

Диференциално и Интегрално смятане заедно за изпит

Критерии за сходимост на не собствен
интеграл (за функция с постоянен знак в
интеграционния интервал)

Ако $f(x) = O^*(g(x))$ при $x \rightarrow b$ (b може
да е ∞)

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = A + 0$$

То $\int_a^b f(x) dx$ и $\int_a^b g(x) dx$ са

едновременно сходящи или разходящи

$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ изследвайте за сходимост
в зависимост от $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_0^1 = \frac{1 - \lim_{x \rightarrow 0} x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Rightarrow \Rightarrow$$

$$\alpha \neq 1$$

Ако $-\alpha+1 > 0$ то $\lim_{x \rightarrow 0} x^{-\alpha+1} = 0$
Ако $-\alpha+1 < 0$ то $\lim_{x \rightarrow 0} x^{-\alpha+1} = \infty$

$$\Rightarrow = \begin{cases} \frac{1}{-d+1} & d < 1 \\ \infty, & d > 1 \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{1}{x} \right| = -\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = \infty$$

① Окончателно при $d \geq 1$ интеграла е разходящ. При $d < 1$ интеграл е сходящ

задача Втори от листа

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} dx}{\sqrt[p]{x^2-1}} = \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} dx}{\sqrt[p]{x^2-1}} =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{p-1} dx}{\sqrt[p]{x^2-1}} + \int_1^{\infty} \frac{x^{p-1} dx}{\sqrt[p]{x^2-1}} = \text{Представяме го още веднъж}$$

$$= \int_0^{1/2} \frac{x^{p-1} dx}{\sqrt[p]{x^2-1}} + \int_{1/2}^1 \frac{x^{p-1} dx}{\sqrt[p]{x^2-1}} + \int_1^2 \frac{x^{p-1} dx}{\sqrt[p]{x^2-1}} + \int_2^{\infty} \frac{x^{p-1} dx}{\sqrt[p]{x^2-1}}$$

I разглеждаме:

$$f(x) = \frac{x^{p-1}}{\sqrt[p]{x^2-1}}, \quad x \in (0, \frac{1}{2}] \quad \text{нека тогава} \quad g(x) = x^{p-1}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \neq 0$$

$\Rightarrow \int_0^{1/2} f(x) dx$ и $\int_0^{1/2} g(x) dx$ са едновременно

сходящи и разходящи

$$\int_0^{1/2} g(x) dx = \int_0^{1/2} x^{p-1} dx = \int_0^{1/2} \frac{dx}{x^{1-p}}$$

сходящ е при $1-p < 1 \Leftrightarrow p > 0$

разходящ при $p \leq 0$ от (1)

разглеждаме:

$$\text{II} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = p^{-1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1 = 0$$

$$\int_{1/2}^1 g(x) dx = \int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2-1}} = \int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)} \sqrt[3]{(x+1)}} = \Rightarrow$$

$$\Rightarrow = \int_{1/2}^1 \frac{dx-1}{\sqrt[3]{x-1}} = \frac{(x-1)^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} \bigg|_{1/2}^1 < \infty$$

Този интеграл е винаги сходящ
защото не клони към безкрайност

и III е сходящ по същите съображения
както II

разглеждаме:

$$\text{IV} \int_2^{\infty} \frac{x^{p-1} dx}{\sqrt[3]{x^2(1-\frac{1}{x^2})}} = \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^{1-p} \cdot x^{\frac{2}{3}} \cdot (1-\frac{1}{x^2})^{\frac{2}{3}}} =$$

$$= \int_2^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{5}{3}-p}} \cdot \frac{dx}{\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^2}}}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^2}}} \cdot \frac{1}{x^{\frac{5}{3}-p}}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^{\frac{5}{3}-p}} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^2}}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1 \neq 0$$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ При $\frac{5}{3} - p > 1 - cx$

При $p \geq \frac{2}{3}$ - разсход.

(2)

При $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ с.х. $x > 1$
разсх. $x \leq 1$

Исходния интеграл е сходящ ако:

$$\begin{cases} p < \frac{2}{3} \\ p > 0 \end{cases} \Leftrightarrow p \in (0, \frac{2}{3})$$

и ще бъде разходящ при:

$$p \in (-\infty; 0] \cup [\frac{2}{3}; +\infty) \quad \square$$

задача като трета:

Пресметнете частните производни на

$$f(x, y) = \operatorname{ch} \sqrt[5]{x^2 y}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \operatorname{ch} x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \operatorname{sh} \sqrt[5]{x^2 y} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt[5]{x^2 y}) = \operatorname{sh} \sqrt[5]{x^2 y} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{x^2 y}} \cdot 2x$$

Нека фиксираме $y_0 \neq 0$ и разгледаме

$\varphi(x) = f(x, y_0)$ в околност на 0

$$\begin{aligned} & (0, y), \quad y \in \mathbb{R} \\ & (x, 0), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$U'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{U(x) - U(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, y_0) - f(0, y_0)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} \sqrt[5]{x^2 y_0} - 1}{x} = \textcircled{1}$$

~~как ее~~ представляем $\operatorname{ch} x$ в окрестности нуля

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

$$e^x \sim 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

заменяем e^{-x} в теорему и в ЛАТ

$$\operatorname{ch} x \sim \frac{1}{2} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + 1 - x + \frac{x^2}{2} \right) \begin{matrix} \text{здесь} \\ \text{мы} \\ \text{сменили} \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{2} (2 + x^2)$$

$$\textcircled{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} (2 + \sqrt[5]{x^2 y_0}) - 1}{x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{x^2 y_0}}{x} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{(x^2 y_0)^2}}{\sqrt[5]{x^5}} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[5]{\frac{x^4 y_0^2}{x^5}} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[5]{\frac{y_0^2}{x}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0) = 0 \text{ для } \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 / y \neq 0\}$$

-6- $\frac{\partial f}{\partial x}$ не существует

$$\psi(y) = f(x_0, y) = \operatorname{ch} \sqrt[5]{x_0^2 y}$$

$$\psi'(0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} \sqrt[5]{x_0^2 y} - 1}{y}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(2 + \sqrt[5]{x_0^2 y}) - 1}{y} = \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \sqrt[5]{\frac{x_0^2 y^2}{y^5}} = \begin{cases} \infty \\ 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$$

3.8)

$$f(x, y) = g(\overset{u}{\underbrace{x}}, \overset{v}{\underbrace{x^2 - y^2}}, \overset{w}{\underbrace{-y}})$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g^{(u,v,w)}}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g^{(u,v,w)}}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial g^{(u,v,w)}}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$u(x, y) = x$$

$$v(x, y) = x^2 - y^2$$

$$w(x, y) = -y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -1$$



$$\frac{\partial f}{\partial x} = g'_u + g'_v \cdot 2x$$

Това са частните производни от втор

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y \cdot g'_v - g'_w$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = ?$$

тези от втора ред

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} (g'_u + g'_v \cdot 2x) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} (g'_u(x, x^2 - y^2, -y) + 2g'_v(x, x^2 - y^2, -y) + 2x \frac{\partial}{\partial x} g'_v(x, x^2 - y^2, -y)) =$$

$$\frac{\partial}{\partial x} g'_u(x, x^2 - y^2, -y) =$$

$$= \frac{\partial g'_u}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g'_u}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial g'_u}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} =$$

$$= g''_{uu} + 2x g''_{uv}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} g'_v(x, x^2 - y^2, -y) = g''_{vu} + 2x g''_{vv}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = g''_{uu} + 2x g''_{uv} + 2g'_{vu} + 2x(g''_{vu} + 2x g''_{vv})$$

трябва да намерим $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$
 $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

задача като Тетворта:

Намерете НГС и НМС на

Теорема
Вайерштрас

$$f(x, y) = x - y + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

В дифференциалното множество на функцията

$$DM \quad 1 - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 1$$

а) намерете
стационарните точки



$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2-y^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2-y^2} - x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-\sqrt{1-x^2-y^2} - y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$\begin{aligned} \nabla f = 0 \Leftrightarrow & \left| \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \sqrt{1-x^2-y^2} = x \\ \sqrt{1-x^2-y^2} = -y \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \leq 0 \end{array} \\ & \quad \quad \quad -y - \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-x^2-y^2=x^2 \\ 1-x^2-y^2=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=y^2 \\ 1-x^2-y^2=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y)=0 \\ 1+x^2+y^2=2x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-y \\ 1-x^2-y^2=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y \\ 1=3x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$y = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Верху окружности $x^2+y^2=1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x,y) = x-y$$

Нека $x = \cos t \quad t \in [0, 2\pi]$

$y = \sin t$

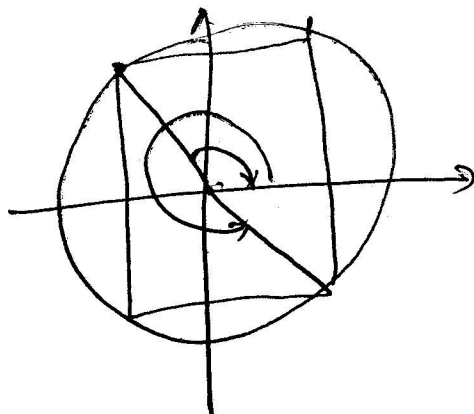
Тон $g(t) = f(\cos t, \sin t) =$

$= \cos t - \sin t$ таулар не ұндызбоукаа

$$g'(t) = -\sin t - \cos t$$

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow -\sin t - \cos t = 0$$

$$\Rightarrow \sin t = -\cos t$$



$$t_1 = \frac{3\pi}{4}$$

$$t_2 = \frac{7\pi}{4}$$

$$g_{\min}^{\max} = \left\{ \min_{\max} \{ g(t_1), g(t_2) \} \right|$$

$$\Rightarrow f_{\max} = \max \left\{ f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \dots \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$g(t_1) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

$$g(t_2) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow f_{\max} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow f_{\min} = \min \{ \sqrt{3}, -\sqrt{2}, \sqrt{2} \} = -\sqrt{2}$$

Намерете локалните екстремуми на

$$f(x, y, z) = 8 - 6x + 4y - 2z - x^2 - y^2 - z^2$$

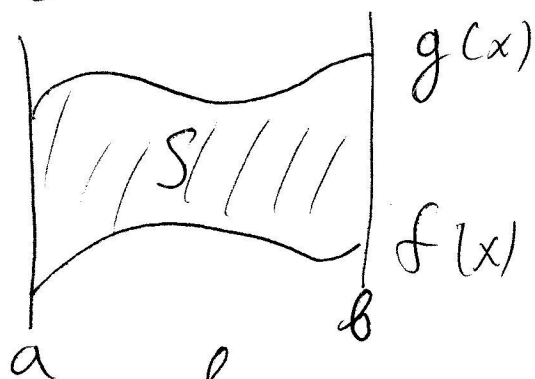
$$\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = -6 - 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 4 - 2y \\ \frac{\partial f}{\partial z} = -2 - 2z \end{array} \left| \begin{array}{l} -6 - 2x = 0 \\ 4 - 2y = 0 \Rightarrow \\ -2 - 2z = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} x = -3 \text{ Това е} \\ y = 2 \text{ локален} \\ z = -1 \text{ максимум} \end{array} \quad (-3, 2, -1)$$

$$\begin{aligned} d^2 f &= \cancel{-2dx} \times d(-6 - 2x)dx + d(4 - 2y)dy + \\ &\quad + d(-2 - 2z)dz \end{aligned}$$

$$= -2(dx)^2 - 2(dy)^2 - 2(dz)^2 < 0$$

⇒ f глоб. макс е в $f(-3, 2, -1) = 22$

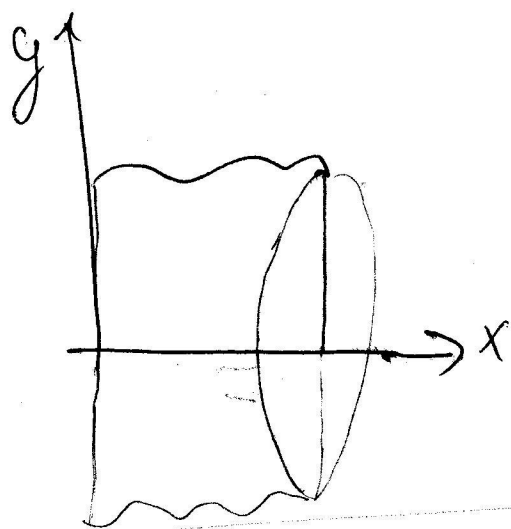
заедно като първа:



$$f(x) \leq g(x) \text{ за всяка } x \in [a, b]$$

$$S = \int_a^b g(x) - f(x) dx$$

формула за
лиже



$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Обема на ротационно
тело

$$x = u(t) \quad t \in [a, b]$$

$$y = \psi(t)$$

$$z = \varphi(t)$$

$$L = \int_a^b \sqrt{(u'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\varphi'(t))^2} dt$$

Честен случай за равнинна крива от

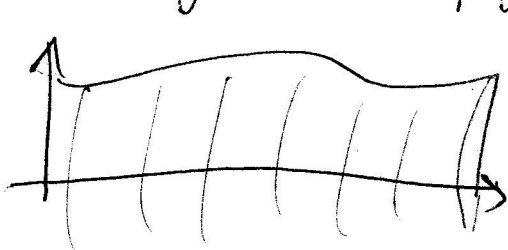
$$\text{вида } y = f(x) \quad x \in [a, b]$$

$$| \begin{matrix} x = t \\ y = f(t) \end{matrix} \quad t \in [a, b]$$

$$L = \int_a^b \sqrt{(t')^2 + (f'(t))^2} dt =$$

$$= \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Може на ротацноно тело



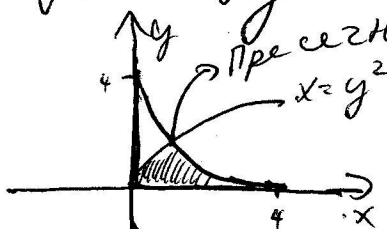
$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Ще се направят отделни

задачи за всеки от случаите

заг. Пресметнете лицето на областта

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 2, x \geq y^2, y \geq 0\}$$



Търсим пресечната точка

$$\begin{cases} x = y^2 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y^2 \\ y + \sqrt{y} = 2 \end{cases}$$

$$(\sqrt{y})^2 + \sqrt{y} - 2 = 0$$

$$\sqrt{y} = \frac{-1 + 3}{2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \int_0^1 \sqrt{x} dx + \int_1^4 (2 - \sqrt{x})^2 dx &= \\
 &= \left. \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right|_0^1 + \int_1^4 4 - 4\sqrt{x} + x dx = \\
 &= \frac{2}{3} + 4(4-1) - 4x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} \Big|_1^4 + \frac{x^2}{2} \Big|_1^4 =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3} + 12 - \frac{8}{3}(8-1) + \frac{15}{2}$$

зад. Пресметнете дължината на кривата

a) $y = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$, $2 \leq x \leq 3$

b) $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = \sqrt{2}t$, $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}
 a) \quad y' &= \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \left(1 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} \right) = \\
 &= \frac{\sqrt{x^2 - 1} - x}{\sqrt{x^2 - 1}(x - \sqrt{x^2 - 1})} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}
 \end{aligned}$$

заместваме във формулата

$$\sqrt{1 + (y'(x))^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2 - 1}} = \sqrt{\frac{x^2 - 1 + 1}{x^2 - 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 L &= \int_2^3 \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx = \\
 &= \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{d(x^2-1)}{\sqrt{x^2-1}} = \int_2^3 (x^2-1)^{-\frac{1}{2}} d(x^2-1) = \sqrt{x^2-1} \Big|_2^3 = \\
 &= \sqrt{8} - \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

задача:

Пресметнете Обема на ротационното тяло
получено от въртенето на кривата

$$y = \sqrt{x} e^{-x}, x \in [0, 1]$$

Около $y=0$ (абсцисната ос)

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^1 (\sqrt{x} e^{-x})^2 dx = \pi \int_0^1 x e^{-2x} dx = \\
 &= \pi \int_0^1 x \frac{d e^{-2x}}{-2} = \pi \left(\frac{x e^{-2x}}{-2} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{-2x}}{-2} dx \right) = \\
 &= \pi \left(-\frac{e^{-2}}{2} + \frac{1}{2} \frac{e^{-2x}}{-2} \Big|_0^1 \right) = \pi \left(-\frac{e^{-2}}{2} - \frac{1}{4} (e^{-2} - 1) \right) = \\
 &= \pi \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4} e^{-2} \right)
 \end{aligned}$$

Лицето на повърхнината на ротаци-
онното тяло получено от въртенето
на кривата $y = x^3$ $x \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}
 S &= 2\pi \int_0^1 y \sqrt{1 + (y')^2} dx = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + (3x^2)^2} dx = \\
 &= 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx = \frac{2\pi}{4 \cdot 9} \int_0^1 \sqrt{1 + 9x^4} d(9x^4 + 1) = \\
 &= \frac{\pi}{18} \frac{2}{3} (1 + 9x^4)^{\frac{1}{2} + 1} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{27} \left(10^{\frac{3}{2}} - 1 \right)
 \end{aligned}$$