

Примерни задачи по Линейна алгебра
за специалност Математика, 2012-2013 уч.г.

1 Задачи за контролна работа № 1

Задача 1. Да се извършат означените действия:

$$(i) \quad (2+i)^2 + (2-i)^2; \quad (ii) \quad (1+2i)^3 - (1-2i)^3; \quad (iii) \quad \frac{1+i \tan(\alpha)}{1-i \tan(\alpha)};$$

$$(iv) \quad \frac{(1+2i)^2 - (2-i)^3}{(1-i)^3 + (2+i)^2}; \quad (v) \quad \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3k+2}, k \in \mathbb{Z};$$

$$(vi) \quad \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{6k}, k \in \mathbb{Z}; \quad (vii) \quad \sqrt{2i}; \quad (viii) \quad \sqrt{3-4i};$$

$$(ix) \quad \sqrt[3]{-27}; \quad (x) \quad \sqrt[4]{16}.$$

Отговори: (i) 6; (ii) $-4i$; (iii) $\cos(2\alpha) + i \sin(2\alpha)$; (iv) $5 + 5i$; (v) $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; (vi) 1; (vii) $\pm(1+i)$; (viii) $\pm(2-i)$; (ix) $\frac{3}{2} \pm i\frac{3\sqrt{3}}{2}$, -3 ; (x) ± 2 , $\pm 2i$.

Задача 2. Нека n, m са естествени числа, n не дели m , а $\omega_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ за $0 \leq k \leq n-1$ са n -тите корени на единицата. Да се докаже, че

$$\omega_0^m + \omega_1^m + \dots + \omega_{n-1}^m = 0.$$

Задача 3. За $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ да се докаже, че:

$$\cos x + \cos(2x) + \dots + \cos(nx) = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right) \cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \quad u$$

$$\sin x + \sin(2x) + \dots + \sin(nx) = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right) \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Задача 4. Да се решат системите линейни уравнения:

$$(i) \quad \begin{cases} x_1 & +x_2 & +2x_3 & = 8 \\ -x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = 1 \\ 3x_1 & -7x_2 & +4x_3 & = 10 \end{cases} \quad (ii) \quad \begin{cases} x_1 - & x_2 & +2x_3 & -x_4 & = -1 \\ 2x_1 & +x_2 & -2x_3 & -2x_4 & = -2 \\ -x_1 & +2x_2 & -4x_3 & +x_4 & = 1 \\ 3x_1 & & & -3x_4 & = -3 \end{cases};$$

$$(iii) \quad \begin{vmatrix} -2x_2 & +3x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & +6x_2 & -3x_3 & = & -2 \\ 6x_1 & +6x_2 & +3x_3 & = & 5 \end{vmatrix}.$$

Отговори: (i) $(3, 1, 2)$; (ii) $(x_4 - 1, 2x_3, x_3, x_4)$ за произволни x_3, x_4 ;
(iii) системата няма решение.

Задача 5. Да се решат системите линейни уравнения в зависимост от стойностите на участващите параметри $a, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{C}$:

$$(i) \quad \begin{vmatrix} (1-3a)x_1 & +3x_2 & +x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & +5x_2 & -x_3 & = & 8a \\ 3x_1 & 7x_2 & -7x_3 & = & 6a \end{vmatrix}; \quad (ii) \quad \begin{vmatrix} & & x_3 & +x_4 & = & b_1 \\ & x_2 & & +x_4 & = & b_2 \\ x_1 & & & x_4 & = & b_3 \\ ax_1 & +ax_2 & +ax_3 & -x_4 & = & 0 \end{vmatrix}.$$

Отговори: (i) Ако $a = 0$, то системата е несъвместима. За $a \neq 0$ системата има единствено решение

$$\left(\frac{4}{3a} - 26a, \quad 12a - \frac{11}{21a}, \quad \frac{1}{21a} \right).$$

(ii) Ако $a = -\frac{1}{3}$ и $b_1 + b_2 + b_3 \neq 0$, то системата е несъвместима. Ако $a = -\frac{1}{3}$ и $b_1 + b_2 + b_3 = 0$, то системата има решения $(b_3 - x_4, b_2 - x_4, b_1 - x_4, x_4)$ за произволни x_4 . За $a \neq -\frac{1}{3}$ системата има единствено решение

$$\left(\frac{b_3 + a(-b_1 - b_2 + 2b_3)}{3a + 1}, \quad \frac{b_2 + a(-b_1 + 2b_2 - b_3)}{3a + 1}, \quad \frac{b_1 + a(2b_1 - b_2 - b_3)}{3a + 1} \right).$$

В задачи (6) - (14) да се пресметнат детерминантите:

Задача 6. Пачи крак е

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & b_n \\ c_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ c_n & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{vmatrix}.$$

Задача 7.

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 2 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-1 & n-1 & n-1 & \dots & x & 0 \\ n & n & n & \dots & n & x \end{vmatrix}.$$

Упътване: Представете Δ_{n+1} като сума спрямо първия ред, така че едното събираемо да има равни елементи в първи ред.

Задача 8.

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x_1 & -x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_1 & x_2 & \dots & -x_{n-1} & x_n \\ 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & -x_n \end{vmatrix}.$$

Упътване: Умножете първи стълб с $-x_i$ и прибавете към $(i+1)$ -ви стълб за $1 \leq i \leq n$.

Задача 9.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x+y & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ y & x+y & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & y & x+y & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x+y & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & y & x+y \end{vmatrix}.$$

Упътване: Изведете рекурентна зависимост от втора степен с постоянни коефициенти.

Задача 10.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x+y & 2x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{y}{2} & x+y & 2x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{y}{2} & x+y & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x+y & 2x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{y}{2} & x+y \end{vmatrix}.$$

Упътване: Изведете рекурентна зависимост от втора степен с постоянни коефициенти.

Задача 11.

$$\Delta_n = \det(\sin(\alpha_i + \beta_j))_{i,j=1}^n.$$

Упътване: Представете като произведение на детерминанти.

Задача 12.

$$\Delta_n = \det \left(\frac{1 - a_i^n b_j^n}{1 - a_i b_j} \right)_{i,j=1}^n.$$

Упътване: Представете като произведение на детерминанти.

Задача 13.

$$\Delta_{n+1} = \det((a_i + b_j)^n)_{i,j=0}^n.$$

Упътване: Представете като произведение на детерминанти.

Задача 14.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \dots & \binom{n}{1} \\ 1 & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} & \dots & \binom{n+1}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \binom{n-1}{n-2} & \binom{n}{n-2} & \dots & \binom{2n-3}{n-2} \\ 1 & \binom{n}{n-1} & \binom{n+1}{n-1} & \dots & \binom{2n-2}{n-1} \end{vmatrix}.$$

Упътване: Докажете, че $\Delta_n = \Delta_{n-1}$, като от всеки стълб извадите предишния, започвайки от последния. После от всеки ред извадете предишния, започвайки от последния.

Задача 15. Да се решат матричните уравнения:

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(б) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};$$

$$(в) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix} Z = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix};$$

Упътване: Когато матричният коефициент е необратим, разпишете матричното уравнение като система линейни уравнения за елементите на неизвестната матрица.

Отговор: (a) $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -6 \\ 1 & -4 \end{pmatrix};$

(б) Матричното уравнение е еквивалентно на

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \\ y_{31} & y_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

и има решение

$$Y = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}y_{31} + \frac{3}{4} & -\frac{1}{4}y_{32} \\ \frac{7}{4}y_{31} - \frac{1}{4} & \frac{7}{4}y_{32} + 1 \\ y_{31} & y_{32} \end{pmatrix}$$

за произволни y_{31}, y_{32} .

(в) Матричното уравнение е еквивалентно на

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 \\ 0 & 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \\ y_{31} & y_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

и няма решение, защото вторият и третият ред на лявата страна съвпадат, докато вторият ред е различен от третия в дясната страна.

Задача 16. Да се намери обратната A^{-1} на матрицата

$$(i) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{Q}); \quad (ii) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4 \times 4}(\mathbb{Q});$$

$$(iii) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{n \times n}(\mathbb{Q}).$$

Отговор:

$$(i) \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad (ii) \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & -8 & 13 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 5 & -8 \end{pmatrix};$$

(iii) Ако редовете на A от втори до n -ти се заменят с разликите на първия ред с тези редове, а така модифицираните редове се извадят от първия, получаваме единичната матрица. Прилагането на същите елементарни преобразувания към единичната матрица дава

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2-n & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2 Задачи за контролна работа № 2

Задача 17. Кои от следните подмножества на $\mathbb{Q}^2$ са подпространства:

$$M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid x = 2y\},$$

$$M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid x = 2y, \quad 2x = y\},$$

$$M_3 = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid x = 2y + 1\},$$

$$M_4 = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid xy = 0\}.$$

Решение: Подмножеството M_1 е подпространство съгласно $(2y_1 + 2y_2, y_1 + y_2) \in M_1$ за произволни $(2y_1, y_1), (2y_2, y_2) \in M_1$ и $q(2y_1, y_1) = (2(qy_1), qy_1) \in M_1$ за $\forall q \in \mathbb{Q}$, $\forall (2y_1, y_1) \in M_1$.

Подмножеството $M_2 = \{(0, 0)\} \subset \mathbb{Q}^2$ е подпространство.

Множеството M_3 не е подпространство на $\mathbb{Q}^2$, защото сумата на $(2y_1 + 1, y_1) \in M_3$ и $(2y_2 + 1, y_2) \in M_3$ е $(2(y_1 + y_2) + 2, (y_1 + y_2)) \notin M_3$ и $q(2y_1 + 1, y_1) = (2(qy_1) + q, qy_1) \notin M_3$ за $q \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$.

За $\forall (x, y) \in M_4$ и $\forall q \in \mathbb{Q}$ е в сила $q(x, y) = (qx, qy) \in M_4$, защото $(qx)(qy) = q^2(xy) = 0$. Но M_4 не е подпространство на $\mathbb{Q}^2$, защото $(1, 0), (0, 1) \in M_4$ и $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin M_4$.

Задача 18. За кои стойности на реалния параметър λ векторите

$$a_1 = (\lambda, -1, -1), \quad a_2 = (-1, \lambda, -1), \quad a_3 = (-1, -1, \lambda) \in \mathbb{R}^3$$

са линейно независими?

Решение: Векторите a_1, a_2, a_3 са линейно независими точно когато

$$\det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2(\lambda - 2) \neq 0.$$

Задача 19. Дадена е матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 8 & 11 & 19 & 0 & 11 \end{pmatrix} \in M_{4 \times 5}(\mathbb{Q}).$$

Намерете базис на пространството на вектор-редовете на A и базис на пространството на вектор-стълбовете на A . Определете ранга на A .

Решение: С елементарни преобразувания по редове свеждаме A към

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

и определяме, че $\text{rk}(A) = 4$. Четирите реда на A образуват базис на вектор-редовете.

За стълбовете $c_1, \dots, c_5$ на A пресмятаме, че $c_1 - c_3 - 3c_4 + c_5 = \mathcal{O}$. Следователно кои и да са четири стълба на A , включващи c_2 , образуват базис на пространството на вектор-стълбовете.

Задача 20. В линейното пространство $\mathbb{Q}^4$ са дадени пространството от решения U на хомогенната линейна система

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

и пространството от решения W на хомогенната линейна система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}. \quad (2)$$

Да се намерят базиси на сечението $U \cap W$ и сумата $U + W$.

Решение: Сечението $U \cap W$ е пространството от решения на хомогенната линейна система

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}, \quad (3)$$

получена чрез обединение на уравненията на системите (1) и (2). Пространството от решения на (3) е правата, породена от вектора $a_1 = (1, 1, 1, 1)$.

По Теоремата за размерност на сума и сечение,

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = 2 + 2 - 1 = 3,$$

защото хомогенните линейни системи (1) и (2) са на 4 променливи и имат ранг 2. За намиране на базис на $U + W$ ни трябва фундаментални системи решения на (1) и (2). Например, $b_1 = (2, 5, 2, 0)$, $b_2 = (0, -3, 0, 2)$ е базис на U , а $c_1 = (-1, 1, 0, 3)$, $c_2 = (2, 0, 1, -2)$ е базис на W . Чрез елементарни преобразувания към редовете на

матрицата $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, анулиращи позиции под главния диагонал, намираме линейната зависимост

$$b_1 + b_2 - 2c_1 - 2c_2 = 0.$$

Всеки от векторите b_1, b_2, c_1, c_2 участва с ненулев коефициент в тази линейна зависимост и може да се изрази като линейна комбинация на останалите. Следователно кои и да са три вектора измежду b_1, b_2, c_1, c_2 образуват базис на $U + W$.

Задача 21. В линейното пространство $\mathbb{Q}^4$ са дадени линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите

$$a_1 = (1, -1, 2, 3), \quad a_2 = (1, 1, 3, 2)$$

и линейната обвивка $W = l(b_1, b_2)$ на векторите

$$b_1 = (1, -2, 1, 1), \quad b_2 = (3, 1, 2, 4).$$

Да се намерят базиси на сечението $U \cap W$ и сумата $U + W$.

Отговор: За намиране на базис на $U \cap W$ представяме U и W като пространства от решения на хомогенни линейни системи. Разглеждаме хомогенната линейна система

$$\begin{vmatrix} x_1 & -x_2 & +2x_3 & +3x_4 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & +3x_3 & +2x_4 & = 0 \end{vmatrix}, \quad (4)$$

чиито уравнения имат за коефициенти координатите на a_1 и a_2 . Един начин за представяне на общото решение на (4) е $x_1 = 5x_2 - 5x_4$, $x_3 = -2x_2 + x_4$. Векторите $c_1 = (5, 1, -2, 0)$ и $c_2 = (-5, 0, 1, 1)$ образуват фундаментална система решения на (4) и U е пространството от решения на

$$\begin{vmatrix} 5x_1 & +x_2 & -2x_3 & & = 0 \\ 5x_1 & & -x_3 & -x_4 & = 0 \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Аналогично, да разгледаме хомогенната система

$$\begin{vmatrix} x_1 & -2x_2 & +x_3 & +x_4 & = 0 \\ 3x_1 & +x_2 & +2x_3 & +4x_4 & = 0 \end{vmatrix}, \quad (6)$$

чиито уравнения имат за коефициенти компонентите на b_1, b_2 . Тя има фундаментална система решения $d_1 = (-5, 1, 7, 0)$, $d_2 = (-2, 0, 1, 1)$. Затова W е пространството от решения на

$$\begin{vmatrix} 5x_1 & -x_2 & -7x_3 & & = 0 \\ 2x_1 & & -x_3 & -x_4 & = 0 \end{vmatrix}. \quad (7)$$

Сечението $U \cap W$ е пространството от решения на хомогенната линейна система

$$\begin{vmatrix} 5x_1 & +x_2 & -2x_3 & & = 0 \\ 5x_1 & & -x_3 & -x_4 & = 0 \\ 5x_1 & -x_2 & -7x_3 & & = 0 \\ 2x_1 & & -x_3 & -x_4 & = 0 \end{vmatrix}, \quad (8)$$

получена чрез обединение на уравненията на (5) и (7). Системата (8) има нулево пространство от решения и $U \cap W = \{\mathcal{O}\}$ няма базис.

По Теоремата за размерност на сума и сечение,

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = 2 + 2 - 0 = 4,$$

така че $U + W = \mathbb{Q}^4$ и всеки базис на $\mathbb{Q}^4$ е базис на $U + W$.

Задача 22. В линейното пространство $\mathbb{Q}^4$ са дадени пространството от решения U на хомогенната линейна система

$$\begin{vmatrix} x_1 & +3x_2 & +4x_3 & -6x_4 & = 0 \\ 2x_1 & -3x_2 & -4x_3 & +3x_4 & = 0 \end{vmatrix} \quad (9)$$

и линейната обвивка $W = l(a_1, a_2, a_3, a_4)$ на векторите

$$a_1 = (1, -1, 2, 1), \quad a_2 = (1, 3, -1, 1), \quad a_3 = (2, 3, 1, 1), \quad a_4 = (1, 2, -1, 2).$$

Да се намерят базиси на сечението $U \cap W$ и сумата $U + W$.

Решение: За да намерим базис на $U \cap W$, представяме W като пространство от решения на хомогенна линейна система. Ако

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

е хомогенната линейна система с матрица от коефициенти $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$, а $(8, -3, -4, -3)$ е

нейна фундаментална система решения, то W е пространството от решения на хомогенното линейно уравнение

$$8x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0. \quad (11)$$

Сечението $U \cap W$ е пространството от решения на хомогенната линейна система

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 6x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 8x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}, \quad (12)$$

получена чрез обединение на уравненията на (9) и (11). Системите (9) и (12) имат пространства от решения $U \supseteq U \cap W$ и един и същи ранг 2, така че $U = U \cap W$. Един базис на $U = U \cap W$ е $b_1 = (3, 5, 0, 3)$, $b_2 = (4, 0, 5, 4)$.

По Теоремата за размерност на сума и сечение,

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = \dim(W),$$

така че включването $W \subseteq U + W$ е съвпадение, $W = U + W$. Съгласно линейната зависимост $a_1 + 2a_2 - a_3 - a_4 = \mathcal{O}$, всяка тройка вектори измежду $a_1, \dots, a_4$ е базис на $W = U + W$.

3 Задачи за контролна работа № 3

Задача 23. Нека $a_1, \dots, a_k$ са вектори от n -мерното линейно пространство U над поле F , а $W \subset F^k$ е пространството на наредените k -торки $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, за които $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = \mathcal{O}$. Да се докаже, че ако векторите $b_1, \dots, b_k$ от линейно пространство V изпълняват равенствата $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_k b_k = \mathcal{O}$ за $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in W$, то съществува линейно изображение $\varphi : U \rightarrow V$ с $\varphi(a_i) = b_i$ за $\forall 1 \leq i \leq k$.

Упътване: Изберете максимална линейно независима подсистема $a_1, \dots, a_r$ на $a_1, \dots, a_k$ и изразете всички a_i , $r + 1 \leq i \leq k$ като техни линейни комбинации $a_i = \sum_{j=1}^r \mu_{ij} a_j$. Допълнете $a_1, \dots, a_r$ до базис $a_1, \dots, a_r, u_{r+1}, \dots, u_n$ на U и разгледайте линейното изображение $\varphi : U \rightarrow V$ с $\varphi(a_i) = b_i$ за всички $1 \leq i \leq r$ и с произволни $\varphi(u_{r+1}), \dots, \varphi(u_n) \in V$. Използвайте $b_i = \sum_{j=1}^r \mu_{ij} b_j$ за всички $r + 1 \leq i \leq k$, за да докажете, че $\varphi(a_i) = b_i$ за $\forall r + 1 \leq i \leq k$.

Задача 24. *Спрямо базиса e_1, e_2, e_3 на линейното пространство U и базиса $f_1, \dots, f_4$ на линейното пространство V е зададено линейното изображение $\varphi : U \rightarrow V$,*

$$\begin{aligned}\varphi(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) &= \\ &= (2x_1 - x_2 + x_3)f_1 + (x_1 + x_2 - 2x_3)f_2 + (2x_1 - x_2)f_3 + (x_1 + x_2 - x_3)f_4.\end{aligned}$$

(а) *Да се намери матрицата B на φ спрямо базиса*

$$e'_1 = e_1 + 2e_2 + e_3, \quad e'_2 = -e_1 + e_2 + e_3, \quad e'_3 = 2e_1 - e_2 - e_3,$$

и базиса $f_1, \dots, f_4$ на V .

(б) *Да се намери матрицата C на φ спрямо базиса e_1, e_2, e_3 на U и базиса*

$$f'_1 = f_1 - f_2 + 2f_3 + f_4, \quad f'_2 = 2f_1 + f_2 - f_3,$$

$$f'_3 = f_1 + f_2 - f_3 + 3f_4, \quad f'_4 = 3f_1 + f_3$$

на V .

(в) *Да се намери матрицата D на φ спрямо базиса e'_1, e'_2, e'_3 на U и базиса $f'_1, \dots, f'_4$ на V .*

Отговор: Матрицата A на φ спрямо базиса e_1, e_2, e_3 на U и базиса $f_1, \dots, f_4$ на V е

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(а) Матрицата на прехода T от базиса e_1, e_2, e_3 към базиса e'_1, e'_2, e'_3 е

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

така че

$$B = AT = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(б) Матрицата на прехода от базиса $f_1, \dots, f_4$ към базиса $f'_1, \dots, f'_4$ е

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

откъдето

$$C = S^{-1}A = \begin{pmatrix} -26 & -8 & 32 \\ -34 & -10 & 41 \\ 9 & 3 & -11 \\ 29 & 8 & -34 \end{pmatrix}.$$

$${}_{(B)}D = S^{-1}AT = S^{-1}B = CT = \begin{pmatrix} -10 & 50 & -76 \\ -13 & 65 & -99 \\ 4 & -17 & 26 \\ 11 & -55 & 84 \end{pmatrix}.$$

Задача 25. *Линейният изоморфизъм $\psi : U \longrightarrow V$ има матрица*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

спрямо базиса $e = (e_1, e_2, e_3)$ на U и базиса $f = (f_1, f_2, f_3)$ на V .

(а) Да се намери базис $e' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ на U , така че матрицата на ψ спрямо e' и f да е

$$N = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 5 & -2 & 8 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

(б) Да се намери базис $f' = (f'_1, f'_2, f'_3)$ на V , така че матрицата на ψ спрямо e и f' да е

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отговор: (а) Ако $e' = eT$, то $N = MT$, откъдето

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(б) Ако $f' = fS$, то $P = S^{-1}M$, така че

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 26. *В линейното пространство $M_{4 \times 1}(\mathbb{Q})$ на наредените четворки рационални числа е дадено изображението $\varphi : M_{4 \times 1}(\mathbb{Q}) \longrightarrow M_{4 \times 1}(\mathbb{Q})$, $\varphi(x) = Ax$ за някаква матрица $A \in M_{4 \times 4}(\mathbb{Q})$. Да се докаже, че φ е линейно изображение и да се намери $\varphi(x)$ за*

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ c & d & a & b \end{pmatrix},$$

където a, b, c, d са последните четири цифри на факултетния Ви номер.

Задача 27. Нека $E_{ij} \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ са матриците с единствен ненулев елемент 1 в i -ти ред и j -ти стълб, $1 \leq i, j \leq n$. (E_{ij} се наричат матрични единици.) Да се докаже, че:

(а) $\{E_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ е базис на $M_{n \times n}(\mathbb{C})$;

(б) $E_{ij}E_{kl} = \delta_k^j E_{il} = \begin{cases} E_{il} & \text{за } j = k \\ 0 & \text{за } j \neq k. \end{cases}$

(в) ако $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ и $A_{ij} = 0$ за $\forall n \geq i \geq j \geq 1$, то $A^n = 0_{n \times n}$.

Задача 28. Нека $\varphi : \mathbb{R}^{n+1}[x] \longrightarrow \mathbb{R}^n[x]$,

$$\varphi \left(\sum_{i=0}^n a_i x^i \right) = \sum_{i=1}^n i a_i x^{i-1}$$

е диференцирането на полиноми с реални коефициенти от степен не по-голяма от n .

(а) Да се докаже, че съществува единствено линейно изображение

$$\psi : \mathbb{R}^n[x] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}[x]$$

с $\varphi\psi = \text{Id}_{\mathbb{R}^n[x]}$.

(б) Да се намерят всички (необезателно линейни) изображения

$$\Psi : \mathbb{R}^n[x] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}[x]$$

с $\varphi\Psi = \text{Id}_{\mathbb{R}^n[x]}$. Съвкупността на тези Ψ се нарича определен интеграл.

Упътване: Ако $\varphi\Psi = \text{Id}_{\mathbb{R}^n[x]}$ за някакво изображение $\Psi \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \right) = \sum_{j=0}^n b_j x^j$, то

$\sum_{j=1}^n j b_j x^{j-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ и $b_{s+1} = \frac{a_s}{s+1}$ за $\forall 0 \leq s \leq n-1$. С други думи,

$$\Psi \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \right) = b_0 + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \frac{x^{i+1}}{i+1}$$

с произволно $b_0 \in \mathbb{R}$ е интегрирането на полиноми.

Ако $\psi : \mathbb{R}^n[x] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}[x]$ е линейно изображение, то $\psi(0) = 0$ за тъждествено нулевия полином $0 \in \mathbb{R}^n[x]$ и $\psi \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \right) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \frac{x^{i+1}}{i+1}$.

Задача 29. Ако $e_1, \dots, e_n$ е базис на линейното пространство V , а $\varphi : V \rightarrow V$ е линеен оператор с $\varphi(e_s) \in l(e_{s+1}, \dots, e_n)$ за $\forall 1 \leq s \leq n$ ($\varphi(e_n) = \mathcal{O}$), да се докаже, че $\varphi^n = \mathcal{O}$ е нулевият оператор.

Упътване: Матрицата $A \in M_{n,n}(F)$ на φ спрямо базиса $e_1, \dots, e_n$ има елементи $a_{ij} = 0$ за $\forall 0 \leq i \leq j \leq n$, така че

$$A = \sum_{i>j} a_{ij} E_{ij} = \sum_{i=j+1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij} \in l_F(E_{ij} \mid j+1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n),$$

където E_{ij} са матричните единици от задача 27. С индукция по $1 \leq k \leq n$, оттук следва $A^k = l_F(E_{ij} \mid j+k \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n)$.

Задача 30. Да се докаже, че за всяко просто p съществуват $(p^3 - 1)(p^3 - p)(p^3 - p^2)$ обратими линейни оператора в пространството $\mathbb{Z}_p^3$ на наредените тройки с елементи от полето $\mathbb{Z}_p$ на остатъците при деление с p .

Упътване: Всеки обратим линеен оператор $\varphi : \mathbb{Z}_p^3 \rightarrow \mathbb{Z}_p^3$ се определя еднозначно от образите $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3)$ на стандартните базисни вектори $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$. Операторът φ е обратим тогава и само тогава, когато векторите $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3)$ са линейно независими. Векторът $\varphi(e_1) \in M_{3,1}(\mathbb{Z}_p)$ е линейно независим точно когато е ненулев, така че съществуват $p^3 - 1$ възможности за $\varphi(e_1) \in M_{3,1}(\mathbb{Z}_p)$. За фиксирано $\varphi(e_1) \in M_{3,1}(\mathbb{Z}_p)$, векторите $\varphi(e_1), \varphi(e_2) \in M_{3,1}(\mathbb{Z}_p)$ са линейно независими тогава и само тогава, когато $\varphi(e_2)$ е извън линейната обвивка $l_{\mathbb{Z}_p}(\varphi(e_1))$ на $\varphi(e_1)$. Понеже $l_{\mathbb{Z}_p}(\varphi(e_1))$ съдържа p елемента, броят на $\varphi(e_2) \in M_{3,1}(\mathbb{Z}_p)$, за които $\varphi(e_1), \varphi(e_2)$ са линейно независими е $p^3 - p$. За фиксирани $\varphi(e_1), \varphi(e_2) \in M_{3,1}(\mathbb{Z}_p)$, векторите $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3) \in M_{3,1}(\mathbb{Z}_p)$ са линейно независими точно когато $\varphi(e_3)$ е извън линейната обвивка $l_{\mathbb{Z}_p}(\varphi(e_1), \varphi(e_2))$ на $\varphi(e_1)$ и $\varphi(e_2)$. За фиксирани $\varphi(e_1), \varphi(e_2)$ множеството $l_{\mathbb{Z}_p}(\varphi(e_1), \varphi(e_2))$ съдържа p^2 елемента, така че векторите $\varphi(e_3)$ извън $l_{\mathbb{Z}_p}(\varphi(e_1), \varphi(e_2))$ са $p^3 - p^2$ на брой.

Задача 31. спрямо базиса e_1, e_2, e_3 на линейното пространство U и базиса $f_1, \dots, f_4$ на линейното пространство V е дадено линейното изображение $\varphi : U \rightarrow V$,

$$\begin{aligned} \varphi(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) = \\ = (x_1 + x_2 + 2x_3)f_1 + (x_1 + 2x_2 + 3x_3)f_2 + (2x_1 - x_2 + x_3)f_3 + (-2x_1 + x_2 - x_3)f_4. \end{aligned}$$

Да се намерят:

- (а) базиси на ядрото $\ker(\varphi)$ и образа $\text{im}(\varphi)$;
- (б) вектори $u_1, \dots, u_k \in U$, за които $\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_k)$ е базис на $\text{im}(\varphi)$.

Решение: Матрицата на φ спрямо базиса e_1, e_2, e_3 на U и базиса $f_1, \dots, f_4$ на V е

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Координатните стълбове $X \in M_{3,1}(F)$ на векторите от ядрото $\ker(\varphi)$ на φ образуват пространството от решения на хомогенната линейна система

$$AX = 0_{4 \times 1}.$$

В случая, $\ker(\varphi)$ е правата през началото в U , породена от вектора $e_1 + e_2 - e_3$. Образът $\text{im}(\varphi)$ е двумерен съгласно Теоремата за ранга и дефекта на линейното изображение φ на тримерното пространство U . Произволни два различни стълба на A са непропорционални и задават координатите на базис на $\text{im}(\varphi)$ спрямо $f_1, \dots, f_4$. По определение, стълбовете на матрицата A на φ спрямо базиса e_1, e_2, e_3 на U и базиса $f_1, \dots, f_4$ на V представляват координатите на $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3)$ спрямо базиса $f_1, \dots, f_4$ на V . В случая, за произволни $1 \leq i < j \leq 3$ векторите $e_i, e_j \in U$ са такива, че $\varphi(e_i), \varphi(e_j)$ е базис на образа $\text{im}(\varphi)$ на φ .

Задача 32. Дадени са обратимите линейни оператори $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\beta : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ и линейно изображение $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Да се докаже, че линейните изображения φ , $\varphi\alpha$, $\beta\varphi$ и $\beta\varphi\alpha$ имат един и същи ранг и дефект.

Решение: По определение, ядрото

$$\ker(\varphi\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi\alpha(x) = 0_{m \times 1}\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha(x) \in \ker(\varphi)\} = \alpha^{-1}(\ker(\varphi)).$$

Линейният изоморфизъм $\alpha^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ изобразява подпространството $\ker(\varphi) \subseteq \mathbb{R}^n$ в подпространството $\alpha^{-1}(\ker(\varphi)) \subseteq \mathbb{R}^n$ със същата размерност

$$\dim \alpha^{-1}(\ker(\varphi)) = \dim \ker(\varphi),$$

така че φ и $\varphi\alpha$ имат един и същи дефект $d(\varphi) = d(\varphi\alpha)$. Ранговете на φ и $\varphi\alpha$ съвпадат, защото допълват съответните дефекти до $\dim U = n$.

Линейният изоморфизъм $\beta : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ има тривиално ядро $\ker(\beta) = \{0_{m \times 1}\}$, така че

$$\ker(\beta\varphi) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \beta\varphi(x) = 0_{m \times 1}\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) = 0_{m \times 1}\} = \ker(\varphi),$$

откъдето $d(\beta\varphi) = d(\varphi)$ и $\text{rk}(\beta\varphi) = \text{rk}(\varphi)$.

След замяна на φ с $\beta\varphi$ в $d(\varphi) = d(\varphi\alpha)$, $\text{rk}(\varphi) = \text{rk}(\varphi\alpha)$ получаваме, че $d(\varphi) = d(\beta\varphi) = d(\beta\varphi\alpha)$, $\text{rk}(\varphi) = \text{rk}(\beta\varphi) = \text{rk}(\beta\varphi\alpha)$.

Задача 33. Съществува ли линейно изображение $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ с нулево ядро $\ker(\psi) = \{0_{n \times 1}\}$? Ако да, дайте пример.

Отговор: Не съществува линейно изображение $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ с $\ker(\psi) = \{0_{n \times 1}\}$, защото образът $\text{im}(\psi)$ на такова линейно изображение трябва да е n -мерно подпространство на $\mathbb{R}^{n-1}$.

Задача 34. Да се намери линейно изображение $\varphi : \mathbb{Q}^4 \rightarrow \mathbb{Q}^5$ с образ $\text{im}(\varphi) = W$, ако:

(а) $W = l(a_1, a_2, a_3)$ е линейната обвивка на векторите

$$a_1 = (1, -1, 2, 1, -3), \quad a_2 = (2, 1, -1, 1, 0), \quad a_3 = (0, 1, -1, 2, 1);$$

(б) W е пространството от решения на хомогенната линейна система

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \quad (13)$$

Във всеки от случаите да се намери дефектът $d(\varphi)$ на φ .

Упътване: (а) Векторите a_1, a_2, a_3 са линейно независими, така че операторът φ има ранг $\text{rk}(\varphi) = \dim \text{im}(\varphi) = \dim(W) = 3$ и дефект $d(\varphi) = 4 - \text{rk}(\varphi) = 1$. Избираме произволен базис $e_1, \dots, e_4$ на $\mathbb{Q}^4$ и разглеждаме еднозначно определеното линейно изображение $\varphi : \mathbb{Q}^4 \rightarrow \mathbb{Q}^5$ с $\varphi(e_i) = a_i$ за $1 \leq i \leq 3$ и $\varphi(e_4) = 0_{1 \times 5}$. Образът $\text{im}(\varphi) = l_{\mathbb{Q}}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_4)) = l_{\mathbb{Q}}(a_1, a_2, a_3, 0_{5 \times 1}) = W$.

(б) Избираме фундаментална система решения

$$b_1 = (1, -11, -7, 2, 0), \quad b_2 = (1, 1, 3, 0, 2)$$

на (13) и базис $f_1, \dots, f_4$ на $\mathbb{Q}^4$. Линейното изображение $\varphi : \mathbb{Q}^4 \rightarrow \mathbb{Q}$ с $\varphi(f_i) = b_i$ за $1 \leq i \leq 2$, $\varphi(f_i) = 0_{1 \times 5}$ за $3 \leq i \leq 5$ има образ $\text{im}(\varphi) = l_{\mathbb{Q}}(\varphi(f_1), \dots, \varphi(f_4)) = l_{\mathbb{Q}}(b_1, b_2) = W$. Рангът на φ е $\text{rk}(\varphi) = \dim \text{im}(\varphi) = 2$, а дефектът на φ е $d(\varphi) = 4 - \text{rk}(\varphi) = 2$.

Задача 35. Да се намери линейно изображение $\psi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ с ядро W , ако:

(а) $W = l(a_1, a_2, a_3)$ е линейната обвивка на векторите

$$a_1 = (1, 1, -2, 1), \quad a_2 = (2, 3, -1, 0), \quad a_3 = (1, 1, -1, 1);$$

(б) W е пространството от решения на хомогенното линейно уравнение

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \quad (14)$$

Упътване: (а) Проверяваме, че $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$ са линейно независими и допълваме до базис $a_1, a_2, a_3, a_4 = (0, 0, 0, 1)$ на $\mathbb{R}^4$. Ако линейното изображение $\psi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ има ядро $\ker(\psi) = W = l_{\mathbb{R}}(a_1, a_2, a_3)$, то дефектът на ψ е $d(\psi) = \dim \ker(\psi) = 3$, а рангът на ψ е $\text{rk}(\psi) = \dim \text{im}(\psi) = 4 - d(\psi) = 1$. За произволен ненулев вектор $b \in \mathbb{R}^3$ линейното изображение $\psi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ с $\psi(a_i) = 0_{3 \times 1}$ за $1 \leq i \leq 3$, $\psi(a_4) = b$ има ядро $\ker(\psi) = W$, защото

$$0_{1 \times 3} = \psi \left(\sum_{i=1}^4 x_i a_i \right) = \sum_{i=1}^4 x_i \psi(a_i) = x_4 b$$

е еквивалентно на $x_4 = 0$.

(б) Избираме фундаментална система решения

$$b_1 = (1, 1, 0, 0), \quad b_2 = (-1, 0, 1, 0), \quad b_3 = (1, 0, 0, 1)$$

на (14). Допълваме до базис $b_1, b_2, b_3, b_4 = (1, 0, 0, 0)$ на $\mathbb{R}^4$ и разглеждаме линейното изображение $\psi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ с $\psi(b_i) = 0_{1 \times 3}$ за $1 \leq i \leq 3$, $\psi(b_4) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Тогава

$$0_{1 \times 3} = \psi \left(\sum_{i=1}^4 y_i b_i \right) = \sum_{i=1}^4 y_i \psi(b_i) = y_4 \psi(b_4)$$

е равносилно на $y_4 = 0$ и ядрото $\ker(\psi) = l_{\mathbb{R}}(b_1, b_2, b_3) = W$. Дефектът на ψ е $d(\psi) = \dim \ker(\psi) = 3$, а рангът е $\text{rk}(\psi) = 4 - d(\psi) = 1$.

Задача 36. В линейното пространство V с размерност $\dim V \geq n \geq 2$ да се построи линейен оператор $\varphi : V \rightarrow V$ с $\dim(\ker(\varphi) \cap \text{im}(\varphi)) \geq 1$.

Упътване: Избираме базис $e_1, \dots, e_k$ на сечението $\ker(\varphi) \cap \text{im}(\varphi)$. Допълваме до базис $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_m$ на $\ker(\varphi)$, базис $e_1, \dots, e_k, f_{k+1}, \dots, f_l$ на $\text{im}(\varphi)$ и базис $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n$ на V . По Теоремата за ранга и дефекта на φ имаме $m + l = d(\varphi) + \text{rk}(\varphi) = \dim V = n$. Линейният оператор $\varphi : V \rightarrow V$ с $\varphi(e_i) = 0$ за $1 \leq i \leq m$, $\varphi(e_j) = e_{j-m}$ за $m+1 \leq j \leq m+k$ и $\varphi(e_p) = f_{p-m}$ за $m+k+1 \leq p \leq m+l = n$ изпълнява необходимите условия.

Задача 37. В n -мерното линейно пространство V да се построи линейен оператор $\psi : V \rightarrow V$ с $\dim(\ker(\psi) + \text{im}(\psi)) \leq n - 1$.

Упътване: Оценете $\dim(\ker(\psi) \cap \operatorname{im}(\psi))$.

Задача 38. Нека $e = (e_1, e_2)$ е базис на линейното пространство U , $f = (f_1, f_2, f_3)$ е базис на V , а $g = (g_1, \dots, g_4)$ е базис на W . Линейното изображение $\tau : U \longrightarrow V$ има матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

спрямо базисите e и f , линейното изображение $\varphi : V \longrightarrow U$ има матрица

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

спрямо базисите f и e , а линейното изображение $\psi : U \longrightarrow W$ има матрица

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

спрямо базисите e и g . Да се намерят:

- (а) матрицата на линейния оператор $\varphi\tau : U \longrightarrow U$ спрямо базиса e ;
- (б) матрицата на линейния оператор $\tau\varphi : V \longrightarrow V$ спрямо базиса f ;
- (в) матриците на линейните изображения $(\psi\varphi)\tau : U \longrightarrow W$ и $\psi(\varphi\tau) : U \longrightarrow W$ спрямо базисите e и g .

Отговор: (а) Матрицата на $\varphi\tau$ спрямо базиса e на U е

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(б) Матрицата на $\tau\varphi$ спрямо базиса f на V е

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(в) Произведението на линейни изображения е асоциативно, така че $(\psi\varphi)\tau = \psi(\varphi\tau)$ има матрица

$$(CB)A = C(BA) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -5 & -8 \\ -9 & -12 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

спрямо базиса e на U и базиса g на W .

Задача 39. Нека $\varphi : U \longrightarrow V$ и $\psi : V \longrightarrow U$ са линейни изображения между пространства с размерности $\dim U = n < m = \dim V$. Да се докаже, че:

- (а) линейният оператор $\varphi\psi : V \longrightarrow V$ никога не е обратим;
- (б) ако линейният оператор $\psi\varphi : U \longrightarrow U$ е обратим, то φ и ψ са от ранг n .

Упътване: (а) Ако допуснем, че линейният оператор $\varphi\psi : V \rightarrow V$ е обратим, то ядрото $\{\mathcal{O}_V\} = \ker(\varphi\psi) \supseteq \ker(\psi)$. Но рангът на ψ е $\text{rk}(\psi) \leq n$, така че дефектът $d(\psi) \geq m - n \geq 1$, което е противоречие, доказващо необратимостта на $\varphi\psi$.

(б) Нека $e = (e_1, \dots, e_n)$ е базис на U , а $f = (f_1, \dots, f_m)$ е базис на V . Ако $\psi\varphi : U \rightarrow U$ е обратим линеен оператор, то

$$U = \text{im}(\psi\varphi) = l_F(\psi\varphi(e_1), \dots, \psi\varphi(e_n)) \subseteq l_F(\psi(f_1), \dots, \psi(f_m)) = \text{im}(\psi),$$

така че $\text{im}(\psi) = U$ и ψ е от ранг $\text{rk}(\psi) = n$. Ако допуснем, че $\text{rk}(\varphi) \leq n-1$, то съществува $1 \leq i \leq n$, така че $\text{im}(\varphi) = l_F(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_{i-1}), \varphi(e_{i+1}), \dots, \varphi(e_n))$ и

$$n = \dim U = \dim \text{im}(\psi\varphi) = \dim l_F(\psi\varphi(e_1), \dots, \psi\varphi(e_{i-1}), \psi\varphi(e_{i+1}), \dots, \psi\varphi(e_n)) \leq n-1$$

води до противоречие, което доказва, че $\text{rk}(\varphi) = n$.

Задача 40. *Линейният оператор $\varphi : U \rightarrow U$ в крайномерно пространство U има квадрат $\varphi^2 = \text{Id}_U$. Да се докаже, че за всяко естествено число k поне един от операторите $\varphi^k - \text{Id}_U$ или $\varphi^k + \text{Id}_U$ не е обратим.*

Упътване: Използвайте, че произведението на обратими матрици е обратима матрица.

Задача 41. *Сумата на елементите във всеки стълб на матрицата $A \in M_{n \times n}(\mathbb{Q})$ е 1. Да се докаже, че $\lambda = 1$ е характеристичен корен на A .*

Решение: Трябва да проверим, че $\det(A - E_n) = f_A(1) = 0$. Сумата на елементите на всеки стълб на $A - E_n$ е 0, така че сумата на вектор-редовете на $A - E_n$ е наредената n -торка $0_{1 \times n}$ и $A - E_n$ е от ранг $\leq n-1$. Еквивалентно, $\det(A - E_n) = 0$.

Задача 42. *Спрямо базиса $e_1, \dots, e_n$ на пространството $\mathbb{R}^n$ операторът $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ има матрица*

$$(a) \ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (б) \ A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(в) \ A = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b & b \\ b & a & b & \dots & b & b \\ b & b & a & \dots & b & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a & b \\ b & b & b & \dots & b & a \end{pmatrix} \quad c \quad b \neq 0.$$

Да се намери базис на V , в който φ има диагонална матрица D , както и тази матрица D .

Да се провери, че не съществува базис на V , съставен от собствени вектори за линейния оператор

$$\psi : V \rightarrow V,$$

$$\varphi(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = (-x_2 + 2x_3)e_1 + (-x_1 - 3x_2 + 5x_3)e_2 + (-x_1 - 3x_2 + 5x_3)e_3.$$

Решение: (а) Характеристичният полином

$$\begin{aligned} f_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -2 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)(-1-\lambda) - 2 + 2\lambda + 2(1-\lambda) = \\ &= -\lambda^3 + \lambda = -\lambda(\lambda+1)(\lambda-1). \end{aligned}$$

Характеристичните корени $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$ са реални. Следователно те съвпадат със собствените стойности на оператора.

Собствените вектори, отговарящи на собствената стойност $\lambda_1 = -1$ са ненулевите решения на

$$(A + E_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Те са пропорционални на $v_1 = (1, 1, 1)$.

Ненулевите решения на

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

са собствените вектори, отговарящи на собствената стойност $\lambda_2 = 0$. Например, $v_2 = (1, 0, 1)$.

Собствените вектори, отговарящи на собствената стойност $\lambda_3 = 1$ са ненулевите решения на

$$(A - E_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Те са пропорционални на $v_3 = (2, -1, 1)$.

По този начин, операторът има диагонална матрица

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

спрямо базиса $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, 1)$, $v_3 = (2, -1, 1)$.

(б) Характеристичният полином

$$\begin{aligned} f_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -2 \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ 4 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)(-3-\lambda) + 8(1-\lambda) = \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 - 1) = -(\lambda+1)(\lambda-1)^2. \end{aligned}$$

Характеристичните корени $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ и $\lambda_3 = -1$ са реални и съвпадат със собствените стойности на оператора.

Характеристичният корен $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ е двукратен. Собствените вектори, отговарящи на тази собствена стойност са решения на хомогенната линейна система

$$(A - E_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 = x_3$$

с двумерно пространство от решения $\{(p, q, p) \mid p, q \in \mathbb{R}\}$. Избираме линейно независими собствени вектори $v_1 = (1, 0, 1)$ и $v_2 = (0, 1, 0)$, отговарящи на $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Ненулевите решения на

$$(A + E_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

са собствените вектори със собствена стойност $\lambda_3 = -1$. Те са пропорционални на $v_3 = (1, -1, 2)$.

В резултат, операторът има диагонална матрица

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

спрямо базиса $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, $v_3 = (1, -1, 2)$.

(в) Извадете първия ред на $A - \lambda E_n$ от всички останали, а после прибавете стълбовете от втори до n -ти към първия, за да пресметнете характеристичния полином $f_A(\lambda) = [a - \lambda + (n - 1)b](a - \lambda - b)^{n-1}$. За $b \neq 0$ той има прост корен $\lambda_1 = a + (n - 1)b$ и $(n - 1)$ -кратен корен $\lambda_2 = \dots = \lambda_n = a - b \neq \lambda_1$.

Собствен вектор, отговарящ на собствената стойност $\lambda_1 = a + (n - 1)b$ е $v_1 = (1, 1, \dots, 1, 1)$.

Собствените вектори, отговарящи на $\lambda_2 = \dots = \lambda_n = a - b$ с $b \neq 0$ са ненулевите решения на хомогенното линейно уравнение

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n = 0.$$

Един базис на пространството от решения е

$$v_2 = (1, -1, 0, \dots, 0),$$

$$v_3 = (1, 0, -1, \dots, 0),$$

.....

$$v_n = (1, 0, 0, \dots, -1),$$

където v_i има първа компонента 1 и i -та компонента -1 за $2 \leq i \leq n$.

Матрицата на φ спрямо базиса от собствени вектори $v_1, v_2, \dots, v_n$ е

$$D = \begin{pmatrix} a + (n-1)b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a-b \end{pmatrix}.$$

Матрицата на ψ спрямо базиса e_1, e_2, e_3 е

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 5 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Характеристичният полином е

$$f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 2 \\ -1 & -3-\lambda & 5 \\ -1 & -3 & 5-\lambda \end{vmatrix}.$$

Изваждаме втория ред от третия и получаваме

$$f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 2 \\ -1 & -3-\lambda & 5 \\ 0 & \lambda & -\lambda \end{vmatrix}.$$

Изнасяме λ от третия ред и прибавяме третия стълб към втория, за да пресметнем

$$f_A(\lambda) = \lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ -1 & 2-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\lambda[-\lambda(2-\lambda) + 1] = -\lambda(\lambda-1)^2.$$

Характеристичните корени $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$ са реални и съвпадат със собствените стойности на ψ .

Собствените вектори, отговарящи на собствената стойност 1 са ненулевите решения на хомогенната линейна система

$$(A - E_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -4 & 5 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Всички те са пропорционални на $v_1 = (1, 1, 1)$.

Собствените вектори, отговарящи на $\lambda_3 = 0$ са ненулевите решения на

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 5 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Това са векторите, пропорционални на $v_2 = (-1, 2, 1)$.

Операторът ψ не притежава базис от собствени вектори или ψ няма диагонална матрица спрямо нито един базис на V .

4 Задачи за контролна работа № 4

Задача 43. Нека $e_1, \dots, e_n$ е ортонормиран базис на евклидовото пространство V . За всяко естествено $1 \leq k \leq n$ да се докаже, че

$$l(e_1, \dots, e_k)^\perp = l(e_{k+1}, \dots, e_n).$$

Решение: Условието $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in l(e_1, \dots, e_k)^\perp$ е еквивалентно на $0 = (v, e_i) = x_i$ за $\forall 1 \leq i \leq k$. Следователно $v = \sum_{i=k+1}^n x_i e_i$ и $l(e_1, \dots, e_k)^\perp \subseteq l(e_{k+1}, \dots, e_n)$.

Обратно, $l(e_{k+1}, \dots, e_n) \subseteq l(e_1, \dots, e_k)^\perp$, защото от $(e_i, e_j) = 0$ за $\forall 1 \leq i \leq k < j \leq n$ следва $e_j \in l(e_1, \dots, e_k)^\perp$ за $\forall k+1 \leq j \leq n$, а оттам и $l(e_{k+1}, \dots, e_n) \subseteq l(e_1, \dots, e_k)^\perp$.

Задача 44. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ са дадени векторите

$$(i) \ a_1 = (1, -1, 1, -1), \ a_2 = (-2, 1, -5, 4), \ a_3 = (0, -1, 5, -2);$$

$$(ii) \ a_1 = (1, 1, 1, 1), \ a_2 = (2, 4, 0, -2), \ a_3 = (1, -3, 5, 9).$$

Да се ортогонализират a_1, a_2, a_3 по метода на Грам-Шмид и да се определи размерността на линейната обвивка $l(a_1, a_2, a_3)$.

Решение: (i) Полагаме $b_1 = a_1$. Търсим $b_2 = a_2 + \lambda b_1$ така, че

$$0 = (b_2, b_1) = (a_2, b_1) + \lambda(b_1, b_1).$$

$$\text{Оттук } \lambda = -\frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} = -\frac{(-12)}{4} = 3 \text{ и}$$

$$b_2 = a_2 + 3b_1 = (1, -2, -2, 1).$$

На следващата стъпка полагаме $b_3 = a_3 + \alpha b_1 + \beta b_2$ и определяме $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ от равенствата

$$0 = (b_3, b_1) = (a_3, b_1) + \alpha(b_1, b_1),$$

$$0 = (b_3, b_2) = (a_3, b_2) + \beta(b_2, b_2),$$

вземайки предвид $(b_1, b_2) = 0$. Пресмятаме

$$\alpha = -\frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} = -\frac{8}{4} = -2, \quad \beta = -\frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} = -\frac{(-10)}{10} = 1$$

и намираме

$$b_3 = a_3 - 2b_1 + b_2 = (-1, -1, 1, 1).$$

Ненулевите ортогонални вектори b_1, b_2, b_3 са линейно независими, така че подпространството $l(a_1, a_2, a_3) = l(b_1, b_2, b_3)$ е тримерно.

(ii) Избираме $b_1 = a_1$. Търсим $b_2 = a_2 + \lambda b_1$ така, че $0 = (b_2, b_1) = (a_2, b_1) + \lambda(b_1, b_1)$. По-точно, $\lambda = -\frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} = -\frac{4}{4} = -1$ и

$$b_2 = a_2 - b_1 = (1, 3, -1, -3).$$

Сега $b_3 = a_3 + \alpha b_1 + \beta b_2$ има коефициенти

$$\alpha = -\frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} = -\frac{12}{4} = -3, \quad \beta = -\frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} = -\frac{(-40)}{20} = 2$$

и

$$b_3 = a_3 - 3b_1 + 2b_2 = (0, 0, 0, 0).$$

При ортогонализация на a_1, a_2, a_3 по метода на Грам-Шмид получихме ненулеви ортогонални b_1, b_2 и $b_3 = \mathcal{O}$. Следователно a_1, a_2 са линейно независими, а $a_3 \in l(a_1, a_2)$, така че $\dim l(a_1, a_2, a_3) = \dim l(a_1, a_2) = 2$.

Задача 45. *Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ са дадени линейната обвивка $U = l(a_1, a_2, a_3)$ на векторите*

$$a_1 = (1, 2, -1, 0), \quad a_2 = (-1, -5, 1, 1), \quad a_3 = (0, 9, 0, 1)$$

и векторът $v = (1, 1, 1, 1)$. Да се намерят:

(а) ортогонални базиси на подпространството U и на ортогоналното му допълнение $U^\perp$;

(б) ортогоналната проекция v_1 и перпендикулярът h_1 от v към U ;

Решение: (а) Прилагаме ортогонализация по метода на Грам-Шмид към векторите a_1, a_2, a_3 и получаваме ортогонален базис

$$b_1 = a_1 = (1, 2, -1, 0),$$

$$b_2 = a_2 - \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 = a_2 + 2b_1 = (1, -1, -1, 1),$$

$$b_3 = a_3 - \frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 - \frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} b_2 = a_3 - 3b_1 + 2b_2 = (-1, 1, 1, 3)$$

на подпространството U .

Ако x е стълб от четири числа, то умножението на матрици $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} x$ съвпада със скаларното произведение спрямо ортонормиран базис, $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} (a_1, x) \\ (a_2, x) \\ (a_3, x) \end{pmatrix}$. Затова ортогоналното допълнение $U^\perp$ е пространството от решения на хомогенната линейна система

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 9x_2 + x_4 = 0 \end{cases},$$

чиято матрица от коефициенти е образувана по редове от координатите на a_1, a_2, a_3 . Използвайки $l(a_1, a_2, a_3) = l(b_1, b_2, b_3)$, можем да зададем $U^\perp$ като пространството от решения на хомогенната линейна система

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}.$$

Общото решение на тази система е $x_1 = x_3$, $x_2 = x_4 = 0$ и $U^\perp = l(c)$ за $c = (1, 0, 1, 0)$.

(б) Търсим вектор $v_1 = x_1 b_1 + x_2 b_2 + x_3 b_3 \in U$ с реални x_1, x_2, x_3 , така че $v - v_1$ да принадлежи на ортогоналното допълнение $U^\perp$. За $U = l(a_1, a_2, a_3) = l(b_1, b_2, b_3)$ условието $v - v_1 \in U^\perp$ е еквивалентно на $0 = (v - v_1, b_i) = (v, b_i) - x_i(b_i, b_i)$ за $1 \leq i \leq 3$. Оттук

$$x_1 = \frac{(v, b_1)}{(b_1, b_1)} = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{(v, b_2)}{(b_2, b_2)} = 0, \quad x_3 = \frac{(v, b_3)}{(b_3, b_3)} = \frac{1}{3}$$

или

$$v_1 = \frac{1}{3}b_1 + \frac{1}{3}b_3 = (0, 1, 0, 1), \quad h_1 = v - v_1 = (1, 0, 1, 0).$$

По друг начин, търсим перпендикуляра $h_1 = xc \in U^\perp$, така че $v_1 = v - h_1 = v - xc \in U = (U^\perp)^\perp$. С други думи, $0 = (v_1, c) = (v, c) - x(c, c)$ или $x = \frac{(v, c)}{(c, c)} = 1$ и

$$h_1 = c, \quad v_1 = v - c = (0, 1, 0, 1).$$

Задача 46. *Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ са дадени пространството от решения U на хомогенното линейно уравнение*

$$x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0$$

и векторът $v = (1, 1, 1, 1)$. Да се намерят:

(а) ортогонален базис на подпространството U ;

(б) ортогоналната проекция v_1 и перпендикулярът h_1 от v към U ;

Решение: (а) Пространството от решения U на хомогенна линейна система с ранг 1 в $\mathbb{R}^4$ е тримерно. Избираме $c_1 = (1, 0, 0, 1)$. Търсим c_2 като ненулево решение на

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

Например, $c_2 = (0, 2, 1, 0) \in U$. Накрая определяме вектора $c_3 \in U$, ортогонален на c_1 и c_2 като ненулево решение на хомогенната линейна система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

С точност до пропорционалност $c_3 = (5, -2, 4, -5)$. Векторите c_1, c_2, c_3 образуват ортогонален базис на U .

(б) Ортогоналната проекция $v_1 = x_1 c_1 + x_2 c_2 + x_3 c_3 \in U$, така че $v - v_1 \in U^\perp$ или $0 = (v - v_1, c_i) = (v, c_i) - x_i(c_i, c_i)$ за $1 \leq i \leq 3$. Пресмятаме

$$x_1 = \frac{(v, c_1)}{(c_1, c_1)} = 1, \quad x_2 = \frac{(v, c_2)}{(c_2, c_2)} = \frac{3}{5}, \quad x_3 = \frac{(v, c_3)}{(c_3, c_3)} = \frac{1}{35}$$

и получаваме

$$v_1 = c_1 + \frac{3}{5}c_2 + \frac{1}{35}c_3 = \left(\frac{8}{7}, \frac{8}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}\right), \quad h = v - v_1 = \left(-\frac{1}{7}, -\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}\right).$$

По друг начин, $U^\perp = l(c)$ за $c = (1, 1, -2, -1)$ и търсим $h_1 = xc$ така че $v_1 = v - h_1 = v - xc \in U = (U^\perp)^\perp$. Еквивалентно, $0 = (v_1, c) = (v, c) - x(c, c)$ и $x = \frac{(v, c)}{(c, c)} = -\frac{1}{7}$. В резултат,

$$h_1 = \left(-\frac{1}{7}, -\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}\right), \quad v_1 = v - h_1 = \left(\frac{8}{7}, \frac{8}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}\right).$$

Задача 47. *Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ има матрица*

$$(i)A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}; \quad (ii)B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(iii)C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Да се намерят:

(а) ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който матрицата D на φ е диагонална, както и тази матрица D ;

(б) ранговете на операторите $\varphi + \text{Id}_{\mathbb{R}^4}$, $\varphi - \text{Id}_{\mathbb{R}^4}$, $\varphi - 2\text{Id}_{\mathbb{R}^4}$.

Решение: (i) Характеристичният полином

$$f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-5) = 0,$$

Решението $e_1 = \frac{1}{2}(1, 1, -1, -1)$ на хомогенната линейна система $(A + E_4)X = 0_{4 \times 1}$ е единичен собствен вектор, отговарящ на собствената стойност $\lambda_1 = -1$. Решението $e_2 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)$ на хомогенната линейна система $(A - E_4)X = 0_{4 \times 1}$ е единичен собствен вектор, отговарящ на собствената стойност $\lambda_2 = 1$. Аналогично, решението $e_3 = \frac{1}{2}(1, -1, 1, -1)$ на $(A - 3E_4)X = 0_{4 \times 1}$ е единичен собствен вектор, отговарящ на $\lambda_3 = 3$, а $e_4 = \frac{1}{2}(1, -1, -1, 1)$ е единичен собствен вектор, отговарящ на $\lambda_4 = 5$. Матрицата на φ спрямо ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$ е симетрична, така че φ е симетричен оператор. Следователно собствените вектори, отговарящи на различни собствени стойности са ортогонални помежду си и e_1, e_2, e_3, e_4 е ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$. Матрицата на φ спрямо този базис е

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ако матрицата D на φ спрямо базис $e_1, \dots, e_4$ е диагонална и $r \in \mathbb{R}$, то матрицата $D - rE_4$ на $\varphi - r\text{Id}_{\mathbb{R}^4}$ спрямо същия базис е диагонална и рангът

$$\text{rk}(\varphi - r\text{Id}_{\mathbb{R}^4}) = \text{rk}(D - rE_4)$$

е равен на броя на характеристичните корени на D , различни от r . В случая,

$$\operatorname{rk}(\varphi + \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^4}) = 3, \quad \operatorname{rk}(\varphi - \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^4}) = 3, \quad \operatorname{rk}(\varphi - 2\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^4}) = 4.$$

(ii) Характеристичният полином

$$f_B(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1)^2 = 0.$$

Избираме собствените вектори e_1, e_2 , отговарящи на собствените стойности $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ като ортонормиран базис на пространството от решения на хомогенната линейна система

$$(B + E_4)X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = 0_{4 \times 1}.$$

Например, $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, -1)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1, 0)$. Аналогично, собствените вектори $e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, 1)$, $e_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1, 0)$, отговарящи на собствените стойности $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$ са ортонормиран базис на пространството от решения на

$$(B - E_4)X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} X = 0_{4 \times 1}.$$

Операторът φ е симетричен, защото има симетрична матрица спрямо ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$. Следователно, собствените вектори на φ , отговарящи на различни собствени стойности са ортогонални помежду си и e_1, e_2, e_3, e_4 е ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$. Матрицата на φ спрямо този базис е

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матриците A и D имат двукратни характеристични корени ± 1 , така че $\operatorname{rk}(\varphi + \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^4}) = 2$, $\operatorname{rk}(\varphi - \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^4}) = 2$, $\operatorname{rk}(\varphi - 2\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^4}) = 4$.

(iii) Характеристичният полином

$$f_C(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 - \lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 - \lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda - 2)^3.$$

Решението $e_1 = \frac{1}{2}(-1, 1, 1, 1)$ на $(C + 2E_4)X = 0_{4 \times 1}$ е единичен собствен вектор, отговарящ на собствената стойност $\lambda_1 = -2$. Собствените вектори e_2, e_3, e_4 , отговарящи на

трикратната собствена стойност $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 2$ се избират като ортонормиран базис на пространството от решения на

$$(C - 2E_4)X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} X = 0_{4 \times 1}.$$

Тази система се свежда до $x_1 = x_2 + x_3 + x_4$. Нека $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0)$ е едно ненулево решение. Търсим e_3 като единичен вектор, изпълняващ хомогенната линейна система

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0_{4 \times 1}.$$

Например $e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 0, 2)$. Накрая, $e_4 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(-1, 1, -3, 1)$ е единично решение на

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} X = 0_{4 \times 1}.$$

Операторът φ е симетричен, така че собствените вектори, отговарящи на различни собствени стойности са ортогонални помежду си и e_1, e_2, e_3, e_4 е ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$. Матрицата на φ в този базис е

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матриците A и D имат прост (еднократен) характеристичен корен -2 и трикратен характеристичен корен 2 . Следователно $\text{rk}(\varphi + \text{Id}_{\mathbb{R}^4}) = \text{rk}(\varphi - \text{Id}_{\mathbb{R}^4}) = 4$, $\text{rk}(\varphi - 2\text{Id}_{\mathbb{R}^4}) = 1$.

Задача 48. Нека V е n -мерно евклидово пространство, а U и W са k -мерни подпространства на V . Да се докаже, че:

- (i) съществува ортогонален оператор $\varphi : V \rightarrow V$ с $\varphi(U) = W$;
- (ii) всеки ортогонален оператор $\varphi : V \rightarrow V$ с $\varphi(U) = W$ изпълнява $\varphi(U^\perp) = W^\perp$.

Решение: (i) Избираме ортонормиран базис $e_1, \dots, e_k$ на U и допълваме до ортонормиран базис $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ на V . Аналогично, избираме ортонормиран базис $f_1, \dots, f_k$ на W и допълваме до ортонормиран базис $f_1, \dots, f_k, f_{k+1}, \dots, f_n$ на V . Линейният оператор $\varphi : V \rightarrow V$ с $\varphi(e_i) = f_i$ за $\forall 1 \leq i \leq n$ е ортогонален, защото трансформира ортонормиран базис на V в ортонормиран базис на V . Още повече,

$$\varphi(U) = \varphi(l(e_1, \dots, e_k)) = l(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_k)) = l(f_1, \dots, f_k) = W.$$

- (ii) От една страна, ортогоналните допълнения имат една и съща размерност,

$$\dim(U^\perp) = \dim(V) - \dim(U) = n - k = \dim(V) - \dim(W) = \dim(W^\perp).$$

От друга страна, ортогоналният оператор φ в крайномерно пространство V е обратим, така че $\dim(\varphi(U^\perp)) = \dim(U^\perp) = \dim(W^\perp)$. Достатъчно е да проверим, че $\varphi(U^\perp) \subseteq W^\perp$, за да твърдим съвпадението $\varphi(U^\perp) = W^\perp$. Наистина, $\forall w \in W$ е образ на $u \in U$, $w = \varphi(u)$. За произволно $x \in U^\perp$ е в сила $(\varphi(x), w) = (\varphi(x), \varphi(u)) = (x, u) = 0$, така че $\varphi(U^\perp) \subseteq W^\perp$.

Втори начин, избираме ортонормиран базис $e_1, \dots, e_k$ на U и допълваме до ортонормиран базис $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ на V . Съгласно задача 43, $e_{k+1}, \dots, e_n$ е ортонормиран базис на $U^\perp$. Под действие на ортогоналния оператор φ получаваме ортонормиран базис $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_k), \varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)$ на V . Векторите $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_k)$ образуват ортонормиран базис на W . Отново от Задача 43, $\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)$ е ортонормиран базис на $W^\perp$. Накрая,

$$\varphi(U^\perp) = \varphi(l(e_{k+1}, \dots, e_n)) = l(\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)) = W^\perp.$$

Задача 49. Да се намери неособена линейна смяна на променливите, която привежда квадратичната форма f в каноничен вид, както и този каноничен вид, ако:

- (i) $f(x_1, x_2, x_3) = -12x_1^2 - 3x_2^2 - 12x_3^2 + 12x_1x_2 - 24x_1x_3 + 8x_2x_3$;
- (ii) $f(x_1, \dots, x_4) = \frac{1}{2}x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_4^2 - x_1x_2 + x_2x_3 - x_3x_4$;
- (iii) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$;
- (iv) $f(x_1, \dots, x_4) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$.

Решение:

$$(i) \quad f(x_1, x_2, x_3) = -(2\sqrt{3}x_1 - \sqrt{3}x_2 + 2\sqrt{3}x_3)^2 - 4x_2x_3 = -y_1^2 - 4y_2^2 + 4y_3^2$$

за $x_2 = y_2 + y_3$, $x_3 = y_2 - y_3$,

$$y_1 = 2\sqrt{3}x_1 - \sqrt{3}x_2 + 2\sqrt{3}x_3$$

$$y_2 = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3$$

$$y_3 = \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3.$$

$$\begin{aligned} (ii) \quad f(x_1, \dots, x_4) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 \right)^2 + \frac{3}{2}x_2^2 + 3x_4^2 + x_2x_3 - x_3x_4 = \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}x_3 \right)^2 - \frac{1}{6}x_3^2 + 3x_4^2 - x_3x_4 = \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}x_3 \right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{6}}x_3 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x_4 \right)^2 + \frac{9}{2}x_4^2 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 + y_4^2 \end{aligned}$$

за

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_2$$

$$y_2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}x_3$$

$$y_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}x_3 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x_4$$

$$y_4 = \frac{3}{\sqrt{2}}x_4.$$

$$(iii) \quad f(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 - y_2^2 + 2y_1x_3 = (y_1 + x_3)^2 - y_2^2 - x_3^2 = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$$

за $x_1 = y_1 + y_2$, $x_2 = y_1 - y_2$,

$$z_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3$$

$$z_2 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2$$

$$z_3 = x_3.$$

$$(iv) \quad f(x_1, \dots, x_4) = y_1^2 - y_2^2 + 2y_1x_3 + 2y_1x_4 + x_3x_4 = (y_1 + x_3 + x_4)^2 - y_2^2 - x_3^2 - x_3x_4 - x_4^2 =$$

$$= (y_1 + x_3 + x_4)^2 - y_2^2 - \left(x_3 + \frac{1}{2}x_4\right)^2 - \frac{3}{4}x_4^2 = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - z_4^2$$

за $x_1 = y_1 + y_2$, $x_2 = y_1 - y_2$,

$$z_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 + x_4$$

$$z_2 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2$$

$$z_3 = x_3 + \frac{1}{2}x_4$$

$$z_4 = \frac{\sqrt{3}}{2}x_4.$$

Задача 50. Да се намери ортонормирана смяна на променливите, която привежда квадратичната форма f в каноничен вид, както и този каноничен вид, ако:

- (i) $f_1(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;
- (ii) $f_2(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 4x_2^2 - 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$;
- (iii) $f_3(x_1, \dots, x_4) = 2x_1x_4 + 6x_2x_3$;
- (iv) $f_4(x_1, \dots, x_4) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_3x_4$.

Решение: Предполагаме, че квадратичните форми f_i са зададени спрямо ортонормиран базис на $V = \mathbb{R}^3$, съответно, на $V = \mathbb{R}^4$. Означаваме с A_i симетричните матрици на f_i спрямо този базис. Разглеждаме симетричните линейни оператори $\psi_i : V \rightarrow V$ с матрици A_i спрямо гореспоменатия базис. Търсим ортонормиран базис $e_1, \dots, e_n$, $n = \dim_{\mathbb{R}}(V)$ на V , в който ψ_i има диагонална матрица D с характеристичните корени $\lambda_1(i), \dots, \lambda_n(i)$ на A_i по диагонала. Квадратичната форма $f_i = \sum_{j=1}^n \lambda_j(i)y_j^2$ е в каноничан вид спрямо базиса $e_1, \dots, e_n$. Ако матрицата $T \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ е образувана по стълбове от

координатите на $e_1, \dots, e_n$ спрямо първоначалния ортонормиран базис на V , то смяната на променливите е

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Матрицата T е ортогонална, така че обратната и $T^{-1} = T^t$ съвпада с транспонираната и

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = T^t \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

(i) Квадратичната форма $f_1(x_1, x_2, x_3)$ има симетрична матрица

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

с характеристични корени $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 7$. Собственото подпространство V_1 , отговарящо на собствената стойност $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ е пространството от решения на хомогенното линейно уравнение $x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$. Избираме ортонормирано решение $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$. Векторите от V_1 , перпендикулярни на e_1 са пропорционални на единичния вектор $e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)$. Следователно e_1, e_2 е ортонормиран базис на V_1 . Намираме единичен собствен вектор $e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, 1)$, отговарящ на собствената стойност $\lambda_3 = 7$. Квадратичната форма f_1 има каноничен вид $f_1(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + 7y_3^2$ при ортонормирана смяна на координатите

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

(ii) Симетричната матрица

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -4 & -4 \\ -2 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

на $f_2(x_1, x_2, x_3)$ има характеристични корени $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ и $\lambda_3 = -9$. Векторите $e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1, 0)$ и $e_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}}(-2, -4, 5)$ образуват ортонормиран базис на собственото подпространство, отговарящо на собствената стойност $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Намираме ортонормиран собствен вектор $e_3 = \frac{1}{3}(1, 2, 2)$ за $\lambda_3 = -9$. В резултат, $f_2(y_1, y_2, y_3) = -9y_3^2$ и

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

(iii) Квадратичната форма $f_3(x_2, \dots, x_4)$ има симетрична матрица

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

с характеристични корени $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$, $\lambda_4 = -3$. Намираме единични собствени вектори $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, 1)$ за $\lambda_1 = 1$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, -1)$ за $\lambda_2 = -1$, $e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1, 0)$ за $\lambda_3 = 3$ и $e_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1, 0)$ за $\lambda_4 = -3$. Каноничният вид на f_2 е $f_2(y_1, \dots, y_4) = y_1^2 - y_2^2 + 3y_3^2 - 3y_4^2$ при ортонормирана смяна на координатите

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

(iv) Симетричната матрица

$$A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

на $f_4(x_1, \dots, x_4)$ има характеристични корени $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$, $\lambda_4 = -3$. Векторите $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, -1)$ образуват ортонормиран базис на собственото подпространство, отговарящо на двукратната собствена стойност $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Единичният вектор $e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0)$ е собствен за $\lambda_3 = 3$, а $e_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, 1)$ е собствен за $\lambda_4 = -3$. Квадратичната форма f_4 има каноничен вид $f_4(y_1, \dots, y_4) = y_1^2 + y_2^2 + 3y_3^2 - 3y_4^2$, при ортонормирана смяна на координатите

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

Задачи с повишена трудност и приложения.

Задача 51. Да се докаже, че множеството L на онези $\mathbb{Q}$ -линейните изображения $\varphi: \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^2$, чиито ядра съдържат вектора $(2, 1, 3)$ е 4-мерно линейно пространство над $\mathbb{Q}$ и да се намери базис на L над $\mathbb{Q}$.

Решение: Нека $A \in M_{2 \times 3}(\mathbb{Q})$ е матрицата на φ спрямо стандартния базис $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ на $\mathbb{Q}^3$ и стандартния базис $f_1 = (1, 0)$, $f_2 = (0, 1)$ на $\mathbb{Q}^2$. Тогава условието $(2, 1, 3) = 2e_1 + e_2 + 3e_3 \in \ker(\varphi)$ е еквивалентно на

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} + a_{12} + 3a_{13} \\ 2a_{21} + a_{22} + 3a_{23} \end{pmatrix}.$$

Матриците $A = (a_{ij})$ на търсените линейни изображения образуват 4-мерното пространство от решения L_1 на хомогенната линейна система

$$\begin{cases} 2a_{11} + a_{12} + 3a_{13} = 0 \\ 2a_{21} + a_{22} + 3a_{23} = 0 \end{cases}$$

с шест променливи a_{ij} , $1 \leq i \leq 2$, $1 \leq j \leq 3$. Общото решение на тази система е

$$\begin{cases} a_{12} = -2a_{11} - 3a_{13} \\ a_{22} = -2a_{21} - 3a_{23} \end{cases}.$$

Избираме фундаментална система решения

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

или базис на L_1 . Той отговаря на базиса $\varphi_1, \dots, \varphi_4$ на L , съставен от линейните изображения $\varphi_j : \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^2$ с матрици A_j спрямо e_1, e_2, e_3 и f_1, f_2 .

Задача 52. За произволни матрици $A, B \in M_{m \times n}(F)$ с елементи от поле F да се докаже, че рангът на сумата не надминава сумата на ранговете,

$$\text{rk}(A + B) \leq \text{rk}(A) + \text{rk}(B).$$

Решение: Нека $\varphi : F^n \rightarrow F^m$ и $\psi : F^n \rightarrow F^m$ са линейните изображения с матрици A , съответно B , спрямо някакъв базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ на F^n и някакъв базис $f = (f_1, \dots, f_m)$ на F^m . Тогава $A + B$ е матрицата на $\varphi + \psi : F^n \rightarrow F^m$ спрямо базиса e на F^n и базиса f на F^m . Но образът на сумата $\varphi + \psi$

$$\text{im}(\varphi + \psi) = \{(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x) \mid x \in F^n\}$$

е подпространство на сумата на образите

$$\text{im}(\varphi) + \text{im}(\psi) = \{\varphi(y) \mid y \in F^n\} + \{\psi(z) \mid z \in F^n\} = \{\varphi(y) + \psi(z) \mid y, z \in F^n\},$$

така че

$$\begin{aligned} \text{rk}(\varphi + \psi) &= \dim \text{im}(\varphi + \psi) \leq \dim[\text{im}(\varphi) + \text{im}(\psi)] = \\ &= \dim \text{im}(\varphi) + \dim \text{im}(\psi) - \dim[\text{im}(\varphi) \cap \text{im}(\psi)] \leq \dim \text{im}(\varphi) + \dim \text{im}(\psi) = \text{rk}(\varphi) + \text{rk}(\psi). \end{aligned}$$

Остава да приложим, че $\text{rk}(\varphi + \psi) = \text{rk}(A + B)$, $\text{rk}(\varphi) = \text{rk}(A)$ и $\text{rk}(\psi) = \text{rk}(B)$.

Задача 53. Ако $X, Y \in M_{n \times n}(F)$ са квадратни матрици с произведение $XY = 0_{n \times n}$, да се докаже, че

$$\text{rk}(X) + \text{rk}(Y) \leq n.$$

Решение: Нека $e_1, \dots, e_n$ е базис на F^n , $\varphi : F^n \rightarrow F^n$ е операторът с матрица X спрямо този базис, а $\psi : F^n \rightarrow F^n$ е операторът с матрица Y спрямо този базис. Тогава от $XY = 0_{n \times n}$ следва $\varphi\psi = \mathcal{O}$ за нулевия оператор $\mathcal{O} : F^n \rightarrow F^n$ с $\mathcal{O}(x) = 0_{n \times 1}$ за $\forall x \in F^n$. С други думи, $\text{im}(\psi) \subseteq \ker(\varphi)$ и по Теоремата за ранга и дефекта на линейно изображение получаваме

$$\text{rk}(\psi) = \dim \text{im}(\psi) \leq \dim \ker(\varphi) = \dim F^n - \dim \text{im}(\varphi) = n - \text{rk}(\varphi).$$

Задача 54. Нека $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in M_{n \times n}(F)$ е квадратна матрица от ранг r , а $A^* = (A_{ij})_{i,j=1}^n \in M_{n \times n}(F)$ е матрицата, съставена от адюнгираните количества A_{ij} на елементите a_{ij} на A . За ранга r^* на A^* да се докаже, че:

- (i) $r^* = n$ за $r = n$;
- (ii) $r^* = 0$ за $0 \leq r \leq n - 2$;
- (iii) $r^* = 1$ за $r = n - 1$.

Решение: Ако $r = n$, то $\det(A) \neq 0$ и $A(A^*)^t = (A^*)^t A = \det(A)E_n$. Оттук $\det(A^*)^t = \det(A^*) \neq 0$ и $r^* = n$.

При $r = n - 2$ всички адюнгирани количества $A_{ij} = 0$ се анулират и $A^* = 0_{n \times n}$, $r^* = 0$.

В случая $r = n - 1$ използваме $A(A^*)^t = \det(A)E_n = 0_{n \times n}$, за да разглеждаме вектор-стълбовете $c_1, \dots, c_n$ на $(A^*)^t$ като вектори от пространството U на решенията на хомогенната линейна система $AX = 0_{n \times 1}$ с ранг $r = n - 1$. За вектор-редовете $c_1^t, \dots, c_n^t$ на A^* имаме

$$r^* = \text{rk}(A^*) = \text{rk}(c_1^t, \dots, c_n^t) = \text{rk}(c_1, \dots, c_n) = \dim l(c_1, \dots, c_n) \leq \dim U = n - (n - 1) = 1.$$

Но $r = n - 1$ означава съществуването на $A_{ij} \neq 0$, така че $r^* \geq 1$, а оттам и $r^* = 1$.

Задача 55. (Неравенство на Силвестър - давана на писмен изпит по Алгебра 1 за специалност Компютърни Науки през 2006г.) За произволни квадратни матрици $A, B \in M_{n \times n}(F)$ да се докаже, че

$$\text{rk}(A) + \text{rk}(B) - n \leq \text{rk}(AB) \leq \min(\text{rk}(A), \text{rk}(B)).$$

Решение: Нека $e_1, \dots, e_n$ е базис на F^n , $\varphi : F^n \rightarrow F^n$ е линейният оператор с матрица A спрямо този базис, а $\psi : F^n \rightarrow F^n$ е линейният оператор с матрица B спрямо този базис. Неравенството на Силвестър е еквивалентно на

$$\text{rk}(\varphi) + \text{rk}(\psi) - n \leq \text{rk}(\varphi\psi) \leq \min(\text{rk}(\varphi), \text{rk}(\psi)).$$

За удобство да означим $r = \text{rk}(\varphi)$, $s = \text{rk}(\psi)$.

Избираме базис $b_1, \dots, b_s$ на образа $\text{im}(\psi) = l(\psi(e_1), \dots, \psi(e_n))$ на ψ . В резултат, $\varphi\psi(e_j) \in l(\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_s))$ за $\forall 1 \leq j \leq n$ и $\text{im}(\varphi\psi) = l(\varphi\psi(e_1), \dots, \varphi\psi(e_n))$ е подпространство на $W = l(\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_s))$. Оттук,

$$\text{rk}(\varphi\psi) = \dim \text{im}(\varphi\psi) \leq \dim W \leq s = \text{rk}(\psi).$$

За $\text{rk}(\varphi\psi) \leq \text{rk}(\varphi)$ използваме, че $\psi(e_j) \in l(e_1, \dots, e_n) = F^n$, откъдето $\varphi\psi(e_j) \in l(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = \text{im}(\varphi)$ за $\forall 1 \leq j \leq n$. Следователно $\text{im}(\varphi\psi) = l(\varphi\psi(e_1), \dots, \varphi\psi(e_n))$ е подпространство на $\text{im}(\varphi)$ и

$$\text{rk}(\varphi\psi) = \dim \text{im}(\varphi\psi) \leq \dim \text{im}(\varphi) = \text{rk}(\varphi).$$

За $\text{rk}(\varphi\psi) \geq r + s - n$ разглеждаме φ като линейно изображение

$$\varphi : \text{im}(\psi) = l(\psi(e_1), \dots, \psi(e_n)) \longrightarrow F^n$$

на образа $\text{im}(\psi) \simeq F^s$ на ψ . Образът на линейния оператор $\varphi\psi : F^n \longrightarrow F^n$ съвпада с образа на $\varphi : \text{im}(\psi) \longrightarrow F^n$, така че

$$\text{rk}(\varphi\psi) = \dim \text{im}(\psi) - \dim \ker(\varphi|_{\text{im}(\psi)}) = \text{rk}(\psi) - \dim(\ker(\varphi) \cap \text{im}(\psi)).$$

Съгласно $\text{rk}(\varphi) = r$, ядрото $\ker(\varphi)$ на φ е с $\dim \ker(\varphi) = n - r$. Подпространството $\ker(\varphi) \cap \text{im}(\psi)$ на $\ker(\varphi)$ е с размерност $\dim(\ker \cap \text{im}(\psi)) \leq n - r$ и

$$\text{rk}(\varphi\psi) \geq \text{rk}(\psi) - (n - r) = \text{rk}(\psi) + \text{rk}(\varphi) - n.$$

Задача 56. Нека $\varphi : V \longrightarrow V$ е линейен оператор със собствен вектор $\mathcal{O} \neq v \in V$, отговарящ на собствена стойност λ , а $g(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in F[x]$ е полином с коефициенти от F . Да се докаже, че v е собствен вектор за оператора $g(\varphi)$, отговарящ на собствена стойност $g(\lambda)$.

Решение: Операторът $g(\varphi) = \sum_{i=0}^n a_i \varphi^i$ с $\varphi^0 = \text{Id}_V$ действа върху v по правилото

$$g(\varphi)(v) = \sum_{i=0}^n (a_i \varphi^i)(v) = \sum_{i=0}^n a_i \varphi^i(v),$$

съгласно определението за сума на линейни оператори и произведение на линейен оператор с $\lambda \in F$. С индукция по $0 \leq i \leq n$ проверяваме, че $\varphi^i(v) = \lambda^i v$, откъдето $g(\varphi)(v) = \sum_{i=0}^n a_i \lambda^i v = g(\lambda)v$.

Задача 57. Да се докаже, че:

(i) ако линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ в евклидовото пространство $\mathbb{R}^n$ запазва дължините,

$$\|\varphi(x)\| = \sqrt{(\varphi(x), \varphi(x))} = \sqrt{(x, x)} = \|x\| \quad \text{за} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

то φ е ортогонален оператор.

(ii) ако изображението $\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ на евклидовото пространство $\mathbb{R}^n$ изпълнява

$$(\psi(x), \psi(y)) = (x, y) \quad \text{за} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

то ψ е линейен оператор, а оттам и ортогонален линейен оператор.

Решение: (i) От

$$\begin{aligned} & (\varphi(x), \varphi(x)) + (\varphi(x), \varphi(y)) + (\varphi(y), \varphi(x)) + (\varphi(y), \varphi(y)) = \\ & = (\varphi(x+y), \varphi(x+y)) = (x+y, x+y) = \\ & (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) \end{aligned}$$

с $(\varphi(x), \varphi(x)) = (x, x)$, $(\varphi(y), \varphi(y)) = (y, y)$ и от симетричността на скаларното произведение в евклидово пространство, $(\varphi(y), \varphi(x)) = (\varphi(x), \varphi(y))$, $(y, x) = (x, y)$ следва

$$(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y) \quad \text{за} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

(ii) За произволни $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ трябва да докажем, че векторът

$$v = \psi(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m) - \lambda_1 \psi(v_1) - \dots - \lambda_m \psi(v_m)$$

е нулев. Скаларният квадрат

$$\begin{aligned} (v, v) &= \left(\psi \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i \right), \psi \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j v_j \right) \right) - \left(\psi \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i \right), \sum_{j=1}^m \lambda_j \psi(v_j) \right) - \\ &- \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \psi(v_i), \psi \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j v_j \right) \right) + \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \psi(v_i), \sum_{j=1}^m \lambda_j \psi(v_j) \right) = \\ &= \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i, \sum_{j=1}^m \lambda_j v_j \right) - \sum_{j=1}^m \lambda_j \left(\psi \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i \right), \psi(v_j) \right) - \\ &- \sum_{i=1}^m \lambda_i \left(\psi(v_i), \psi \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j v_j \right) \right) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \lambda_i \lambda_j (\psi(v_i), \psi(v_j)) = \\ &= \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i, \sum_{j=1}^m \lambda_j v_j \right) - \sum_{j=1}^m \lambda_j \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i, v_j \right) - \\ &- \sum_{i=1}^m \lambda_i \left(v_i, \sum_{j=1}^m \lambda_j v_j \right) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \lambda_i \lambda_j (v_i, v_j) = 0. \end{aligned}$$

Задача 58. Ако V е линейно пространство над поле F , то линейните изображения $f: V \rightarrow F$ се наричат линейни функции върху V . В крайномерно линейно пространство V над полето $\mathbb{R}$ на реалните числа да се докаже, че:

(i) нетъждествено нулева билинейна форма $\varphi(u, v) = f_1(u)f_2(v)$, $u, v \in V$ се разлага в произведение на линейни функции $f_i: V \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq 2$ тогава и само тогава, когато φ е от ранг $\text{rk}(\varphi) = 1$;

(ii) ненулева квадратична форма $\phi(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1, \dots, x_n)f_2(x_1, \dots, x_n)$ се разлага в произведение на линейни функции тогава и само тогава, когато ϕ има ранг $\text{rk}(\phi) = 1$ или ϕ има ранг $\text{rk}(\phi) = 2$ и сигнатура $\sigma(\phi) = 0$.

Решение: Линейните функции $f_j : V \rightarrow \mathbb{R}$ са линейни изображения на крайномерни линейни пространства над $\mathbb{R}$ с ранг $\text{rk}(f_j) = 1$. Следователно $\dim_{\mathbb{R}} \ker(f_j) = n - 1$. Сумата $\ker(f_1) + \ker(f_2) \subseteq V$ е подпространство на V , така че $\dim_{\mathbb{R}}(\ker(f_1) + \ker(f_2)) \leq \dim_{\mathbb{R}} V = n$. По теоремата за размерността на сума и сечение на подпространства,

$$\dim_{\mathbb{R}}(\ker(f_1) \cap \ker(f_2)) = \dim_{\mathbb{R}} \ker(f_1) + \dim_{\mathbb{R}} \ker(f_2) - \dim_{\mathbb{R}}(\ker(f_1) + \ker(f_2)) \geq n - 2.$$

Следователно съществуват линейно независими вектори $e_3, \dots, e_n \in \ker(f_1) \cap \ker(f_2)$. Допълваме до базис $e_2, e_3, \dots, e_n$ на $\ker(f_1)$ и до базис $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ на V . Ако линейната функция $f_1 \not\equiv 0$, то $f_1(e_1) \neq 0$. В така избрания базис, ако билинейната форма $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ е произведение на f_1 и f_2 , то

$$\varphi \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right) = f_1 \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i \right) f_2 \left(\sum_{j=1}^n y_j e_j \right) = x_1 f_1(e_1) [y_1 f_2(e_1) + y_2 f_2(e_2)].$$

Матрицата $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ на φ спрямо базиса $e_1, \dots, e_n$ на V е

$$A = \begin{pmatrix} f_1(e_1)f_2(e_1) & f_1(e_1)f_2(e_2) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}.$$

Ако $\varphi \not\equiv 0$, то $A \neq 0_{n \times n}$ и $\text{rk}(\varphi) = \text{rk}(A) = 1$.

Ако квадратичната форма $\phi(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1, \dots, x_n)f_2(x_1, \dots, x_n)$ е произведение на линейните функции f_1, f_2 и $x_1, \dots, x_n$ са координати спрямо построения по-горе базис на V , то

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1, \dots, x_n)f_2(x_1, \dots, x_n) = f_1(e_1)f_2(e_1)x_1^2 + f_1(e_1)f_2(e_2)x_1x_2.$$

Симетричната матрица $S \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ на ϕ спрямо фиксирания базис е

$$S = \begin{pmatrix} f_1(e_1)f_2(e_1) & \frac{1}{2}f_1(e_1)f_2(e_2) & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2}f_1(e_1)f_2(e_2) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}.$$

Ако $f_2(e_2) = 0$ и $\ker(f_1) = \ker(f_2)$, то $\text{rk}(\phi) = \text{rk}(S) = 1$. Ако $f_2(e_2) \neq 0$ и $\ker(f_1) \neq \ker(f_2)$, означаваме $a_{11} := f_1(e_1)f_2(e_1) \in \mathbb{R}$, $a_{12} := f_1(e_1)f_2(e_2) \in \mathbb{R}^*$. В случая $a_{11} = 0$,

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = a_{12}x_1x_2 = a_{12}(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = a_{12}y_1^2 - a_{12}y_2^2$$

е квадратична форма с ранг $\text{rk}(\phi) = 2$ и сигнатура $\sigma(\phi) = 0$. За $a_{11} \neq 0$ означаваме с $\varepsilon = \text{sign}(a_{11}) = \pm 1$ знака на $a_{11} \in \mathbb{R}^*$ и привеждаме

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \varepsilon |a_{11}| x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 =$$

$$= \varepsilon \left(\sqrt{|a_{11}|}x_1 + \frac{\varepsilon a_{12}}{2\sqrt{|a_{11}|}}x_2 \right)^2 - \frac{\varepsilon a_{12}^2}{4|a_{11}|}x_2^2 = \varepsilon y_1^2 - \frac{\varepsilon a_{12}^2}{4|a_{11}|}y_2^2$$

в каноничен вид. Коефициентите на y_1^2 и y_2^2 са ненулеви реални числа с противоположни знаци, така че рангът на ϕ е $\text{rk}(\phi) = 2$, а сигнатурата $\sigma(\phi) = 0$. Това доказва необходимите условия върху $\text{rk}(\varphi)$, $\text{rk}(\phi)$, $\sigma(\phi)$, в случай, че φ , съответно, ϕ се разлага в произведение на линейни функции $f_j : V \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq 2$.

Ако $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ е билинейна форма с ранг $\text{rk}(\varphi) = 1$, то спрямо произволен базис $b_1, \dots, b_n$ на V , матрицата $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ на φ има ненулев ред $(a_{p1}, \dots, a_{pn}) \neq 0_{1 \times n}$, $1 \leq p \leq n$ и за всяко $i \in \{1, \dots, p-1, p+1, \dots, n\}$ съществува $c_i \in \mathbb{R}$, така че $(a_{i1}, \dots, a_{in}) = c_i(a_{p1}, \dots, a_{pn})$. За удобство в означенията полагаме $c_p = 1$. Тогава $a_{ij} = c_i a_{pj}$ за $\forall 1 \leq i, j \leq n$ и

$$\begin{aligned} \varphi \left(\sum_{i=1}^n x_i b_i, \sum_{j=1}^n y_j b_j \right) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i a_{pj} x_i y_j = \\ &= \left(\sum_{i=1}^n c_i x_i \right) \left(\sum_{j=1}^n a_{pj} y_j \right) = f_1 \left(\sum_{i=1}^n x_i b_i \right) f_2 \left(\sum_{j=1}^n a_{pj} b_j \right) \end{aligned}$$

е произведение на линейните функции $f_j : V \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq 2$ с $f_1(b_i) = c_i$, $f_2(b_i) = a_{pi}$ за $\forall 1 \leq i \leq n$.

Да предположим, че квадратичната форма $\phi(x_1, \dots, x_n)$ е с ранг $\text{rk}(\phi) = 1$ или $\phi(x_1, \dots, x_n)$ има ранг $\text{rk}(\phi) = 2$ и сигнатура $\sigma(\phi)$. Без ограничение на общността, можем да считаме, че $\phi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2$ с $a_i \in \mathbb{R}$ е в каноничен вид спрямо базиса $b_1, \dots, b_n$ на V . Ако $\text{rk}(\phi) = 1$, то

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1^2 = [\text{sign}(a_1) \sqrt{|a_{11}|} x_1] (\sqrt{|a_{11}|} x_1)$$

е произведение на линейните функции $f_j : V \rightarrow \mathbb{R}$ с $f_j(b_i) = 0$ за $\forall 2 \leq i \leq n$, $\forall 1 \leq j \leq 2$ и с $f_1(b_1) = \text{sign}(a_1) \sqrt{|a_{11}|}$, $f_2(b_1) = \sqrt{|a_{11}|}$. Ако ϕ е с ранг $\text{rk}(\phi) = 2$ и сигнатура $\sigma(\phi) = 0$, то $\phi(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1^2 - a_2 x_2^2$ за реални положителни $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^{>0}$. В резултат,

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = (\sqrt{a_1} x_1 - \sqrt{a_2} x_2) (\sqrt{a_1} x_1 + \sqrt{a_2} x_2)$$

е произведение на линейните функции $f_j : V \rightarrow \mathbb{R}$ с $f_j(b_i) = 0$ за $\forall 3 \leq i \leq n$, $\forall 1 \leq j \leq 2$ и с $f_1(b_1) = f_2(b_1) = \sqrt{a_1}$, $f_2(b_2) = -f_1(b_2) = \sqrt{a_2}$.

Приложение 59. При пресмятане на границата $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ за матрица A се използват характеристичните корени на A .

Обяснение: Например,

$$A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0.4 & 0.2 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

се представя като

$$A = T D T^{-1},$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Следователно

$$A^n = (TDT^{-1})(TDT^{-1}) \dots (TDT^{-1}) = TD^nT^{-1},$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-0.2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-0.2)^n & \frac{2}{3} - \frac{2}{3}(-0.2)^n \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-0.2)^n & \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(-0.2)^n \end{pmatrix}$$

и границата

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Приложение 60. Решенията на хомогенно линейно диференциално уравнение образуват линейно пространство.

Например, множеството от решения $y = y(t)$ на диференциалното уравнение

$$y'' + 4y' + y = 0$$

е линейно пространство над $\mathbb{R}$.

Обяснение: Използваме наготово, че множеството $\mathcal{V}$ на функциите $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ с поточно определени събиране $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ и умножение с реално число, $(rf)(x) = rf(x)$ е линейно пространство над $\mathbb{R}$. Ще проверим, че множеството $\mathcal{U}$ от решенията $y = y(t)$ на даденото диференциално уравнение е подпространство на $\mathcal{V}$, а оттам и линейно пространство над $\mathbb{R}$. По-точно, за $\forall y_1, y_2 \in \mathcal{U}$ и $\forall r \in \mathbb{R}$ е в сила $y_1 + y_2, ry_1 \in \mathcal{U}$ съгласно

$$(y_1 + y_2)'' + 4(y_1 + y_2)' + (y_1 + y_2) = (y_1'' + 4y_1' + y_1) + (y_2'' + 4y_2' + y_2) = 0,$$

$$(ry_1)'' + 4(ry_1)' + ry_1 + r(y_1'' + 4y_1' + y_1) = 0.$$

Приложение 61. Ако система диференциални уравнения

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = \gamma x_1 + \delta x_2 \end{cases}$$

има матрица от коефициенти

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = SDS^{-1} = S \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} S^{-1},$$

с прост спектър, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то решенията на системата имат вида

$$x_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t},$$

$$x_2(t) = C_3 e^{\lambda_1 t} + C_4 e^{\lambda_2 t},$$

за подходящи реални константи $C_1, \dots, C_4$.

Обяснение: Полагаме

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = X = SY = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

или въвеждаме нови променливи $Y = S^{-1}X$ чрез обратима матрица $S \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ с постоянни елементи. Тогава от

$$S \frac{dY}{dt} = \frac{dX}{dt} = AX = A(SY) = (AS)Y$$

следва

$$\frac{dY}{dt} = (S^{-1}AS)Y = DY = \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \lambda_2 y_2 \end{pmatrix}.$$

Диференциалните уравнения

$$\frac{dy_j}{dt} = \lambda_j y_j$$

се представят във вида

$$\frac{d}{dt} \ln(y_j) = \frac{dy_j}{y_j} = \lambda_j dt$$

и се интегрират до $\ln(y_j) = \lambda_j t + \ln(y_j(0))$ или $y_j(t) = y_j(0)e^{\lambda_j t}$. Решенията на първоначалната система са

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = X = SY = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0)e^{\lambda_1 t} \\ y_2(0)e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix},$$

$$x_1(t) = s_{11}y_1(0)e^{\lambda_1 t} + s_{12}y_2(0)e^{\lambda_2 t}$$

$$x_2(t) = s_{21}y_1(0)e^{\lambda_1 t} + s_{22}y_2(0)e^{\lambda_2 t}.$$

Задачите са взети от

1. Божилов А., Кошлуков Пл., Сидеров Пл., "Задачи по алгебра - линейна алгебра Изд. Веди.
2. Kazdan J. L., "Linear Algebra Problems for Math 504-505".
3. Matthews K. R., "Elementary Linear Algebra".