УНИВЕРСИТЕТ ПО АРХИТЕКТУРА,
СТРОИТЕЛСТВО И ГЕОДЕЗИЯ

Михаил Константинов

# МНОЖЕСТВА
# ФУНКЦИИ
# ПОЛИНОМИ
# ПРОСТРАНСТВА

София
2000

# Съдържание

**Анотация.** В тази книга накратко са разгледани някои въпроси от курса по математика в техническите и икономическите университети:

- множества и функции;
- полиноми;
- метрични и нормирани пространства;
- топологични пространства;
- принципи на неподвижната точка.

За някои факти, изложени в книгата, не са дадени доказателства, или пък съответните доказателства са маркирани на идейно ниво. Доказателството на други факти е предоставено на читателите като упражнение. Авторът на тази книга е убеден, че именно така следва да се представят математическите курсове за инженери и икономисти, т.е., за бъдещи ползватели на математическите методи, които не са професионални математици. При този стил на изложение се набляга главно на фактите, идеите, примерите и числените реализации, а не толкова на формалните доказателства от типа „епсилон–делта” например.

За четене на книгата не се изискват предварителни знания, надхвърлящи обема на курса по математика в средното училище. В частност предполагаме, че читателят е запознат с понятията реално и комплексно число.

Книгата е предназначена за студентите от I и II курс на техническите и икономическите университети във връзка с лекционните курсове по дисциплините „Математически анализ – първа част", „Математически анализ – втора част" и „Приложна математика" (съответно „Избрани глави от математиката"). Тя може да се използва и от инженери, икономисти и специалисти от практиката.

Бележки по текста ще бъдат приети с благодарност на адрес mmk_fte@uacg.acad.bg

# Глава 1

# УВОД

Фундаменталните математически понятия множество, отношение, функция, функционно пространство и много други, отдавна са част от речника и инструментариума на инженерните и икономическите науки. Тези понятия и кръг от свързани с тях въпроси се изучават и в курса по математика на техническите и икономическите университети. Същевременно този кръг проблеми като че ли често остава встрани от естествения ход на изложението на съответната дисциплина в курса по математика. Това, заедно с факта, че у нас трудно се намира подходяща литература по въпроса, наложи написването на тази книга.

В книгата на достъпно ниво и същевременно с достатъчна строгост са разгледани въпросите за множества и функции, полиноми, метрични, нормирани и топологични пространства, принципи за неподвижната точка. Класическите принципи за неподвижната точка на Банах и Шаудер са изключително мощно средство за доказване на съществуване и/или единственост на редица задачи в математиката и нейните приложения.

Книгата е замислена едновременно като учебник и като справочно пособие по описаните по–горе горните теми. За нейното ползване не са необходими познания, надхвърлящи училищния курс по математика.

# Глава 2

# ОСНОВНИ ОЗНАЧЕНИЯ

Приети са следните основни означения:

- $\mathbb{N}$ – множеството на натуралните числа $1, 2, \ldots, n, \ldots$;
- $\mathbb{Z}$ – множеството на целите числа $0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n, \ldots$;
- $\mathbb{Q}$ – множеството на рационалните числа $p/q$, където $p$ и $q \neq 0$ са цели числа;
- $\mathbb{R}$ – множеството на реалните числа;

  $\mathbb{R}_+$ – множеството на неотрицателните реални числа;
- $\mathbb{C}$ – множеството на комплексните числа;
- $\imath = \sqrt{-1}$ – имагинерната единица;

- $\mathbb{K}^{m\times n}$ – множеството на $m \times n$ матриците с елементи от множеството $\mathbb{K}$;
- $\mathbb{K}^n = \mathbb{K}^{n\times 1}$ (за елементите на $\mathbb{K}^n$ се използва означението $x = [x_1, \dots, x_n]^\top$ или $x = (x_1, \dots, x_n)$);
- $M^\top \in \mathbb{K}^{m\times n}$ – транспонираната матрица на матрицата $M \in \mathbb{K}^{n\times m}$;
- $I_n$ – единичната $n \times n$ матрица;
- $2^A$ – множеството на всички подмножества (множеството-степен) на множеството $A$;
- $A \times B$ – декартовото произведение на множествата $A$ и $B$;
- $d(x, y)$ – разстояние между точките $x$ и $y$;
- $\| \cdot \|$ – норма;
- $|\!|\!| \cdot |\!|\!|$ – обобщена норма.

Редица други означения са пояснени на съответните места в текста.

# Глава 3

# МНОЖЕСТВА И ФУНКЦИИ

## 3.1 Уводни бележки

Теорията на множествата е сравнително нова математическа дисциплина, създадена от немския математик Г. Кантор (1845–1918). Основният обект на тази теория – понятието множество, намира важно приложение както в останалите дялове на самата математика, така и в други научни области.

Теорията на множествата заедно с математическата логика е един от фундаментите на съвременната математическа наука. Същевременно запознаването с основите на самата теория на множествата не изисква специални предварителни знания или математически умения. Важни понятия и релации в теория на множествата могат да бъдат разбрани и правилно усвоени дори от 10–12 годишна аудитория.

Разбира се, съвременната теория на множествата съвсем не е елементарна математическа дисциплина. В нея са разработени мощни теоретико–множествени методи и са получени дълбоки резултати, засягащи цялата сграда на математическото познание. Достатъчно е да споменем за т.нар. парадокси в теория на множествата, които доведоха до преосмисляне на някои фундаментални концепции в математиката и до възникване на нови математически дисциплини.

## 3.2 Множества

В математиката понятията се делят на *първични* и *определяеми*.

Понятието *множество* е първично и не се задава с помощта на формално определение. На интуитивно ниво под множество се разбира съвкупност от обекти, притежаващи дадено свойство. Понятията *множество, съвкупност, клас, семейство* често се отъждествяват.

По–нататък множествата ще означаваме с главни латински букви. Примери за множества са както следва.

**Пример 3.1** Множеството на всички български граждани (към определена дата и час).

**Пример 3.2** Множеството $\mathbb{N}$ на *натуралните числа*

$$1, 2, \ldots, n, \ldots ;$$

множеството $\mathbb{Z}$ на *целите числа*

$$0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n, \ldots;$$

множеството $\mathbb{Q}$ на *рационалните числа* $p/q$, където $p$ и $q$ са цели числа и $q \neq 0$.

**Пример 3.3** Множеството $P$ на *простите числа*

$$2, 3, 5, 7, 11, \ldots,$$

т.е., на натуралните числа, по-големи от 1, които се делят само на себе си и на 1.

Множествата се състоят от *елементи*, или *точки.*

Записът $x \in A$ означава, че $x$ е елемент на множеството $A$, а $x \notin A$ – че $x$ не е елемент на $A$.

Едно множеството се нарича *крайно*, ако има краен брой елементи. В противен случай то е *безкрайно.* Ако множеството $A$ е крайно, с $|A|$ се означава броят на елементите му.

Обикновено множествата се записват с помощта на фигурни (големи) скоби, вътре в които елементите се изброяват или се описват с характеризиращото ги свойство.

**Пример 3.4** Множеството

$$A = \{1, 2, a\}$$

се състои от числата $1, 2$ и буквата $a$, а

$$B = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$$

е множеството на четните положителни числа $2, 4, 8, \ldots$.

**Внимание!** Трябва да се прави разлика между обекта $x$ и множеството $\{x\}$, което има единствен елемент $x$. На свой ред множеството $\{\{x\}\}$ също има единствен елемент, а именно множеството $\{x\}$. Понякога за опростяване на означенията едноелементното множество (на английски singleton) $\{x\}$ се означава просто като $x$.

Множеството $A$ е *подмножество* на множеството $B$ (пишем $A \subset B$), ако елементите на $A$ са елементи и на $B$. Ако $A \subset B$ и съществува $x \in B$, такова че $x \notin A$, то $A$ се нарича *собствено* (или *истинско*) *подмножество* на $B$.

Множество, което не съдържа нито един елемент, се нарича *празно множество* и се бележи с $\emptyset$. Според едно просто формално съображение празното множество е подмножество на всяко множество, т.е., имаме

$$\emptyset \subset B.$$

Действително, ако някое множество $A$ не е подмножество на $B$, то би трябвало да съществува елемент $x \in A$, който не е елемент на $B$. Но ако $A = \emptyset$, не съществува изобщо елемент $x \in A$. Следователно твърдението „Множеството $A = \emptyset$ не е подмножество на $B$" не е вярно и по необходимост имаме $\emptyset \subset B$.

Множествата $A$ и $B$ са *равни* (пишем $A = B$), ако $A \subset B$ и $B \subset A$. В противен случай те са *различни* (пишем $A \neq B$). Понякога е много трудно да се установи дали две множества са равни.

**Пример 3.5** Нека

$$A = \{6, 8, 10, \dots\}$$

е множеството на четните числа, по-големи от 4, а

$$B = \{p + q : p, q \in P;\ p, q > 2\}$$

е множеството на всички суми от прости числа, по-големи от 2. Очевидно $B \subset A$, но и до днес не е известно, дали $A \subset B$, т.е., дали всяко четно число, по-голямо от 4, може да се представи като сума от две прости числа $p$, $q > 2$. Равенството $A = B$ е известно като *хипотеза на Голдбах* (немски математик, 1690–1764) и е една от най-трудните нерешени и до днес математически задачи.

**Пример 3.6** Нека $A = \{1, 2\}$ и $B \subset \mathbb{N}$ е множеството на всички натурални числа $n$, за които уравнението

$$x^n + y^n = z^n \tag{3.1}$$

има решение в натурални числа. Очевидно $A \subset B$. Доказването на обратното включване $B \subset A$ (а оттук и на равенството $A = B$) обаче, е също много трудна задача. Това е всъщност съдържанието на *знаменитата хипотеза на Ферма* (френски математик, 1601–1665), която гласи, че уравнението (3.1) няма решение в натурални числа при $n > 2$. В продължение на 350 години този резултат не беше доказан въпреки усилията на плеада знаменити математици. Едва през 1993 беше съобщено доказателство на хипотезата на Ферма от английския математик Е. Уайлс, което беше прието от математическата общност. Впоследствие се констатираха някои непълноти и в това доказателство, докато в началото на 1994 Уайлс представи окончателно доказателство.

**Внимание!** Въведената релация за равенство между множества понякога може да доведе до известни логически затруднения, например в следната ситуация. По-горе (пример 3.4) ние използвахме релацията $A = \{1, 2, a\}$, чрез която всъщност дефинирахме едно множество $A$. Но от друга страна сама по себе си тази релация може да означава и факта, че две множества, а именно $A$ и $\{1, 2, a\}$, са равни. Поради това в случаите, когато едно множество се дефинира чрез дадено равенство (както в пример 3.4), вместо $=$ понякога пишем нещо подобно на равенство, например $:=$, което се чете „равно по определение". Надяваме се, че по-нататък двете различни употреби на знака за равенство няма да доведат до недоразумения.

Нека $A$ е зададено множество. Понякога се налага да се разгледа едно ново множество, чиито елементи са всички подмножества на $A$. Това множество се нарича *множество-степен* на $A$ и се бележи с $2^A$. Очевидно

$$\emptyset, A \subset 2^A.$$

Ако множеството $A$ има $n$ елемента, множеството-степен $2^A$ има $2^n$ елемента (вж. упражнение 3.1).

**Пример 3.7** Нека $A = \{a, b, c\}$. Тогава

$$2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, b, c\}\}.$$

За множествата могат да се въведат някои операции, които са аналогични на аритметичните операции с числа.

*Обединение* (или *сума*) на множествата $A$ и $B$ се нарича множеството $C$, означавано като

$$C = A \cup B$$

(или $C = A + B$), което се състои от елементите на $A$ и $B$, а именно $x \in C$, ако $x \in A$ или $x \in B$. Обединението има смисъл и за безкрайно семейство от множества $\{A_1, A_2, \ldots\}$:

$$C = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

**Пример 3.8** Множеството на натуралните числа $\mathbb{N}$ е обединение на множеството на положителните четни числа и на множеството на положителните нечетни числа.

Използва се и операцията *обединение с повтарящи се елементи*, означавана като

$$C = A \dot{\cup} B,$$

при която съвпадащите елементи в $A$ и $B$ се отчитат два пъти. Тук на $C$ следва да се гледа като на набор от елементи (с възможни повторения), защото като множества обединението и обединението с повторения очевидно съвпадат.

**Пример 3.9** Нека $A = \{1, 2\}$ и $B = \{2, 3\}$. Тогава

$$A \dot{\cup} B = \{1, 2, 2, 3\}.$$

Този набор с повторения като множество съвпада с обединението

$$A \cup B = \{1, 2, 3\}.$$

*Сечение* или (*произведение*) на множествата $A$ и $B$ се нарича множеството $C$, означавано като

$$C = A \cap B$$

(или $C = AB$), което се състои от елементите, принадлежащи едновременно на $A$ и $B$, а именно $x \in C$, ако $x \in A$ и $x \in B$. Сечението има смисъл и за безкрайно семейство от множества $\{A_1, A_2, \ldots\}$:

$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k.$$

**Пример 3.10** Нека $A = \{1, 2, e, \pi\}$ и $B = \{e, 3, \pi\}$. Тогава $A \cap B = \{e, \pi\}$.

Казваме, че множествата $A$ и $B$ *се пресичат*, ако $A \cap B \neq \emptyset$. В противен случай ($A \cap B = \emptyset$) казваме, че те са *чужди* помежду си, или просто *непресичащи се*. Така например множествата $A$ и $\emptyset$ са чужди помежду си. Впрочем, по-интересен е случаят на непресичащи се непразни множества.

Две непресичащи се непразни множества се наричат *дизюнктивни*. Горното определение се разпространява и за семейство от множества: семейството $\{A_1, A_2, \ldots\}$ от непразни множества $A_i$ се нарича *дизюнктивно* когато $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$.

Често се налага дадено множество $A$ да се представи като обединение от дизюнктивно семейство $\{A_1, A_2, \ldots\}$ свои подмножества $A_i \subset A$:

$$A = \bigcup_i A_i.$$

В този случай се използва и означението

$$A = \biguplus_i A_i.$$

*Разлика* на множествата $A$ и $B$ се нарича множеството $C$, означавано като

$$C = A \backslash B,$$

което се състои от онези елементи на $A$, които не са елементи на $B$: $x \in C$, ако $x \in A$ и $x \notin B$.

**Пример 3.11** За множествата от пример 3.8 имаме

$$A \backslash B = \{1, 2\}, \;\; B \backslash A = \{3\}.$$

Ако $B \subset A$, то разликата $A \backslash B$ се нарича *допълнение* на множеството $B$ до множеството $A$ и се означава с $\mathrm{C}_A B$. Ако от контекста е ясно до кое множество е допълнението, то пишем само $\mathrm{C}B$. Така например често е удобно да си мислим, че всички използвани в някоя задача множества $A, B, \ldots$ са подмножества на някакво *универсално* множество (или *универсум*) $U$. Тогава допълненията на $A, B$ и т.н. до $U$ означаваме с $\mathrm{C}A$, $\mathrm{C}B$ и т.н. Използва се и означението $\mathrm{C}A = \overline{A}$.

За онагледяване на операциите с множества много полезни са *диаграмите на Уен* (английски математик, 1834–1923), при които универсалното множество се отъждествява с точките в равнината, лежащи в даден правоъгълник, а множествата – с точките, лежащи в овали вътре в правоъгълника. С подобни диаграми си е служил и швейцарският математик Л. Ойлер (1707–1783).

Два елемента $x, y$ образуват *наредена двойка* $(x, y)$, ако е указано кой от тях е първи и кой втори. Така две наредени двойки $(x, y)$ и $(u, v)$ са равни точно когато $x = u$ и $y = v$. Елементите $x$ и $y$ се наричат *първа* и *втора координата* (или *проекция*) на двойката $(x, y)$. Аналогично се определя наредената $n$–орка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с координати $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Множеството на наредените двойки $(x, y)$, където $x \in A$ и $y \in B$, се нарича *декартово произведение* на множествата $A$ и $B$ и се означава с

$$C = A \times B$$

(Р. Декарт – френски математик, 1596–1650).

**Пример 3.12** Нека

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}, \ B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}.$$

Тогава $A \times B$ се състои от всевъзможните двойки $(a_j, b_k)$, които са $mn = |A||B|$ на брой.

Аналогично се дефинира декартовото произведение

$$C = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$$

на $n$ множества $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Ако множествата $A_i$ са крайни, то

$$|C| = |A_1||A_2| \cdots |A_n|.$$

Естествено, между множествата $A_i$ може да има и равни. Ако например $A_1 = A_2 = \cdots = A_n$, то декартовото произведение $A \times A \times \cdots \times A$, съдържащо $n$ множителя, се означава и като $A^n$.

**Пример 3.13** Нека $A = \{a, b\}$. Тогава

$$\begin{aligned} A^3 &= \{\{a,a,a\},\{a,a,b\},\{a,b,a\},\{a,b,b\}, \\ &= \{b,a,a\},\{b,a,b\},\{b,b,a\},\{b,b,b\}\}. \end{aligned}$$

## 3.3 Функции

Нека са зададени множествата $A$ и $B$ и нека на всеки елемент $x \in A$ по някакво правило (закон) $f$ е поставен в съответствие определен елемент $y = f(x) \in B$. Тогава ще казваме, че е зададено *изображение* $f$ на множеството $A$ в множеството $B$, или *функция* $f$, определена в $A$ и приемаща стойности в $B$ (казва се още, че $f$ е функция от $A$ към $B$). Елементът $x \in A$ се нарича *аргумент* на $f$, а $f(x) \in B$ – *стойност* на $f$ в $x$, или *образ* на елемента $x$ при изображението $f$. Елементът $x \in A$ се нарича *прообраз* (или *праобраз*) на елемента $y = f(x) \in B$.

**Внимание!** Всеки елемент $x \in A$ има единствен образ $f(x) \in B$ при изображението $f : A \to B$. Същевременно даден елемент $y \in B$ може да има няколко прообраза.

Поради горното обстоятелство понякога е необходимо да укажем всички прообрази на дадено $y \in B$. Тогава говорим за *пълен прообраз* на $y$: това е множеството на всички $x \in A$, такива че $f(x) = y$.

**Пример 3.14** Нека $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ и функцията $f$ е зададена чрез съответствието

$$f(a_1) = b_1,\ f(a_2) = b_2,\ f(a_3) = b_2,\ f(a_4) = b_3.$$

Тогава елементът $b_2$ има два прообраза $a_2$ и $a_3$.

Съществуват различни начини за означаване на изображения $f$ според горното определение, например $f : A \to B$ или $x \mapsto f(x)$. Понякога е удобно функцията да се означава чрез равенство, изразяващо закона на съответствие, например

$$f(x) = x^3,\ 0 \le x < 1,$$

или

$$f : x \mapsto x^2,\ x \in \mathbb{R}.$$

**Внимание!** Трябва добре да се различават две неща: стойността $f(x)$ на $f$ в $x$ и самата функция $f$, която показва съответствието между елементите $x \in A$ и образите им $y = f(x) \in B$. В този смисъл често използваните изрази от вида „Нека $y = f(x)$ е зададена функция ...” могат да доведат до недоразумение, тъй като в тях се смесват две различни неща.

Множеството $A$ се нарича *дефиниционна област* или *дефиниционно множество* на функцията $f : A \to B$ и се бележи понякога с $\mathrm{Dom}(f)$. Използват се и означенията $\mathrm{D}(f)$ и $\Delta(f)$.

Със символа $f(A) \subset B$ се означава множеството на онези елементи от $B$, които са образи на елементи на $A$ при изображението $f$, т.е.,

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\} \subset B.$$

Множеството $f(A)$ се нарича *образ* на $A$ при $f$ или *множество от стойности* на $f$, или *кообласт* на $f$. Това множество се бележи и като $\mathrm{Im}(f)$. Аналогично, ако $X \subset A$, то

$$f(X) = \{f(x) : x \in X\} \subset f(A).$$

*Графика* на функцията $f : A \to B$ се нарича множеството

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) : x \in A\} \subset A \times B$$

на наредените двойки $(x, f(x))$ когато $x$ пробягва дефиниционната област на $f$.

**Пример 3.15** За функцията от пример 3.14 имаме

$$\Gamma(f) = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_2), (a_4, b_3)\}.$$

Очевидно на всяка функция $f : A \to B$ съответства единствена графика $\Gamma(f)$. Обратно, всяко множество $R \subset A \times B$ от наредени двойки $(x, y)$, такива че от $(x, y) = (x, z)$ следва $y = z$, определя някаква функция $g : X \to B$ по правилото:

$g(x) = y$ за всяко $(x, y) \in R$. Тук $X \subset A$ е множеството на всички елементи $x \in A$, такива че $(x, y) \in R$. Следователно всяка функция може да се отъждестви със своята графика, т.е., на всяка функция можем да гледаме като на множество от наредени двойки $(x, y)$. Естествено, не всяко множество от наредени двойки $(x, y)$ определя функция: необходимо е на всяко $x$ да съответства единствено $y$, т.е., не се допускат двойки $(x, y)$ и $(x, z)$ с $y \neq z$ (другояче казано, ако множеството $R$ определя функция, то от $(x, y), (x, z) \in R$ следва $y = z$).

Често е удобно да се говори за функция на два или повече аргумента (или променливи), при което например на всяка двойка $(x_1, x_2) \in A_1 \times A_2$ се съпоставя елемент $y = f(x_1, x_2) \in B$. Аналогично се дефинира функция $f$ на $n$ аргумента, която на всяка наредена $n$-орка

$$(x_1, x_2, \dots x_n) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$$

съпоставя елемента $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in B$. Разбира се, тази постановка се вписва в общото определение на функция, например ако положим $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$.

В някои математически области понякога е прието да се говори за *многозначни* функции $f : A \to B$, при което на $x \in A$ се съпоставят два или повече елемента на $B$. Това изглежда да противоречи на приетата до тук концепция за еднозначност на функция, съгласно която на всяка стойност $x$ на аргумента съпоставяме единствена стойност $y = f(x)$ на функцията. Оказва се, че и тук можем да запазим концепцията за еднозначност. За целта можем да смятаме $f$ като функция, която на всяко $x \in A$ съпоставя не един елемент на $B$, а някакво подмножество $Y = f(x)$ на $B$. Така получаваме една нова функция $f^*$, изобразяваща $A$ в множеството $2^B$ на всички подмножества на $B$.

Нека $Y \subset B$. Тогава множеството

$$X = f^{-1}(Y) = \{x \in A : f(x) \in Y\} \subset A$$

на всички прообрази на елементите от $Y$ се нарича *пълен прообраз* (или само *прообраз*) на $Y$ при изображението $f$. Ако $Y = \{y\}$ е едноелементно множество, то говорим за пълен прообраз на $y$ и вместо $f^{-1}(\{y\})$ пишем просто $f^{-1}(y)$.

**Пример 3.16** За функцията от пример 3.14 е в сила

$$f^{-1}(\{b_1, b_2\}) = \{a_1, a_2, a_3\},$$
$$f^{-1}(\{b_2\}) = f^{-1}(b_2) = \{a_2, a_3\}.$$

Съответствието $f^{-1}$, което на всяко $Y \subset B$ съпоставя прообраза му $X \subset A$ при изображението $f : A \to B$, може да се разглежда и като функция, изобразяваща множеството-степен $2^B$ в множеството степен $2^A$, т.е.,

$$f^{-1} : 2^B \to 2^A.$$

Принадлежността към дадено множество $A \subset U$, където $U$ е универсумът, може да се опише с една функция

$$\chi_A : U \to \{0, 1\},$$

определена в $U$ и приемаща стойности 0 и 1 както следва

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, \ x \in A \\ 0, \ x \notin A. \end{cases}$$

Функцията $\chi_A$ се нарича *характеристична функция* на множеството $A$.

Функцията $f : A \to B$ се нарича *постоянна* (или *функция–константа*), ако за някое $b \in B$ имаме $f(x) = b$ за всяко $x \in A$.

Функцията $i : A \to A$ се нарича *идентитет* (или *тъждествена функция*), ако $i(x) = x$ за всяко $x \in A$. Понякога идентитетът в $A$ се означава и като $i_A$.

Когато $f : A \to B$ е функция и $y \in B$ е фиксиран елемент, зависимостта

$$f(x) = y \tag{3.2}$$

се нарича *уравнение* с неизвестно $x \in A$. Всяко $x_0$, такова че $f(x_0) = y$, е *решение* (или *корен*) на уравнението.

Множеството на всички решения

$$S = S(f, y) = f^{-1}(y) = \{x : f(x) = y\}$$

на уравнението (3.2) е всъщност пълният прообраз на $y$. Очевидно уравнението (3.2) има решение точно когато $y \in f(A)$. Множеството $S$ се нарича също *общо решение* на уравнението.

Функцията $f : A \to B$ се нарича *сюрективна* (или *сюрекция*), ако $f(A) = B$. В този случай се казва, че $f$ изобразява $A$ *върху* $B$. Другояче казано, функцията $f$ е сюрекция точно когато за всяко $y \in B$ уравнението $f(x) = y$ има поне едно решение.

**Пример 3.17** Функцията $f : [-2, 2] \to [0, 4]$, определена от $f(x) = x^2$, е сюрективна. Функцията $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определена от $g(x) = \sin x$, не е сюрекция, защото уравнението $\sin x = y$ няма реални решения при $|y| > 1$.

Всяка функция $f : A \to B$ лесно (поне по принцип) може да се сведе до сюрекция, ако в качеството на $B$ вземем $f(A)$.

**Пример 3.18** Функцията $g$ от пример 3.17 става сюрекция, ако я определим като $g : \mathbb{R} \to [-1, 1]$.

Функцията $f : A \to B$ се нарича *инективна* (или *инекция*), ако за $x_1, x_2 \in A$ от $x_1 \neq x_2$ следва $f(x_1) \neq f(x_2)$. Другояче казано, функцията $f$ е инекция точно когато за всяко $y \in B$ уравнението $f(x) = y$ има не повече от едно решение.

**Пример 3.19** Функцията $f$ от пример 3.17 не е инективна, тъй като уравнението $x^2 = y$ има две решения $x_{1,2} = \pm\sqrt{y}$ при $0 < y \leq 4$. Ако обаче разгледаме функцията

$$f_1 : [0, 2] \to [0, 4],$$

определена от $x \mapsto x^2,\ x \in [0, 2]$, то тя вече е инективна (докажете). Функцията $g$ от пример 3.17 също не е инективна (уравнението $\sin x = y$ има безкрайно много реални решения при $|y| \leq 1$). Обаче функцията

$$g_1 : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R},$$

определена от $x \mapsto \sin x,\ x \in [-\pi/2, \pi/2]$, е инективна.

Функцията $f : A \to B$ се нарича *биективна* (или *биекция*), ако тя е едновременно сюрективна и инективна. В този случай се казва, че $f$ е *взаимно–еднозначна* функция, изобразяваща $A$ върху $B$. Другояче казано, функцията $f$ е биекция точно когато за всяко $y \in B$ уравнението $f(x) = y$ има точно едно решение.

**Пример 3.20** Функцията $f_1$ от пример 3.19 е биекция. Функцията $g_1$ от същия пример не е биекция, но от нея лесно получаваме биекция, ако приемем, че тя изобразява интервала $[-\pi/2, \pi/2]$ в интервала $[-1, 1]$ (а не в $\mathbb{R}$) по формулата $x \mapsto \sin x$.

Примери 3.17–3.20 показват, че задаването на функция „с формула", например $x \mapsto x^2$, не е достатъчно, а трябва да се укажат дефиниционното множество (или дефиниционната област) $A$ и множеството $B$. За избягване на недоразумения при формулното задаване на функция $x \mapsto f(x)$, ако изрично не е посочена дефиниционната област се приема, че функцията е определена за т.нар. *максимална* (или *естествена*) дефиниционна област. Максималната дефиниционна област се състои от всички стойности на аргумента $x$, за които формулният израз $f(x)$ има смисъл.

**Пример 3.21** Максималната дефиниционна област на функцията $f$, определена с израза $f(x) = 1/x$, е

$$\mathbb{R}\backslash\{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty).$$

Ако функцията $f : A \to B$ е биекция, то може да се определи функцията $f^{-1} : B \to A$, която на всяко $y \in B$ съпоставя прообраза му $x \in A$, т.е., елемента $x$, такъв че $y = f(x)$ (елементът $x$ съществува и е единствен поради биективноста на $f$). Тази функция се нарича *обратна* по отношение на $f$. Казва се още, че функциите $f$ и $f^{-1}$ са *взаимно обратни.* В този случай за всички $x \in A$, $y \in B$ е изпълнено $f^{-1}(f(x)) = x$ и $f(f^{-1}(y)) = y$.

Означението $f^{-1}$ за обратна функция е съгласувано с означението за пълен прообраз при изображението $f : A \to B$. Действително, ако функцията $f$ е биекция и $y = f(x) \in B$ за някое $x \in A$, пълният прообраз на едноелементното множество $\{y\}$ е едноелементното множество $\{x\}$ (или накратко, прообразът на $y$ е $x$). Известно недоразумение може да възникне само ако функцията $f$ не е биекция. В този случай означението $f^{-1}(Y)$ за пълен прообраз на $Y \subset A$ все още има смисъл, макар че обратната функция на функцията $f$ не съществува. Ако приемем, че $f^{-1}$ е съответствие, което на всяко $Y$ съпоставя пълния му пробраз $X$, то $f^{-1} : 2^B \to 2^A$ е функция в обикновения смисъл.

**Пример 3.22** Обратната функция $f_1^{-1} : [0,4] \to [0,2]$ на функцията $f_1$ от пример 3.19 се дава от $f_1^{-1}(y) = \sqrt{y}$, $y \in [0,4]$.

Нека $f : A \to B$ и $g : B \to C$ са зададени функции. Тъй като $f(A) \subset B$, то на всеки елемент $y = f(x) \in B$ чрез функцията $g$ може да се съпостави елемента $z = g(y) \in C$. Така на всеки елемент $x \in A$ се съпоставя елемент $z = g(f(x)) \in C$. Новополучената функция се нарича *суперпозиция* или *композиция* на $f$ и $g$ и се означава с $u = g \circ f$. Функцията $g \circ f$ се нарича още *сложна* функция. По индукция се определя композиция

$$u = f_n \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1$$

на повече от две функции $f_1, f_2, \ldots, f_n$, където $f_i : A_i \to A_{i+1}$:

$$u(x) = f_n(\cdots f_2(f_1(x)) \cdots) \in A_{n+1},\ x \in A_1.$$

**Пример 3.23** Нека са дадени функциите $f, g, h$, определени от

$$f(x) = 3x,\ g(y) = 2 + \cos y,\ h(z) = 1/z.$$

Тогава композицията $u = h \circ g \circ f$ се дава от

$$u(x) = h(g(f(x))) = \frac{1}{2 + \cos 3x},\ x \in \mathbb{R}$$

(тук използвахме конвенцията за максималната дефиниционна област).

Нека $f : A \to B$ е биекция. Тогава

$$f \circ f^{-1} = i_B,\ f^{-1} \circ f = i_A.$$

Обратно, ако $f : A \to B$ и $g : B \to A$ са две функции, такива че $g \circ f = i_A$ и $f \circ g = i_B$, то $f$ и $g$ са биекции и $g = f^{-1}$. Също така, ако изпълнено само условието $g \circ f = i_A$, то $f$ е инекция и $g$ е сюрекция.

Нека са зададени функциите $\alpha : \Pi \to A$ и $\beta : \Pi \to B$, от които първата е биекция. Тогава съществуват обратната функция $\alpha^{-1} : A \to \Pi$ и композицията

$$f = \beta \circ \alpha^{-1} : A \to B.$$

За така получената функция $f$ се казва, че е зададена *параметрично* с помощта на функциите $\alpha, \beta$. Действително, в този случай двойките $(x, y)$ от графиката $\Gamma(f)$ на $f$ се получават от

$$x = \alpha(p),\ \ y = \beta(p)$$

когато параметърът $p$ пробягва множеството $\Pi$.

**Пример 3.24** Нека функциите $\alpha : [0, \infty) \to (-1, 1]$ и $\beta : [0, \infty) \to [0, 1]$ са определени от изразите

$$\alpha(p) = \frac{1 - p^2}{1 + p^2},\ \beta(p) = \frac{2p}{1 + p^2}.$$

Тогава за параметрично зададената чрез

$$x = \alpha(p),\ \ y = \beta(p)$$

функция имаме $x^2 + y^2 = 1$ и следователно

$$y = \sqrt{1 - x^2},\ x \in (-1, 1].$$

Нека в множеството $C = A \times B$ е определена функцията $h : C \to B$ и нека $b \in B$ е фиксиран елемент. Да предположим, че при всяко $x \in A$ уравнението $h(x, y) = b$ има единствено решение $y \in B$. Тогава в $A$ може да се определи функцията $f : A \to B$, която на всяко $x \in A$ съпоставя решението $y \in B$, т.е., $y = f(x)$. За така получената функция $f$ се казва, че е определена *неявно* посредством уравнението $h(x, y) = b$.

**Пример 3.25** Уравнението

$$2x^5 + 28x - 15y2^y = 0$$

има единствено решение $y = f(x) \geq 0$ за всяко $x \geq 0$, тъй като функцията $g : y \mapsto y2^y$, $y \geq 0$, е растяща и $g(y) \to \infty$ при $y \to \infty$. Например имаме

$$f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f(2) = 2.$$

Същевременно не е възможно да намерим удобен израз за $f(x)$ за произволно $x \geq 0$. Независимо от това можем да направим важни изводи за функцията $f : [0, \infty] \to [0, \infty]$. Например, тя е непрекъсната, монотонно растяща и $f(x) \to \infty$ при $x \to \infty$ (докажете!).

Нека $f : A \to B$ е зададена функция и $C \subset A$. Тогава функцията $g : C \to B$, определена от $g(x) = f(x)$ за всяко $x \in C$, се нарича *свиване* на функцията $f$ върху множеството $C$ и се бележи с $f|_C$. Казва се също, че $f$ е *продължение* на $g$. Ако $g$ е свиване на $f$, то графиката на $g$ е част от графиката на $f$, т.е., $\Gamma(g) \subset \Gamma(f)$.

**Пример 3.26** Функцията $f_1 : [0, 2] \to [0, 4]$ от пример 3.19 е свиване на функцията $f : [-2, 2] \to [0, 4]$ от пример 3.16, т.е., $f_1 = f|_{[0,2]}$.

Важен клас са функциите $f : A \to A$, при които множеството $A$ се преобразува в (част от) себе си. Пример за такава функция е идентитетът $i : A \to A$, определен от $i(x) = x$.

При разглеждане на редица въпроси за абстрактни функции (т.е., на функции, изобразяващи произволно множество в произволно множество) е удобно да се използва език, заимстван от геометрията. При това говорим за точки, линии и други геометрични обекти, макар че съответният обект може и да не отговаря съвсем на геометричната ни интуиция.

Да разгледаме отново уравнението

$$h(x,y) = b,$$

където

$$h : A \times B \to B$$

е зададена функция и $b$ е фиксиран елемент на $B$. Тогава множеството $L \subset A \times B$ на всички двойки $(x,y)$, удовлетворяващи уравнението, се нарича *линия*, зададена неявно. Забележете, че в този случай на дадено $x$ може да съответстват различни двойки $(x,y),(x,z) \in L$, т.е., $L$ може и да не е графика на функция.

Особено разпространен е случаят $A = B$, при което имаме линия $L$ в $A^2$.

**Пример 3.27** Уравнението $x^2 + y^2 = 1$ определя окръжност $\mathbb{S}^1$ в $\mathbb{R}^2$. Същото уравнение в $\mathbb{Q}^2$ определя линията

$$L = \{(x_n, y_n) : n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{S}^1,\ x_n = \frac{2n}{n^2+1},\ y_n = \frac{n^2-1}{n^2+1},$$

състояща се от изолирани в $\mathbb{R}^2$ точки $(x_n, y_n)$.

**Пример 3.28** Нека $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}^2$ и $x \in \mathbb{R}$, $(y,z) \in \mathbb{R}^2$. Тогава уравнението

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

определя сфера $\mathbb{S}^2$ в $\mathbb{R}^3$. Така „линията” се оказа сфера.

Линия в $A \times B$ може да се зададе и параметрично. Нека са зададени функциите $\alpha : \Pi \to A$ и $\beta : \Pi \to B$. Тогава множеството

$$L = \{(\alpha(p), \beta(p)) : p \in \Pi\} \subset A \times B$$

се нарича *линия* в $A \times B$, зададена параметрично. При това $\alpha$ може и да не е биекция, при което $L$ може и да не е графика на функция, изобразяваща $A$ в $B$.

Съгласно горните определения графиката $\Gamma(f)$ на функцията $f : A \to B$ е линия в $A \times B$.

## 3.4 Отношения

Нека са дадени $n$ множества $A, B, \ldots, C$. Всяко подмножество $R$ на декартовото произведение $A \times B$ се нарича *бинарно отношение*. Аналогично се определят *тернарно отношение* като подмножество на $A \times B \times C$ и *$n$–арно отношение* като подмножество на $A \times B \times \cdots \times C$. По-нататък бинарното отношение ще наричаме само отношение. Така всяко отношение е множество от наредени двойки $(x, y)$, където $x \in A$ и $y \in B$. Първата проекция (т.е., първият елемент) $x$ на двойката $(x, y)$ ще означаваме като $x = \mathrm{pr}_1(x, y)$, а втория елемент $y$ – съответно като $y = \mathrm{pr}_2(x, y)$.

Графиката $\Gamma(f)$ на дадена функция $f : A \to B$ очевидно е отношение. Не всяко отношение $R \subset A \times B$, обаче, е графика на функция $A \to B$. Действително, за да бъде отношението $R$ графика на някаква функция $f : A \to B$ е необходимо и достатъчно то да не съдържа две различни двойки $(x, y)$ и $(x, z)$.

## 3.5 Еквивалентност на множества

В редица случаи се налага да бъдат сравнявани множества с различна природа. В такъв случай един признак на сравнение би могъл да бъде броят на елементите им (ако множествата са крайни) или някакво обобщение на понятието брой на елементи, ако множествата са безкрайни. Може обаче да се постъпи и по друг начин – като се установи определено съответствие между елементите на двете множества.

Множествата $A$ и $B$ се наричат *еквивалентни* или *равномощни* ако между тях съществува взаимно–еднозначно съответствие (биекция). В този случай пишем $A \sim B$. Релацията еквивалентност притежава следните свойства:

- $A \sim A$ (*рефлексивност*);
- Ако $A \sim B$, то $B \sim A$ (*симетричност*);
- Ако $A \sim B$ и $B \sim C$, то $A \sim C$ (*транзитивност*).

Множеството $A$ се нарича *изброимо*, ако то е еквивалентно на множеството на натуралните числа, т.е., $A \sim \mathbb{N}$. В този случай елементите на $A$ могат да се номерират:

$$A = \{a_n\} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

Така $A$ всъщност е безкрайна редица.

Ако $A$ е безкрайно и не е изброимо, то се нарича *неизброимо* множество. Казва се, че множеството $A$ е *не повече от изброимо*, ако то е или крайно, или изброимо.

Може да се покаже, че всяко безкрайно подмножество $B$ на дадено изброимо множество $A = \{a_n\}$ също е изброимо. Наистина, нека $n_1$ е най–малкият индекс на елементите на $A$, такъв че $a_{n_1} \in B$. Нека по-нататък $n_2 > n_1$ е най–малкият индекс, за който $a_{n_2} \in B$, и т.н. В резултат на този процес елементите на $B$ се получават като

$$b_1 = a_{n_1},\ b_2 = a_{n_2},\ \ldots,\ b_k = a_{n_k}, \ldots.$$

Така построената биекция $k \mapsto a_{n_k}$ между $\mathbb{N}$ и $B$ показва, че множеството $B$ е изброимо.

Следователно едно изброимо множество може да е еквивалентно на някоя своя собствена част. Ясно е, че при крайните множества това е невъзможно.

**Пример 3.29** Множеството $\mathbb{N}$ е еквивалентно на множеството

$$S = \{1, 4, \ldots, n^2, \ldots\}$$

на точните квадрати. На пръв поглед това е странно, защото $S$ изглежда много „по-малко” от $\mathbb{N}$ (елементите $n^2$ на $S$ се срещат все по-нарядко в $\mathbb{N}$ с нарастване на $n$). Това показва, че интуитивното понятие „по-малко” може да няма смисъл при безкрайни множества.

Лесно се вижда, че обединението $B = A_1 \cup A_2$ на две изброими множества $A_1$ и $A_2$ също е изброимо. Действително, елементите $b_k$ на $B$ лесно се номерират като например $b_{2m-1}$ се вземе равно на $m$–тия елемент на $A_1$, а $b_{2m}$ – равно $m$–тия елемент на $A_2$. Оказва се също, че обединението

$$B = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

дори на изброимо много изброими множества $\{A_k\}$ също е изброимо множество! Действително, нека елементите на дадените множества са номерирани така, че $a_{k,i}$ да е $i$–тият елемент на $A_k$. Тогава елементите на $B$ могат да се разположат в безкрайната таблица

$$\begin{array}{ccl}
A_1 & - & a_{1,1}\ a_{1,2}\ a_{1,3}\ a_{1,4}\ \ldots \\
A_2 & - & a_{2,1}\ a_{2,2}\ a_{2,3}\ a_{2,4}\ \ldots \\
A_3 & - & a_{3,1}\ a_{3,2}\ a_{3,3}\ a_{3,4}\ \ldots \\
A_4 & - & a_{4,1}\ a_{4,2}\ a_{4,3}\ a_{4,4}\ \ldots \\
\vdots & - & \vdots \\
A_k & - & a_{k,1}\ a_{k,2}\ a_{k,3}\ a_{k,4}\ \ldots \\
\vdots & - & \vdots
\end{array}$$

От тук е ясно, че елементите на $B$ могат да се номерират, например по триъгълници

$$a_{1,1}, a_{2,1}, a_{1,2}, a_{3,1}, a_{2,2}, a_{1,3}, a_{4,1}, a_{3,2}, a_{2,3}, a_{1,4}, \ldots$$

или по квадрати

$$a_{1,1}, a_{2,1}, a_{2,2}, a_{1,2}, a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}, a_{2,3}, a_{1,3}, \ldots$$

(проследете върху таблицата и двата начина. Може ли да предложите и други начини?).

От горния резултат непосредствено следва, че множеството $\mathbb{Q}$ на рационалните числа също е изброимо. Наистина, всяко положително рационално число се съдържа поне в едно от множествата

$$A_k = \left\{ \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \ldots, \frac{n}{k}, \ldots \right\}, \ k \in \mathbb{N}.$$

Но обединението $B$ на тези множества е изброимо. На свой ред $\mathbb{Q}$ е изброимо защото то се състои от $B$, равномощното на $B$ множество на отрицателните рационални числа, и нулата.

Читателят може да остане с впечатление, че всички множества са не повече от изброими. Това не е така и може да се покаже по различни начини. Например, една важна теорема в теория на множествата гласи, че *за всяко множество $A$ множеството–степен $2^A$ не е равномощно на $A$*. В частност множеството–степен $2^{\mathbb{N}}$ на $\mathbb{N}$ вече не е изброимо. По-долу ще покажем, че и множеството на безкрайните $p$-ични дроби също е неизброимо.

*Безкрайна десетична дроб* ще наричаме израза

$$a = \pm a_0.a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$$

Тук $a_j$ са цели неотрицателни числа, такива че $0 \leq a_k \leq 9$ при $k \geq 1$. Дробта $a$ може да се разглежда и като реално число, като й се припише стойност

$$\pm\left(a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{10^k}\right).$$

При знак $+$ и $a_0=0$ дробта $a$ се нарича *правилна* и отговаря на число от интервала $[0,1]$. Аналогично се определят и $p$–ични дроби, където $p\neq 1$ (дайте определение за двоична дроб!). Интересно е, че $p$ може да не е натурално и даже рационално число, например $p=-\sqrt{2}$ (опитайте се да разгледате $p$–ичните дроби и в този случай).

Ще покажем, че множеството на десетичните дроби (това всъщност е множеството $\mathbb{R}$ на реалните числа) е неизброимо. Всъщност, още множеството $X$ на правилните десетични дроби е неизброимо. Действително, да допуснем противното. Тогава елементите на $X$ могат да се номерират, например:

$$x_1=0.x_{1,1}x_{1,2}\ldots x_{1,n}\ldots$$

$$x_2=0.x_{2,1}x_{2,2}\ldots x_{2,n}\ldots$$

$$\vdots$$

$$x_k=0.x_{k,1}x_{k,2}\ldots x_{k,n}\ldots$$

$$\vdots$$

Да изберем правилната дроб

$$y=0.y_1y_2\ldots$$

така, че $y_1$ да е различно от $x_{1,1}$, $y_2$ да е различно от $x_{2,2}$ и изобщо $y_k$ да е различно от $x_{k,k}$. Тогава $y$ очевидно не се намира в горния списък, тъй като се различава от всяко $x_k$ поне по $k$–тата си цифра. Това означава, че елементите на $X$ не могат да се номерират.

## 3.6 Бинарни операции. Групи

*Бинарна операция* в множеството $A$ е всяка функция

$$f : A \times A \to A.$$

В алгебрата обикновено вместо $f(x, y)$ пишем $x \cdot y$ (мултипликативен запис на бинарната операция) или $x + y$ (адитивен запис на бинарната операция). По-общо, резултатът от бинарната операция с аргументи (или *операнди*) $x$ и $y$ може да се означи с $x * y$. Разбира се, в $A$ може да са зададени две или повече бинарни операции.

За всяко $n \in \mathbb{N}$ в $A$ може да се въведе и $n$–арна операция като функция

$$f : A^n \to A.$$

Според това определение унарна операция е всяка функция $f : A \to A$.

Едно от фундаменталните понятия в алгебрата е това за група. Основите на теория на групите са положени от френския математик Е. Галуа (1811–1832).

*Група* е множество $\Gamma$ с бинарна операция $*$, за което са изпълнени следните условия:

1. Съществува елемент $\varepsilon \in \Gamma$, наречен *неутрален елемент* за операцията $*$, такъв че

$$\alpha * \varepsilon = \varepsilon * \alpha = \alpha$$

за всяко $\alpha \in \Gamma$.

2. За всяко $\alpha \in \Gamma$ съществува елемент $\alpha^{-1} \in \Gamma$, наречен *обратен елемент* на $\alpha$, такъв че

$$\alpha * \alpha^{-1} = \alpha^{-1} * \alpha = \varepsilon.$$

3. За операцията $*$ е в сила асоциативният закон, т.е.,

$$(\alpha * \beta) * \gamma = \alpha * (\beta * \gamma)$$

за всички $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$.

Групата се означава и като $(\Gamma, *)$, а бинарната операция $*$ се нарича *групова операция*.

Групата $\Gamma = \{\varepsilon\}$, която се състои само от неутралния елемент $\varepsilon$, се нарича *тривиална*.

При използване на мултипликативни означения групата се нарича *мултипликативна*, груповата операция се означава с $\cdot$ (или пък пишем просто $x * y = xy$), а неутралният елемент се нарича *единица* и се означава с 1 или $1_\Gamma$. При адитивни означения групата се нарича *адитивна*, груповата операция се означава с $+$, обратният на $x$ елемент се означава с $-x$, а неутралният елемент се нарича *нула* и се означава с 0 или $0_\Gamma$.

Групата $\Gamma$ е *крайна*, ако множеството $\Gamma$ е крайно. В този случай броят $|\Gamma|$ на елементите на $\Gamma$ се нарича *ред* на групата. Съответно, групата е *безкрайна*, ако тя не е крайна.

Групата $\Gamma$ е *комутативна* (или *абелева*), ако груповата операция е комутативна, т.е., $x * y = y * x$ за всички $x, y \in \Gamma$.

**Пример 3.30** Примери за групи са както следва:

– множеството $\{0\} \subset \mathbb{R}$ е тривиална адитивна група, а множеството $\{1\} \subset \mathbb{R}$ – тривиална мултипликативна група;

– множествата

$$\{1, -1\} \subset \mathbb{R}$$

и

$$\{1, \imath, -\imath\} \subset \mathbb{C},$$

където $\imath = \sqrt{-1}$, са мултипликативни групи относно стандартното умножение;

– множествата $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ на целите, рационалните, реалните и комплексните числа съответно са адитивни групи относно стандартното сумиране;

– множествата $\mathbb{Q}^* := \mathbb{Q}\backslash\{0\}$, $\mathbb{R}^* := \mathbb{R}\backslash\{0\}$ и $\mathbb{C}^* := \mathbb{C}\backslash\{0\}$ на ненулевите рационални, реални и комплексни числа съответно са мултипликативни групи относно стандартното умножение;

– множеството на реалните или комплексни $m \times n$ матрици е адитивна група относно стандартното матрично сумиране, в което нулев елемент е нулевата $m \times n$ матрица;

– множеството на неособените реални или комплексни $n \times n$ матрици е мултипликативна група относно стандартното матрично умножение, в което единичен елемент е единичната $n \times n$ матрица.

– множеството на всички биекции $f : X \to X$ на произволно непразно множество в себе си е група с групова операция композицията на функции; неутралният елемент е тъждествената функция, а обратният елемент на $f$ е обратната функция $f^{-1}$.

Всяко подмножество $G$ на $\Gamma$ се нарича *комплекс*. За два комплекса $G$ и $H$ можем да определим произведението (или сумата)

$$G \circ H := \{g * h : g \in G,\ h \in H\}$$

където $* = \cdot$ (или $* = +$).

Подмножеството $G$ на групата $\Gamma$ се нарича *подгрупа*, ако $G$ на свой ред е група относно груповата операция $*$ в $\Gamma$.

Ако $G \subset \Gamma$ е подгрупа и $x \in \Gamma$, то *ляв съседен клас* на $\Gamma$ по $G$, определен от $x$, е множеството

$$x * G := \{x * y : y \in G\}.$$

Аналогично се определя и десният съседен клас $G * x$. Лесно се показва, че два съседни класа $x * G$, $y * G$ по подгрупата $G$ или съвпадат, или нямат общ елемент.

*Пряко произведение* $\Gamma_1 \otimes \Gamma_2$ на мултипликативните групи $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ е множеството $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ с бинарна операция, определена от

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2)$$

(тук за опростяване на записа всички умножения са отбелязани с $\cdot$, което разбира се не означава, че те са еднакви). В адитивния случай говорим за *пряка сума* на адитивните групи $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$, която се означава с $\Gamma_1 \oplus \Gamma_2$.

Нека $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ са мултипликативни групи. Функцията $f : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ се нарича *хомоморфизъм*, ако за всички $x, y \in \Gamma_1$ е изпълнено

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y).$$

Когато хомоморфизмът $f : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ е биекция, той се нарича *изоморфизъм*, а групите $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ се наричат *изоморфни*. От алгебрична гледна точка две изоморфни групи са неразличими.

*Ядро* на хомоморфизма $f : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ е множеството

$$\mathrm{Ker}(f) := \{x \in \Gamma_1 : f(x) = 1_{\Gamma_2}\}.$$

Ако $f$ е изоморфизъм, то $\mathrm{Ker}(f) = 1_{\Gamma_1}$. По–общо, хомоморфизмът $f$ е инективен точно когато $\mathrm{Ker}(f) = 1_{\Gamma_1}$.

Подгрупата $G$ на групата $\Gamma$ се нарича *нормална*, ако

$$x * y * x^{-1} \in G$$

за всички $x \in \Gamma$ и $y \in G$. Ядрото на всеки хомоморфизъм $f : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ е нормална подгрупа в $\Gamma_1$.

Когато $G$ е нормална подгрупа на $\Gamma$ левият $x * G$ и десният $G * x$ съседни класове съвпадат. Следователно в този случай можем да дефинираме множеството $\Gamma/G$ на всички (леви) съседни класове по нормалната подгрупа $G$. Това множество може да се снабди с групова структура, ако въведем груповата операция

$$(x * G) * (y * G) := (x * y) * G.$$

Така получената група се нарича *факторна група* (или *фактор–група*) на $\Gamma$ по $G$.

Един важен резултат в теория на групите гласи, че ако хомоморфизмът $f : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ е сюрективен, то групата $\Gamma_2$ е изоморфна на фактор–групата $\Gamma_1/\mathrm{Ker}(f)$.

Нека $(\Gamma, \cdot)$ е мултипликативна група. За $x \in \Gamma$ да означим $x^0 = 1_\Gamma$ (единицата в $\Gamma$), $x^1 = x$, $x^2 := x \cdot x$ и по индукция $x^n := x \cdot x^{n-1}$ за всяко цяло $n > 2$. Нека освен това $x^{-n} := (x^n)^{-1}$. Тогава подгрупата

$$[x] := \{x^n : n \in \mathbb{Z}\} = \{1_\Gamma, x, x^{-1}, x^2, x^{-2}, \ldots\} \subset \Gamma$$

е *породена* от елемента $x$.

Аналогично, за адитивната група $(\Gamma, +)$ означаваме $0x = 0_\Gamma$, $2x := x + x$ и по индукция $nx := x + (n-1)x$ за всяко цяло $n > 2$. Нека също така $-nx = -(nx)$. Тогава подгрупата

$$[x] := \{nx : n \in \mathbb{Z}\} = \{0_\Gamma, x, -x, 2x, -2x, \ldots\} \subset \Gamma$$

е *породена* от елемента $x$.

Подгрупата $[x] \subset \Gamma$ се нарича още *циклична подгрупа* с образуваща $x \in \Gamma$. Когато $\Gamma = [x]$ за някое $x$ казваме, че групата $\Gamma$ е циклична с образуваща $x \in \Gamma$. По–общо, комплексът $K \subset \Gamma$ на мултипликативната група $\Gamma$ се нарича *множество от образуващи*, ако всеки елемент на $\Gamma$ може да се представи като произведение на елементи от $K$. Другояче казано, $K \subset \Gamma$

е множество от образуващи, ако $\Gamma$ може да се представи като произведение от краен или безкраен брой екземпляри на $K$. Когато множеството от образуващи е крайно казваме, че групата е *крайно породена.*

Групата $(\Gamma, *)$ се нарича *комутативна* (или *абелева*), ако $x * y = y * x$ за всички $x, y \in \Gamma$. Всяка циклична група е комутативна.

**Пример 3.31** Множеството $(\mathbb{Z}, +)$, или накратко $\mathbb{Z}$, е циклична група с образуваща 1 (или $-1$).

**Пример 3.32** Нека $1 < n \in \mathbb{N}$. Множеството от $n$–те (комплексни) корена на 1 или $-1$ е крайна циклична група от ред $n$.

*Свободна абелева група от ранг $n$* е група, която е изоморфна на пряката сума на $n$ екземпляра на $\mathbb{Z}$. Според т.нар. *структурна теорема за крайно породените групи*, ако $\Gamma$ е крайно породена абелева група, то тя е изоморфна на пряката сума

$$G_0 \oplus G_1 \oplus \cdots \oplus G_r,$$

където $G_0$ е свободна абелева група, а $G_1, \ldots, G_r$ са крайни циклични групи, чиите редове са степени на прости числа. Тук рангът на $G_0$ и редовете на $G_i$ са еднозначно определени.

*Комутатор* в мултипликативната група $\Gamma$ е елемент на $\Gamma$ от вида

$$x \cdot y \cdot x^{-1} \cdot y^{-1}, \ x, y \in \Gamma.$$

*Комутанта* в групата $\Gamma$ е комплекс, който се състои от произведения на комутанти. Всяка комутанта по необходимост е подгрупа.

Може да се докаже, че всяка комутанта $K$ в $\Gamma$ е нормална подгрупа. Нещо повече, това е най–малката подгрупа на $\Gamma$, за която фактор–групата $\Gamma/K$ е абелева.

## 3.7 Упражнения

**Упражнение 3.1** Нека $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Докажете, че множеството–степен $2^A$ има $2^n$ елемента.

**Упражнение 3.2** Докажете, че

- $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$;
- $A \cap B \subset A \subset A \cup B$;
- Ако $A \subset B$, то $A \cup B = B$ и $A \cap B = A$.

**Упражнение 3.3** Покажете, че за операциите обединение и сечение са в сила свойствата *комутативност, асоциативност и дистрибутивност* както следва:

- $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Тук, ако направим аналогия с аритметиката на реалните числа, операцията $\cup$ играе роля на сумиране, а $\cap$ – на умножение

Начертайте диграмата на Уен за свойството дистрибутивност.

**Упражнение 3.4** Докажете, че ако $A\backslash B = B\backslash A = \emptyset$, то $A = B$.

**Упражнение 3.5** Вярно ли, че $(A\backslash B)\backslash C = (A\backslash C)\backslash(B\backslash C)$?

**Упражнение 3.6** Нека $A, B, C$ са подмножества на универсума $U$. Тогава:

а) Възможно ли е да са изпълнени релациите

$$C \neq \emptyset,\ A \cap B \neq \emptyset,\ A \cap C = \emptyset,\ (A \cap B)\backslash C = \emptyset\ ?$$

б) Намерете $A, B, C$, ако

$$A \subset B,\ B \cap C \subset A,\ A \cap B = \emptyset.$$

Начертайте съответните диаграми на Уен.

**Упражнение 3.7** Множеството

$$A \oplus B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$$

се нарича *дизюнктивна сума* или *симетрична разлика* на множествата $A$ и $B$. Покажете, че

$$A \oplus B = (A \cup B)\backslash(A \cap B).$$

**Упражнение 3.8** Докажете, че $A \oplus A = \emptyset$ и $A \oplus \emptyset = A$.

**Упражнение 3.9** Покажете, че симетричната разлика притежава свойствата комутативност и асоциативност:

$$A \oplus B = B \oplus A, \ (A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$$

и е дистрибутивна относно пресичането:

$$A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C).$$

**Упражнение 3.10** Намерете $A \oplus B$ за множествата $A$ и $B$ от примери 3.9 и 3.10.

**Упражнение 3.11** Изразете операциите $\cup$ и $\cap$ чрез операциите:

а) $\oplus$ и $\cap$;

б) $\oplus$ и $\cup$;

в) $\oplus$ и $\backslash$.

Например, $A \cap B = A \backslash \overline{B}$.

**Упражнение 3.12** Нека е дадена функцията $f : A \to B$ и подмножествата $A_1, A_2 \subset A$; $B_1, B_2 \subset B$. Покажете, че

$$\begin{aligned}
f(A_1 \cap A_2) &\subset f(A_1) \cap f(A_2), \\
f(A_1 \cup A_2) &= f(A_1) \cup f(A_2), \\
f^{-1}(B_1 \cap B_2) &= f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2), \\
f^{-1}(B_1 \cup B_2) &= f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2).
\end{aligned}$$

**Упражнение 3.13** Нека е дадена функцията $f : A \to B$. Покажете, че

$$f(f^{-1}(B)) = B \cup f(A).$$

Докажете оттук, че $f(f^{-1}(B)) = B$ точно когато $f$ е сюрекция.

**Упражнение 3.14** Нека е дадена функцията $f : A \to B$. Покажете, че

$$f^{-1}(f(A)) \supset A.$$

Докажете оттук, че $f^{-1}(f(A)) = A$ точно когато $f$ е инекция.

**Упражнение 3.15** Нека са дадени функциите $f : A \to B$ и $g : B \to C$. Да означим $u = g \circ f : A \to C$. Покажете, че

$$u^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C)).$$

**Упражнение 3.16** Решете уравнението

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

в $\mathbb{Q}^3$ (вж. примери 3.27 и 3.28).

**Упражнение 3.17** Намерете биекция между $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$.

**Упражнение 3.18** Намерете максималната дефиниционна област на функциите $f$ и $g$, зададени с изразите

$$\begin{aligned} f(x) &= \log_{10}(\sin x), \\ g(x) &= \log_{10}(\log_5 x). \end{aligned}$$

**Упражнение 3.19** Намерете израз $f(x)$, така че максималната дефиниционна област на функцията $f$, определена от този израз, да е $\{a\} \cup [b, c)$, където $a < b < c$.

**Упражнение 3.20** Покажете, че едно множество е безкрайно точно когато то е равномощно на някое свое собствено подмножество.

**Упражнение 3.21** Нека $A$ е множеството на всички редици, елементите на които са буквите $a$ и $b$ ($a \neq b$). Докажете, че множеството $A$ не е изброимо.

**Упражнение 3.22** Дайте пример за отношение, което е:

- рефлексивно, симетрично и не транзитивно;
- рефлексивно, транзитивно и не симетрично;
- симетрично, транзитивно и не рефлексивно.

**Упражнение 3.23** Начертайте диаграмите на Уен за разледаните по–горе множества, конструирани с помощта на съответните операции.

**Упражнение 3.24** Множеството $\Gamma$ от $n \times n$ матрици се нарича *матрична група*, ако то е група относно стандартното матрично умножение. Вече видяхме, че множеството на неособените матрици е матрична група. Покажете, че следните множества са матрични групи:

– множеството на реалните ортогонални матрици (т.е., на матриците $A$, удовлетворяващи $A^{\top}A = I$, където $A^{\top}$ е транспонираната на $A$, а $I$ е единичната матрица);

– множеството на комплексните ермитови матрици (т.е., на матриците $A$, удовлетворяващи $A^{\mathrm{H}}A = I$, където $A^{\mathrm{H}}$ е транспонираната комплексно спрегната на $A$);

– множеството на неособените горни триъгълни матрици.

**Упражнение 3.25** Всички матрични групи от пример 3.24 са множества от обратими матрици (или, еквивалентно, на квадратни матрици от пълен ранг). Възможно ли е да съществува матрична група от особени матрици? Дайте примери.

**Упражнение 3.26** Покажете, че ако $\Gamma$ е матрична група, то всички матрици от $\Gamma$ имат еднакъв ранг. Как изглежда единичният елемент на матрична група от матрици от непълен ранг?

**Упражнение 3.27** *Произведение по Адамар* на две матрици $A = [a_{ij}]$ и $B = [b_{ij}]$ с еднакви размери е матрицата $C = A \circ B = [c_{ij}]$ със същите размери и елементи $c_{ij} = a_{ij} b_{ij}$. Дайте пример за групи от $m \times n$ матрици с групова операция произведението по Адамар. Задължително ли е матриците от такава група да са от пълен ранг $\min\{m, n\}$?

**Упражнение 3.28** *Симетрично произведение* на две $n \times n$ матрици $A$ и $B$ е матрицата

$$C = A * B := \frac{AB + BA}{2}.$$

Дайте пример за групи от матрици с групова операция симетричното произведение. Задължително ли е матриците от такава група да са от пълен ранг $n$?

**Упражнение 3.29** Нека $\mathbb{K}$ е някое от множествата $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Разгледайте бинарната операция $*$, определена в множеството $\mathbb{L} := \mathbb{K} \backslash \{-1\}$ от

$$x * y = x + y + xy.$$

Намерете неутралния елемент $\varepsilon$ спрямо $*$. Група ли е двойката $(\mathbb{L}, *)$? Намерете обратния елемент на елемента $x \in \mathbb{L}$. Решете уравнението $a * x = b$ относно $x$ в $\mathbb{L}$. Разгледайте аналогични въпроси за множеството $\mathbb{K}$ със същата бинарна операция $*$.

# Глава 4

# ПОЛИНОМИ

## 4.1 Уводни бележки

Полиномите на една променлива, например $2x-3$, $x^2-x+1$, са били обект на математически изследвания още преди хиляди години в Гърция, Индия и Китай.

Полиномите могат да се разглеждат както като функции на аргумента $x$, така и като алгебрични обекти, с които се оперира по определени правила (например два полинома могат да се събират, умножават и делят). Горните два подхода не си противоречат и в известен смисъл се допълват. В настоящата глава се придържаме главно към втората гледна точка, т.е., разглеждаме полиномите като алгебрични обекти.

## 4.2 Основни определения

*Полином* или *многочлен* от *степен* $m$ от променливата $x$ над множеството на реалните числа $\mathbb{R}$ (или над множеството на комплексните числа $\mathbb{C}$) е израз от вида

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

където $a_k \in \mathbb{R}$ или $a_k \in \mathbb{C}$.

Аналогично се определят полиномите над произволно поле $\mathbb{K}$. Ще напомним, че множеството $\mathbb{K}$ е *поле*, ако в него са определени две бинарни операции $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, съответно $+$ (сумиране) и $\cdot$ (умножение) и са фиксирани два елемента $0 \in \mathbb{K}$ (нула, или неутрален елемент относно сумирането) и $1 \in \mathbb{K}$ (единица, или неутрален елемент относно умножението), такива че за всички $x, y, z \in \mathbb{K}$ е изпълнено

$$\begin{aligned}
&x + y = y + x, \\
&(x + y) + z = x + (y + z), \\
&x + 0 = x, \\
&x \cdot y = y \cdot x, \\
&(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \\
&x \cdot 1 = 1, \\
&(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.
\end{aligned}$$

Освен това за всеки елемент $x \in \mathbb{K}$ съществува противоположен елемент $-x \in \mathbb{K}$ и, ако $x \neq 0$, обратен елемент $x^{-1} \in \mathbb{K}$, такива

$$x + (-x) = 0, \ x \cdot x^{-1} = 1.$$

Понякога за избягване на недоразумения нулата и единицата в $\mathbb{K}$ се бележат с $0_{\mathbb{K}}$ и $1_{\mathbb{K}}$ съответно.

Примери за безкрайни полета са множествата $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, снабдени със стандартните аритметични операции сумиране и умножение.

Тъй като не сме поискали непременно нулата и единицата в $\mathbb{K}$ да са различни[1], то поле е едноелементното множество $\{0\} \subset \mathbb{R}$, за което $0_{\mathbb{K}} = 1_{\mathbb{K}} = 0$. Поле е и произволно едноелементно множество $\{a\}$, в което сме положили $a + a = a$ и $a \cdot a = a$. Разбира се, това са безинтересни полета. Друг пример е множеството $\{0, 1\}$, за което сумирането и умножението са определени от

$$0 + 0 = 0,\ 0 + 1 = 1,\ 1 + 1 = 0,$$
$$0 \cdot 0 = 0,\ 0 \cdot 1 = 0,\ 1 \cdot 1 = 1.$$

Това поле намира приложение в двоичната позиционна бройна система.

Други примери за полета са можеството на всички комплексни числа $z = x + iy$, където $x, y \in \mathbb{Q}$ (това са т.нар. *рационални комплексни числа*), както и множеството на всички реални числа от вида $x+y\sqrt{p}$, където $p \in \mathbb{N}$ не е точен квадрат.

Полиномите ще означаваме като $f(x)$ или просто $f$. При това $f(x)$ не следва да се разбира непременно като стойност на функцията $f$ в точката $x$ (макар че и такава интерпретация

[1] Понякога в определението за поле се налага изискването нулата и единицата да са различни.

по принцип е вярна). Напомняме още веднъж, че тук се придържаме към една алгебрична гледна точка, съгласно която полиномите ни интересуват главно като обекти, които могат да се събират и умножават (винаги) и да се делят (понякога).

Така полиномът може да се отъждестви с наредената $(m+1)$–орка

$$(a_0, a_1, \ldots, a_m).$$

Цялото неотрицателно число

$$\max\{k : a_k \neq 0\}$$

се нарича *степен* на полинома $f$ и се бележи с $\deg(f)$. Съгласно това определение полиномите от нулева степен над $\mathbb{R}$ (съответно над $\mathbb{C}$) са различните от нула реални (съответно комплексни) числа. Когато тези ненулеви числа се разглеждат като полиноми, ще ги наричаме още *постоянни* полиноми. Числото нула също се смята за полином (*нулев полином*), чиято степен не е определена или пък се приема равна на $-\infty$. Последното се прави за да се избегнат допълнителните уговорки при поява на нулеви полиноми в някои операции. Когато нулата се разглежда като полином, ще я означаваме с $0(x)$. Също така обикновено предполагаме, че $a_m \neq 0$, т.е., че $\deg(f) = m$.

Полиномът $f(x)$ се нарича *нормиран*, ако $a_m = 1$. В този случай

$$f(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Полиномите от степен по–малка или равна на 0 (константите) се наричат *тривиални*, а тези от степен, по–голяма или равна на 1 – *нетривиални.* Според горните определения нормираният полином от нулева степен се свежда до константата 1.

Числата $a_k$ се наричат *коефициенти*, а числото $a_m$ –*старши* коефициент на полинома $f(x)$. Понякога се допуска старшият и няколко от следващите го коефициенти да са равни на нула. В този случай степента на $f(x)$ е равна на индекса на първия ненулев елемент на $(m+1)$–орката $(a_m, a_{m-1}, \ldots, a_0)$.

Множеството на всички полиноми се означава с $\mathbb{K}[x]$, където $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ в случай на полиноми над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ при полиноми над $\mathbb{C}$. Понякога се разглеждат и полиноми, всички коефициенти на които са рационални числа. Множеството на тези полиноми ще означаваме с $\mathbb{Q}[x]$. Аналогично, множеството на полиномите с целочислени коефициенти ще означаваме с $\mathbb{Z}[x]$.

Полиномът $f \in \mathbb{K}[x]$ може да се разглежда и като функция $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, която на всяко $x \in \mathbb{K}$ съпоставя числото $f(x) \in \mathbb{K}$. В този случай полиномът се нарича още *цяла рационална функция. Дробната рационална функция* се определя като отношение на два полинома.

Множеството $\mathbb{K}[x] \backslash \{0(x)\}$ на всички полиноми над $\mathbb{K}$ без нулевия полином ще означаваме с $\mathbb{K}^*[x]$.

В $\mathbb{K}[x]$ естествено се въвеждат релацията „равенство" и операциите „събиране" и „умножение".

Два полинома от една и съща степен са *равни*, ако са равни коефициентите им пред еднаквите степени на променливата.

*Сума* на полиномите

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

и

$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

е полиномът

$$f(x) + g(x) = c_p x^p + c_{p-1}x^{p-1} + \cdots + c_1 x + c_0,$$

където $p = \max\{m, n\}$ и $c_k = a_k + b_k$. При това ако $p = n < m$, то при определяне на $c_{n+1}, \ldots, c_m$ е прието $b_{n+1} = \ldots = b_m = 0$. Оттук се вижда, че степента на сумата може да е по-малка от $p$. Това е възможно точно когато $p = m = n$ и $c_p = a_p + b_p = 0$. В частност, възможно е $f(x) + g(x)$ да е нулев полином когато събираемите $f(x)$, $g(x)$ не са нулеви полиноми.

*Произведение* на полиномите $f(x)$ и $g(x)$ се нарича полиномът

$$f(x)g(x) = d_q x^q + d_{q-1}x^{q-1} + \cdots + d_1 x + d_0,$$

където $p = m + n$ и

$$d_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0.$$

Казано другояче, полиномите се умножават по правилото за разкриване на скоби, като произведение на мономите $ax^i$ и $bx^j$ по определение е мономът $abx^{i+j}$. Вижда се, че степента на произведението е равна на сумата от степените на отделните множители.

Така въведените операции очевидно са подчинени на комутативния, асоциативния и дистрибутивния закони:

$$f(x) + g(x) \quad = \quad g(x) + f(x),$$

$$\begin{aligned}
f(x)g(x) &= g(x)f(x),\\
(f(x)+g(x))+h(x) &= f(x)+(g(x)+h(x)),\\
(f(x)g(x))h(x) &= f(x)(g(x)h(x)),\\
(f(x)+g(x))h(x) &= f(x)h(x)+g(x)h(x).
\end{aligned}$$

Полиномът

$$-f(x) = (-1)f(x)$$

с коефициенти $-a_k$ се нарича *противоположен* на полинома $f(x)$. За операцията събиране може да се определи обратната операция „изваждане", като под разлика на полиномите $f(x)$ и $g(x)$ ще разбираме полинома $f(x) + (-g(x))$. По този начин полиномът $-f(x)$, противоположен на $f(x)$, е единственото решение на уравнението $\omega(x) + f(x) = 0(x)$ относно неизвестния полином $\omega(x)$.

За разлика от събирането и умножението, които са определени навсякъде в $\mathbb{K}[x] \times \mathbb{K}[x]$, операцията „делене", схващана като обратна на умножението, не винаги в възможна.

Нека $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$. Ще казваме, че полиномът $g(x)$ *дели* $f(x)$ (или че $f(x)$ *се дели* на $g(x)$), ако съществува полином $h(x) \in \mathbb{K}[x]$, такъв че

$$f(x) = g(x)h(x).$$

От тук следва, че всеки постоянен ненулев полином в $\mathbb{K}[x]$ (това са ненулевите елементи в $\mathbb{K}$) дели всеки полином от $\mathbb{K}[x]$, където $\mathbb{K}$ е произволно поле.

От горните разсъждения следва, че делимостта на даден полином на друг полином е по принцип изключително явление.

В $\mathbb{K}[x] \times \mathbb{K}^*[x]$, обаче, може да се дефинира операцията „делене с остатък”, която винаги е възможна.

Всеки полином $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ може да се раздели на всеки друг полином $g(x) \in \mathbb{K}^*[x]$ с остатък в смисъл, че $f(x)$ може да се представи по единствен начин във вида

$$f(x) = g(x)h(x) + r(x),$$

където $h(x), r(x) \in \mathbb{K}[x]$. При това ако $f(x) \in \mathbb{K}^*[x]$, то $\deg(r) < \deg(f)$. Полиномът $h(x)$ се нарича частно, а полиномът $r(x)$ – *остатък* от делението на $f(x)$ с $g(x)$. При тази постановка $g(x)$ дели $f(x)$ точно когато $r(x) = 0(x)$. Ясно е също, че нулевият полином се дели на всеки ненулев полином, като дава частно и остатък, равни на нула.

## 4.3 Производна

Нека е даден полиномът

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

от степен $m \geq 1$ над полето $\mathbb{K}$, т.е., считаме, че $a_m \neq 0$.

Полиномът от степен $m - 1$

$$f'(x) := ma_m x^{m-1} + (m-1)a_{m-1}x^{m-2} + \cdots + a_1$$

се нарича *първа производна* (или накратко само *производна*) на полинома $f(x)$. Производната на постоянния полином (все едно нулев или не) по определение е нулевият полином. Операцията, която на $f(x)$ съпоставя $f'(x)$, се нарича *диференциране*.

Производната на първата производна $(f'(x))'$ се нарича *втора производна* и се бележи с $f''(x)$. Изобщо, производна от ред $k$ (или $k$–та производна) се определя като производна на производната от ред $k-1$:

$$f^{(k)}(x) := (f^{(k-1)}(x))'.$$

От горните определения следва

$$\begin{aligned} f''(x) &= m(m-1)a_m x^{m-2} + (m-1)(m-2)a_{m-1}x^{m-3} \\ &\quad + \cdots + 1.2a_2, \\ &\dots \\ f^{(m-1)} &= m!a_m x + (m-1)!a_{m-1}, \\ f^{(m)} &= m!a_m. \end{aligned}$$

Читателят, надяваме се, отдавна е забелязал, че така дефинираните производни съвпадат със съответните производни на функцията $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$. Забележителното при горните дефиниции е, че те са чисто алгебрични, т.е., не се използват понятия от математическия анализ като непрекъснатост, диференцируемост и т.н. Това позволява понятието производна да се разпростре и върху полиноми над крайно поле, където променливата $x$ също взема краен брой стойности и правилата на класическия математически анализ не са в сила.

Непосредствено се проверява, че за всяко $h \in \mathbb{K}$ полиномът

$$g(x) := f(x+h) = a_m(x+h)^m + a_{m-1}(x+h)^{m-1} + \cdots + a_1(x+h) + a_0$$

може да се запише във вида

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \cdots + \frac{h^m}{m!}f^{(m)}(x).$$

Да означим

$$d(x,h) := f(x+h) - f(x).$$

За всяко $x$ величината $|d(x,h)|$ може да бъде направена произволно малка или произволно голяма с подходящ избор на $h$. Действително, нека $\omega > 0$ е произволно. Да означим с $a(x)$ и $A(x)$ най-малката и най-голямата измежду величините

$$\frac{|f^{(k)}(x)|}{k!}$$

когато $k$ пробягва целите числа от 1 до $m$, съответно. Тогава при $|h| \leq 1$ имаме

$$|d(x,h)| \leq A(x)(h + h^2 + \cdots + h^m) \leq mhA(x).$$

Следователно при

$$|h| = \min\left\{1, \frac{\omega}{mA(x)}\right\}$$

имаме

$$|d(x,h)| \leq \omega.$$

Аналогично, при

$$|h| = \max\left\{1, \frac{\omega}{ma(x)}\right\}$$

имаме

$$|d(x,h)| \geq \omega.$$

Тъй като $\omega > 0$ е произволно, нашето твърдение е доказано.

## 4.4 Нули на полином

Нека е даден полиномът

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{4.1}$$

от степен $m \geq 1$ над $\mathbb{K}$, където $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Тук ще бъде удобно да разглеждаме полинома както като алгебричен обект, така и като функция.

Числото $x_0 \in \mathbb{K}$ се нарича *нула* или *корен* на полинома, ако е изпълнено

$$f(x_0) = 0.$$

Зависимостта

$$f(x) = 0 \tag{4.2}$$

се нарича *алгебрично уравнение*. Степента на полинома $f(x)$ е и степен на алгебричното уравнение (в случая това е $m \geq 1$). Нулите (корените) на полинома са и нули, корени или решения на уравнението.

При тези означения могат да възникнат недоразумения. Взета сама по себе си зависимостта $f(x) = 0$ може да означава най–различни неща, например: 1) полиномът $f(x)$ е нулевият полином; 2) числото $x$ е нула на полинома $f$; 3) това е уравнение за намиране на нулите на полинома $f(x)$. В случая гледната точка 1) се изключва, тъй като преполагаме, че полиномът е от степен поне 1. За да разграничим ситуациите 2) и 3) ще предполагаме, че нулите на полинома, съответно корените на уравнението, са индексирани, например $x_0$ както по–горе. Така зависимостта $f(x) = 0$ означава уравнение.

Аналогично се дефинират нули на полином на много променливи, макар че тук тяхната геометрична интерпретация е свързана с фундаменталните понятия за крива и повърхнина.

*Полином на две променливи* е израз от вида

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &:= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_{ij}x^i y^j \\
&= a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \cdots,
\end{aligned}
$$

където коефициентите $a_{ij}$ и променливите $x$ и $y$ принадлежат на полето $\mathbb{K}$. Аналогично се дефинира полином на три променливи $f(x,y,z)$. Изобщо, *полином на $r$ променливи* е изразът

$$f(x_1,\ldots,x_r) := \sum_{i_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{i_r=0}^{n_r} a_{i_1\ldots i_r}x_1^{i_1}\cdots x_r^{i_r}.$$

Степен на полинома $f(x_1,\ldots,x_r)$ е числото

$$\deg(f) := \max\{i_1 + \cdots i_r : a_{i_1\ldots i_r} \neq 0\}.$$

Полиномът, на който всички коефициенти са нулеви, се нарича *нулев полином.* Неговата степен не е определена или се приема, че е равна на $-\infty$. Полиномите от нулева степен са ненулевите константи от $\mathbb{K}$. Тези полиноми се наричат още *тривиални.* Така нетривиални са полиномите $f$ от степен $\deg(f) \geq 1$.

Полиномът $f$ на две или повече променливи е *приводим*, ако той се разлага в произведение $f = gh$ на два нетривиални полинома $g$ и $h$.

Всеки полином $f$ на две или повече променливи може да се представи като произведение от нетривални полиноми. Това представяне е единствено, ако се условим да не различаваме два полинома, единият от които е равен на другия, умножен по константа.

Отнапред не е ясно дали уравнението (4.2) има решения и колко са те. Уравненията от първа степен

$$a_1 x + a_0 = 0$$

очевидно винаги имат единствено решение

$$x = x_0 = -\frac{a_0}{a_1}.$$

Уравненията от втора степен в $\mathbb{R}$ могат и да нямат решение, например

$$x^2 + 1 = 0.$$

Впрочем, именно невъзможността подобни уравнения да се решат в $\mathbb{R}$ е довело до откриването на комплексните числа през 18 в. Това е довело и до голям тласък в развитието на математиката и нейното приложение в техниката.

Според една важна теорема на алгебрата, доказана от Ж. Даламбер (френски математик, 1717–1783) и К. Гаус (немски математик, 1777–1855) в края на 18 в., всяко алгебрично уравнение с комплексни или реални коефициенти има решение, което в общия случай е комплексно. Така алгебричните уравнения над $\mathbb{C}$ са разрешими.

Другояче казано, всеки комплексен полином има комплексен или реален корен. Всеки реален полином също има корен, но може да няма реални корени.

Нека $x_1$ е корен на полинома $f(x)$, обещан ни от теоремата на Даламбер–Гаус, т.е.,

$$f(x_1) = 0.$$

Да разделим $f(x)$ на полинома $x - x_1$. Нека частното от делението е $f_1(x)$, което е полином от степен $m-1$, а остатъкът е $r$, което е константа. Имаме

$$f(x) = (x - x_1)f_1(x) + r.$$

Ако положим $x = x_1$ получаваме

$$0 = 0 + r$$

и $r = 0$. Следователно

$$f(x) = (x - x_1)f_1(x).$$

Когато $m > 2$ полиномът $f_1(x)$ е от степен поне 1 и има корен $x_2$, за който

$$f_1(x) = (x - x_2)f_2(x).$$

Тук $f_2(x)$ е полином от степен $m-2$. Така получихме

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)f_2(x).$$

Продължавайки този процес получаваме

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_m)f_m(x).$$

Полиномът $f_m(x)$ е постоянен и както лесно се вижда е равен на $a_m$. Така окончателно получихме

$$f(x) = a_m(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_m), \tag{4.3}$$

т.е., всеки полином от $m$–та степен се разлага на произведение от $m$ линейни полинома.

Важно наблюдение е, че полиномът има толкова корена, колкото е степента му. Разбира се, между тях може да има равни и тогава те се наричат *кратни*. Некратните корени се наричат *прости*.

Нека полиномът $f(x)$ от степен $m$ има $l$ различни помежду си корена $x_1, x_2, \ldots, x_l$, като коренът $x_i$ е с кратност $m_i$ (при $m_i = 1$ коренът $x_i$ е прост). Тогава имаме $m = m_1 + \cdots + m_l$ и

$$f(x) = a_m(x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2} \cdots (x - x_l)^{m_l}. \tag{4.4}$$

От формулата (4.3) за разлагане на полином на линейни множители следва, че полиномът $f(x)$ от степен $m \geq 1$ не може да има повече от $m$ различни корена. Действително, нека корените $x_1, \ldots, x_m$ са различни помежду си, а $x_{m+1}$ е корен, който е различен от всеки от тях, т.е.,

$$x_{m+1} \neq x_i, \ i = 1, \ldots, m.$$

Като положим $x = x_{m+1}$ в разложението получаваме

$$0 = a_m(x_{m+1} - x_1)(x_{m+1} - x_2) \cdots (x_{m+1} - x_m)$$

и би следвало да имаме $a_m = 0$, което е невъзможно предвид на обстоятелството, че полиномът е от степен $m$, което е еквивалентно на $a_m \neq 0$.

Понякога е полезна и една друга формулировка на този резултат. За целта ще се условим, че всяко число е корен на нулевия полином. Тогава ако полином от степен, ненадхвърляща $m$, има повече от $m$ нули, то той е нулевият полином.

Едно елегантно следствие от този резултат е, че ако два полинома $f(x)$ и $g(x)$ от степен $m$ приемат еднакви стойности за повече от $m$ стойности на променливата $x$, то те съвпадат. Действително, в този случай степента на полинома $h(x) := f(x) - g(x)$ не надхвърля $m$, а по условие той има повече от $m$ нули. Следователно $h(x)$ е нулевият полином и $f(x) = g(x)$.

Да разгледаме сега връзката между нулите на един полином и коефициентите му. Нека

$$x_1, x_2, \ldots, x_m$$

са $m$–те нули на полинома (4.1). Тогава от равенството

$$f(x) = a_m(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_m)$$

следва

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) = -\frac{a_{m-i}}{a_m},\ i = 1, 2, \ldots, m. \tag{4.5}$$

Тук $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ е *симетричната форма* от клас $i$, която се определя като сума от произведенията на числата $x_s$, взети по $i$ на брой както комбинациите от $m$ елемента от $i$–ти клас. В частност имаме

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) &= x_1 + x_2 + \cdots + x_m, \\
\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_m) &= x_1x_2 + \cdots + x_1x_m + \cdots + x_{m-1}x_m, \\
\ldots &= \ldots, \\
\varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_m) &= x_1x_2\cdots x_m.
\end{aligned}$$

Зависимостите (4.5) са известни като формули на Ф. Виет (френски математик, 1540–1603).

Да се върнем към представянето (4.4) на полинома $f(x)$. От свойствата на производната следва (вж. също упражнение 4.2), че ако $a$ е нула на $f(x)$ с кратност $\kappa > 1$,

$$f(x) = (x-a)^{\kappa} g(x),$$

то

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(\kappa-1)}(a) = 0,$$

но

$$f^{(\kappa)}(a) \neq 0.$$

Изобщо, $\kappa$–кратната нула на $f(x)$ е $(\kappa - l)$–кратна нула на производната $f^{(l)}(x)$ (докажете!).

Множеството от нули на алгебричния полином на две променливи, т.е., на корените на уравнението

$$f(x,y) = 0$$

с коефициенти и променливи от полето $\mathbb{K}$, се нарича *алгебрична крива* в $\mathbb{K}^2$. Алгебричната крива, асоциирана с полинома $f(x,y)$, се означава като

$$K(f) := \{(x,y) \in \mathbb{K}^2 : f(x,y) = 0\}.$$

Аналогично, множеството от нули на полинома на три променливи $f(x,y,z)$,

$$K(f) := \{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 : f(x,y,z) = 0\},$$

се нарича *алгебрична повърхнина* в $\mathbb{K}^3$. Алгебрични повърхнини могат да се дефинират и в $\mathbb{K}^r$ за $r > 3$,

$$K(f) := \{x \in \mathbb{K}^r : f(x) = 0\},$$

където $f(x)$ е полином от $x = (x_1, \ldots, x_r)$.

Алгебричните криви и повърхнини се наричат още *алгебрични фигури*.

Степента на алгебричния полином $f$ е и *степен* на алгебричната фигура $K(f)$.

Алгебричната фигура $K(f)$ е *приводима* (съответно *неприводима*), ако е приводим (съответно неприводим) полиномът $f$. Когато полиномът $f$ се разлага на множители

$$f(x) = f_1^{k_1}(x) \cdots f_s^{k_s}(x),$$

където полиномите $f_1, \ldots, f_s$ са неприводими, алгебричната фигура се разпада на $s$ неприводими компоненти $K(f_1), \ldots, K(f_s)$,

$$K(f) = K(f_1) \cup \cdots \cup K(f_s).$$

Алгебричните криви от първа степен в $\mathbb{K}^2$ се наричат *прави*, а алгебричните повърхнини от първа степен в $\mathbb{K}^r$, $r > 2$, се наричат *равнини*. Алгебричната фигура $\alpha$ от първа степен в $\mathbb{R}^r$ се описва с уравнение от вида

$$a^\top x = b,$$

където $a \in \mathbb{R}^r$ е ненулев вектор, наречен *нормален вектор* на $\alpha$. Векторът $a$ може да се нормира от условието $\|a\| = 1$.

Уравнението на $\alpha$ може да се запише и като

$$a^\top(x - x_0) = 0,$$

където $x_0 \in \alpha$ е зададен вектор. Вижда се, че нормалният вектор $a$ е ортогонален на всеки вектор $x - x_0$, лежащ в $\alpha$.

Алгебричните фигури от втора степен в $\mathbb{R}^r$ имат уравнение от вида

$$x^\top Ax + 2b^\top x + c = 0,$$

където $A \in \mathbb{R}^{r\times r}$ е симетрична ненулева матрица.

**Пример 4.1** Алгебричните фигури могат да имат изключително сложна структура, особено при по–висока степен и/или висока размерност на съответното пространство. Така например има 9 вида криви от втора степен в $\mathbb{R}^2$, 17 вида повърхнини в $\mathbb{R}^3$ и изобщо

$$r^2 + 3r - 1$$

вида повърхнини в $\mathbb{R}^r$. Интересно, че последната формула работи и за $r = 1$.

## 4.5 Приводимост и елиминация

Полиномът $f(x)$ с коефициенти от полето $\mathbb{K}$ се нарича *приводим* над $\mathbb{K}$, ако той се разлага в произведение

$$f(x) = g(x)h(x)$$

от нетривиални полиноми $g(x)$ и $h(x)$ с коефициенти от $\mathbb{K}$.

В горното определение полето играе съществена роля. Ако един полином е приводим над полето $\mathbb{K}$, той е приводим и над всяко надполе $\mathbb{L}$ на полето $\mathbb{K}$. Обратното, разбира се, не е вярно. Приводимостта над дадено поле не гарантира приводимост над което и да е същинско подполе.

**Пример 4.2** Полиномът $x^2+1$ е неприводим над $\mathbb{R}$, но е приводим над $\mathbb{C}$, тъй като

$$x^2+1=(x+\imath)(x-\imath).$$

Полиномът $x^2-2$ е приводим над $\mathbb{R}$,

$$x^2-2=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}),$$

но е неприводим над полето $\mathbb{Q}$ на рационалните числа.

По–горе беше показано, че всеки полином над $\mathbb{C}$ се разлага в произведение от линейни множители. На свой ред всеки полином над $\mathbb{R}$ се разлага на множители от степен, не по–висока от 2. Действително, нека $f(x)$ е полином над $\mathbb{R}$ от степен $m \geq 2$. Тогава $f(x)$ е полином и над полето $\mathbb{C}$. На всеки реален корен $\lambda \in \mathbb{R}$ на $f(x)$ с кратност $k \geq 1$ съответства множител $(x-\lambda)^k$ в разложението на $f(x)$ на множители. Ще покажем, че ако числото $\alpha+\imath\beta \in \mathbb{C}$ е комплексен корен на реалния полином $f(x)$, то и комплексно спрегнатото число $\alpha-\imath\beta$ е корен на $f(x)$. Да означим

$$f(\alpha+\imath\beta)=P(\alpha,\beta)+\imath Q(\alpha,\beta),$$

където $P(\alpha, \beta)$ и $Q(\alpha, \beta)$ са реални полиноми. Тъй като $f(\alpha + \imath\beta) = 0$, то имаме

$$P(\alpha, \beta) = 0, \; Q(\alpha, \beta) = 0.$$

Ще отбележим, че четните степени на имагинерната единица $\imath$ са реалните числа $\pm 1$, а нечетните степени са имагинерните числа $\pm \imath$. Следователно степента на $P(\alpha, \beta)$ относно $\beta$ е четна, а степента на $Q(\alpha, \beta)$ относно $\beta$ е нечетна, т.е.,

$$Q(\alpha, -\beta) = -Q(\alpha, \beta).$$

Оттук получаваме

$$f(\alpha - \imath\beta) = P(\alpha, \beta) - \imath Q(\alpha, \beta) = 0,$$

което показва, че числото $\alpha - \imath\beta$ също е нула на $f(x)$. Но тогава имаме разложението

$$f(x) = (x - \alpha - \imath\beta)(x - \alpha + \imath\beta)g(x) = ((x - \alpha)^2 + \beta^2)g(x),$$

където $g(x)$ е полином от степен $m - 2$. Така на всяка двойка комплексни корени $\alpha \pm \imath\beta$ на полинома $f(x)$ съответства полином от втора степен

$$(x - \alpha)^2 + \beta^2 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$$

в разложението на $f(x)$ на реални множители.

Да разгледаме сега алгебричните уравнения

$$f(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

и

$$g(x) := b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0 = 0$$

с реални или комплексни коефициенти и от степени $n \geq 1$ и $m \geq 1$ съответно. Ако тези уравнения имат общ корен, то между коефициентите $a_i$ на полинома $f(x)$ и $b_j$ на полинома $g(x)$ съществува някаква връзка. Намирането на тази връзка е предмет на *елиминацията.* Този термин отразява факта, че от уравненията $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$ се елиминира неизвестната величина $x$, която не е обект на задачата.

Частен случай на задачата за елиминация е намирането на условия за съществуване на двоен корен на уравнението $f(x) = 0$. Действително, както вече знаем в този случай трябва и първата производна на $f(x)$ да се анулира, т.е., $f'(x) = 0$. Така получихме задача за елиминация с $g(x) = f'(x)$.

Съществуват различни начини да се реши горната задача. Да означим с $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и $\beta_1, \ldots, \beta_m$ нулите на полиномите $f(x)$ и $g(x)$ съответно. Тогава изразът

$$\begin{aligned} R(f,g) &:= a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (\alpha_i - b_j) \\ &= a_n^m b_m^n (\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - \beta_2) \cdots (\alpha_1 - \beta_m) \\ &\quad \times (\alpha_2 - \beta_1)(\alpha_2 - \beta_2) \cdots (\alpha_2 - \beta_m) \\ &\quad \cdots \\ &\quad \times (\alpha_n - \beta_1)(\alpha_n - \beta_2) \cdots (\alpha_n - \beta_m) \end{aligned}$$

е равен на нула точно когато полиномите $f(x)$ и $g(x)$ имат (поне един) общ корен. Този израз се нарича *резултанта* (или *елиминанта*) на полиномите $f(x)$ и $g(x)$ и представлява хомогенен полином от степен $n+m$ от коефициентите $a = (a_0, \dots, a_n)$ и $b = (b_0, \dots, b_m)$. Освен това $R(f, g)$ е хомогенен полином от степен $m$ относно $a$ и хомогенен полином от степен $n$ относно $b$ (тук използваме понятието полином на няколко променливи, въведено в предишната секция).

Като вземем предвид, че

$$f(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)$$

и

$$g(x) = b_m(x - \beta_1)(x - \beta_2) \cdots (x - \beta_m)$$

виждаме, че

$$\begin{aligned} R(f, g) &= a_n^m g(\alpha_1) g(\alpha_2) \cdots g(\alpha_n) \\ &= (-1)^{mn} b_m^n f(\beta_1) f(\beta_2) \cdots f(\beta_m). \end{aligned}$$

В следващите три примера са дадени резултантите на някои двойки полиноми от ниска степен.

**Пример 4.3** Нека $n = m = 1$. Тогава

$$R(f, g) = a_1 g(\alpha_1) = a_1 \left( b_1 \left( -\frac{a_0}{a_1} \right) + b_0 \right) = a_1 b_0 - a_0 b_1.$$

Условието $R(f, g) = 0$ са съществуване на общ корен на полиномите от първа степен $f$ и $g$ тук геометрически означава, че правите с уравнения $y = f(x) = a_1 x + a_0$ и $y = g(x) = b_1 x + b_0$ се пресичат в точка, лежаща върху абсцисната ос (или пък в частност съвпадат).

**Пример 4.4** Нека $n = 2$ и $m = 1$. Тогава

$$\begin{aligned} R(f,g) &= (-1)^2 b_1^2 f(\beta_1) \\ &= b_1^2 \left( a_2 \left( -\frac{b_0}{b_1} \right)^2 + a_1 \left( -\frac{b_0}{b_1} \right) + a_0 \right) \\ &= a_2 b_0^2 - a_1 b_0 b_1 + a_0 b_1^2. \end{aligned}$$

Ако $g(x) = f'(x)$ имаме $b_1 = 2a_2$, $b_0 = a_1$ и

$$R(f,f') = a_2 a_1^2 - 2a_1^2 a_2 + 4a_0 a_2^2 = a_2(4a_0 a_2 - a_1^2).$$

Тъй като по предположение $a_2 \neq 0$, то условието $R(f,f') = 0$ за съществуване на двоен корен на полинома $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ се свежда до познатото условие $\Delta = a_1^2 - 4a_0 a_2 = 0$ за анулиране на дискриминантата $\Delta$ на квадратното уравнение $f(x) = 0$.

**Пример 4.5** Нека $n = m = 2$. Тогава

$$\begin{aligned} &\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{a_1}{a_2}, \ \alpha_1 \alpha_2 = \frac{a_0}{a_2}, \\ &\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = (\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 2\alpha_1 \alpha_2 = \frac{a_1^2}{a_2^2} - 2\frac{a_0}{a_2} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} R(f,g) &= a_2^2 g(\alpha_1) g(\alpha_2) \\ &= a_2^2 (b_2 \alpha_1^2 + b_1 \alpha_1 + b_0)(b_2 \alpha_2^2 + b_1 \alpha_2 + b_0). \end{aligned}$$

Оттук след някои пресмятания стигаме до

$$R(f,g) = (a_0 b_2 - a_2 b_0)^2 + (a_1 b_0 - a_0 b_1)(a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

За да пресметнем $R(f,g)$ в общия случай ще използваме схемата на Дж. Силвестър (английски математик, 1814–1897). Умножаваме първото уравнение $f(x) = 0$ последователно с $x, x^2, \ldots, x^{m-1}$, а второто уравнение $g(x) = 0$ – с $x, x^2, \ldots, x^{n-1}$. Получаваме $n+m$ уравнения

$$\begin{aligned} x^i f(x) &= 0,\ i = 0, 1, \ldots, m-1, \\ x^j g(x) &= 0,\ j = 0, 1, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

Тези уравнения могат да се запишат като едно линейно алгебрично уравнение

$$U(f,g)X = 0$$

относно вектора

$$X := [1, x, x^2, \ldots, x^{n+m-1}]^\top \in \mathbb{K}^{n+m},$$

където матрицата $U(f,g) \in \mathbb{K}^{(n+m)\times(n+m)}$ има вида

$$U(f,g) = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_0 & \ldots & a_{n-1} & a_n & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_0 & a_1 & \ldots & a_n \\ b_0 & b_1 & \ldots & b_m & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_0 & \ldots & b_{m-1} & b_m & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & b_0 & b_1 & \ldots & b_m \end{bmatrix}.$$

Тъй като $X \neq 0$, то трябва матрицата $U(f,g)$ да е особена, т.е.,

$$\det(U(f,g)) = 0.$$

Последното равенство е необходимото и достатъчно условие щото уравненията $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$ да имат поне един общ корен.

Да приложим сега горните резултати за да намерим условия, при които уравнението $f(x) = 0$ има поне един кратен корен, т.е., изпълнено е и $f'(x) = 0$. Вижда се, че трябва да е изпълнено

$$R(f, f') = 0$$

или

$$\det(U(f, f')) = 0.$$

Горните резултати лесно се обобщават за три и повече полинома. Така например необходимото и достатъчно условие трите полинома $f(x)$, $g(h)$ и $h(x)$ да имат поне един общ корен е да са изпълнени равенствата

$$R(f, g) = 0, \ R(g, h) = 0.$$

Аналогично, ако са дадени $p$ полинома $f_1(x), \dots, f_p(x)$, то те имат общ корен точно когато са изпълнени следните $p - 1$ равенства

$$R(f_i, f_{i+1}) = 0, \ i = 1, \dots, p - 1.$$

Полиномите $f(x)$ и $g(x)$ се наричат *взаимно прости*, ако нямат общи корени. Ако полиномите $f(x)$ и $g(x)$ не са взаимно прости, то те имат общи корени $\lambda_1 \dots, \lambda_r$, $r \geq 1$. Нека $k_i^f$ и $k_i^g$ са кратностите на $\lambda_i$ като корен на $f(x)$ и $g(x)$ съответно, и да положим

$$k_i = \min \left\{ k_i^f, k_i^g \right\}, \ i = 1, \dots, r.$$

Тогава полиномът

$$h(x) := (x-\lambda_1)^{k_1}\cdots(x-\lambda_r)^{k_r}$$

е най–големият нормиран общ делител на полиномите $f(x)$ и $g(x)$.

## 4.6 Матрични полиноми

Нека $D \subset \mathbb{C}$ е област (отворено свързано множество) и $f : D \to \mathbb{C}$ е цяла аналитична функция, т.е.,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-x_0)^i,\ x \in D.$$

Понеже множеството $D$ е отворено, то съществува $\varepsilon > 0$, такова че отвореният кръг

$$\{x \in \mathbb{C} : |x - x_0| < \varepsilon\}$$

принадлежи на областта $D$.

Нека $\mathbb{K}$ е $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$ и да определим множеството

$$B := \{X \in \mathbb{K}^{n\times n} : \|X - x_0 I_n\| < \varepsilon\},$$

където $I_n$ е единичната $n \times n$ матрица и $\|\cdot\|$ е някоя матрична норма, например

$$\|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_{ij}|^2},\ X = [x_{ij}].$$

Сега можем да определим матричната функция

$$f : B \to \mathbb{K}^{n\times n}$$

от

$$f(X) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (X - x_0 I_n)^i, \ X \in B$$

(тук използваме едно и също означение $f$ за скаларната и за векторната функция, но това не би трябвало да ни смущава).

В частност, ако $f(x)$ е полиномът

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, \ x \in \mathbb{K},$$

то можем да определим *матричния полином*

$$f(X) = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i, \ X \in \mathbb{K}^{n\times n}.$$

Ако $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ са нулите на $f(x)$, то

$$f(X) = a_m (X - \lambda_1 I_n) \cdots (X - \lambda_m I_n).$$

Матричните полиноми играят важна роля в съвременната математика и нейните приложения.

Нека например са дадени нормираният полином

$$f(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

и полинома $g(x)$. Нека освен това $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ е присъединената матрица на полинома $f(x)$ (вж. секция 4.8). Тогава може да се покаже, че полиномите $f(x)$ и $g(x)$ са взаимно прости точно когато матрицата $g(A)$ е обратима. В сила е и по–силният резултат, а именно, че степента на най–големия общ делител на $f(x)$ и $g(x)$ е равна на $n - \mathrm{rank}(g(A))$, където $\mathrm{rank}(A)$ е рангът на матрицата $A$.

Горният резултат допуска и едно съществено обобщение. Нека $g_1(x), \ldots, g_p(x)$ са зададени полиноми. Тогава степента на най–големия общ делител на полиномите $f(x), g_1(x), \ldots, g_p(x)$ е равна на $n - \mathrm{rank}(G(A))$, където

$$G(A) := [g_1(A), g_2(A), \ldots, g_p(A)] \in \mathbb{K}^{n \times pn}.$$

## 4.7 Локализация на нулите

В редица задачи е необходимо да се знае дали наборът от нулите

$$\alpha := \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$$

на някакъв полином от $n$–та степен

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

с реални или комплексни коефициенти се намира в зададена област $D \subset \mathbb{C}$ на комплексната равнина $\mathbb{C}$. При това задачата следва да се реши без да се пресмятат самите нули, като условията за локализация $\alpha \subset D$ се формулират директно в термините на коефициентите

$$a = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}.$$

Две типични задачи тук са свързани с теория на устойчивостта на динамичните системи. Да разгледаме първо диференциалното уравнение

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$$

с постоянни коефициенти $a_k$, където $y^{(k)}$ е $k$–тата производна на функцията $y : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$. Уравнението се нарича *асимптотически устойчиво*, ако за всеки набор от начални условия

$$y^{(k)}(0) = y_0^{(k)}, \ k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

където $y_0^{(k)}$ са константи, решението $y$ удовлетворява

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = 0.$$

Необходимото и достатъчно условие за асимптотична устойчивост на уравнението е $\alpha \subset \mathbb{C}_-$, където $\alpha$ е наборът от нули на полинома $f(x)$, а $\mathbb{C}_- \subset \mathbb{C}$ е лявата отворена комплексна полуравнина. Във връзка с това свойство се въвежда и понятието устойчивост на полином: полиномът $f(x)$ над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ се нарича *устойчив*, ако всичките му нули лежат в $\mathbb{C}_-$.

Да разгледаме сега диференчното уравнение

$$a_n y(t+n) + a_{n-1} y(t+n-1) + \cdots + a_1 y(t+1) + a_0 y(t) = 0$$

с постоянни коефициенти $a_k$, където $t = 0, 1, \ldots$. Уравнението е *асимптотически устойчиво*, ако за всеки набор от начални условия

$$y(k) = y_{k,0}, \ k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

където $y_{k,0}$ са константи, решението $y$ удовлетворява

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0.$$

Необходимото и достатъчно условие за асимптотична устойчивост на диференчното уравнение е $\alpha \subset \mathbb{D}_1$, където $\mathbb{D}_1 \subset \mathbb{C}$ е отвореният единичен комплексен кръг. Съответно полиномът $f(x)$, корените на който са в $\mathbb{D}_1$, се нарича *сходящ*.

Ако дефинираме множеството

$$\Omega = \Omega(n, D) := \{a : \alpha \subset D\} \subset \mathbb{K}^{n+1}$$

задачата има два аспекта. Първо, ако е възможно да се намери самата област $\Omega$. Този вариант на задачата обикновено е по-труден. И второ, ако е зададен конкретен полином $f(x)$ (или вектор $a$) да се провери дали $\alpha \subset D$, респективно дали $a \in \Omega$.

С появата на надеждни числени алгоритми, програмни средства и изчислителни платформи вторият аспект на задачата обикновено не представлява трудност – уравнението $f(x) = 0$ се решава числено и за пресметнатия набор $\alpha^*$ от нули се проверява условието $\alpha^* \subset D$.

Една типична задача за локализация на нулите на полином може да се формулира по следния начин. Нека коефициентите $a_i$ на полинома $f(x)$ са известни с някакъв толеранс, например

$$a_i \in [b_i, c_i],\ \ i = 1, \ldots, n.$$

Така например може да се окаже, че в резултат на грешки са известни средната стойност $a_i^0$ на коефициента $a_i$, както и възможните отклонения $\pm\delta_i$ от тази стойност. Тогава

$$b_i = a_i^0 - \delta_i,\ c_i = a_i^0 + \delta_i.$$

За всеки конкретен набор от коефициенти $a_i$ въпросът за устойчивост на полинома $f(x)$ може да се реши чрез критерия на Раус–Хурвиц, или директно, чрез пресмятане на корените на $f(x)$.

Критерият на Раус–Хурвиц обикновено се прилага във формата, предложена от Ленар и Шипар както следва. Изследва се полиномът

$$f(x) = x^n + d_1 x^{n-1} + \cdots + d_{n-1}x + d_n$$

в който коефициентите са номерирани по различен от досегашния начин за удобство при следващите конструкции. Построяват се т.нар. *детерминанти на Хурвиц*

$$\Delta_i := \det(D_i),\ i = 2, \ldots, n,$$

където

$$D_i := \begin{bmatrix} d_1 & d_3 & d_5 & \ldots & d_{2i-1} \\ 1 & d_2 & d_4 & \ldots & d_{2i-2} \\ 0 & d_1 & d_3 & \ldots & d_{2i-3} \\ 0 & 1 & d_2 & \ldots & d_{2i-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & d_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{i\times i}.$$

Прието е освен това, че в матрицата $D_i$ е изпълнено $d_s = 0$

при $s > n$, например

$$A_2 = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 1 & d_2 \end{bmatrix}, \ A_3 = \begin{bmatrix} d_1 & d_3 & 0 \\ 1 & d_2 & 0 \\ 0 & d_1 & d_3 \end{bmatrix}.$$

Тогава необходимото и достатъчно условие за устойчивост на реалния полином $f(x)$ е изпълнението на неравенствата

$$\begin{aligned} & d_{2i-1} > 0, \ i = 1, 2, \ldots, (n+1)/2, \\ & \Delta_{2k} > 0, \ k = 1, 2, \ldots, (n-1)/2 \end{aligned}$$

при нечетно $n$, и

$$\begin{aligned} & d_n > 0, \\ & d_{2i-1} > 0, \ i = 1, 2, \ldots, n/2, \\ & \Delta_{2k+1} > 0, \ k = 1, 2, \ldots, n/2 - 1 \end{aligned}$$

при четно $n$.

За да проверим дали един полином $f(x)$ е сходящ, можем да използваме дробно–линейната трансформация

$$x = \frac{\xi + 1}{\xi - 1}, \tag{4.6}$$

която преобразува лявата отворена комплексна полуравнина $\mathbb{C}_-$ в единичния отворен кръг $\mathbb{D}_1$. Тогава полиномът $f(x)$ е сходящ точно когато е устойчив полиномът

$$g(\xi) := (\xi - 1)^n f\left(\frac{\xi + 1}{\xi - 1}\right). \tag{4.7}$$

Съществуват и директни критерии за сходимост на полином без използване на описаната по–горе дробно–линейна трансформация. Такъв е например критерият на Шур–Кон, на който тук няма да се спираме.

По–интересно е да се установи кога полиномът $f(x)$ е устойчив при всеки набор от коефициенти $a_i \in [b_i, c_i]$. Този въпрос е значително по–труден и затова е особено ефектен компактният отговор, който се дава от критерия на Харитонов.

Да идентифицираме полинома

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdot + a_1 x + a_0$$

с наредената $(n+1)$–орка

$$(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0).$$

Оказва се, че необходимото и достатъчно условие всички полиноми с коефициенти $a_i \in [b_i, c_i]$ да са устойчиви е да бъдат устойчиви *четирите полинома на Харитонов* с коефициенти

$$\begin{aligned}
&(b_n, b_{n-1}, c_{n-2}, c_{n-3}, b_{n-4}, b_{n-5}, \ldots),\\
&(c_n, c_{n-1}, b_{n-2}, b_{n-3}, c_{n-4}, c_{n-5}, \ldots),\\
&(b_n, c_{n-1}, c_{n-2}, b_{n-3}, b_{n-4}, c_{n-5}, \ldots),\\
&(c_n, b_{n-1}, b_{n-2}, c_{n-3}, c_{n-4}, b_{n-5}, \ldots).
\end{aligned}$$

За съжаление подобен резултат не съществува за случая, когато се изисква корените на полинома $f(x)$ да се намират в единичния отворен кръг $\mathbb{D}_1 \subset \mathbb{C}$ за всеки набор от коефициенти $a_i \in [b_i, c_i]$. В този случай може отново да се използва дробно–линейната трансформация (4.6) и съответно полинома (4.7). Тогава полиномът $f(x)$ е сходящ точно когато е устойчив полиномът $g(\xi)$. Проблем при този подход е, че коефициентите на полинома $g(\xi)$ зависят по сложен начин от коефициентите на $f(x)$ и е трудно да се намерят границите на изменение на коефициентите на $g(\xi)$ като функция на съответните граници за $f(x)$.

## 4.8 Числено решаване на алгебрични уравнения

Численото решаване на алгебрични уравнения

$$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \tag{4.8}$$

с реални или комплексни коефициенти дълго време беше един от централните въпроси на класическия числен анализ. Приноси в тази област имат и редица български математици.

Проблемите при решаване на алгебрични уравнения са няколко. Първо, идеята да се използват явни формули за пресмятане на корените в общия случай е приложима само за $m = 1, 2, 3, 4$. Още в края на 18 в. и началото на 19 в. италианецът П. Руфини (1765–1822), норвежецът Н. Абел (1802–1829) и французинът Е. Галуа (1811–1832) доказват забележителния факт, че за уравнения от 5-та и по–висока степен в общия случай не съществува явна алгебрична формула, която да дава корените на уравнението като функция на коефициентите му.

Трябва също така да се отбележи, че дори и когато съществува такава формула, например за $m = 3, 4$ или даже за $m = 2$, нейното непосредствено прилагане не е добър начин за пресмятане на корените поради опасността от т.нар. *катастрофално взаимно унищожение* при изваждане на приближени близки числа.

Численото решаване на алгебрични уравнения се натъква на проблеми при висока степен на уравнението и/или при лоша обусловеност на някои от корените му. В частност, случаят на $k$–кратен корен ($k > 1$) е особено труден защото тогава малки относителни изменения в коефициентите от порядъка на $\varepsilon \ll 1$ могат да доведат до големи относителни изменения в корените от порядъка на $\varepsilon^{1/k}$.

Една от задачите, които могат да се сведат до решаване на алгебрично уравнение, е намирането на собствените стойност на реалната или комплексна $n \times n$ матрица $A$. Числото $\lambda$ е *собствена стойност* на $A$ ако съществува ненулев $n$–вектор $v$, такъв че

$$Av = \lambda v.$$

В този случай $v$ се нарича *собствен вектор* на матрицата $A$, съответстващ на собствената стойност $\lambda$. Тъй като

$$(\lambda I_n - A)v = 0,$$

то необходимо е матрицата $\lambda I_n - A$ да е особена, където $I_n$ е единичната $n \times n$ матрица. Следователно

$$\det(\lambda I_n - A) = 0.$$

Полученотто уравнение се нарича *характеристично уравнение* на матрицата $A$. То има вида

$$\lambda^n - c_1\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n c_n = 0,$$

където $c_k$ е сумата на главните минори от ред $k$ на матрицата $A$. В частност $c_1$ е следата, а $c_n$ – детерминантата на матрицата $A$.

Така едно от приложенията на методите за решаване на алгебрични уравнение в продължение на дълги години е било намирането на собствените стойности на матрица. Съвременните компютърни методи, обаче, не следват тази схема. Формирането на характеристичното уравнение се избягва по редица причини. Първо, намирането на коефициентите на характеристичното уравнение, макар и тривиално в теоретично отношение, може да се сблъска със значителни числени трудности. Второ, (някои от) корените на характеристичното уравнение могат да се окажат много чуствителни спрямо изменения в коефициентите му, докато в същото време собствените стойности на матрицата $A$ могат да не са толкова чуствителни спрямо изменения в елементите ѝ. В последния случай една слабо чуствителна задача се заменя със силно чуствителна задача, което не е препоръчително от изчислителна гледна точка.

Съвременната изчислителна практика в това отношение е обратна на класическия подход – не собствените стойности се пресмятат чрез характеристичното уравнение, а произволно алгебрично уравнение се решава чрез намиране на собствените стойности на някаква матрица! Това се дължи на факта, че съществуват надеждни и числено устойчиви алгоритми (например QR алгоритъма на Франсиз-Кублановская) за намирането на собствените стойности на матрица.

Нека е дадено уравнението (4.8) с $a_m \neq 0$. След разделяне с $a_m$ получаваме

$$f(b,x) := x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0 = 0 \tag{4.9}$$

където $b = (b_0, b_1, \ldots, b_{m-1})$ и

$$b_k := \frac{a_k}{a_m},\ k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

С уравнението (4.9) свързваме т. нар. $m \times m$ *присъединена матрица*

$$A(b) := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -b_0 & -b_1 & b_2 & \ldots & -b_{m-1} \end{bmatrix}.$$

Може да се покаже, че характеристичното уравнение на $A(b)$ е точно уравнението (4.9).

Така решаването на едно алгебрично уравнение се свежда до намиране на собствените стойности на съответната присъединена матрица.

В програмните системи MATLAB и SYSLAB решаването на уравнението (4.8) става с командата roots(a), където

$$a = [a_m, a_{m-1}, \ldots, a_1, a_0].$$

## 4.9 Упражнения

**Упражнение 4.1** Нека $f(x)$ и $g(x)$ са ненулеви полиноми над полето $\mathbb{K}$. Покажете, че $f(x)$ дели $g(x)$ и същевременно $g(x)$ дели $f(x)$ точно когато $f(x) = cg(x)$, където $0 \neq c \in \mathbb{K}$.

**Упражнение 4.2** Покажете, че за въведената операция диференциране на полиноми са в сила зависимостите

$$(af(x) + bg(x))' = af'(x) + bg'(x),$$
$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

където $a$ и $b$ са константи.

**Упражнение 4.3** Да отъждествим полинома

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

над $\mathbb{K}$ от степен, ненадвишаваща $n$, с вектора

$$a = [a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0]^\top \in \mathbb{K}^{n+1}.$$

Съгласно резултата от упражнение 4.2 диференцирането

$$f(x) \mapsto f'(x)$$

е линейна операция, при която векторът $a$ се преобразува в

$$b = [0, na_n, \ldots, 2a_2, a_1] \in \mathbb{K}^{n+1}.$$

Намерете матрицата $A \in \mathbb{K}^{(n+1)\times(n+1)}$, такава че

$$b = Aa.$$

Покажете, че векторът от коефициентите на производната $f^{(k)}(x)$ е $A^k a$. Пресметнете $A^{n+1}$.

**Упражнение 4.4** (полином на Лагранж) Да разгледаме следната *интерполационна задача.* Дадени са $n+1$ точки в равнината с декартови координати

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n),$$

такива че $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. Необходимо е да се построи полином $l(x)$ от степен, ненадвишаваща $n$, чиято графика минава през зададените точки, т.е.,

$$l(x_k) = y_k,\ \ k = 0, 1, \dots, n. \tag{4.10}$$

Лесно се показва, че поставената задача има единствено решение

$$l(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

където векторът

$$a := [a_0, a_1, \dots, a_n]^\top \in \mathbb{R}^{n+1}$$

е решение на алгебричното уравнение

$$Va = y. \tag{4.11}$$

Тук

$$y := [y_0, y_1, \dots, y_n]^\top \in \mathbb{R}^{n+1}$$

и

$$V := \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}.$$

На практика не се работи с уравнението (4.11), а полиномът се строи по друг начин, например чрез *полиномите на Лагранж* (френски математик, 1736–1813). Да означим

$$f(x) := (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

и

$$g_k(x) := \frac{f(x)}{x - x_k} = \prod_{i \neq k}(x - x_i).$$

Тогава полиномите на Лагранж

$$l_k(x) := \frac{g_k(x)}{g_k(x_k)},\ k = 0, 1, \ldots, n,$$

удовлетворяват условията

$$l_k(x_i) = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{cases}.$$

Следователно полиномът

$$l(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)$$

удовлетворява интерполационните условия (4.10).

Използвайте изложените идеи за да построите изчислителна схема за решаване на *интерполационната задача на Ермит* (френски математик, 1822–1901), при която е необходимо да се изпълнят условията

$$l^{(s)}(x_k) = y_k^{(s)},\ k = 0, 1, \ldots, n,\ s = 0, 1, \ldots, k_s - 1. \tag{4.12}$$

Тук $k_s \geq 1$ са зададени натурални числа. Имайте предвид, че интерполационният полином $l(x)$ ще бъде от степен $k_0 + k_1 + \cdots + k_n$.

**Внимание!** Използването на полиноми от висока степен не се препоръчва в съвременната изчислителна практика.

**Упражнение 4.5** Решете числено уравнението

$$x^3 - 3.03x^2 + 3.0603x - 1.030301 = 0$$

с помощта на командите

$$c = [1, -3.03, 3.0603, -1.030301]$$
$$\mathrm{roots}(c)$$

в някоя от програмните системи MATLAB или SYSLAB. Точните корени са

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1.01\,.$$

Ако $x_i^*$ са изчислените корени, то като мярка за относителната грешка при сметките може да се избере числото

$$\eta := \frac{\|X^* - X\|}{\|X\|},$$

където

$$X = [x_1, x_2, x_3],\ \ X^* = [x_1^*, x_2^*, x_3^*]$$

и

$$\|X\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Пресметнете $\eta$ и коментирайте резултата. Имайте предвид, че по принцип се очаква резултатът да бъде верен с около 15–16 значещи цифри, което отговаря на $\eta \approx 10^{-15}$. На какво се дължат значително по–големите относителни грешки?

**Упражнение 4.6** Направете експеримент както в упражнение 4.5 като намерите коефициентите на уравнението

$$(x - 1.01)^4 = 0$$

и после го решите числено с програмата roots. Изобщо, тествайте програмата roots за различни алгебрични уравнения от висока степен и с известни решения.

# Глава 5

# АБСТРАКТНИ ПРОСТРАНСТВА

## 5.1 Уводни бележки

В редица области на математиката се използва геометричен език поради неговата образност и непосредствен апел към геометричната интуиция. Така в математиката широко се използва понятието *пространство*. При това често става въпрос за абстрактни пространства, точките на които са сложни математически обекти, например функции. Но независимо от степента на абстракция (т.е., на отвличане от конкретни детайли, характерни например за геометричното тримерно пространство, в което живеем), във всяка концепция за пространство обикновено се запазва нещо характерно за геометричното пространство, например идеята за разстояние между две точки. Така, ако запазим само тази връзка с геометричното пространство, стигаме до идеята за метрично пространство. Ако пък поискаме абстрактното пространство да прилича на множеството на всички вектори, можем да въведем аналог на операциите с вектори, на понятието дължина на вектор и т.н. Така стигаме до идеята за линейно (или векторно) пространство и за нормирано пространство. Напротив, отказвайки се от почти всички свойства на геометричното пространство, но запазвайки идеята за околност на точка, стигаме до концепцията за топологично пространство.

В математиката голямо значение имат множествата, които позволяват да се формулира понятието *непрекъснатост* на дадена функция $f : X \to Y$. Това не може да стане само в термините на най-общи множества $X$ и $Y$, а е необходимо да се въведе известна структура в тези множества. Това именно се прави в термините на съответните пространства. Това са множества, в които има смисъл интуитивната идея за непрекъснатост, а именно че на „малки" изменения в аргумента $x$ съответстват „малки" изменения в стойността на функцията $f(x)$.

Ще напомним, че реалната или комплексна функция $f : \mathbb{K} \to \mathbb{L}$, където $\mathbb{K}$, $\mathbb{L}$ са някои от множествата $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, е непрекъсната в точката $x_0$, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такова че $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ винаги щом $|x - x_0| < \delta$. Това определение се обобщава за функции $f : \mathbb{K}^m \to \mathbb{L}^n$ когато под $|x|$ се разбира евклидовата дължина

$$\sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_m|^2}$$

на вектора $x = (x_1, \dots, x_m)$.

В настоящата глава са разгледани накратко някои абстрактни пространства, използвани както в теорията, така и в редица приложения.

## 5.2 Метрични и нормирани пространства

Ще казваме, че непразното множество $M$ е *метрично пространство*, ако на всеки две точки $x, y \in M$ е съпоставено реалното число $d(x, y)$, наречено *разстояние* (или *метрика*) от $x$ до $y$, за което са изпълнени условията:

1. $d(x, y) > 0$, ако $x \neq y$ и $d(x, x) = 0$.

2. $d(x, y) = d(y, x)$.

3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ за всяко $z \in M$.

Условието 1 отразява интуитивно ясния факт, че разстоянието между две точки е неотрицателно, като е равно на нула точно когато точките съвпадат. Условието 2 също е ясно - то ни учи, че разстоянието от $x$ до $y$ е равно на разстоянието от $y$ до $x$. Поради това можем да говорим за разстояние *между* $x$ и $y$. Условието 3 е известно и като *неравенство на триъгълника*. Действително, ако $x$, $y$, $z$ са върхове на триъгълник в класическото геометрично пространство, то е изпълнено неравенството 3.

Един не много популярен факт е, че системата от условия 1–3 е с известен излишък, т.е., възможно е метричното пространство да се формулира по един по–икономичен откъм условия начин.

Действително, да разгледаме функцията $d : M \times M \to \mathbb{R}$, удовлетворяваща условията

$1^o$. $d(x, y) = 0$ точно когато $x = y$.

$2^o$. $d(x, y) \leq d(z, x) + d(z, y)$ за всички $x, y, z \in M$.

Тук не се вижда явно симетрията $d(x, y) = d(y, x)$, както и изискването $d(x, y) \geq 0$. Ако обаче положим $x = y$ в $2^o$ с отчитане на $1^o$ получаваме

$$0 \leq d(z, x) + d(z, x) = 2d(z, x)$$

и $d(z, x) \geq 0$, т.е., разстоянието е неотрицателно. По-нататък, ако положим $z = y$ получаваме

$$d(x, y) \leq d(y, x).$$

Доколкото $x$ и $y$ са произволни и можем да им разменим местата, имаме също

$$d(y, x) \leq d(x, y).$$

Последните две неравенства ни учат, че $d(x, y) = d(y, x)$, т.е., разстоянието е симетрично.

Метричното пространство $M$ с метрика $d$ се отъждествява с двойката $(M, d)$. В този смисъл метричните пространства $(M, d_1)$ и $(M, d_2)$ са различни точно когато метриките $d_1$ и $d_2$ са различни.

Ако подмножеството $M_1 \subset M$ е непразно, то се нарича *подпространство* на метричното пространство $M$ с метрика $d$. Така двойката $(M_1, d_1)$ също е метрично пространство, в което *индуцираната метрика* $d_1$ е свиване на функцията $d : M \times M$ върху множеството $M_1 \times M_1$,

$$d_1 := d|_{M_1 \times M_1}.$$

За всяко непразно множество $M$ може да се определи т.нар. *дискретна метрика* от $d(x, x) = 0$ и $d(x, y) = 1$ при $x \neq y$ за всички $x, y \in M$.

Също така, ако $d$ е метрика в $M$ и $r > 0$, то функциите, определени от $(x, y) \mapsto rd(x, y)$ и

$$(x, y) \mapsto \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)},$$

също са метрики.

Нека сега разгледаме една функция $\delta$, зададена в $M \times M$, която удовлетворява условията за метрика с изключение на това, че е възможно $\delta(x, y) = 0$ и когато $x \neq y$. Функцията $\delta$ се нарича *полуразстояние* (или *полуметрика*), а двойката $(M, \delta)$ – *полуметрично пространство.* В едно полуметрично пространство $(M, \delta)$ можем да отъждествим точките, полуразстоянието между които е равно на нула. Ще пишем $x \sim y$ когато $\delta(x, y) = 0$. Да означим с $[x] \subset M$ множеството на всички елементи от $M$, отъждествени с елемента $x$,

$$[x] := \{y \in M : \delta(x, y) = 0\}.$$

Така получаваме едно ново множество $M/\sim$ от класовете $[x]$ на еквивалентните помежду си елементи. В това множество функцията

$$([x],[y]) \mapsto \delta(x,y),$$

е коректно дефинирана и притежава свойствата на разстояние.

**Пример 5.1** В пространството на непрекъснатите функции $[0,1] \to \mathbb{R}$ могат да се въведат разстоянията

$$d_1(f,g) := \int_0^1 |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x,$$

$$d_2(f,g) := \sqrt{\int_0^1 (f(x) - g(x))^2 \mathrm{d}x}$$

и

$$d_\infty(f,g) := \max\{|f(x) - g(x)| : x \in [0,1]\}.$$

В пространството на функциите $[0,1] \to \mathbb{R}$, интегруеми заедно с квадрата си, функциите $d_1$ и $d_2$ са само полуразстояния. Действително, ако две интегруеми функции $f$ и $g$ се различават в например крайно или изброимо множество точки (или по–общо в множество с мярка нула), то

$$d_1(f,g) = d_2(f,g) = 0,$$

макар че $f \neq g$.

Нека $(M,d)$ е метрично пространство. Редицата $\{x_n\} \subset M$ се нарича *фундаментална* (или *редица на Коши*), ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува номер $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, такъв че за всяко

$m \in \mathbb{N}$ при $n > N$ е изпълнено $d(x_n, x_{n+m}) < \varepsilon$. Метричното пространство се нарича *пълно*, ако всяка фундаментална редица $\{x_n\} \subset M$ е сходяща в $M$, т.е., ако съществува $\xi \in M$, такова че

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, \xi) = 0.$$

Нека $x_0 \in M$ и $\varepsilon > 0$. Множеството

$$B_\varepsilon(x_0) := \{x \in M : d(x, x_0) < \varepsilon\} \subset M$$

се нарича *отворено кълбо* с център $x_0$ и радиус $\varepsilon$. Множеството

$$\overline{B}_\varepsilon(x_0) := \{x \in M : d(x, x_0) \leq \varepsilon\} \subset M$$

е *затворено кълбо*, а множеството

$$S_\varepsilon(x_0) := \{x \in M : d(x, x_0) = \varepsilon\} \subset M$$

е *сфера* с център $x_0$ и радиус $\varepsilon$.

Множеството $A \subset M$ е *отворено*, ако за всяко $x \in A$ съществува $\varepsilon > 0$, такова че $B_\varepsilon(x) \subset A$. Множеството $A \subset M$ е *затворено*, ако неговото допълнение $M\backslash A$ е отворено.

Всяко отворено множество, съдържащо точката $x$, е *отворена околност* (или накратко само *околност*) на $x$. В частност множеството $B_\varepsilon(x)$ е околност на $x$ за всяко $\varepsilon > 0$. Ако $A$ е околност на $x$, то множеството $A\backslash\{x\}$ се нарича *пробита околност* на $x$. [1]

[1] Понякога понятието околност на точка се разбира по–общо, като множество, съдържащо някое отворено множество, което съдържа точката.

Обединението на всяка съвкупност от отворени множества е отворено множество. Сечението на крайна съвкупност от отворени множества също е отворено множество, но сечението на безкрайна съвкупност от отворени множества може и да не отворено множество. Така например сечението на безкрайната съвкупност от отворени интервали $(-1/n, 1/n)$, $n \in \mathbb{N}$, е едноточковото множество $\{0\}$, което не е отворено.

Точката $x \in A$ е *вътрешна точка* на $A$, ако съществува $\varepsilon > 0$, такова че $B_\varepsilon(x) \subset A$. Множеството от всички вътрешни точки на $A$ се нарича *вътрешност* на $A$ и се означава с $\dot{A}$. Така множеството $A$ е отворено точно когато всички негови точки са вътрешни, т.е., $A = \dot{A}$.

Точката $x \in M$ е *външна точка* на множеството $A \subset M$, ако тя е вътрешна точка на неговото допълнение $M \backslash A$.

Точката $x \in M$ е *гранична точка* на множеството $A \subset M$, ако всяко кълбо $B_\varepsilon(x)$ съдържа както точки от $A$, така и точки от $M \backslash A$. Множеството от граничните точки на $A$ е *граница* на $A$ и се бележи с $\partial A$. Забележете, че някои (или всички) гранични точки на $A$ могат и да не принадлежат на $A$. Също така имаме

$$\partial A = \partial (M \backslash A).$$

**Пример 5.2** При $\varepsilon > 0$ сферата $S_\varepsilon(x)$ е граница на всяко от кълбата $B_\varepsilon(x)$ и $\overline{B}_\varepsilon(x)$.

Точката $x \in M$ се нарича *точка на сгъстяване*[2] на множеството $A \subset M$, ако всяко кълбо $B_\varepsilon(x)$ съдържа точки от $A$, различни от $x$. Оттук следва, че всяка околност на точката на сгъстяване $x$ на множеството $A$ съдържа безкрайно много точки от $A$. Забележете, че дадена точка на състяване на $A$ може и да не принадлежи на $A$. Множеството от всички точки на сгъстяване на $A$ се нарича *производно множество* на $A$ и се означава като $A'$. Производното множество е затворено.

Точката $x \in A$ се нарича *изолирана точка* на множеството $A \subset M$, ако тя не е точка на сгъстяване на $A$, т.е., ако съществува кълбо $B_\varepsilon(x)$, което не съдържа точки от $A$, различни от $x$. Следователно всяка точка $x \in A$ е или точка на сгъстяване, или изолирана точка на $A$.

Множеството

$$\overline{A} := A \cup A'$$

се нарича *затваряне* (или *затворена обвивка*) на множеството $A$. Затворената обвивка на всяко множество е затворено множество.

В сила са релациите

$$\overline{\overline{A}} = \overline{A}, \ (A')' \subset A'.$$

Може да се покаже, че множеството $A \subset M$ е затворено точно когато то съвпада със затворената си обвивка, $A = \overline{A}$ или, еквивалентно, точно когато то съдържа производното си множество, $A' \subset A$.

[2]Използва се и терминът *пределна* или *гранична точка*, но тук ние вече ангажирахме този термин за друга цел.

Сечението на всяка съвкупност от затворени множества е затворено множество. Обединението на крайна съвкупност от затворени множества също е затворено множество, но обединението на безкрайна съвкупност от затворени множества може и да не затворено множество. Така например обединението на безкрайната съвкупност от затворени интервали $[0, 1 - 1/n]$, $n \in \mathbb{N}$, е интервалът $[0, 1)$, който не е затворен.

В следващия пример са дадени редица илюстрации на въведените по–горе понятия.

**Пример 5.3** – Крайните множества нямат точки на сгъстяване.

– Всяко рационално число $x \in \mathbb{Q}$ е точка на сгъстяване на множеството на ирационалните числа $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

– Всяко реално число $x \in \mathbb{R}$ е точка на сгъстяване на множеството на рационалните числа $\mathbb{Q}$.

– Всяка точка на $\mathbb{K}^n$ е точка на сгъстяване на $\mathbb{K}^n$, където $\mathbb{K}$ е $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, а $\mathbb{K}^n$ е снабдено със стандартното евклидово разстояние

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$$

между точките $x$ и $y$ с координати $x_i$ и $y_i$ съответно.

– Празното множество $\emptyset \subset \mathbb{K}^n$ и самото пространство $\mathbb{K}^n$ са едновременно отворени и затворени множества.

– Всяко крайно множество е затворено.

– Множеството $\mathbb{Q}$ не е отворено и не е затворено в $\mathbb{R}$.

– Множеството (редицата)

$$S := \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$$

не е отворено и не е затворено в $\mathbb{R}$. Точката $0 \in \mathbb{R}$ е единствена точка на сгъстяване на $S$.

– Затворената обвивка на интервалите $(0,1)$, $(0,1]$, $[0,1)$ и $[0,1]$ е интервалът $[0,1]$.

Подмножеството $A$ на метричното пространство $M$ се нарича *свързано*, ако не съществуват такива две непресичащи се отворени множества $A_1, A_2 \subset M$, че да е изпълнено

$$A \subset A_1 \cup A_2,\ A \cap A_1 \neq \emptyset,\ A \cap A_2 \neq \emptyset.$$

Отвореното и свързано множество $A \subset M$ се нарича *отворена област* или накратко *област*.

Числото (крайно или безкрайно)

$$\mathrm{diam}(A) := \sup\{d(x,y) : x \in A,\ y \in A\}$$

се нарича *диаметър* на множеството $A \subset M$. *Разстояние* между множествата $A, B \subset M$ е числото

$$d(A,B) := \inf\{d(x,y) : x \in A,\ y \in B\}.$$

Очевидно от $A \cap B \neq \emptyset$ следва $d(A,B) = 0$, докато обратното може и да не е вярно. Например, сечението на интервалите $[0,1)$ и $(1,2]$ е празното множество, докато разстоянието между тях е равно на нула.

Множеството $A \subset M$ е *ограничено*, ако $\mathrm{diam}(A) < \infty$.

Ограничената област $A \subset M$ е *едносвързана*, ако нейната граница $\partial A$ е свързано множество. В противен случай областта е *многосвързана*. Обединението на дадена област и на нейната граница се нарича *затворена област*.

**Пример 5.4** Отвореното единично кълбо

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$$

е едносвързана област, докато отвореният кълбовиден сегмент

$$\{x \in \mathbb{R}^n : 1 < \|x\| < 2\}$$

е многосвързана област.

Нека сега $M$ е векторно пространство над полето $\mathbb{K}$ и нека единицата и нулата в $\mathbb{K}$ са 0 и 1. Елементите на $M$ се наричат *вектори*, а тези на полето $\mathbb{K}$ – *скалари*. Ще напомним, че $M$ е векторно пространство над $\mathbb{K}$, ако в $M \times M$ е дефинирано сумиране

$$(x, y) \mapsto x + y \in M,$$

а в $\mathbb{K} \times M$ – умножение

$$(\lambda, x) \mapsto \lambda x = x\lambda \in M,$$

такива, че за всички $x, y, z \in M$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ са изпълнени условията:

- $x + y = y + x$ и $(x + y) + z = x + (y + z)$;

- съществува *нулев елемент* $0_M \in M$, такъв че
$$x + 0_M = 0_M + x = x;$$
- съществува *противоположен елемент* $-x \in M$, такъв че
$$x + (-x) = 0_M;$$
- $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y;$
- $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x;$
- $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x;$
- $1x = x.$

Оттук лесно се извежда, че $0x = 0_M$ и $\lambda 0_M = 0_M$. Също така, от равенството $\lambda x = 0_M$ следва $x = 0_M$, ако $\lambda \neq 0$, и $\lambda = 0$, ако $x \neq 0_M$.

Векторното пространство $M$ над полето $\mathbb{K}$ се означава и като $(M, \mathbb{K})$. Когато $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ векторното пространство се нарича *реално*, а когато $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ то се нарича *комплексно*. Трябва да се има предвид, че ако $M$ е векторно пространство над полето $\mathbb{K}$, то е и векторно пространство над всяко подполе $\mathbb{L} \subset \mathbb{K}$.

**Пример 5.5** Примери за линейни векторни пространства са:
– множеството $\mathbb{K}$ над $\mathbb{K}$;
– множеството $\mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$;
– множеството $\mathbb{R}$ над $\mathbb{Q}$;
– множеството $\mathbb{K}^n$ над $\mathbb{K}$;

– множеството $\mathbb{C}^n$ над $\mathbb{R}$;

– множеството $\mathbb{K}^{m\times n}$ над $\mathbb{K}$;

– множеството на функциите $f : A \to B$ над $\mathbb{K}$, където $A \subset \mathbb{K}^m$ и $B \subset \mathbb{K}^n$. Тук сумата на два елемента $f$ и $g$ се определя от

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

а умножението със скалар – от

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Функцията

$$\|\cdot\| : M \to \mathbb{R}_+,$$

дефинирана във векторното пространство $M$ над полето $\mathbb{K}$, където $\mathbb{K}$ е $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, се нарича *норма*, ако са изпълнени условията:

1. $\|x\| = 0$ точно когато $x = 0_M$;

2. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ за всички $x, y \in M$;

3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ за всички $\lambda \in \mathbb{K}$ и $x \in M$.

Както и при аксиомите на метричното пространство, възможна е и една по–икономична формулировка на понятието норма. Достатъчно е да поискаме това да е функция

$$\|\cdot\| : M \to \mathbb{R},$$

такава че от $\|x\| = 0$ следва $x = 0$ и са изпълнени условията 2 и 3. Действително, тогава от 3 следва (като положим $\lambda = 0$), че $\|0_M\| = 0$, т.е., изпълнено е 1. За да покажем, че $\|x\| \geq 0$ за всяко $x \in M$ сега е достатъчно в 2 да положим $y = -x$, при което

$$\|x + (-x)\| = \|0_M\| = 0 \leq \|x\| + \| - x\| = 2\|x\|$$

и $\|x\| \geq 0$.

Пространството $M$, снабдено с норма $\|\cdot\|$, се нарича *нормирано векторно пространство*, или съкратено *нормирано пространство.*

Ако вместо условието 1 е изпълнено по–слабото условие $\|0_M\| = 0$, то функцията $\|\cdot\|$ се нарича *полунорма*, а пространството $M$ е *полунормирано пространство.* Полунормата се означава и като $p(\cdot)$. В полунормираното пространство $(M, p)$ е възможно да е изпълнено равенството $p(x) = 0$ при $x \neq 0_M$.

Във всяко нормирано пространство може да се дефинира разстояние, а именно

$$d(x, y) := \|x - y\|.$$

Обратното не всякога е вярно, т.е., ако $(M, d)$ е векторно метрично пространство, то функцията

$$x \mapsto d(x, 0_M)$$

може и да не е норма.

Аналогично, всяка полунорма $p$ индуцира полуразстояние $\delta$ по формулата

$$\delta(x, y) = p(x - y).$$

**Пример 5.6** В пространството на непрекъснатите функции $[0,1] \to \mathbb{R}$ могат да се въведат нормите

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)| \mathrm{d}x,$$

$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_0^1 f^2(x) \mathrm{d}x}$$

и

$$\|f\|_\infty := \max\{|f(x)| : x \in [0,1]\}.$$

В пространството на интегруемите заедно с квадрата си функции $[0,1] \to \mathbb{R}$ функциите $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ са само полунорми. Действително, нека функцията $f$ приема различни от нула стойности само в крайно или изброимо множество от точки. Тогава имаме

$$\|f\|_1 = \|f\|_2 = 0,$$

макар че $f$ не се свежда до нулевата функция.

Две норми

$$\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2 : M \to \mathbb{R}_+$$

се наричат *еквивалентни*, ако съществуват константи

$$b \geq a > 0,$$

такива че

$$a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1$$

за всяко $x \in M$.

Пълното нормирано пространство $M$ се нарича *банахово пространство*. Банаховите пространства имат изключително широко приложение в математическите науки. Така например в такива пространства вече може да се развие апарата на диференциалното смятане.[3]

В много приложения е удобно да се въведе едно обобщение на понятието норма. Нека първо разгледаме т.нар. *частична наредба* $\preceq$ в пространството $\mathbb{R}^n$. Ако $x, y \in \mathbb{R}^n$ ще пишем $x \preceq y$ когато $y - x \in \mathbb{R}^n_+$ (или когато между елементите $x_i$, $y_i$ на векторите $x$, $y$ съответно са изпълнени неравенствата $x_i \leq y_i$, $i = 1, \ldots, n$).

Нека $M$ е реално или комплексно векторно пространство. Функцията

$$\| \cdot \| : M \to \mathbb{R}^n_+$$

се нарича *обобщена норма*, ако за всички $x, y \in M$ и $\lambda \in \mathbb{K}$ са изпълнени условията:

1. $\|x\| = 0$ точно когато $x = 0_M$;
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;
3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$.

Когато няма опасност от недоразумения, обобщената норма се означава и като $| \cdot |$.

---

[3]Възможно е подобен апарат да се развие и в ненормирани пространства.

Нека например $m = m_1 + \cdots + m_n$ е целочислена разбивка на натуралното число $m$. Да представим вектора

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{K}^m$$

като

$$x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),$$

където

$$\xi_i = (\xi_{i1}, \ldots, \xi_{i,m_i}) \in \mathbb{K}^{m_i}, \ i = 1, \ldots, n.$$

Тогава в качеството на обобщена норма на $x$ можем да приемем

$$\|x\| = (\|\xi_1\|, \ldots, \|\xi_n\|) \in \mathbb{R}^n_+.$$

В частност, ако вземем $n = m$ виждаме, че т. нар. *векторен модул*

$$|x| := (|x_1|, \ldots, |x_m|) \in \mathbb{R}^m_+$$

на $x$ е също така обобщена норма на $x$.

Аналогично се въвежда понятието *обобщена полунорма* във векторното пространство $M$, която се отличава от стандартната полунорма по това, че е възможно $\|x\| = 0$ при $x \neq 0_M$.

**Пример 5.7** В пространството на интегруемите функции

$$f = (f_1, f_2) : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$$

функцията $\| \cdot \|$, определена от

$$\|f\| := (p(f_1), p(f_2))$$

и

$$p(f_i) := \sqrt{\int_0^1 f_i^2(x)\mathrm{d}x},$$

е обобщена полунорма.

## 5.3 Топологични пространства

Топологичното пространство е множество заедно с една съвкупност от негови подмножества (наречени отворени множества), която отговаря на известни условия.

Терминът „отворено множество” вече беше определен в предишната секция във връзка с понятието за метрично пространство. В тази секция използваме същия термин, а и други вече въведени термини, за нещо на пръв поглед различно. Но това е само на пръв поглед. Внимателният читател ще забележи, че има пълно съответствие между едноименните термини когато например топологичното пространство е и метрично пространство (на свой ред всяко метрично пространство е топологично, но за това ще стане реч след малко).

Нека $T$ е множество и $\mathcal{N}$ е съвкупност от негови подмножества, удовлетворяващи следните три условия:

1. $\emptyset \in \mathcal{N}$, $T \in \mathcal{N}$.
2. Сечението на всеки две множества от $\mathcal{N}$ принадлежи на $\mathcal{N}$.
3. Обединението на всяка съвкупност от множества от $\mathcal{N}$ принадлежи на $\mathcal{N}$.

Описаната съвкупност $\mathcal{N}$ от подмножества на $T$ се нарича *топология* в $T$. Множеството $T$ заедно с топологията $\mathcal{N}$ се нарича *топологично пространство* и се бележи също така като $(T, \mathcal{N})$.

Множествата $N \in \mathcal{N}$ се наричат *отворени множества* на топологичното пространство $T$. Както и при общите множества, елементите на $T$ се наричат *точки* на пространството $T$.

От условието 2 следва, че сечението на краен брой отворени множества принадлежи на $\mathcal{N}$ и в частност също е отворено множество.

Ще припомним, че с $2^T$ означаваме множеството на всички подмножества на $T$. Оттук виждаме, че топологията в $T$ е подмножество на $2^T$, удовлетворяващо условията 1, 2 и 3. Естествено, в общия случай топологията не е единствена – всеки конкретен избор на $\mathcal{N}$ съответства на конкретна топология.

**Пример 5.8** Множеството на всички интервали $(a, b) \subset \mathbb{R}$ е топология в $\mathbb{R}$. Множеството на всички интервали $(-a, a) \subset \mathbb{R}$, където $a \geq 0$, също е топология в $\mathbb{R}$ (как се появява празното множество $\emptyset \subset \mathbb{R}$?).

Съществуват две „крайни" топологии във всяко множество $T$. Първата е *тривиалната* или *антидискретната топология*

$$\mathcal{N} = \{\emptyset, T\}.$$

Втората е т.нар. *дискретна топология*

$$\mathcal{N} = 2^T.$$

Топологично пространство, снабдено с антидискретна или дискретна топология, се нарича още *антидискретно* или *дискретно пространство* съответно.

Всяко метрично пространство $M$ определя топологично пространство, за което се казва, че има *метрична топология*, или че е *метризуемо*. Така например в качеството на отворени множества можем да вземем $\emptyset$, $M$ и отворените кълба $B_\varepsilon(x)$ когато $\varepsilon$ пробягва положителната полуос и $x$ пробягва $M$.

Обратното не винаги е вярно – съществуват топологични пространства, които не се определят от някакво метрично пространство. Такова е например всяко антидискретно топологично пространство $T$, съдържащо не по-малко от две точки.

Всяко дискретно топологично пространство $T$ е метризуемо. Действително, в този случай можем да въведем дискретната метрика $d$, определена от $d(x,x) = 0$ и $d(x,y) = 1$ за $x \neq y$.

Нека $x$ е елемент на топологичното пространство $T$. Подмножеството $A \subset T$ се нарича *околност* на точката $x$, ако съществува отворено множество $U \subset T$, такова че $x \in U \subset A$.

Всяко отворено множество, съдържащо точката $x \in T$, се нарича *отворена околност* на $x$. Ще отбележим, че понякога отворената околност се нарича за краткост само околност. Това може да доведе до недоразумения доколкото според общото определение за околност не е задължително тя да е отворено множество.

Когато $T$ е метризуемо топологично пространство, за всеки две различни точки $x$, $y$ от $T$ съществуват околности $U$, $V$ на $x$ и $y$ съответно, такива че $U \cap V = \emptyset$.

Когато множеството $T$ е крайно, съществуват точно $2^{|T|}$ топологии, колкото е броят на елементите на $2^T$, където $|T|$ е броят на елементите на $T$.

**Пример 5.9** Нека е дадено двуточковото множество $T = \{x, y\}$. Тогава:

– съществуват точно четири топологии в $T$,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1 &= \{\emptyset, T\}, \\ \mathcal{N}_2 &= \{\emptyset, \{x\}, T\}, \\ \mathcal{N}_3 &= \{\emptyset, \{y\}, T\}, \\ \mathcal{N}_4 &= \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, T\}. \end{aligned}$$

– топологичните пространства $(T, \mathcal{N}_2)$ и $(T, \mathcal{N}_3)$ са неметризуеми (докажете!).

За всяко подмножество $X$ на топологичното пространство $T$ може да се определи най–голямото съдържащо се в $X$ отворено множество. То се нарича *вътрешност* на $X$ и се означава с $\dot{X}$. Следователно $\dot{X}$ е обединението на всички отворени множества, съдържащи се в $X$. Също така имаме $x \in \dot{X}$ точно когато съществува отворено множество $U \subset X$, такова че $x \in U$.

Допълненията на отворените множества имат собствено наименование.

Подмножеството $Y$ на топологичното пространство $T$ се нарича *затворено*, ако неговото допълнение $T \backslash Y$ е отворено.

Лесно се вижда, че съгласно това определение празното множество $\emptyset$ и цялото пространство $T$ са затворени множества. Но ние знаем, че те са и отворени множества. Така едно множество може да бъде едновременно отворено и затворено. Други такива множества се дават от следния пример.

**Пример 5.10** – Всяко подмножество на едно дискретно топологично пространство е едновременно отворено и затворено.

– В топологичното пространство $(\mathbb{R}, \mathcal{N})$, където $U \in \mathcal{N}$ точно когато $U \subset \mathbb{R}$ и за всяко $x \in U$ съществува $y > x$, такова че $[x, y) \subset U$, всеки интервал $[x, y)$ е едновременно отворен и затворен.

Също така от горните определения следва, че:

– обединението на две (а следователно и на краен брой) затворени множества е затворено множество;

– сечението на всяка съвкупност от затворени множества е затворено множество.

Нека $T$ е множество и $\mathcal{V}$ е съвкупност от подмножества на $T$, такава че:

1. $\emptyset, T \in \mathcal{V}$.

2. Обединението на всеки две множества от $\mathcal{V}$ принадлежи на $\mathcal{V}$.

3. Сечението на всяка съвкупност на множества от $\mathcal{V}$ принадлежи на $\mathcal{V}$.

Тогава съвкупността

$$\mathcal{N} := \{X \backslash V : V \in \mathcal{V}\}$$

е топология в $T$ (докажете!).

За всяко подмножество $X$ на топологичното пространство $T$ може да се дефинира най–малкото съдържащо го затворено множество. То се нарича *затворена обвивка* на $X$ и се означава с $\overline{X}$. Така $\overline{X}$ е сечение на всички затворени множества, съдържащи $X$. Може да се покаже, че $x \in \overline{X}$ точно когато за всяко отворено множество $U$, съдържащо $x$, е изпълнено $U \cap X = \emptyset$.

Когато $X$ е подмножество на топологичното пространство $T$, множеството

$$\partial X := \overline{X} \cap \overline{(T \backslash X)}$$

се нарича *граница* на $X$.

В сила са следните твърдения, които читателят би трябвало да може да докаже сам:

- Нека $Y$ е затворено подмножество на топологичното пространство $T$, а $X$ е подмножество на $Y$. Тогава $\overline{X} \subset Y$.
- Множеството $X$ е затворено точно когато $X = \overline{X}$.
- Множеството $X$ е затворено точно когато $\partial X \subset X$.
- Множеството $X$ е едновременно отворено и затворено точно когато $\partial X = \emptyset$.

- Ако $X$ са $Y$ подмножества на топологичното пространство $T$, то

$$\begin{aligned}
&\overline{X} = X \cup \partial X, \\
&\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}, \\
&\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}, \\
&X \backslash \dot{Y} = \overline{X \backslash Y}.
\end{aligned}$$

Нека $T$ е топологично пространство и $x \in T$. Подмножеството $X \subset T$, съдържащо $x$, се нарича *околност* на $x$, ако съществува отворено множество $U \subset X$, което съдържа $x$. В частност всяко отворено множество е околност на всяка своя точка. Изобщо, всяко множество с непразна вътрешност е околност на всяка точка от тази вътрешност.

За топологичното пространство $T$ и всяка негова точка $x$ са в сила следните твърдения, които препоръчваме в качеството на упражнения:

- Точката $x$ има околност.

- Всяко подмножество на $T$, съдържащо околност на $x$, е също околност на $x$.

- Сечението на две околности на $x$ е също околност на $x$.

- Всяка околност $X$ на $x$ съдържа друга околност $U$ на $x$, такава че $U$ е околност на всяка точка $y \in U$.

Понятието за топологично пространство позволява да се дефинират в най–общ аспект фундаменталните понятия *непрекъснатост* и *граница*.

Нека $T$ и $S$ са топологични пространства, които могат да са различни и/или да имат различна топология. Функцията $f : T \to S$ се нарича *непрекъсната*, ако за всяко отворено множество $V \subset S$ пълният му прообраз

$$f^{-1}(V) = \{x \in T : f(x) \in V\}$$

е също отворено множество (в $T$). Когато дадена функция не е непрекъсната казваме, че тя е *прекъсната*. Трябва да се подчертае, че горните определения се отнасят до свойствата непрекъснатост и прекъснатост не в точка $x \in T$, а в цялото пространство $T$.

Тривиални примери за непрекъснати функции са тъждествената функция $1_T : T \to T$, определена от $1_T(x) = x$, и постоянната функция $x \mapsto c$, изобразяваща всяко $x$ в зададен елемент $c \in S$.

Всяка функция $f : T \to S$, изобразяваща дискретното топологично пространство $T$ в произволно топологично пространство $S$, е непрекъсната. Това следва от факта, че прообразът $f^{-1}(V)$ на всяко $V \subset S$, бидейки подмножество на $T$, е отворено множество. В сила е и обратното твърдение: нека $T$ е топологично пространство, такова че за всяко топологично пространство $S$ всяка функция $f : T \to S$ е непрекъсната. Тогава пространството $T$ е дискретно. За да докажем последното твърдение е достатъчно да разгледаме случая, когато $S = T$ и

$S$ е дискретно пространство.

На свой ред всяка функция $f : T \to S$, изобразяваща произволно топологично пространство $T$ в антидискретното топологично пространство $S$, също е непрекъсната. В сила е и обратното твърдение: нека $S$ е топологично пространство, такова че за всяко топологично пространство $T$ всяка функция $f : T \to S$ е непрекъсната. Тогава пространството $S$ е антидискретно. Действително, да разгледаме случая когато $T = S$ и $T$ е антидискретно пространство.

Горните твърдения изглеждат малко абстрактни, а и наистина са такива. Затова още по–приятно е когато се убедим, че те могат лесно да се докажат. Нещо, което препоръчваме на читателите.

Свойството непрекъснатост може да се характеризира и в термините на затворените множества. Може да се докаже, че функцията $f : T \to S$ е непрекъсната точно когато множеството $f^{-1}(V)$ е затворено за всяко затворено подмножество $V \subset S$.

Изображението $f : T \to S$ се нарича *отворено*, ако за всяко отворено множество $U \subset T$ множеството $f(U) \subset S$ също е отворено. Дадено отворено изображение може и да не е непрекъснато.

Може да се покаже, че ако $T$ е топологично пространство и $S$ е дискретно топологично пространство $S$, то всяко изображение $f : T \to S$ е отворено.

Изображението $f : T \to S$ се нарича *затворено*, ако за всяко затворено мнжество $U \subset T$ множеството $f(U) \subset S$ също е затворено. Дадено затворено изображение може и да не е непрекъснато.

Трябва да се има предвид, че както множествата, така и изображенията, могат да бъдат едновременно: неотворени и незатворени, отворени и незатворени, затворени и неотворени, и даже затворени и отворени. По–долу са дадени примери за такива изображения $f : T \to S$.

- Нека $T$ е множеството $A$ с дискретна топология и $S$ е множеството $A$, но с антидискретна топология. Тогава тъждественото изображение $x \mapsto x$ е неотворено и незатворено.

- Нека $T$ е множеството $A = \{x, y\}$ с дискретна топология

  $$\{\emptyset, \{x\}, \{y\}, A\}$$

  и $S$ е множеството $A$, снабдено с топология

  $$\{\emptyset, \{x\}, A\}.$$

  Тогава постоянното изображение $x \mapsto x$, $y \mapsto x$ е отворено, непрекъснато и незатворено.

- Нека $T$ е множеството $\{x, y\}$ с дискретна топология и $S$ е множеството $\mathbb{R}$ със стандартна топология (породена от метриката $d(x, y) = |x - y|$). Тогава изображението $f$, определено от $f(x) = 0$, $f(y) = 1$ е непрекъснато, затворено и неотворено.

- Нека $T = S$ е произволно топологично пространство. Тогава тъждественото изображение $x \mapsto x$ е едновременно отворено и затворено.

Лесно се показва, че композицията на две непрекъснати функции е също непрекъсната функция. Действително, нека $T$, $S$ и $R$ са топологични пространства, а

$$f : T \to S, \; g : S \to R$$

са непрекъснати функции. Да разгледаме композицията

$$h = g \circ f : T \to R,$$

определена от $h(x) = g(f(x))$. Ако множеството $V$ е отворено в $R$, то прообразът $g^{-1}(U)$ е отворен в $S$ и на свой ред прообразът $f^{-1}(g^{-1}(V))$ е отворен в $T$. Остава да съобразим, че

$$(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V)).$$

В математиката фундаментално значение има понятието за еквивалентност (вж. например секция 3.5). Смисълът на това понятие е, че два еквивалентни обекта $A$ и $B$ са неразличими в контекста на съответната задача. Така изучаването на свойствата на даден обект $A$ може да се замени с това на всеки еквивалентен нему обект $B$.

Свойството еквивалентност е *рефлексивно* – всеки обект е еквивалентен на себе си, *симетрично* – ако обектът $A$ е еквивалентен на $B$, то и обектът $B$ е еквивалентен на $A$, и *транзитивно* – ако обектът $A$ е еквивалентен на $B$ и обектът $B$ е еквивалентен на $C$, то обектът $A$ е еквивалентен на $C$.

При топологичните пространства свойството еквивалентност се свързва с понятието хомеоморфизъм.

Топологичните пространства $T$ и $S$ се наричат *хомеоморфни* ако съществува непрекъсната биекция $f : T \to S$, такава че обратната функция $f^{-1} : S \to T$ е също непрекъсната. В този случай биекцията $f$ се нарича *хомеоморфизъм* между пространствата $T$ и $S$.

Условието обратната функция $f^{-1}$ да е също непрекъсната е съществено защото съществуват непрекъснати биекции, за които това не е в сила. Нека например $T$ е множеството $\mathbb{R}$ с дискретна топология, а $S$ е също множеството $\mathbb{R}$, но със стандартната топология, породена от разстоянието $d(x, y) = |x-y|$. Тогава тъждествената функция $x \mapsto x$ е непрекъсната биекция, но нейната обратна функция е прекъсната (докажете!).

Множеството $H(T)$ на всички хомеорфизми $T \to T$ на топологичното пространство $T$ в себе си образува група с групов закон композицията на две функции. За всяко $x$ множеството

$$H_x(T) := \{f \in H(T) : f(x) = x\}$$

се нарича *стабилизатор* на елемента $x$. Всеки стабилизатор $H_x(T)$ е подгрупа на групата $H(T)$.

Едно от най–важните свойства на дадено топологично пространство, което се запазва при хомеоморфизмите, е т.нар. *компактност*. Пример за компактно множество в $\mathbb{R}$ е всеки затворен интервал, например $[0, 1]$. Нека

$$\{U_i : i \in I\}$$

е семейство от отворени множества $U_i \subset \mathbb{R}$, такова че

$$[0, 1] \subset \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Тук $I$ е крайно или безкрайно множество от индекси. Тогава съществува крайно множество от индекси $J \subset I$ и съответно крайно подсемейство

$$\{U_j : j \in J\},$$

такова че

$$[0,1] \subset \bigcup_{j\in J} U_j.$$

Това наблюдение стои в основата на определението за компактност.

Нека $A$ е подмножество на множеството $T$. Тогава семейството $\{U_i, i \in I\}$ от подмножества на $T$ се нарича *покритие* на $A$, ако

$$A \subset \bigcup_{i\in I} U_i.$$

Покритието $\{U_i, i \in I\}$ е *крайно*, ако множеството $I$ е крайно. В противен случай покритието е *безкрайно*.

В горното определение равенството $A = T$ не се изключва. В този случай казваме, че семейството $\{U_i, i \in I\}$ е покритие на $T$.

**Пример 5.11** Семейството

$$\left\{ \left[ -1 + \frac{1}{i}, 1 - \frac{1}{i} \right] : i \in \mathbb{N} \right\}$$

е покритие на интервала $(-1, 1) \subset \mathbb{R}$.

Семейството

$$\{(i, i+1) : i \in \mathbb{Z}\}$$

е покритие на $\mathbb{R}$.

Нека $\mathcal{U} := \{U_i, i \in I\}$ и $\mathcal{V} := \{V_j, j \in J\}$ са две покрития на $A \subset T$. Покритието $\mathcal{U}$ се нарича *подпокритие* на $\mathcal{V}$, ако за всяко $i \in I$ съществува $j \in J$, такова че $U_i = V_j$. С други думи едно покритие $\mathcal{U}$ е подпокритие на друго подкритие $\mathcal{V}$, ако семейството $\mathcal{U}$ (разглеждано като множество от множества) е подмножество на семейството $\mathcal{V}$,

$$\mathcal{U} \subset \mathcal{V}.$$

**Пример 5.12** Семейството

$$\{(x, x+1) : x \in \mathbb{R}\} \tag{5.1}$$

е покритие на $\mathbb{R}$, а семейството

$$\{(i, i+1) : i \in \mathbb{Z}\}$$

е също покритие на $\mathbb{R}$ и същевременно е подпокритие на (5.1).

Нека сега предположим, че $A$ е подмножество на тополо- гичното пространство $T$. Тогава покритието $\{U_i : i \in I\}$ на $A$ се нарича *отворено покритие*, ако всички множества $U_i$, $i \in I$, са отворени в $T$.

Сега вече сме в състояние да дефинираме свойството компактност.

Подмножеството $A$ на топологичното пространство $T$ се нарича *компактно*, ако всяко негово отворено покритие съдържа крайно подпокритие. Това определение е в сила и за цялото пространство $T$, тъй като случаят $A = T$ не се изключва.

**Пример 5.13** Реалното или комплексно пространство $\mathbb{K}^n$ с топология, породена от някоя норма $\|\cdot\|$, не е компактно. Действително, покритието

$$\{B_i : i \in \mathbb{N}\},$$

на $\mathbb{K}^n$, където

$$B_i := \{x \in \mathbb{K}^n : \|x\| < i\}$$

не съдържа крайно подпокритие.

**Пример 5.14** Дискретното топологично пространство $T$ е компактно точно когато то е крайно. Действително, ако $T$ е безкрайно множество, едно негово отворено покритие се състои от всички едноточкови множества (които по определение в този случай са отворени). Но това покритие няма крайно подпокритие и следователно безкрайното дискретно топологично пространство $T$ не е компактно. Ако на свой ред дискретното пространство $T$ е крайно, неговата топология съдържа краен брой отворени множества, т.е., всяко отворено покритие на $T$ е крайно и следователно $T$ е компактно пространство.

В сила е и следната еквивалентна характеризация на свойството компактност. Топологичното пространство $T$ е компактно точно когато всяко семейство $\{W_i : i \in I\}$ от затворени множества, такова че

$$\bigcap_{i \in I} W_i = \emptyset,$$

съдържа крайно подсемейство $\{W_j : j \in J\}$, такова че

$$\bigcap_{j \in J} W_j = \emptyset$$

(докажете!).

Може да се покаже, че в реалното или комплексно пространство $\mathbb{K}^n$ са компактни затвореното кълбо

$$B_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{K}^n : \|x - x_0\| \leq \varepsilon\}$$

и сферата

$$S_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{K}^n : \|x - x_0\| = \varepsilon\}$$

с център $x_0 \in \mathbb{K}^n$ и радиус $\varepsilon > 0$.

По–общо, едно подмножество в крайномерно реално или комплексно векторно пространство е компактно точно когато то е ограничено и затворено. Това твърдение е известно като теорема на Хайне[4]–Борел[5].

Нека $f$ е непрекъсната функция от топологичното пространство $T$ към топологичното пространство $S$ и нека подмножеството $A \subset T$ е компактно. Тогава образът $f(A)$ на $A$ при изображението $f$ е също компактно множество. Като следствие получаваме, че две хомеоморфни топологични пространства са едновременно компактни или некомпактни.

Разбира се, не всяко подмножество на едно компактно топологично пространство самото е компактно. Например отвореният интервал $(0, 1)$ е некомпактно подмножество на затворения ограничен (а следователно и компактен) интервал $[0, 1]$. Оказва се обаче, че всяко затворено подмножество на дадено компактно пространство е компактно.

[4]Немски математик, 1821–1881.

[5]Френски математик, 1871–1956.

Ще завършим тази секция с понятието за локална компактност.

Топологичното пространство $T$ се нарича *локално компактно*, ако околността на всяка точка $x \in T$ съдържа компактна околност на $x$.

Очевидно всяко компактно пространство е локално компактно, докато обратното може и да не е вярно.

## 5.4 Упражнения

**Упражнение 5.1** Да означим с $\mathbb{K}^n$, където $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, множеството на наредените $n$–орки

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \ \ x_i \in \mathbb{K}.$$

Докажете, че изразът

$$d_p(x, y) := \left( \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$$

определя разстояние в $\mathbb{K}^n$ при $p \geq 1$. Разгледайте първо частните случаи

$$\begin{aligned} d_1(x, y) &:= \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \\ d_2(x, y) &:= \left( \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2}, \\ d_\infty(x, y) &:= \max\{|x_i - y_i| : i = 1, \ldots, n\}. \end{aligned}$$

**Упражнение 5.2** Докажете, че:

– изразът $\delta(x,y) = (x-y)^2$ не определя метрика в $\mathbb{R}$;

– изразът

$$\delta(x,y) = \min\{|x_i - y_i| : i = 1,\ldots,n\}$$

не определя метрика в $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$.

**Упражнение 5.3** Ако $d$ е метрика в $M$, докажете, че за $x,y,z \in M$ е в сила

$$|d(x,z) - d(z,y)| \leq d(x,y).$$

**Упражнение 5.4** Нека $A = [a_{ij}]$ е реална или комплексна $m \times n$ матрица. Норма ли е функцията, определена от

$$\nu(A) := \max\{|a_{ij}| : i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n\}?$$

**Упражнение 5.5** Нека $M$ е непразно множество и нека функциите $d$ и $\delta$ са съответно разстояние и полуразстояние в $M$. Покажете, че функцията $M \times M \to \mathbb{R}_+$, определена от

$$(x,y) \mapsto d(x,y) + \delta(x,y)$$

е разстояние в $M$.

**Упражнение 5.6** Нека $f$ е функция от метричното пространство $(M_1, d_1)$ към метричното пространство $(M_2, d_2)$. Функцията $f$ се нарича *равномерно непрекъсната*, ако за всяко $\varepsilon_2 > 0$ съществува $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon_2)$, такова че

$$d_2(f(a), f(b)) < \varepsilon_2$$

за всички $a, b \in M_1$, такива че

$$d_1(a, b) < \varepsilon_1.$$

– Покажете, че ако функцията $f$ е равномерно непрекъсната, то тя е и непрекъсната. Дайте пример за това, че обратното може и да не е вярно.

– Докажете, че ако пространството $(M_1, d_1)$ е компактно и функцията $f$ е непрекъсната, то тя е и равномерно непрекъсната. Този резултат е известен като *теорема на Вайерщрас* (немски математик, 1815–1897).

– Нека $A \subset M_1$. Докажете, че функцията $M_1 \to \mathbb{R}_+$, определена от $x \mapsto d(x, A)$, е равномерно непрекъсната, където

$$d(x, A) := \inf\{d_1(x, y) : y \in A\}$$

е разстоянието от точката $x$ до множеството $A$.

**Упражнение 5.7** Нека $T$ е компактно топологично пространство с топология, породена от метриката $d$. Покажете, че ако $\{U_i : i \in I\}$ е отворено покритие на $T$, то съществува $\lambda > 0$, такова че всяко подмножество на $T$ с диаметър, по–малък от $\lambda$, се съдържа изцяло в някое множество $U_i$ от покритието.

**Упражнение 5.8** Покажете, че графиката на фунцията

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}$$

е компактно множество точно когато тази функция е непрекъсната.

**Упражнение 5.9** Нека $(M, d)$ е векторно метрично пространство, такова че метриката $d$ е инвариантна относно транслации, а именно
$$d(x+z, y+z) = d(x, y),$$
за всички $x, y, z \in M$. Може ли да се твърди, че функцията $M \to \mathbb{R}_+$, определена от $x \mapsto d(x, 0_M)$, е норма?

**Упражнение 5.10** Да се върнем към означенията от упражнение 5.1. Докажете, че изразът
$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$
определя норма в $\mathbb{K}^n$ при $p \geq 1$. Разгледайте първо частните случаи
$$\begin{aligned}
\|x\|_1 &:= \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \\
\|x\|_2 &:= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}, \\
\|x\|_\infty &:= \max\{|x_i| : i = 1, \ldots, n\}.
\end{aligned}$$

**Упражнение 5.11** В пространството $\mathbb{K}^{m\times n}$ на $m \times n$ матриците над $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ може да се въведе норма $\|\cdot\|$ по различни начини. Ако освен аксиомите за норма функцията $\|\cdot\|$ удовлетворява и условието
$$\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|,$$

тя се нарича *матрична норма* (предполага се, че матричното произведение има смисъл). Докажете, че ако елементите на матрицата $A$ са $a_{ij}$, то изразът

$$\|A\|_{\mathrm{F}} := \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$$

определя матрична норма в $\mathbb{K}^{m\times n}$.

**Упражнение 5.12** Да се върнем към означенията от упражнение 5.11. В $\mathbb{K}^{m\times n}$ може да се въведат т.нар. *операторни* норми

$$\|A\|_p := \max\{\|Ax\|_p : \|x\|_p = 1\},$$

където $p \geq 1$. Докажете, че операторната норма $\|\cdot\|_p$ удовлетворява аксиомите за норма и освен това е матрична норма.

**Упражнение 5.13** Нека $\|\cdot\|$ е норма в реалното или комплексно векторно пространство $\mathbb{K}^n$ и $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ е зададена матрица. Покажете, че

– функцията, зададена от

$$x \mapsto p_A(x) := \|Ax\|, \ x \in \mathbb{K}^n,$$

е полунорма в $\mathbb{K}^n$;

– функцията $p_A(\cdot)$ е норма в $\mathbb{K}^n$ точно когато матрицата $A$ е неособена.

# Глава 6

# ПРИНЦИПИ ЗА НЕПОДВИЖНАТА ТОЧКА

## 6.1 Уводни бележки

Сред най–мощните средства за решаване на въпросите за съществуване и единственост на решенията на различни класи уравнения са принципите на неподвижната точка на С. Банах (полски математик, 1892–1945) и Ю. Шаудер (полски математик, 1899–1941)[1]. По–долу са формулирани основните принципи за неподвижната точка и е показано приложението им към някои задачи за съществуване и единственост на решението.

[1] В крайномерния си вариант този принцип е известен като принцип на Брауер (холандски математик, 1881–1966).

## 6.2 Принцип на Банах

Принципът на Банах се формулира най–общо за метрични пространства. Нека $M$ е пълно метрично пространство с метрика $d$. Нека $B \subset M$ и $\Pi : B \to B$ е функция, такава че

$$d(\Pi(x), \Pi(y)) \leq l d(x, y),$$

където $l < 1$ е константа. Тогава съществува единствено решение $x \in B$ на уравнението

$$x = \Pi(x),$$

което се нарича *неподвижна точка* на оператора $x$. Твърдението относно съществуването на тази неподвижна точка е известно като *принцип на Банах* за неподвижната точка.

На практика принципът на Банах се прилага за уравнения в пълни нормирани (или банахови) пространства както следва.

Да разгледаме банаховото пространство $V$ с норма $\| \cdot \|$ и нека $\Pi : B_\alpha \to V$ е (изобщо нелинеен) оператор, дефиниран в кълбото

$$B_\varepsilon := \{x \in V : \|x\| \leq \varepsilon\}$$

за някое $\varepsilon > 0$. Да разгледаме операторното уравнение

$$x = \Pi(x). \tag{6.1}$$

Решенията на (6.1) се наричат *неподвижни точки* на оператора $\Pi$.

Операторът $\Pi$ се нарича *свиване* (или *свиващ оператор*) в множеството $B_\varepsilon$, ако съществува неотрицателна константа $l < 1$, такава че $\Pi$ удовлетворява *условието на Липшиц*[2]

$$\|\Pi(x) - \Pi(y)\| \leq l\|x - y\|, \ x, y \in B_\varepsilon.$$

Величината $l$ се нарича *константа на Липшиц* на $\Pi$ и в общия случай зависи от $\varepsilon$, т.е., $l = l(\varepsilon)$.

Принципът на Банах се формулира както следва.

Нека за оператора $\Pi : B_\varepsilon \to V$ с константа на Липшиц $l < 1$ е изпълнено неравенството

$$\varepsilon_0 := \frac{\|\Pi(0)\|}{1 - l} \leq \varepsilon.$$

Тогава:

1. Свиващият оператор $\Pi$ има единствена неподвижна точка $\xi \in B_\varepsilon$, такава че $\|\xi\| \leq \varepsilon_0$, т.е.,

$$\xi = \Pi(\xi), \ \xi \in B_{\varepsilon_0}.$$

2. Неподвижната точка $\xi$ може да се намери като граница на редицата, получена от

$$x_{k+1} = \Pi(x_k), \ k = 0, 1, \ldots, \tag{6.2}$$

за всяка начална точка $x_0 \in B_{\varepsilon_0}$.

[2] немски математик, 1832–1903.

3. Скоростта на сходимост на итерациите (6.2) към точното решение $\xi$ се определя от

$$\|\xi - x_k\| \le \frac{\theta l^k}{1-l}, \tag{6.3}$$

къдeто

$$\theta := \|x_1 - x_0\| = \|\Pi(x_0) - x_0\|.$$

Ще представим пълно доказателство на твърденията 1–3.

Първо ще покажем, че операторът $\Pi$ изобразява множеството $B_{\varepsilon_0}$ в себе си, от което следва, че редицата $\{x_k\}$ е коректно дефинирана. Действително, за $x \in B_{\varepsilon_0}$ имаме

$$\begin{aligned}\|\Pi(x)\| &= \|\Pi(x) - \Pi(0) + \Pi(0)\| \le \|\Pi(x) - \Pi(0)\| + \|\Pi(0)\| \\ &\le l\|x\| + \|\Pi(0)\| \le l\varepsilon_0 + \|\Pi(0)\| = \varepsilon_0.\end{aligned}$$

Следователно $\Pi(x) \in B_{\varepsilon_0}$ и

$$\Pi(B_{\varepsilon_0}) \subset B_{\varepsilon_0}.$$

От друга страна

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x_k\| &= \|\Pi(x_k) - \Pi(x_{k-1})\| \\ &\le l\|x_k - x_{k-1}\| \le l^2\|x_{k-1} - x_{k-2}\| \\ &\dots \\ &\le l^k\|x_1 - x_0\| = l^k\theta.\end{aligned}$$

Като използваме последното неравенство можем да оценим величината $\|x_{k+m} - x_k\|$ за $m \ge 2$ като прибавяме и вадим някои членове с оглед да получим разлики от вида $x_{i+1} - x_i$, чиито норми вече са оценени от $l^i\theta$. Имаме

$$x_{k+m} - x_k = \sum_{i=k}^{k+m-1} (x_{i+1} - x_i)$$

и

$$\begin{aligned} \|x_{k+m} - x_k\| &= \left\| \sum_{i=k}^{k+m-1} (x_{i+1} - x_i) \right\| \leq \sum_{i=k}^{k+m-1} \|x_{i+1} - x_i\| \\ &\leq \theta \sum_{i=k}^{k+m-1} l^i = \theta l^k \sum_{i=0}^{m-1} l^i < \frac{\theta l^k}{1-l}. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Тъй като $l < 1$, то $\lim_{k\to\infty} l^k = 0$ и

$$\lim_{k\to\infty} \|x_{k+m} - x_k\| = 0.$$

Следователно $\{x_k\}$ е редица на Коши (О. Коши, френски математик, 1789–1857), която е сходяща към някой елемент $\xi \in B_{\varepsilon_0}$, а именно

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \xi.$$

Като вземем границата $k \to \infty$ от двете страни на (6.2) виждаме, че $\xi$ е неподвижна точка на $\Pi$, т.е.,

$$\xi = \Pi(\xi).$$

На свой ред, като вземем $m \to \infty$ в (6.4) получаваме

$$x_{k+m} \to \xi$$

и следователно е в сила оценката (6.3) за скоростта на сходимост.

За да покажем, че решението е $\xi \in B_{\varepsilon_0}$ е единствено в $B_\varepsilon$, нека предположим, че съществува друго решение $\eta \in B_\varepsilon$, различно от $\xi$. Тогава

$$0 < \|\xi - \eta\| = \|\Pi(\xi) - \Pi(\eta)\| \leq l\|\xi - \eta\| < \|\xi - \eta\|.$$

Полученото противоречие показва, че решението е единствено.

**Пример 6.1** Нека е дадено скаларното уравнение

$$f(x) = 0,$$

където функцията $f$ е определена в интервала $[-\varepsilon, \varepsilon]$ и удовлетворява двустранното условие на Липшиц

$$m|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

с

$$0 < m \leq M < \infty.$$

Уравнението може да се запише в еквивалентна операторна форма като

$$x = \Pi(x),$$

където

$$\Pi(x) := x - \frac{2}{M + m} f(x).$$

Операторът $\Pi$ е свиване с константа на Липшиц

$$l := \frac{M - m}{M + m} < 1.$$

Следователно уравнението има единствен корен $\xi \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, такъв че $|\xi| \le \varepsilon_0$, щом само е изпълнено

$$\varepsilon_0 := \frac{|f(0)|}{1-l} = \frac{(M+m)|f(0)|}{2m} \le \varepsilon.$$

**Пример 6.2** Да разгледаме диференциалното уравнение

$$x'(t) = F(t, x(t)), \ t \in T, \tag{6.5}$$

с начално условие

$$x(t_0) = x_0. \tag{6.6}$$

Тук $T$ е интервал, за който $t_0$ е вътрешна точка, $x = (x_1, \dots, x_r)$ и $F : T \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$ е зададена непрекъсната функция, удовлетворяваща допълнително условието

$$\|F(t,\xi) - F(t,\eta)\| \le L\|\xi - \eta\|,$$

където $\|\cdot\|$ е някоя норма в $\mathbb{R}^r$.

Под решение на началната задача (6.5), (6.6) ще разбираме всяка диференцируема функция $x$, определена в някакъв подинтервал $J \subset T$, съдържащ $t_0$, чиято производна $x'(t)$ във вътрешните точки $t$ на $J$ е равна на $F(t, x(t))$, и $x(t_0) = x_0$.

Ще покажем, че при тези условия началната задача има единствено решение в интервала $T$. Нека $C(T, \mathbb{R}^r)$ е пространството на непрекъснатите функции $T \to \mathbb{R}^r$. Всяко решение на началната задача е неподвижна точка на оператора $\Pi$, действащ по формулата

$$\Pi(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, x(s))\mathrm{d}s.$$

Да предположим отначало, че интервалът $T$ е краен и да разгледаме пълното метрично пространство $C := C(T, \mathbb{R}^r)$ с разстояние

$$d(x,y) = \sup\{\|x(t) - y(t)\| \exp(-\lambda L|t - t_0|) : t \in T\},$$

където

$$\lambda > 1.$$

Ясно е, че $\Pi(x) \in C$ при $x \in C$, т.е.,

$$\Pi(C) \subset C.$$

Ще покажем, че операторът $\Pi$ е свиващ в $C$. Нека $x, y \in C$. Да означим $J_t = [t_0, t]$ при $t > t_0$ и $J_t = [t, t_0]$ при $t \leq t_0$. Тогава

$$\Pi(x)(t) - \Pi(y)(t) = \int_{t_0}^{t} (F(s, x(s)) - F(s, y(s)))\mathrm{d}s$$

и

$$\|\Pi(x)(t) - \Pi(y)(t)\| \leq L \int_{J_t} \|x(s) - y(s)\|\mathrm{d}s.$$

От определението за $d$ за всяко $t$ получаваме

$$\|x(t) - y(t)\| \leq d(x,y) \exp(\lambda L|t - t_0|).$$

Оттук

$$\begin{aligned}
\|\Pi(x)(t) - \Pi(y)(t)\| &\leq Ld(x,y) \int_{J_t} \exp(\lambda L|s - t_0|)\mathrm{d}s \\
&< Ld(x,y) \frac{\exp(\lambda L|t - t_0|)}{\lambda L} \\
&= \frac{d(x,y)}{\lambda} \exp(\lambda L|t - t_0|)
\end{aligned}$$

и

$$\|\Pi(x)(t) - \Pi(y)(t)\| \exp(-\lambda L|t - t_0|) < \frac{d(x,y)}{\lambda}.$$

Лявата страна на последното равенство не надвишава величината $d(\Pi(x), \Pi(y))$, т.е.,

$$d(\Pi(x), \Pi(y)) < \frac{1}{\lambda} d(x,y).$$

Тъй като $1/\lambda < 1$, то операторът $\Pi$ е свиващ в $C$.

Нека сега предположим, че интервалът $T$ е безкраен. Да разгледаме една растяща редица от затворени крайни интервали $T_k$, $T_k \subset T_{k+1}$, чието обединение е равно на $T$. Върху всеки от тези интервали съществува единствено решение на началната задача. При това решението върху всеки интервал е продължение на решението от предишния, т.е., началната задача има единствено решение върху целия безкраен интервал $T$.

Аналогично се доказва следният резултат. Нека функцията $(t,x) \mapsto F(t,x)$ е определена и непрекъсната по $t$ в областта

$$G := T \times \overline{B}_\varepsilon(x_0),$$

където

$$T := \{t : |t - t_0| \le \tau\},$$

като удовлетворява там условието на Липшиц по $x$ с константа $L > 0$. Тогава началната задача има единствено решение в интервала

$$T_1 := \{t : |t - t_0| \le \tau_1\},$$

където

$$\tau_1 := \min\left\{\tau, \frac{\varepsilon}{\Phi}\right\}$$

и

$$\Phi := \max\{\|F(t,x)\| : (t,x) \in G\}.$$

Оказва се, че условието на Липшиц може да се отслаби, при което обаче не може да се докаже единственост на решението. Действително, като се приложи принципът на Шаудер (вж. секция 6.4) може да се покаже, че ако функцията $F$ е определена и непрекъсната в областта $G$, то съществува решение на началната задача. В този случай обаче не може да се твърди, че решението е единствено.

## 6.3 Обобщен принцип на Банах

Да разгледаме сега случая, когато пространството $V$ е снабдено с обобщена норма

$$|\cdot| : V \to \mathbb{R}^s_+, \ s > 1.$$

Да предположим, че операторът

$$\Pi : B_\rho \to V$$

удовлетворява *обобщеното условие на Липшиц*

$$|\Pi(x) - \Pi(y)| \preceq L|x-y|, \ x, y \in B_\rho.$$

Тук

$$B_\rho := \{x \in V : |x| \preceq \rho\} \subset V$$

е обобщено кълбо с център в началото и с обобщен радиус $\rho \in \mathbb{R}^s_+$, а $L \in \mathbb{R}^{s\times s}_+$ е *матрицата на Липшиц* на оператора $\Pi$, която в общия случай зависи от $\rho$.

Операторът $\Pi$ се нарича *обобщено свиване* в множеството $B_\rho$, ако матрицата $L$ е *сходяща*, т.е., ако нейният спектрален радиус $\mathrm{rad}(L)$ е по–малък от 1. Ще напомним, че спектралният радиус на една матрица е радиусът на най–малкия централен кръг в $\mathbb{C}$, който съдържа всички собствени стойности на матрицата (с други думи това е най–големият измежду модулите на собствените й стойности).

Според една теорема на Перон[3]–Фробениус[4] спектралният радиус на една неотрицателна матрица е равен на нейната най–голяма неотрицателна собствена стойност. За неотрицателната сходяща матрица $L$ матрицата $I_s - L$ е обратима, като матрицата $(I_s - L)^{-1}$ също е неотрицателна.

**Пример 6.3** Нека

$$\Pi = [\Pi_1, \ldots, \Pi_n]^\top : D \to \mathbb{K}^n,$$

където $D \subset \mathbb{K}^n$. Ако матрицата на Якоби (К. Якоби, немски математик, 1804–1851)

$$\Pi'(x) = [J_{ij}(x)] := \left[\frac{\partial \Pi_i(x)}{\partial x_j}\right] \in \mathbb{K}^{n\times n},\ x = [x_1, \ldots, x_n]^\top,$$

съществува, то матрицата на Липшиц може да се вземе като $L = [l_{ij}]$, където $l_{ij}$ е супремумът на $|J_{ij}(x)|$ по $x$ в областта $D$.

[3] О. Перон, немски математик, 1880–1975.

[4] Ф. Фробениус, немски математик, 1849–1917.

За обобщените свивания е в сила следният резултат за съществуване и единственост на неподвижна точка, известен като *обобщен принцип на Банах.*

Нека е изпълнено неравенството

$$\rho_0 := (I_s - L)^{-1}|\Pi(0)| \preceq \rho.$$

Тогава са в сила следните твърдения.

1. Свиващият оператор $\Pi$ има единствена неподвижна точка $\xi \in B_\rho$, такава че $|\xi| \preceq \rho_0$, т.е.,

$$\xi = \Pi(\xi),\ \xi \in B_{\rho_0}.$$

2. Единственото решение $\xi$ на операторното уравнение (6.1) може да се получи като граница на редицата, определена от

$$x_{k+1} = \Pi(x_k),\ k = 0, 1, \ldots, \tag{6.7}$$

където точката $x_0 \in B_{\rho_0}$ е произволна.

3. Скоростта на сходимост на последователните приближения $x_k$ към точното решение $\xi$ се определя от

$$|\xi - x_k| \preceq L^k (I_s - L)^{-1}\beta, \tag{6.8}$$

където

$$\beta := |x_1 - x_0| = |\Pi(x_0) - x_0| \in \mathbb{R}^s_+.$$

Действително, имаме

$$\begin{aligned}|\Pi(x)| &= |\Pi(x) - \Pi(0) + \Pi(0)| \preceq |\Pi(x) - \Pi(0)| + |\Pi(0)| \\ &\preceq L|x| + |\Pi(0)| \preceq L\rho_0 + |\Pi(0)| = \rho_0\end{aligned}$$

и следователно операторът $\Pi$ изобразява множеството $B_{\rho_0}$ в себе си. Това показва, че редицата $\{x_k\}_0^\infty$ е коректно определена чрез (6.7).

По–нататък получаваме

$$\begin{aligned}|x_{k+1} - x_k| &= |\Pi(x_k) - \Pi(x_{k-1})| \preceq L|x_k - x_{k-1}| \\ &\preceq L^2|x_{k-1} - x_{k-2}| \preceq \cdots \\ &\preceq L^k|x_1 - x_0| := L^k\beta\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}|x_{k+m} - x_k| &= \left|\sum_{i=k}^{k+m-1}(x_{i+1} - x_i)\right| \preceq \sum_{i=k}^{k+m-1}|x_{i+1} - x_i| \qquad (6.9) \\ &\preceq \left(\sum_{i=k}^{k+m-1} L^i\right)\beta = L^k\left(\sum_{i=0}^{m-1} L^i\right)\beta \qquad (6.10) \\ &\preceq L^k(I_s - L)^{-1}\beta.\end{aligned}$$

Тъй като

$$\lim_{k\to\infty} L^k = 0$$

то редицата $\{x_k\}$ е сходяща към някакъв елемент $\xi \in B_{\rho_0}$. Като вземем границата $k \to \infty$ в (6.7) виждаме, че $\xi = \Pi(\xi)$ и следователно $\xi$ е решение на операторното уравнение (6.1).

Като поставим $m \to \infty$ в (6.9) получаваме оценката за сходимост (6.8) за обобщените норми на разликите $\xi - x_k$.

За да покажем, че операторът $\Pi$ няма други неподвижни точки в $B_\rho$ освен $\xi \in B_{\rho_0}$, нека $\eta \in B_\rho$ е което и да е решение на уравнението $x = \Pi(x)$. Тогава

$$|\xi - \eta| = |\Pi(\xi) - \Pi(\eta)| \preceq L|\xi - \eta| \preceq L^2|\xi - \eta| \preceq \cdots$$

и

$$|\xi - \eta| \preceq L^k|\xi - \eta|$$

за всяко $k \in \mathbb{N}$. Като вземем границата $k \to \infty$ с оглед на неравенството $\mathrm{rad}(L) < 1$ получаваме $|\xi - \eta| = 0$, откъдето $\eta = \xi$.

От горните резултати следва и оценка за скоростта на сходимост в обикновена (скаларна) норма. Действително, за всяко положително $\varepsilon < 1 - \mathrm{rad}(L)$ съществува норма

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}_+,$$

такава че е изпълнено неравенството

$$\|L\| = \mathrm{rad}(L) + \varepsilon < 1$$

за съответната операторна норма $\|L\|$ на матрицата $L \in \mathbb{R}^{s\times s}$. Следователно, ако $\|x\| \leq \|\,|x|\,\|$, за нормите $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_+$ и $|\cdot| : V \to \mathbb{R}^s_+$, е в сила оценката

$$\|\xi - x_k\| \leq \|L^k(I_s - L)^{-1}\beta\| \leq \|L\|^k\|(I_s - L)^{-1}\beta\|.$$

**Пример 6.4** Да разгледаме векторното уравнение

$$f(x) = 0,$$

където $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, където $\mathbb{K}$ е $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Да предположим, че $f$ удовлетворява обобщеното условие на Липшиц

$$|f(x) - f(y)| \preceq M|x - y|,\ M = [M_{ij}] \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$$

както и условията

$$m_i|h| \preceq |f_i(x + he_i) - f_i(x)|,\ m_i > 0,\ i = 1, \ldots, n,$$

където $e_i$ е $i$–тият стълб на единичната матрица $I_n$. Уравнението може да се запише в еквивалентната операторна форма

$$x = \Pi(x) := x - Kf(x),$$

където

$$K := \mathrm{diag}\left(\frac{2}{M_{11} + m_1}, \ldots, \frac{2}{M_{nn} + m_n}\right).$$

Операторът $\Pi$ удовлетворява обобщеното условие на Липшиц

$$|\Pi(x) - \Pi(y)| \preceq L|x - y|,$$

където елементите $l_{ij}$ на матрицата $L$ са определени от

$$l_{ij} := \begin{cases} (M_{ii} - m_i)/(M_{ii} + m_i), & \text{ако} \quad i = j \\ 2M_{ij}/(M_{ii} + m_i), & \text{ако} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Следователно уравнението има единствено решение когато $\mathrm{rad}(L) < 1$. Ако положим

$$\alpha := \min\{m_i\},\ \mu := \max\{M_{ij} : i \neq j\},$$

то неравенството $\mathrm{rad}(L) < 1$ ще бъде изпълнено когато

$$\mu < (n - 1)\alpha.$$

Използването на обобщени свивания е много полезно в редица приложения. Даже има задачи, в които е по–лесно да се покаже, че съответният е оператор е обобщено, отколкото обикновено свиване. Такъв е случаят когато операторът явно е обобщено свиване с матрица на Липшиц $L$, такава че $\|L\| \geq 1$ за стандартните матрични норми.

**Пример 6.5** Нека

$$L = \begin{bmatrix} \lambda_1 & l \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

където $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1)$ и $l > 0$. Всяка хьолдерова $p$–норма[5] на матрицата $L$ удовлетворява $\|L\|_p \geq l$ и може да е произволно голяма за голямо $l$. В същото време спектралният радиус

$$\mathrm{rad}(L) = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$$

е по–малък от 1 и не зависи от $l$.

## 6.4 Принцип на Шаудер

Да разгледаме сега един друг мощен топологичен принцип за неподвижната точка, т.нар. *принцип на Шаудер* (или на Брауер в крайномерния случай). Той дава достатъчни условия за съществуване на решение на операторното уравнение

$$x = \Pi(x)$$

[5]О. Хьолдер, немски математик, 1859–1937.

в банаховото пространство $V$. При формулировката на принципа се използват понятията за изпъкналост и компактност. За простота читателят може да си мисли, че $V$ е крайномерно пространство над полето $\mathbb{K}$ с норма $\|\cdot\|$ (типични примери тук са $V = \mathbb{K}^n$ и $V = \mathbb{K}^{m\times n}$). Резултатите, обаче, са в сила и за безкрайномерни пространства.

Ще припомним някои понятия, въведени в предишната глава, в контекста на нормираните пространства.

Нормата $\|\cdot\|$ индуцира разстояние в пространството $V$ по формулата

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Разстоянието между точката $x \in V$ и множеството $S \subset V$ се определя от

$$\inf\{\|x - y\| : y \in S\}.$$

Диаметър на множеството $S \subset \mathcal{X}$ е величината

$$\operatorname{diam}(S) = \sup\{\|x - y\| : x, y \in S\}.$$

В случая на евклидова[6] норма $\|\cdot\|_2$ горните понятия се съгласуват с нашата геометрична интуиция за фигурите в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$.

Ще напомним, че за $\varepsilon > 0$ и $a \in V$ множествата

$$\begin{aligned} B_\varepsilon(a) &:= \{x \in V : \|x - a\| < \varepsilon\}, \\ S_\varepsilon(a) &:= \{x \in V : \|x - a\| = \varepsilon\}, \\ \overline{B}_\varepsilon(a) &:= \{x \in V : \|x - a\| \le \varepsilon\} \end{aligned}$$

[6] Евклид, древногръцки математик, 4 в. преди н.е.

се наричат *отворено кълбо*, *сфера* и *затворено кълбо* с център $a$ и радиус $\varepsilon$, съответно.

Вижда се, че

$$\overline{B}_\varepsilon(a) = B_\varepsilon(a) \cup S_\varepsilon(a).$$

Горните три множества имат следната интерпретация за малки размерности.

**Пример 6.6** В $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ имаме

$$B_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon),\ S_\varepsilon(a) = \{a-\varepsilon, a+\varepsilon\},\ \overline{B}_\varepsilon(a) = [a-\varepsilon, a+\varepsilon].$$

В $\mathbb{R}^2$ множеството $B_1(0)$ е вътрешността на кръга $\overline{B}_1(0)$ с единичен радиус и център в началото, докато $S_1(0)$ е ограничаващата го окръжност. Обаче $S_1(0)$ е геометрически кръг само в нормата $\|\cdot\|_2$. За нормата

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$$

множеството $S_1(0)$ е квадрат с върхове

$$(1,0),\ (0,1),\ (-1,0),\ (0,-1),$$

а за нормата

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$$

то е квадрат с върхове

$$(1,1),\ (-1,1),\ (-1,-1),\ (1,-1).$$

Интуитивно бихме казали, че множеството $B_\varepsilon(a)$ съдържа само вътрешни точки, или че е отворено в смисъл, че за всяко

$x \in B_\varepsilon(a)$ съществува по–малко отворено кълбо $B_\delta(x) \subset B_\varepsilon(a)$. Нито $S_\varepsilon(a)$ нито $\overline{B}_\varepsilon(a)$ притежават това свойство.

По–нататък, множеството $S_\varepsilon(s)$ е интуитивно граница на $B_\varepsilon(a)$ (а също и на $\overline{B}_\varepsilon(a)$) в смисъл, че за всяко $x \in S_\varepsilon(a)$ всяко кълбо $B_\delta(x)$ съдържа както точки от $B_\varepsilon(a)$, така и от неговото допълнение $V \backslash B_\varepsilon(a)$. И накрая, множеството $\overline{B}_\varepsilon(a)$ може да се разглежда като затворено в смисъл, че то съдържа своята граница $S_\varepsilon(a)$. Всички тези интуитивни понятия се формализират както следва.

Нека $A \subset V$. Множеството $A$ е *отворено*, ако за всяко $x \in A$ съществува число $\varepsilon > 0$, такова че $B_\varepsilon(x) \subset A$. Множеството $A$ е *затворено*, ако неговото допълнение $V \backslash A$ е отворено.

Дадено множество може да е нито отворено, нито затворено, например интервалът $A = [0, 1)$ в $\mathbb{R}$. Цялото пространство $\mathbb{K}^q$ и празното множество $\emptyset \subset \mathbb{K}^q$ са примери на множества, които са едновременно отворени и затворени.

Множеството $\partial A \subset V$ се нарича *граница* на $A$, ако за всяко $x \in \partial A$ кълбото $B_\varepsilon(x)$ съдържа точки както от $A$, така и от неговото допълнение $V \backslash A$. Обединението $A \cup \partial A$ на множеството $A$ и на неговата граница $\partial A$ се нарича *затворена обвивка* на $A$ и се означава с $\overline{A}$. Множеството $A$ е *ограничено*, ако то се съдържа в кълбо с краен радиус.

За $x, y \in V$ множеството

$$[x, y] := \{(1 - t)x + ty : t \in [0, 1]\} \subset V$$

се нарича *сегмент*, свързващ точките $x$ и $y$. Множеството $A$ се нарича *изпъкнало*, ако за всички $x, y \in A$ то съдържа и сегмента $[x, y]$.

Множеството $A \subset V$ е *компактно*, ако всяко негово отворено покритие съдържа крайно подпокритие.

Ако пространството $V$ е крайномерно, множеството $A$ е компактно точно когато то е ограничено и затворено. В този случай в частност затвореното кълбо $\overline{B}_\varepsilon(x)$, сферата $S_\varepsilon(x)$ и сегментът $[x, y]$ са компактни множества.

Нека $\Pi : A \to V$ е функция. За $B \subset A$ ще означаваме с $\Pi(B)$ множеството на всички $\Pi(x)$ когато $x$ пробягва $B$.

Сега вече сме в състояние да формулираме принципа на Шаудер за неподвижната точка.

- Нека операторът $\Pi : B \to V$ е непрекъснат и $\Pi(B) \subset B$, където множеството $B \subset V$ е изпъкнало и компактно. Тогава операторното уравнение

$$x = \Pi(x)$$

  има поне едно решение $\xi \in B$.

Доказателството в общия случай е достатъчно сложно. Все пак е полезно да видим какво става в скаларния случай $V = \mathbb{R}$. Тук нетривиалните изпъкнали компактни множества са затворените интервали с различни крайни точки, например $B = [0, 1]$. Нека $\Pi : B \to B$ е непрекъсната функция Ако $\Pi(0) = 0$ или $\Pi(1) = 1$, то $\Pi$ има неподвижна точка $\xi = 0$ или $\xi = 1$ и няма какво да се доказва. Да предположим тогава, че $\Pi(0) > 0$ и $\Pi(1) < 1$, и да разгледаме функцията $\psi : B \to B$, определена от

$$\psi(x) = x - \Pi(x).$$

Според последните две неравенства имаме

$$\psi(0) = -\Pi(0) < 0$$

и

$$\psi(1) = 1 - \Pi(1) > 0.$$

Тогава от съображения за непрекъснатост (всъщност от една теорема на Коши) съществува точка $\xi \in (0,1)$, такава че $\psi(\xi) = 0$, което е еквивалентно на $\xi = \Pi(\xi)$.

Тъй като в повечето приложения операторът $\Pi : V \to V$ е поначало непрекъснат, за да приложим принципа на Шаудер трябва да конструираме подходящо изпъкнало компактно множество $B \subset V$ и да покажем, че $\Pi(B) \subset B$.

Ще напомним, че множествата $\overline{B}_\varepsilon$ и $\overline{B}_\rho$, разгледани по–горе, са изпъкнали и компактни.

В резюме ще отбележим, че цената на значителното отслабване на изискванията, наложени на оператора $\Pi$ в принципа на Шаудер в сравнение с принципа на Банах (няма условие на Липшиц, а само непрекъснатост), е, че тук можем да докажем само съществуване, но не непременно единственост на решението. Поради това и принципът на Шаудер следва да се използва в задачи, за които се знае, че допускат нееединствено решение.

## 6.5 Упражнения

**Упражнение 6.1** Докажете твърденията, формулирани в примери 6.1 и 6.4.

**Упражнение 6.2** Разгледайте скаларното уравнение

$$x = \cos x.$$

Тъй като $0 < \cos 0 = 1$ и $1 > \cos 1$, то уравнението има корен в интервала $\xi \in (0, 1)$. Анализирайте итерационната схема $x_{k+1} = \cos x_k$ с начална точка $x_0 = 0.5$. Направете числен експеримент.

**Упражнение 6.3** Разгледайте скаларната итерационна процедура

$$x_{k+1} = x_k(2 - ax_k),$$

където $a \neq 0$ е константа. Анализирайте сходимостта в зависимост от началното приближение $x_0$. Опишете възможните граници на редицата $\{x_k\}$ в зависимост от $a$ и $x_0$. Обобщете резултатите за матричната итерация

$$X_{k+1} = X_k(2I - AX_k),$$

където $A$ е неособена матрица.

**Упражнение 6.4** Конструирайте и анализирайте итерационна процедура за пресмятане на положителния квадратен корен $\sqrt{a}$ на числото $a > 0$. Опитайте същото за положително определения квадратен корен $A^{1/2}$ на положително определената матрица $A$.

**Упражнение 6.5** Да разгледаме диференциалното уравнение

$$x'(t) = 1.5(x(t))^{1/3},\ t > 0$$

с начално условие

$$x(0) = 0.$$

Като използвате принципа на Шаудер покажете, че началната задача има решение. Това решение обаче не е единствено. Първо, имаме тривиалното решение $x = 0$. Второ, имаме еднопараметричното семейство $x_a$, $a \geq 0$, от решения

$$x_a(t) := \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq a, \\ (x-a)^{3/2}, & t > a. \end{cases}$$

Защо началната задача има нееединствено решение?

# Библиография


[1] А. Антоневич, П. Князев, Я. Радыно. Задачи и упражнения по функциональному анализу. „Вышейшая школа", Минск, 1978.

[2] Е. Божоров. *Множества и някои техни приложения.* „Народна просвета", София, 1973.

[3] Я. Бугров, С. Никольский. *Дифференциальное и интегральное исчисление.* „Наука", Москва, 1988.

[4] Н. Бурбаки. *Теория множеств.* „Мир", Москва, 1965.

[5] А. Карташев, Б. Рождественский. *Математический анализ.* „Наука", Москва, 1984.

[6] В. Ильин, Э. Позняк: *Основы математического анализа. Часть 1.* „Наука", Москва, 1982.

[7] Е. Келеведжиев: Запознаване с Mathematica. *Докл. на 23-та Прол. конф. на СБМ*, Април 1994, стр. 483-492.

[8] М. Константинов: Пертурбационен и числен анализ на инженерни изчислителни задачи. *Строителство*, кн. 6, 1992, стр. 32-39.

[9] Ч. Косневски. *Начальный курс алгебраической топологии.* „Мир”, Москва, 1983.

[10] Н. Обрешков. *Висша алгебра.* „Наука и изкуство”, София, 1966.

[11] М. Константинов, П. Петков, Н. Христов: *Матрични пресмятания с диалоговата система* SYSLAB. Изд. на ВИАС, София, 1992.

[12] К. Куратовский, А. Мостовский. *Теория множеств.* „Мир”, Москва, 1970.

[13] И. Ляшко, А. Боярчук, Я. Гай, А. Калайда: *Математический анализ.* Часть 1. „Вища школа”, Киев, 1983; Част 2. Пак там, 1985; Част 3. Пак там, 1987.

[14] Дж. Форсайт, М. Малкълм. К. Молър: *Компютърни методи за математически пресмятания.* „Наука и изкуство”, София, 1986.

[15] А. Мышкис: *Лекции по высшей математике.* „Наука”, Москва, 1969.

[16] П. Петков, Н. Христов: *Анализ и синтез на линейни системи за управление със* SYSLAB. „Наука”, София, 1993.

[17] Н. Обрешков. *Висша алгебра.* „Наука и изкуство", София, 1958.

[18] У. Рудин. *Основи на математическия анализ.* „Наука и изкуство", София, 1973.

[19] М. Спиридонова: Система за компютърна алгебра Maple. *Докл. на 23-та Прол. конф. на СМБ*, април 1994, стр. 493-500.

[20] Р. Столл. Множества. Логика. Аксиоматические теории. „Просвещение", Москва, 1968.

[21] А. Тер-Крикоров, М. Шабунин: *Курс математического анализа.* „Наука", Мослва, 1988.

[22] В. Шипачев: *Основы высшей математики.* „Высшая школа", Москва, 1989.

[23] B. Char, K. Geddes, G. Gonnet, B. Leong, M. Monagan, S. Watt: *First Leaves: A Tutorial Introduction to MAPLE V.* Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[24] P. Petkov, N. Christov, M. Konstantinov: *Computational methods for Linear Control Systems.* Prentice Hall, Hemmel Hempstead, 1991.

[25] S. Wolfram: *Mathematica. A system for Doing Mathematics by Computer* (2-nd ed.). Addison-Wesley, Redwood City, 1991.

Представената по-горе литература може да се характризира накратко както следва:

- Учебници по математически анализ [3, 5, 6, 13, 15, 21, 22], топология [9] и алгебра [10]. От тях книгата [15] е с практическа насоченост. Почти всички учебници от тази група са трудно достъпни у нас. Съществуват и десетина учебника по математически анализ на български. Те обаче или са трудно намираеми, или пък качеството им не винаги отговаря на съвременните стандарти за преподаване на математика в университетите.

- Литература по числени методи на математическия анализ [14, 24, 8]. Книгата [14] е претърпяла две издания у нас.

- Литература по компютърни системи за символни и числени пресмятания в математическия анализ и линейната алгебра [23, 25, 7, 19, 11, 16]. Тук работи [25, 7] са посветени на диалоговата система за символни и числени пресмятания MATHEMATICA, а работи [23, 19] – на аналогичната по възможности система Maple. В книгите [11, 16] е разгледана диалоговата система за матрични пресмятания SYSLAB, която е основана (и в известен смисъл е разширение) на матричната част на диалоговата система MATLAB.