем, че тази редица е сходяща и относно нормата. Очевидно имаме $|f(x)| \leq \widetilde{f}(x)$ и $|f_{k_s}(x)| \leq \widetilde{f}(x)$, откъдето получаваме

$$|f(x) - f_{k_s}(x)|^2 \leq \left(2\widetilde{f}(x)\right)^2,$$

откъдето по теоремата за мажорираната сходимост получаваме, че $||f - f_{k_s}||_2 = 0$.

Остава да докажем, че $f(x)$ е граница по норма не само на подредицата $f_{k_s}(x)$, но и на самата редица $f_k(x)$. Както и в теорема 22, при достатъчно голямо k и $k_s > k$ имаме

$$||f_k - f||_2 \leq ||f_k - f_{k_s}||_2 + ||f_{k_s} - f||_2 < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Теорема 24 и следствие 25 също са в сила и за пространството $L_2(\mu)$, като доказателствата не се различават от дадените по-горе.

Линейните пространства със скаларно произведение, които са пълни относно съответната норма, се наричат хилбертови пространства, на името на известния немски математик Хилберт.

2.9.12 Теорема за базата и сходимост на редовете на Фурие в L_2.

В края на §1 беше споменат следния факт от линейната алгебра: ако H е n-мерно пространство, и $e_1, \ldots e_n$ е ортонормирана система от n вектора в H, то тази система е и база в H. Това означава, че за всеки елемент $x \in H$ е налице разлагането

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \text{ , където } \lambda_i = \langle x, e_i \rangle \, .$$

В този раздел ще докажем аналогично твърдение за безкрайномерни хилбертови пространства, и ще разгледаме негови приложения в пространството L_2.

Ще напомним, че елементите x, y на хилбертовото пространство H се наричат *ортогонални* (записваме $x \perp y$), ако $\langle x, y \rangle = 0$. За ортогонални вектори е в сила питагоровата теорема (зад. 4 на §1). Следващото твърдение понякога се нарича "обобщена питагорова теорема":

Лема 29. *Нека $x = x_1 + \ldots + x_p$, където $x_1, \ldots, x_p$ са два по два ортогонални елементи на H, т.е. $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ при $i \neq j$. Тогава*

$$||x||^2 = \sum_{i=1}^{p} ||x_i||^2 \, .$$

Доказателство. Имаме

$$||x||^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{p} x_i, \sum_{j=1}^{p} x_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} \langle x_i, x_j\rangle = \sum_{i=1}^{p} \langle x_i, x_i\rangle . \quad \blacksquare$$

Следните дефиниции са същите, както в крайномерния случай:

Дефиниция. *Системата e_n, $n = 1, 2, \ldots$, от ненулеви елементи на H се нарича ортогонална, ако $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ при $i \neq j$. Системата се нарича ортонормирана, ако тя е ортогонална, и $||e_n|| = 1$ за всяко n.*

Една ортогонална система лесно може да бъде направена ортонормирана чрез умножаване с константи: наистина, ако $\{l_n\}$ е ортогонална система от елементи, то елементите $e_n = \frac{1}{||l_n||} l_n$ образуват ортонормирана система.

Основната разлика между крайномерния и безкрайномерния случай е следната: в крайномерния случай ние лесно можем да определим дали една ортонормирана система съдържа достатъчно много елементи, за да може да служи за база. Това е така, когато броят на елементите на системата е равен на размерността на пространството. В безкрайномерния случай ние не разполагаме с такъв критерий, и се налага да се поиска едно допълнително свойство:

Дефиниция. *Редицата e_n, $n = 1, 2, \ldots$, от елементи на H се нарича пълна система, ако техните крайни линейни комбинации (т.е. елементите от вида $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$) образуват множество, навсякъде гъсто в H.*

По-подробно, това означава, че за всеки елемент $x \in H$ и число $\varepsilon > 0$ съществува номер n и числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ такива, че $||x - (\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n)|| < \varepsilon$.

Сега можем да формулираме основната теорема на настоящия раздел. Накратко казано, тя твърди, че всяка пълна ортонормирана система е и база.

Теорема 30 (Теорема за базата). *Нека e_n, $n = 1, 2, \ldots$, е пълна ортонормирана система от елементи на H. Тогава:*

1/ За всеки елемент $x \in H$ е в сила равенството

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$$

В горното равенство сходимостта се разглежда спрямо нормата в H: по-точно, ако означим с

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$$

n-тата частична сума на реда вдясно, то твърдението е, че $||x - S_n|| \to 0$.

2/ (Равенство на Пърсифал). В сила е равенството

$$||x||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 .$$

Доказателство. Основна роля в доказателството играе т.н. лема за ортогоналната проекция. Както е известно, най-краткото разстояние между точка и права, която не минава през нея, се достига в петата на перпендикуляра, спуснат от точката към правата. Оказва се, че подобно твърдение е вярно и в произволно хилбертово пространство.

Ще напомним понятието разстояние между точка и множество в метрично пространство (виж зад. 2 към §3): Ако L е подмножество на някое метрично пространство и x е точка от това пространство, то по дефиниция $\rho(x, L) = \inf\limits_{y \in L} \rho(x, y)$.

Лема 31. (Лема за ортогоналната проекция). *Нека L е крайномерно линейно подпространство* * *на хилбертовото пространство H и x е точка от H, не принадлежаща на L. Тогава съществува единствена точка $y_0 \in L$ такава, че $\rho(x, y_0) = \rho(x, L)$. Точката y_0 се характеризира със това, че разликата $x - y_0$ е перпендикулярна на пространството L (т.е. на всички елементи от L).*

Доказателство на лемата. Нека означим с n размерността на L. Да изберем ортонормирана система $e_1, \ldots, e_n$ от елементи на L; тогава всеки елемент $y \in L$ се представя като тяхна линейна комбинация: $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$. Имаме

$$\rho(x, y)^2 = \left\langle x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, x - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \right\rangle = ||x||^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x, e_i \rangle + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 .$$

* Твърдението е вярно и в случая, когато L е произволно затворено линейно подпространство на H. Ние ще използваме обаче само крайномерния случай.

Бихме могли да използваме диференциалното смятане за намиране на минимума на горния израз като функция на $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, но това може да стане и елементарно чрез т.н. отделяне на пълен квадрат:

$$\rho(x,y)^2 = ||x||^2 - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i - \langle x, e_i \rangle\right)^2.$$

Тъй като третото събираемо отдясно е сума на квадрати, а първото и второто не съдържат променливите λ_i, то минималната стойност на този израз се достига, когато всички квадрати са нула, т.е. когато $\lambda_i = \langle x, e_i \rangle$ за $i = 1, \ldots, n$. Да означим съответната точка с y_0:

$$y_0 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Получихме, че

$$\inf_{y \in L} \rho(x,y) = \rho(x, y_0) = \sqrt{||x||^2 - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2}.$$

Остава да покажем, че $x - y_0$ е перпендикулярен на всички елементи от L. (т.е y_0 е пета на перпендикуляра, спуснат от x към L). Достатъчно е да докажем, че $(x - y_0) \perp e_1, \ldots, e_n$. Наистина, за за всяко $i = 1, \ldots, n$ имаме

$$\langle x - y_0, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle . \langle e_j, e_i \rangle = 0. \ \blacksquare$$

Продължаваме доказателството на теоремата за базата. Да означим с L_n пространството от всички линейни комбинации на елементите $e_1, \ldots, e_n$ от дадената пълна ортонормирана система. Очевидно L_n е n-мерно линейно подпространство на H, елементите $e_1, \ldots, e_n$ образуват ортонормиран базис в L_n, и са налице включванията

$$L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_n \subset \ldots$$

Нека $\rho_n = \rho(x, L_n)$. От монотонното нарастване на пространствата L_n следва, че числовата редица ρ_n монотонно намалява. От пълнотата на системата $\{e_n\}$ се вижда, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува n такова, че $\rho_n < \varepsilon$; това означава, че $\rho_n \to 0$. Да означим с $y_n \in L_n$ елемента от L_n, за който $\rho(x, y_n) = \rho_n$; по лемата, такъв елемент съществува, единствен е, и има представянето

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i,$$

т.е. y_n съвпада с частичната сума S_n на реда, участващ в точка 1/ на теоремата. Следователно $||x - S_n|| = \rho_n \to 0$, и точка 1/ е доказана.

В доказателството на лемата получихме равенството

$$||x - S_n||^2 = ||x||^2 - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2 .$$

След граничен преход по n оттук се получава равенството на Пърсифал от 2/. ■

Приложение: Тригонометричната система в $L_2[0, 2\pi]$ и разлагане на функциите в ред на Фурие. С $L_2[0, 2\pi]$ означаваме пространството на всички измерими функции $f(x)$, дефинирани за $x \in [0, 2\pi]$ и такива, че $|f(x)|^2$ е интегруема в този интервал. Да разгледаме системата от функции

$$1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$$

Тя се нарича тригонометрична система от функции в $[0, 2\pi]$. Да намерим скаларните произведения между тях: лесно се пресмята, че

$$\langle \cos nx, \cos mx \rangle = 0 \text{ при } n \neq m, = \pi \text{ при } n = m \neq 0, = 2\pi \text{ при } n = m = 0,$$

$$\langle \sin nx, \sin mx \rangle = 0 \text{ при } n \neq m, = \pi \text{ при } n = m,$$

$$\langle \sin nx, \cos mx \rangle = 0 \text{ при всички } n \text{ и } m.$$

Следователно системата е ортогонална; като разделим всеки елемент на нормата му в $L_2[0, 2\pi]$, получаваме ортонормираната система

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots,$$

която също се нарича тригонометрична система.

Лема 32. *Тригонометричната система е пълна в пространството* $L_2[0, 2\pi]$.

Доказателство. Крайните линейни комбинации на елементите на тригонометричната система са всъщност тригонометричните полиноми; трябва да докажем, че те са навсякъде гъсто в $L_2[0, 2\pi]$.

Най-напред ще отбележим, че според втората теорема на Вайерщрас за апроксимация, всяка непрекъсната функция $f(x)$ в интервала $[0, 2\pi]$, удовлетворяваща $f(0) = f(2\pi)$, може равномерно да се апроксимира с тригонометрични полиноми. Както видяхме по-горе, равномерната сходимост върхо множество с крайна мярка влече след себе си сходимост в L_1, и очевидно същото е вярно и за L_2. По-нататък, всяка непрекъсната функция в $[0, 2\pi]$ може да се апроксимира в L_2-нормата с такива, удовлетворяващи $f(0) = f(2\pi)$ (докажете!). Накрая, следствие 24 (по-точно, неговият вариант за L_2) показва, че непрекъснатите функции са навсякъде гъсто в $L_2[0, 2\pi]$, с което доказателството е завършено. ■

Следователно, за тригонометричната система от функции може да се приложи теоремата за базата. Нека $f(x) \in L_2[0, 2\pi]$. От теорема 30 получаваме равенството

$$f(x) = \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle f, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \cdot \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} + \left\langle f, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \cdot \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},$$

като сходимостта на реда вдясно се разглежда относно втората интегрална норма. Опростявайки, получаваме

$$f(x) = \langle f, 1 \rangle \frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \langle f, \cos nx \rangle \cdot \cos nx + \frac{1}{\pi} \langle f, \sin nx \rangle \cdot \sin nx \right).$$

Да означим свободния член с a_0, коефициента пред $\cos nx$ - с a_n, и коефициента пред $\sin nx$ - с b_n. Получаваме стандартния запис

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

където

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\, dx \text{ при } n > 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\, dx.$$

Така полученият ред се нарича <u>ред на Фурие</u> за функцията $f(x) \in L_2[0, 2\pi]$. Очевидни са оценките*

$$|a_0| \le \frac{1}{2\pi}\,||f||_1\,, \quad |a_n|\,,\ |b_n| \le \frac{1}{\pi}\,||f||_1\,.$$

Като следствие от теоремата за базата ние получаваме следния резултат, известен като Теорема на Рис-Фишер:

Теорема 33. *Редът на Фурие на всяка функция от $L_2[0, 2\pi]$ е сходящ към нея относно втората интегрална норма.*

Забележка. Съвсем различна е ситуацията, ако ние се интересуваме от поточковата или равномерна сходимост на реда на Фурие към функцията $f(x)$. Така например, съществуват непрекъснати функции, за които редът на Фурие е разходящ почти навсякъде (и въпреки това сходящ относно $||\cdot||_2$ съгласно горната теорема). Съществуват различни критерии за поточкова или равномерна сходимост; един от тях е даден по-долу в теорема 35.

Ще напишем и формулата на Пърсифал за реда на Фурие.

Теорема 34. *В сила е равенството*

$$||f||_2^2 = 2\pi a_0^2 + \pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

.

Доказателство. От точка 2/ на теорема 30 получаваме, че

$$||f||_2^2 = \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left\langle f, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}\right\rangle^2 + \left\langle f, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right\rangle^2\right),$$

откъдето веднага следва теоремата. ■

Комплексна форма на тригонометричната система. В тази подточка с $L_2[0, 2\pi]$ ще означаваме пространството на *комплекснозначните* измерими функции $f(x)$ на $[0, 2\pi]$ (т.е. функции, за които реалната

*Тези оценки показват, че редът на Фурие може да бъде дефиниран и за функциите от по-широкото пространство $L_1[0, 2\pi]$.

и имагинерната част са измерими), такива, че $|f(x)|^2$ е интегруема относно стандартната мярка върху този интервал. Както беше отбелязано по-горе, скаларното произведение

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

превръща това пространство в хилбертово, и всички твърдения, дказани по-горе за пространството от реалнозначните функции, са в сила и тук.

Сега можем да въведем тригонометричната система от функции по друг начин. От формулите на Ойлер имаме

$$\cos nx = \frac{1}{2}\left(e^{inx} + e^{-inx}\right), \quad \sin nx = \frac{1}{2i}\left(e^{inx} - e^{-inx}\right).$$

Следователно, двете функции $\cos nx$ и $\sin nx$ могат да бъдат заменени с други две: e^{inx} и e^{-inx}, без да се променя множеството на всички крайни линейни комбинации. Така стигаме до системата:

$$\ldots, e^{-inx}, \ldots, e^{-ix}, 1, e^{ix}, \ldots, e^{inx}, \ldots \;=\; \left\{e^{inx}\right\}_{n\in\mathbb{Z}} \;,$$

която ще наричаме комплексна форма на тригонометричната система. Лесно се проверява, че тази система е ортогонална; за да я направим ортонормирана, е достатъчно да разделим всеки елемент на нормата му, която е една и съща за всички и е равна на $\sqrt{2\pi}$. Теоремата за базата ни дава друга форма на реда на Фурие на $f(x)$:

$$f(x) \;=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left\langle f, \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle \cdot \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \;=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} \;,$$

където с c_n сме означили комплексното число

$$c_n \;=\; \frac{1}{2\pi}\left\langle f, e^{inx}\right\rangle \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\, dx.$$

(Разбира се, отново се има пред вид сходимост на съответния ред спрямо нормата в $L_2[0, 2\pi]$).

Сега формулата на Пърсифал добива вида

$$||f||_2^2 = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 .$$

В много случаи използването на комплексната форма на тригонометричната система води до опростяване на изчисленията: така например, тук имаме само една формула за коефициентите, вместо три различни формули в различните случаи, както беше за реалната система.

Един критерий за равномерна сходимост на реда на Фурие. Съществуват много критерии, осигуряващи поточковата или равномерна сходимост на реда на Фурие на дадена функция. Тук ще дадем един от най-простите.

Теорема 35. *Нека непрекъснатата функция $f(x)$ притежава непрекъсната или частично непрекъсната производна в $[0, 2\pi]$ и $f(0) = f(2\pi)$. Тогава редът на Фурие на функцията $f(x)$ е равномерно сходящ към нея в $[0, 2\pi]$.*

Доказателство. Ще използваме връзката между коефициентите на Фурие на функцията и на нейната производна, дадени в зад. 14. Нека $S_n(x)$ е n-тата частична сума на реда на Фурие на $f(x)$, и нека $R_n(x) = f(x) - S_n(x)$. Тогава

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k}\,|a'_k| + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k}\,|b'_k|$$

Прилагайки към последните суми неравенството на Коши-Шварц-Буняковски за редици, получаваме. че

$$|R_n(x)| \leq \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}} \left(\sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} (a'_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} (b'_k)^2}\right) \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,||f'||_2 \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}.$$

Тъй като редът $\sum \frac{1}{n^2}$ е сходящ, то дясната страна клони към нула при $n \to \infty$. ■

Забележка. Като вземем предвид, че n-тият остатък на реда $\sum \frac{1}{n^2}$ е от порядък $1/n$, и че редовете $\sum (a'_k)^2$ и $\sum (b'_k)^2$ са сходящи, т.е. техните остатъци клонят към нула, получаваме оценка за остатъка на реда на

Фурие

$$|R_n(x)| = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Упражнения.

1. (Пример на неизмеримо множество.) Да въведем върху интервала $[0,1]$ следната релация на еквивалентност: ако $x, y \in [0,1]$, ще казваме, че те са еквивалентни, ако $x - y$ е рационално. Интервалът $[0,1]$ се представя като обединение на непресичащи се класи на еквивалентност относно тази релация: $[0,1] = \cup_\alpha E_\alpha$. Нека N е множество, което съдържа точно по един елемент от всеки клас на еквивалентност* E_α. Докажете, че множеството N не е измеримо спрямо стандартната мярка на $\mathbb{R}$.

Упътване. 1. Нека $\{r_k\}_{k=1,2,\dots}$ е редицата от всички рационални числа в интервала $[-1,1]$, и $N_k = N + r_k$. Докажете, че множествата N_k нямат общи точки за различни k, и

$$[0.1] \subset \cup_{k=1}^{\infty} N_k \subset [-1,2].$$

2. Да допуснем, че N е измеримо; тогава $\mu(N_k) = \mu(N)$ за всяко k. Използвайки σ-адитивността на мярката, докажете, че всяко от предположенията $\mu(N) = 0$ и $\mu(N) > 0$ води до противоречие с резултатите на точка 1.

Забележка. Изпълнено е и по-силно твърдение, което няма да доказваме: всяко измеримо множество с ненулева мярка съдържа неизмеримо подмножество.

2. Докажете, че всяко отворено множество U в $\mathbb{R}^n$ е измеримо.

Упътване. Докажете, че U може да се представи като обединение на всички правоъгълни паралелепипеди, съдържащи се в U. Докажете, че това представяне няма да се измени, ако се вземат само онези паралелепипеди, чиито върхове са рационални точки (т.е. точки от $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$).

---

*Съществуването на такова множество се твърди от т.н. аксиома за избора - една от аксиомите на теорията на множествата. Тази аксиома дълго време е била оспорвана поради парадоксалните резултати, до които води. Не е известна конструкция на неизмеримо множество, която да не използва тази аксиома.

Докажете, че множеството на всички такива паралелепипеди е изброимо.

3. Докажете, че всяко отворено множество U в $\mathbb{R}^n$ може да се представи като обединение на изброимо много затворени правоъгълни паралелепипеди с непресичащи се вътрешности.

Упътване (за случая на $\mathbb{R}^2$). Да разделим равнината на квадрати със страна единица (с върхове в целочислените точки), и да означим с V_1 обединението на тези затворени квадрати, които се съдържат в U. Да разделим след това равнината на квадрати с дължина $1/2$, т.е. с върхове в точките, чиито кординати са целочислено кратни на $1/2$, и да означим с V_2 обединението на тези от тях, които се съдържат в U, но не се съдържат в V_1. Продължавайки така, получаваме, че $U = V_1 \cup V_2 \cup \ldots$, откъдето следва твърдението.

4. Докажете, че ако $\varphi : U \to V$ е взаимно еднозначно и взаимно непрекъснато изображение между областите U и V в $\mathbb{R}^n$, то φ запазва борелевите множества , т.е. $\varphi(A)$ е борелево точно тогава, когато A е борелево.

5. Покажете, че твърдението от предната задача престава да бъде вярно, ако вместо "борелево"напишем "измеримо по Лебег"или "пренебрежимо по Лебег".

Упътване. Нека K и $\kappa(x)$ са съответно множеството на Кантор и функцията на Кантор в интервала $[0, 1]$, дефинирани в упражненията към §1. Да разгледаме функцията $\varphi(x) = x + \kappa(x)$, $x \in [0, 1]$.

а/ Докажете, че $\varphi(x)$ е непрекъсната и строго монотонно растяща, и следователно определя взаимно еднозначно и взаимно непрекъснато съответствие между интервала $[0, 1]$ и интервала $[0, 2]$.

б/ Докажете, че K е пренебрежимо множество в $[0, 1]$, докато $\mu\left(\varphi(K)\right) = 1$.

в/ Нека A е неизмеримо подмножество на $\varphi(K)$ (виж забележката след зад. 1), и $B = \varphi^{-1}(A)$. Тогава B е пренебрежимо и следователно измеримо, докато A не е такова.

6. Докажете, че множеството B от задача 5. в/ е измеримо, но не е борелево (използвайте задача 4.)

7. Нека $\chi_A(x)$ и $\chi_B(x)$ да са характеристичните функции съответно на множествата A и B от от задача 5. в/. Тогава $\chi_B(x)$ е измерима функция и $\chi_A(x) = \chi_B\left(\varphi^{-1}(x)\right)$, но $\chi_A(x)$ не е измерима.

8. Нека $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми функции върху $\mathbb{R}$, $\widehat{f}(\xi)$ и $\widehat{g}(\xi)$ са техните преобразования на Фурие (виж края на раздел 6), и $f * g(x)$ е тяхната конволюция (виж края на раздел 8). Докажете, че

а/ $||f * g||_1 \leq ||f||_1\, ||g||_1$

б/ $\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi).\widehat{g}(\xi)$.

9. Нека $x_0 \in \mathbb{R}$ и $\alpha(x)$ е монотонната функция, дефинирана с равенствата

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако } \ x \leq x_0, \\ 1, & \text{ако } \ x > x_0. \end{cases}$$

Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0. Докажете, че $f(x)$ е интегруема спрямо мярката μ_α, и пресметнете $\int_R f(x)\, d\alpha(x)$. Докажете, че $L_1\left(\mu_\alpha\right) \approx \mathbb{R}$.

10. Нека е дадена функцията $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$ (с други думи, интегруема относно стандартната мярка на $\mathbb{R}$), която е диференцируема навсякъде, като $f'(x)$ също принадлежи на $L_1(\mathbb{R})$. Докажете чрез интегриране по части, че

$$\widehat{f'}(\xi) = i\xi \widehat{f}(\xi).$$

Упътване. Предварително покажете, че $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

11. (Лема на Риман.) Покажете, че за всяка функция $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$ е изпълнено

$$\lim_{\xi\to\pm\infty} \widehat{f}(\xi) = 0.$$

Упътване. Стъпка 1. Докажете, че твърдението е вярно за всички функции, удовлетворяващи условието на предната задача. Стъпка 2. Използвайте, че по следствие 24 всяка функция $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$ може да се апроксимира с такива функции.

12. Докажете, че ако $M \in \mathbb{R}^n$ е ограничено измеримо множество, то $L_2(M)$ се съдържа в $L_1(M)$.

13. Нека M е подмножеството на $L_2[0, 2\pi]$, състоящо се от всички функции от вида $\sin nx$, $n = 1, 2, \ldots$. Докажете, че M е ограничено и затворено, но не е компактно (т.е. не е изпълнена теоремата на Болцано-Вайерщрас за съществуване на сходяща подредица).

Упътване. Използвайте, че $\rho_2(\sin nx, \sin mx) = \sqrt{2\pi}$ при $n \neq m$.

14. Нека непрекъснатата функция $f(x)$ притежава непрекъсната или частично непрекъсната производна в $[0, 2\pi]$ и $f(0) = f(2\pi)$. Нека a_n, b_n, c_n да означават, както и по-горе, коефициентите на Фурие на $f(x)$, а a'_n, b'_n, c'_n - съответните коефициенти за производната $f'(x)$. Докажете. че са в сила равенствата

$$a'_n = n.b_n,\ b'_n = -n.a_n,\ c'_n = in.c_n.$$

Забележка. Да направим формално диференциране на реда на Фурие (в реалната или комплексната форма). Ще получим ред на Фурие с коефициенти, дадени с горните формули. Разбира се, в случая формалното диференциране на реда в никакъв случай не е законна операция, но въпреки това води до верни формули.

Упътване. Използвайте интегриране по части.

Предметен указател

Съдържание